

Introdução ao Cálculo
com Geometria Analítica
e programas em Python

1

Praciano-Pereira, T

12 de março de 2025

Monografia da Sobral Matemática
no. 2025.02

Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

¹tarcisio@sobralmatematica.org

O plano do trabalho.

Este é mais um livro que se dedica a uma introdução ao Cálculo e a razão existe para oferecer ao estudantes um *Pré Cálculo* considerando que os estudantes chegam à Universidade com conhecimentos muito reduzidos de Matemática para enfrentar *derivada, limite e integral*. Eu já escrevi vários livros de Cálculo tentando suprir as deficiências dentro da própria disciplina e escrevo agora outro usando as experiências anteriores mas com outra motivação; trabalhar com as funções polinomiais antes porque tanto a derivada quanto a integral de funções polinomiais é relativamente fácil e permitem que eu introduza o conceito de limite de uma forma mais direta na construção das dízimas não periódicas.

O livro está dividido em três partes:

1. A primeira parte denominada *Os números e o espaço*. Os números são a forma de transformar a *realidade* em algo que se possa *medir* então vou começar por descrever os números. Então começo com os números na primeira parte do livro.
 - (a) Um número real é um limite, então ao construir os números reais eu introduzo a noção de limite como parte da construção dos números reais.
 - (b) Eu chego aos números reais depois da construção dos números racionais depois de falar das dízimas periódicas, que são os racionais passando às dízimas não periódicas que são um limite, os reais.
 - (c) As dízimas periódicas tem geratrizes que são os números da forma $\frac{p}{q}$ em que $q \neq 0$ e assim chegou aos números racionais.
 - (d) Antes dos racionais vêm os inteiros como uma simples complementação dos números naturais.
 - (e) Começo com os números naturais seguindo o conselho de *Leopold Kronecker*, uma frase que lhe é atribuída “*deus nos deu os números naturais e o resto nós construímos*”, porque a construção dos *números naturais* é uma tarefa dantesca, e todos os autores que começam por esta construção produzem uma lógica indecifrável e é mais fácil recorrer às lendas dos pastores para contar as ovelhas no fim do dia e assim colocar a sequência

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \quad (1)$$

como um fenômeno natural e juntar os axiomas de *Peano-Dedekind* que na verdade não definem os *números naturais* e sim o *método da indução finita*

2. Depois dos números vem o espaço, e fico no espaço bidimensional neste livro. Aqui entram os números complexos como um complemento do espaço bidimensional.
3. Na segunda parte eu trato das funções polinomiais e a Geometria Analítica que trata de curvas, *retas, círculos, elipses, parábolas e hipérbolas*. As curvas ficam numa região que é o espaço então me dedico a descrever esta região, seus elementos e suas propriedades.
4. A terceira parte veio apenas para destacar a última lista de exercícios.

Parte I

Os números e o espaço

Capítulo 1

Os números

1.1 Dos naturais aos complexos

Os números são os objetos básicos da Matemática que popularmente é chamada de “*ciências dos números*” embora hoje ela seja muito mais do que isto, confira *álgebra, análise, geometria, estatística e lógica* que são as divisões clássicas da Matemática embora seja difícil registrar todos os tópicos da Matemática apenas entre estas divisões.

Os números, se classificam dentro dos seguintes conjuntos:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \quad (1.1)$$

chamados, respectivamente,

1. *naturais* $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$,
2. *inteiros* $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
3. *rationais* $\mathbf{Q} = \{x; x = \frac{p}{q}; q \neq 0\}$,
4. *reais* $\mathbf{R} = \{x; x = p + 0.abc\dots; p \in \mathbf{Z}; a, b, c, \dots \in \{0, \dots, 9\} \text{ é o conjunto das dízimas. } ,$
5. *complexos* $\mathbf{C} = a + bi; a, b \in \mathbf{R}$.

1.1.1 Os números naturais

Os números, em particular os *números naturais* cujo conjunto é designado pelo símbolo $\mathbf{N}$,

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (1.2)$$

são a base de tudo em Matemática e em computação. Uma imagem, uma fotografia digital, é feita duma codificação construída com *dígitos*.

Na figura (fig. 1.1), página 6, você pode ver o *código fonte* duma imagem em que aparecem *dígitos* na *base hexadecimal* que é a codificação numérica usada hoje nos computadores em lugar da antiga *codificação binária*.

Mas os *números naturais* apareceram e para contar e a história de como eles apareceram não somente é intrigante como é muito difícil inseri-los na teoria da Matemática. Uma frase atribuída a *Leopold Kronecker*: “*deus nos deu os números naturais, e o resto nós construímos*” diz tudo a respeito dos números

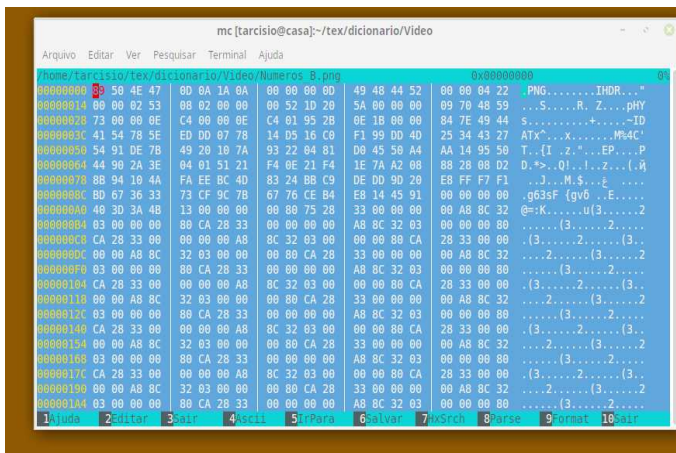


Figura 1.1: Código fonte duma imagem

naturais e até mesmo da dificuldade de fazer para eles uma construção lógica. Como disse Kronecker, é mais fácil assumir que sabemos tudo sobre $\mathbb{N}$ e daí partir para construir o resto.

Os livros didáticos estão cheios de anedotas explicando como apareceram os números.

- Os pastores tinham um monte de pedrinhas ao lado do portão do cercado onde as ovelhas passavam a noite e iam separando pedrinhas à medida que cada ovelha entrava no cercado. Se sobrasse uma pedra lá iam eles em busca da ovelha que estivesse faltando, ou quando nascia um novo animal, nova pedra era colocada no monte. Este é um exemplo simples de *abstração* em que substituímos um conjunto por outro estabelecendo uma função bijetiva entre eles para que o conjunto mais simples ou mais fácil de ser manipulado *represente* o outro.
- Com o passar do tempo surgiram *nomes*, *um*, *dois*, *três*, *quatro*, *cinco*, *seis*, ... para substituir as pedras e então bastaria escrever na areia o último nome para saber se todas as ovelhas tinham sido conduzidas para o cercado. Mas, observe, estes nomes são arbitrários. Porque *três* é o sucessor de *dois*? Porque não nos sentamos em *mesas* para comer com o prato numa *cadeira*?

Posso deixar para os historiadores, e talvez o que vou dizer já seja bem conhecido e discutido, o formato dos vinte primeiros números sugere que durante muito tempo, a Humanidade não precisou de contar além de 20, ou ainda que *20 deve ter sido durante muito tempo um número muito grande para as necessidades da Humanidade*. E somente quando esta necessidade se tornou significativa para ir além de 20 é que as distintas culturas da Humanidade corrigiram a lógica usada para os números 1, 2, ..., 19 para adotar uma lógica regular para os números que vão de 20 em diante, que é o que posso ver nas seis línguas que usei para comparar: espanhol, francês, inglês, português, russo e sueco.

A partir de 21, se segue em *todas as línguas acima* uma regra lógica bem estruturada. Se você aprender a contar até 20 em qualquer uma destas línguas, a continuação a partir de 21 é um processo lógico que é fácil de dominar. Uma pequena exceção é o francês

- que chama 70 de *soixante dix* que significa *sessenta dez*,
- depois chama 80 de *quatre vingt* que significa *quatro vinte*
- e finalmente chama 90 de *quatre vingt dix* que significa *quatro vinte dez*.

Quando eu estava finalizando este livro, tomei conhecimento de que há uma *nação indígena na Amazônia*, os pirahãs, cuja língua não tem o conceito de número, eles têm apenas um conceito rudimentar de quantidade que seria expresso com *pouco*, *muito*, e parece que eles vivem com grande felicidade!

Mas insistindo, e acompanhando Kronecker, se aprendermos, ou aceitarmos os números naturais, o resto a gente constrói “*facilmente*”, e dou razão a Kronecker e para mim o ponto de partida, sem discussão é $\mathbb{N}$ apenas descrevendo, listando os seus elementos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.3)$$

Vou incluir em $\mathbb{N}$ também o zero. Aqui há uma divergência entre os matemáticos, uns dizem que $0 \notin \mathbb{N}$, e com certa razão, na ausência cabritos os pastores não devem ter se preocupado em fazer qualquer registro, portanto o zero não seria “*natural*”. Para mim o zero é um *número natural* e portanto eu digo que $0 \in \mathbb{N}$, e tenho uma forte razão, sem o zero o conjunto $\mathbb{N}$ ficaria mais deficiente do que já é, com o zero, melhora um pouco. E depois, quem definiu $\mathbb{N}$ com maior exatidão foi o matemático italiano, *Peano* que estabeleceu uma lista de 9 axiomas para estabelecer quais eram as regras do comportamento dos números naturais, e um dos *axiomas* estabelece que “ $\mathbb{N}$ tem um primeiro elemento”. Interessante, os *axiomas de Peano* valem para qualquer número tomado como primeiro número, experimente, comece com 3 e os *axiomas de Peano* valem *sem retoques* para

$$\mathbb{N} = \{3, 4, 5, 6, \dots\} \quad (1.4)$$

Eu prefiro começar do zero. ... e tenho uma razão muito forte para isto, a Análise Combinatória expressa, entre outras coisa a quantidade de elementos dum conjunto e para isto precisa do *fatorial* de zero que é 1. Sem o fatorial de zero as fórmulas da Análise Combinatória colapsam. E sem o fatorial de zero os banqueiros vão deixar de financiar a Matemática porque precisam do fatorial de zero para calcular juros. A mim não me interessam os banqueiros, são inúteis e perigosos, mas o *triângulo de Pascal* perderia toda a sua beleza, e isto me interessa. Preciso do zero no conjunto $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \quad (1.5)$$

O zero é uma forte abstração, da mesma forma como o conjunto vazio. São dois conceitos matemáticos que é difícil de se produzirem com objetos da *Natureza*, mas a Matemática não pode viver sem eles, e nem a *Natureza*! São abstrações importantes.

Talvez seja a razão porque os matemáticos se dividem quando se discute se o *zero* é um número natural. Alguns preferem dizer que não. De fato o zero é uma *abstração*. Quem nada tivesse nada teria para contabilizar e portanto o *zero* é pouco natural. Eu prefiro incluir o zero como *número natural* e tenho as justificativas:

1. sem o zero falham as fórmulas da Análise Combinatória, não posso calcular *arranjos*, *combinações* e nem mesmo o *fatorial*,
2. e a lei do cancelamento

$$a + b = c + b \Rightarrow b = c - a + b \Rightarrow c - a = 0; \quad (1.6)$$

que precisa do zero para funcionar!

3. A aritmética se aplica aos números naturais e na divisão o resto é um item muito importante, confira o *algoritmo da divisão euclidiana*, e para definir itens como *múltiplo*, *número primo* eu preciso do zero no conjunto $\mathbb{N}$.
4. E eu não conheço nenhum argumento significativo para eliminar o zero do conjunto dos números naturais.

1.1.2 O princípio da indução finita

A indução finita

A indução finita é um *método de demonstração* muito usado, praticamente, ele é uma cópia resumida dos *axiomas de Peano*. Vou começar com um exemplo para tornar mais compreensível estrutura lógica deste método, o caso da soma dos termos numa *progressão aritmética* e vou pegar um caso bem particular, a soma dos primeiros n números naturais. A fórmula é

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}; \quad (1.7)$$

Observe que usei uma expressão para identificar a fórmula, preciso dela para redigir a demonstração:

1. $S(0)$ é verdadeira, a soma apenas do zero é zero e tenho

$$S(0) = \frac{0(0+1)}{2} = 0; \quad (1.8)$$

que é a soma apenas do zero, e vale a equação (eq.7) para zero.

2. Suponha que a (eq.7) seja verdadeira para um número arbitrário k , $S(k)$ seja verdadeira.
3. Vou verificar se $S(k) \Rightarrow S(k+1)$. Então estou supondo que seja verdadeiro

$$0 + 1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}; \text{ hipótese de indução}; \quad (1.9)$$

e vou agora verificar se esta afirmação *implica* que $S(k+1)$ é verdadeira. Então vou fazer as contas

$$0 + 1 + \cdots + k + k + 1 = (0 + 1 + \cdots + k) + k + 1; \quad (1.10)$$

$$S(k) = (0 + 1 + \cdots + k) = \frac{k(k+1)}{2} \text{ hipótese de indução}; \quad (1.11)$$

$$S(k+1) = 0 + 1 + \cdots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1; \quad (1.12)$$

$$S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}; \quad (1.13)$$

$$S(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}; \quad (1.14)$$

explicando as contas,

- (a) Na equação (eq.10) eu usei a *propriedade associativa* para separar $0 + 1 + \cdots + k$ de $k + 1$,
- (b) na equação (eq.11) eu usei a *hipótese de indução* para expressar a primeira soma,
- (c) na equação (eq.12) eu usei a *hipótese de indução* para somar o termo $k + 1$ à expressão de $S(k)$ e na equação (eq.13) eu verifiquei que a regra seguia valendo para $k + 1$, $S(k + 1)$ é verdadeira!

Tente, como exercício, mostrar que a soma dos termos dum p.a. é a soma do primeiro e do último, dividida por 2 e isto tudo multiplicado pelo número de termos:

$$S(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n; a_{k+1} = a_k; \quad (1.15)$$

$$S(n) = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(a_1+a_n)n}{2}; \quad (1.16)$$

e depois calcule algumas somas de p.a. e você terá acabado por dominar o *princípio da indução finita*, mas não fique desmoralizado se *encontrar alguns casos complicados* ... No final do capítulo eu coloquei alguns exercícios, como são de múltipla escolha, você tem apenas que verificar onde o método está aplicado corretamente, mas é mais instrutivo se você primeiro fizer as contas.

1.1.3 Os inteiros

Os **números inteiros** formam um conjunto que tem como símbolo $\mathbf{Z}$ e é formado por todos os números naturais mais os inversos aditivos dos números naturais, $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}; \quad (1.17)$$

$$-\mathbf{N} = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}; \quad (1.18)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup -\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \cup \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}; \quad (1.19)$$

$$\mathbf{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}; \quad (1.20)$$

Este conjunto provavelmente foi inventado para completar o conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais de tal modo que se pudesse fazer a *contabilidade* incluindo as *dívidas*. Durante muito tempo estes novos elementos, os negativos, foram considerados como números espúrios como aconteceu com as demais ampliações dos conjuntos numéricos para se obtivessem os números fracionários, os reais e os complexos.

Hoje se vê o conjunto $\mathbf{Z}$ junto com a operação de adição como uma estrutura algébrica em que qualquer equação, *envolvendo apenas a adição*, pode ser resolvida. Algumas vezes esta estrutura é indicada com o símbolo $(\mathbf{Z}, +)$ e suas propriedades são

Definição 1 (propriedades dos) inteiros com a adição

1. elemento neutro a adição tem um elemento neutro, o zero, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbf{Z}$.
2. inverso aditivo todo número inteiro a tem um inverso aditivo indicado com o símbolo $-a$ tal que $a + -a = 0$.
3. associatividade da adição a adição é associativa, $a + (b + c) = (a + b) + c$.
4. comutatividade da adição $a + b = b + a$.

Observe que eu escrevi $a + -a = 0$, propositalmente, para me permitir este comentário. O símbolo $-a$ é um *único símbolo* representando o inverso aditivo do número a . Mas, como acontece em Matemática com frequência, os símbolos adquirem vida própria e a gíria matemática admitiu que $a + -a = a - a$ e que $-(-a) = a$ completando as regras da álgebra de $(\mathbf{Z}, +)$.

Algumas pessoas se chocam ao passar pela primeira vez por esta definição porque, por um lado, parecem fatos tão evidentes que não precisavam ser destacados. A associatividade parece desnecessária, também. Eu vou dar um exemplo resolvendo uma equação para mostrar o uso destas propriedades.

Exemplo 1 (resolvendo) uma equação

Vou resolver aquela equação que era impossível de ser resolvida no conjunto dos números naturais. Agora ela pode ser resolvida legalmente.

$$x + 3 = 7; \quad (1.21)$$

$$-3 + (x + 3) = 7 - 3; \quad (1.22)$$

$$(x + 3) - 3 = 7 - 3; \quad (1.23)$$

$$x + (3 - 3) = 7 - 3 = 4; \quad (1.24)$$

$$x + 0 = x = 7 - 3 = 4; \quad (1.25)$$

$$x = 4; \quad (1.26)$$

1. Na equação (eq.22) eu somei aos dois membros da equação o número -3 porque ele é o inverso aditivo de 3 e assim eu vou eliminar o 3 do primeiro membro. Observe que não passei nada dum membro para o outro, esta operação não existe na lógica matemática, embora na prática seja usada. Esta prática conduz a erros que vou ilustrar mais adiante.
2. Na equação (eq.23) usei a propriedade comutativa para colocar -3 do mesmo lado que se encontra 3 dentro do parêntesis.
3. Na equação (eq.24) eu usei a propriedade associativa para fazer com que -3 operasse diretamente com 3 .
4. Na equação (eq.25) apliquei a propriedade da existência do inverso aditivo para escrever $3-3 = 0$.
5. Na equação (eq.26) eu simplifiquei $x + 0 = x = 7 - 3 = 4$ para, na equação addtounterequa-caoUm1 (eq.26) escrever o valor final de x .

Ninguém resolve esta equação usando esta sequência de passos porque alguns atalhos foram incluídos na álgebra aparecendo algumas expressões, por um lado interessantes porque trazem mais agilidade, mas por outro perigosas porque podem conduzir a erros como “quando o número passa para o outro lado troca o sinal” fazendo com que simplifiquemos a solução da equação resumindo-a sequência incompleta:

$$x + 3 = 7; \quad (1.27)$$

$$x = -3 + 7 = 4 \text{ o três foi “passado” para o outro lado ;} \quad (1.28)$$

Quando se trabalha com duas operações, adição e multiplicação, aparece um erro comum de *troca sinal* onde esta troca é ilegal. Então você pode usar os atalhos, e resolver a equação do exemplo pela forma resumida que aparece acima, mas é preciso ter clareza do que estiver fazendo.

As professoras tem grande dificuldade em convencer a sua audiência de que a forma correta de resolver uma equação é aquela em que todas as propriedades são usadas.

Uma forma de contornar o problema talvez seja incluindo observações que substituam as passagens que ficaram faltando.

$$x + 3 = 7; \quad (1.29)$$

$$x = -3 + 7 = 4; \text{ porque } -3 \text{ é inverso aditivo de } 3; \quad (1.30)$$

$$x = 4; \text{ porque } -3 + 3 = 0 \text{ e } 0 + x = x; \quad (1.31)$$

Este cuidado pode prevenir o erro que mencionei acima de inversão de sinal, na multiplicação, quando da *passagem para o outro lado*.

Compare a equação (eq.29), resolvida em $\mathbf{Z}$, com a mesma equação agora resolvida em $\mathbf{N}$, no conjunto dos números naturais.

$$x + 3 = 7; \quad (1.32)$$

$$x = -3 + 7 = 4; \text{ ilegal, porque } -3 \notin \mathbf{N}; \quad (1.33)$$

$$x = 4; \text{ resultado possível } \dots; \quad (1.34)$$

Em $\mathbf{N}$ esta equação é impossível e foi esta a razão pela qual a Humanidade inventou $\mathbf{Z}$. O conjunto dos inteiros, com adição tem uma estrutura algébrica completa que recebe o nome de *grupo aditivo dos inteiros*.

Obviamente que os *números negativos*, $-\mathbf{N}$, não foram inventados para resolver equações, muito provavelmente eles foram inventados pelos contadores para resolver questões de *caixa: deve e haver*. Eles precisavam de expandir os números, inventar os números negativos, para que pudessem *expressar as dívidas*.

Um pouco acima eu falei em trabalhar com duas operações em $\mathbf{Z}$, porque também existe uma outra operação, *a multiplicação*. E tem mais outras, *a divisão e a subtração*. No conjunto $\mathbf{Z}$ se pode definir a multiplicação mas ela vai ficar tão deficiente quanto ela é no conjunto dos números naturais, $\mathbf{N}$.

Definição 2 (propriedades da) multiplicação em $\mathbf{Z}$

1. *existe um elemento neutro em $\mathbf{Z}$ relativamente à multiplicação, 1.*
2. *a multiplicação é associativa, $a * (b * c) = (a * b) * c$.*
3. *a multiplicação é comutativa, $a * b = (b * a)$.*

Comparando com as propriedades da adição, falta *elemento inverso* relativamente à multiplicação. É o mesmo defeito que tem o conjunto $\mathbf{N}$ relativamente às duas operações, adição e multiplicação. Falta o *elemento inverso* relativamente a estas duas operações.

Este defeito vai dar origem ao conjunto das frações, que é o conjunto $\mathbf{Q}$.

Falei que $(\mathbf{Z}, +)$ era o grupo aditivo dos números inteiros. Deixe-me dar-lhe exemplo de outro grupo que faz parte de sua vida diária, para que você entenda porque é interessante salientar que existe uma estrutura, a de *grupo*. O conjunto

$$\mathcal{H} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad (1.35)$$

, é o conjunto das horas do relógio, nos tempos em que relógio tinha ponteiros. $(\mathcal{H}, +)$ tem as mesmas propriedades que o grupo $(\mathbf{Z}, +)$:

1. elemento neutro é a hora 12, que somada com qualquer outra reproduz a *outra*: $12 + 4 = 4$.
2. elemento inverso aditivo Toda hora tem o seu inverso aditivo, que é o complemento para chegar em 12: $4 + 8 = 12$ então $(4, 8)$ é um par de elementos inversos, como também o são

$$(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6) \quad (1.36)$$

E você vê um caso curioso, um elemento que é inverso aditivo de si próprio: 6.

3. propriedade associativa $a + (b + c) = (a + b) + c$.
4. propriedade comutativa $a + b = b + a$.

Deixe-me resolver uma equação no conjunto das horas, e vai ficar claro o que eu já lhe falei antes: *vou precisar de usar todas as propriedades*.

$$x + 7 = 3; \quad (1.37)$$

$$(x + 7) + 5 = 3 + 5; \text{ porque o inverso aditivo de 7 é 5;} \quad (1.38)$$

$$x + (7 + 5) = 3 + 5; \text{ propriedade associativa;} \quad (1.39)$$

$$x + 12 = x = 3 + 5 = 8; 12 \text{ é o elemento neutro das horas;} \quad (1.40)$$

$$x = 8; \quad (1.41)$$

Não dá para resolver esta equação usando a regra “passando para o outro lado se troca o sinal” porque no conjunto das horas não tem troca de sinal.

O conjunto dos números inteiros é muito rico em propriedades. Primeiro tem duas operações, a adição, com a qual forma a *estrutura de grupo* e a multiplicação com a qual tem uma estrutura um pouco mais pobre que se chama de *monoide*, porque lhe falta o inverso multiplicativo.

Mas tem uma nova propriedade que é a *distributividade* da multiplicação relativamente à adição:

$$a * (b + c) = a * b + a * c \quad (1.42)$$

Estou usando o “asterisco” como sinal de multiplicação, como se usa também nas máquinas de calcular ou em programas de computador.

Deixe-me fazer uma lista completa das propriedades de $(\mathbf{Z}, +, *)$

1. propriedades da adição $(\mathbf{Z}, +)$ é um grupo comutativo, aqui vai um pacote com 4 propriedades.
2. propriedades da multiplicação $(\mathbf{Z}, *)$ é um monoide comutativo, aqui vai um pacote com 3 propriedades.
3. A multiplicação é *distributiva* relativamente à adição: $a * (b + c) = a * b + a * c$.
4. O elemento neutro da adição anula, pela multiplicação, qualquer número inteiro: $0 * a = 0$ para qualquer que seja $a \in \mathbf{Z}$.

O $(\mathbf{Z}, +, *)$ é uma nova estrutura que recebe o nome de *anel*. Ao final vou dar mais alguns exemplos de estruturas para que não fique a ideia de somente existem estas que estão aparecendo junto com o conjunto dos inteiros.

As propriedades dos inteiros precisam ser demonstradas, mas para fazê-lo é preciso que se defina a adição e a multiplicação no conjunto $\mathbf{Z}$. Para fazerem-se demonstrações é preciso que se estabeleçam pontos de partida: definir quais são as *verdades básicas* a partir das quais os teoremas serão demonstrados. É uma frase atribuída a Leopold Kronecker: “*deus nos deu os números naturais, e o resto nós construímos*”. A construção dos números naturais é extremamente penosa e é mais prático dizer que eles são o princípio de tudo estabelecendo suas propriedades básicas que é um conjunto de axiomas comumente conhecidos como *axiomas de Peano*. Peano foi um matemático italiano que reuniu todas as afirmações que já tinham sido feitas sobre os números naturais num conjunto de axiomas. Confira os *axiomas de Peano*.

Considerando $\mathbf{N}$ como ponto de partida, definido pelos *axiomas de Peano*, posso definir a adição em $\mathbf{Z}$. Para fazê-lo eu preciso de 4 sentenças definindo como somar dois números positivos, dois números negativos, um número positivo com outro negativo e como somar número negativo com outro positivo. Esta última sentença vai ser substituída pela afirmação de que a soma é comutativa.

Definição 3 (da adição) em $\mathbf{Z}$ Sejam $x, y \in \mathbf{Z}$

1. se $x, y \geq 0$ então $x, y \in \mathbf{N}$ e $x + y$ é a soma definida em $\mathbf{N}$.
2. se $x, y \in -\mathbf{N}$ então $x + y = -(-x + -y)$.
3. se $x \in \mathbf{N}$ e $y \in -\mathbf{N}$ então $-y \in \mathbf{N}$ e calculamos a diferença entre estes dois números naturais: $x - (-y) = d$. Observe que d é um número positivo, a diferença entre dois números naturais. E aqui tem dois casos a considerar:

$$\begin{cases} x \geq (-y) & \Rightarrow x + y = d; \\ x < (-y) & \Rightarrow x + y = -d; \end{cases}$$

Em geral esta sentença complicada é traduzida em linguagem mais simples, “se calcula a diferença entre os números *rebatidos* para $\mathbf{N}$ e se dá a diferença o sinal do maior”. É o que está construído acima.

4. A soma é comutativa, o que resolve o caso em que $x \in -\mathbf{N}$ e $y \in \mathbf{N}$.

Quando eu estava para começar a definição da adição em $\mathbf{Z}$, eu me dei contas de que eu precisava de definir módulo foi quando eu usei a expressão “*rebatidos*”, que penso que é intuitiva porém não foi definida. Eu preciso de definir a função módulo que é quem rebate um número inteiro negativo para o conjunto $\mathbf{N}$. Eu poderia simplesmente redigir novamente esta texto colocando a definição do módulo antes da definição de adição. Mas preferi deixar este defeito e fazer uma crítica do mesmo para que você perceba como é difícil construir uma teoria. E se você encontrar outros furos lógicos neste texto eu agradecerá a bondade de me avisar. Dizem que quando Gauss morreu encontraram entre seus papéis dezenas de artigos praticamente prontos que ele não publicou porque ele era extremamente crítico e somente publicava aquilo que *considerava impecável*. A ciência é que se atrasou porque ele tinha muita coisa impecável que não publicou. Já Euler, primeiro publicava, e se houvesse erro, corrigia, e ganhamos muito com a corrente de Matemática que verteu dos dedos de Euler. Eu não pretendo me comparar com nenhum destes dois gigantes, apenas eu prefiro seguir as pegadas de Euler, escrever, publicar e deixar que outros mostrem que eu errei!

Então, definindo o módulo,

Definição 4 (do módulo) *dum número inteiro*

$$\begin{cases} x \in \mathbf{N} & \Rightarrow |x| = x; \\ x \in -\mathbf{N} & \Rightarrow |x| = -x; \end{cases}$$

Porque eu falei em *grupo* e *monoide* eu pude simplificar muito a descrição do conjunto dos inteiros com suas propriedades.

Tanto com os inteiros, como com os naturais, podemos fazer duas outras operações: dividir e subtrair. A subtração não tem tanto interesse com inteiros porque a adição fornece tudo que a subtração oferece e com boas propriedades. Por exemplo: $a - b \neq b - a$, a subtração não é comutativa. Não precisamos da subtração, mas na prática ela é útil.

A divisão também é defeituosa, mas muito útil e desde o gregos ela foi estudada e usada. E ela segue sendo importante, mesmo sendo defeituosa.

Exemplo 2 (Divisão inteira) *Algoritmo da divisão*

Este é um exemplo um pouco fora do contexto. Faça uma leitura rápida e decida se lhe interessa se envolver. O ponto mais importante é a afirmação ao final do exemplo.

Se você estiver perto dum computador no qual esteja instalado Linux, como é habitual nas escolas públicas do Ceará, você pode fazer um teste interessante. Baixe do link abaixo o seguinte o programa DivisaoInteira

<http://www.calculo.sobralmatematica.org/programas/DivisaoInteira>

É um programa escrito em C e eu posso lhe passar o programa, a pedido seu, não vou copiá-lo aqui, no texto devido aos detalhes que seria complicado explicar. DivisaoInteira é um programa compilado, um executável, você poderia dizer que é um “AP”, você baixa e roda. Abra um terminal e digite:

DivisaoInteira

DivisaoInteira

e pode ocorrer, (é quase certo)., que a maquina lhe responda:

bash: ./DivisaoInteira: Permissão negada

que você pode resolver digitando:

chmod u+x DivisaoInteira

que transforma o programa em executável e agora digitando

DivisaoInteira

o programa vai rodar. Acho que o programa é autoexplicativo, mas o que ele vai fazer é executar 10 testes de divisão inteira lhe pedindo dividendo e divisor.

Na divisão entre dois números inteiros C dá como resposta o quociente da divisão do dividendo pelo quociente.

Não vou usar C neste livro, Eu usei esta linguagem de programação apenas para motivar uma discussão sobre o *algoritmo de Euclides para divisão*.

O algoritmo de Euclides para divisão é ensinado nas escolas, confira a figura (fig 1.2), página 14,

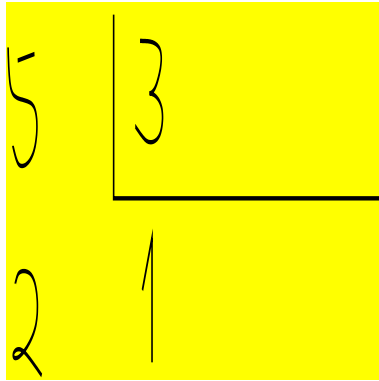


Figura 1.2:

e satisfaz à equação (eq.0) e cujo resultado correspondente à figura (fig 1.2) que apresentei na equação (eq.2).

Para calcular *quociente e resto* fazemos *tentativas*, experimentamos um número inicial para ser o *quociente* que multiplicamos pelo *divisor*. Se o resultado passar do *dividendo* tiramos uma unidade do *quociente* e repetimos o processo até que a multiplicação produza um número inferior ao *dividendo*. Subtraímos o produto do *dividendo* e este resultado é o resto da divisão. É a equação (eq.32) que define todo este processo com uma única regra: *resto* é um número positivo, ou nulo, que deve ser menor do que o *quociente*.

Quando o resto for zero se diz que o *dividendo* é divisível pelo *divisor*, ou que *dividendo* é um múltiplo do divisor. A divisão é rica de conceitos, deixe-me listar alguns:

1. múltiplo, se diz dum número que deixa resto zero na divisão por outro. Por exemplo 8 é múltiplo de 4, mas não é múltiplo de cinco.
2. número inteiro positivo primo é um número que não pode ser decomposto em fatores. Por exemplo $6 = 2 * 3$ portanto 6 não é primo. Os primeiros números primos são

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 21, 23, 29, 31, 37 \dots$$

e é um teorema da aritmética que o conjunto dos números primos é infinito. Se prova este teorema por absurdo, supondo que exista um último número primo. Seja N este último número primo, então qualquer número natural $p > N$ tem fatores que se encontram no conjunto finito dos números primos $2, 3, 5, \dots, N$.

Preciso demonstrar que é falsa a sentença “O conjunto dos números naturais a partir de $p = N + 1$, isto é, $N + 1$ e seus sucessores todos tem fatores tirados do conjunto finito dos números primos”.

Para isto eu preciso *formatar* o *conjunto finito dos números primos*. Seja então

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots, N\} \text{ o conjunto dos números primos;} \quad (1.43)$$

$$\mathcal{P} = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_k = N\}; \quad (1.44)$$

quer dizer que o conjunto finito dos números primos tem k elementos e eles estão todos identificados como elementos da sequência que aparece na equação (eq.44).

Deixe-me definir R como o produto dos números primos mais uma unidade

$$R = 1 + \prod_{j=1}^k p_j; \quad (1.45)$$

A divisão de P por qualquer dos números primos do *conjunto finito de números primos* $\mathcal{P}$ deixa resto 1 e portanto

- (a) P é um novo número primo, ou
- (b) o conjunto finito dos números primos $\mathcal{P}$ está incompleto e tem pelo menos um outro número primo que é fator de R

contradizendo assim que exista um conjunto finito de números primos.

Entenda melhor esta demonstração, considere os números primos obtidos pelo *crivo de Eratóstenes* rolado até 89 então

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89\} \quad (1.46)$$

então o produto destes números primos, mais um, é

$$P = 341178144081439945557703010507713490771 \quad (1.47)$$

e o número primo 905269 é um fator de P .

$$341178144081439945557703010507713490771 = \quad (1.48)$$

$$= 5591x905269x6680111765450694026249; \quad (1.49)$$

editei a lista $\mathcal{P}$ substituindo “,” por “+” e coleí no terminal do Python3 que calculou o produto.

Eu obtive a fatoração de P usando o programa `factor` que é distribuído com Debian/Gnu/Linux.

Então existe pelo menos um número primo, 905269, que não estava listado naquele *crivo de Eratóstenes*.

É o *teorema fundamental da Aritmética* que reza que o conjunto dos números primos é infinito, e sua demonstração de faz por absurdo. Se supõe que exista uma quantidade finita de números primos, e assim se cria um *crivo de Eratóstenes* descrevendo todos os números primos, o conjunto $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\infty, \dots, \mathcal{P}_\parallel\}$.

O produto dos elementos de $\mathcal{P}$ mais um é o número R que vai deixar resto 1 com todos os números primos daquele *crivo de Eratóstenes* que assim não contém todos os números primos. Foi exatamente o que eu fiz com um exemplo do crivo de Eratóstenes até 89.

O *teorema fundamental da Aritmética* alimenta uma atividade muito intensa de pesquisa em Matemática que hoje vive em torno do resultado do matemático chinês *Yitang Zhang* que conseguiu construir *progressão aritmética* onde estão localizados todos os números primos entre os seus termos determinando assim um salto máximo existente entre dois números primos.

O resultado de *Yitang Zhang* foi logo melhorado, usando-se para isto os seus próprios métodos, e determinando um salto entre dois números primos menor do que ele havia obtido.

Aqui está um *crivo de Eratóstenes* que obtive rodando programa escrito em Python dentro do qual eu usei o programa `factor` distribuído com Debian/Gnu/Linux

```
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,
71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149,
151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227,
229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307,
311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389,
397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467,
479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571,
577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653,
659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751,
```

757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

Este é um resultado de Inteligência Humana, um programa escrito por mim, usando uma linguagem de programação construída por seres humanos, Python, inicialmente construída por Guido Rossi com apoio de uma multidão de programadores que formam a comunidade Python e fiz uso dum programa cujo autor desconheço, factor, que vem junto com a minha distribuição Debian/gnu/Linux.

1.1.4 Os números racionais

Os **números racionais** são as frações é a referencia a um número que significa uma parte dum inteiro, algumas vezes designada como *fração própria* em oposição às *frações impróprias* que são frações tão boas como as próprias apenas chamadas assim porque representam números racionais que não são inteiros mas que são, em módulo, maior do que 1. É um exemplo de defeito do linguajar matemático oriundo duma época em que as frações não eram consideradas números em todo o seu direito.

Uma fração é um objeto da forma $\frac{p}{q}$ em que $p, q \in \mathbf{Z}; q \neq 0$ e que representa um número racional.

A história é uma arte muito difícil e um exemplo disto é o *triângulo de Pascal*, denominado em homenagem a Blaise Pascal que viveu no século 16, mas, aparentemente, os matemáticos chineses já o conheciam pelo menos desde o século 12 de quando se sabe dum livro de Matemática chinesa fazendo referência ao mesmo duzentos anos antes de Pascal. Também parece que a geometria, dita dos gregos, era conhecida por outros povos anteriores aos helenos que, apenas teriam compilado de forma organizada aquilo que chegou até nós como *geometria euclidiana*.

Isto para afirmar, sem me sentir obrigado a grandes justificativas que, num certo momento da história humana, provavelmente na Idade Média, se começou a conceber que objetos como $\frac{1}{3}$ *seriam números*. O uso do condicional tem sentido porque até recentemente as escolas ensinavam que $\frac{5}{3}$ seria uma *fração imprópria* sugerindo que não seria bem uma fração! Os números negativos ainda hoje são tratados *negativamente* e os números complexos nem sempre fazem parte do currículo do Ensino Médio ... para não mencionar os *quatérnions* que, possivelmente, há gente que nem sabe que existem.

Então fazendo uma história romanceada, deixe-me dizer que inventamos os objetos do tipo $\frac{1}{n}$ quando $n \in \mathbf{N}; n \neq 0$ para representar os inversos multiplicativos dos número naturais, com exceção do zero, e aos poucos construímos uma aritmética com estes novos objetos com as seguintes regras:

1. O símbolo $\frac{p}{q}$ representa um número sempre que $q \neq 0$ em que os membros $p, q \in \mathbf{Z}$. Há o hábito de designar p como *numerador* e q como *denominador*. A razão destes nomes vem da ideia intuitiva da invenção das frações em que $\frac{2}{3}$ significaria a quantidade 2 de uma coisa chamada “terço” donde o 2 é o “numerador” enquanto que 3 dá o nome, “denominador”.
2. O inverso aditivo do número $\frac{p}{q}$ é o número $\frac{-p}{q}$ que também pôde ser escrito como $-\frac{p}{q}$ e então o sinal $-$ é um modificador de tal modo que $a + (-a) = 0$.
3. Vale regra $-(-a) = a$;
4. O zero Sempre que $q \neq 0$, $\frac{0}{q} = 0 \in \mathbf{N}$ e aqui guarde como observação para uso posterior, então existe uma quantidade imensa de representantes do zero e isto é um problema que preciso resolver!
5. Sempre se pode reduzir uma fração à sua expressão mais simples eliminando fatores comuns ao *numerador* e ao *denominador*. Assim

$$\frac{8}{80} = \frac{2^3}{2^4 5} = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10} \quad (1.50)$$

ou seja, se fatora numerador e denominador e assim se eliminam os fatores comuns para obter a forma irredutível duma fração. Esta operação cria um problema de que vou tratar ao final criticando todo o processo. Agora se tem pelos menos dois objetos representando a mesma coisa, a fração simplificada e anterior que pode ser simplificada:

$$\frac{8}{80} = \frac{1}{10} \quad (1.51)$$

6. Esta regra de simplificação pode ser usada ao reverso para permitir a definição da soma de frações. Para somar

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (1.52)$$

se acrescentam fatores comuns até obter denominadores iguais:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{q}{qp} + \frac{p}{pq} \quad (1.53)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{q}{pq} + \frac{p}{pq} = \frac{1}{pq}(q + p) \quad (1.54)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{q+p}{pq} \quad (1.55)$$

porque temos q objetos do tipo $\frac{1}{pq}$ e p objetos do tipo $\frac{1}{pq}$. Estou usando, a comutatividade da multiplicação de números naturais, na lista de operações acima junto à regra que me permite eliminar ou incluir fatores comuns e finalmente, silenciosamente, estou usando *distributividade* da multiplicação em relação a adição que vou incluir como a próxima regra.

7. Vale a distributividade da multiplicação relativamente à soma.
8. Posso agora deduzir da regra anterior uma regra geral para soma de frações

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{qm}{nq} + \frac{np}{nq} \quad (1.56)$$

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{qm+np}{nq} \quad (1.57)$$

sendo a regra:

- multiplicam-se os denominadores para formar o novo denominador;
- multiplicam-se em cruz, numeradores e denominadores e se os somam para formar o novo numerador.
- o resultado nem sempre será uma fração na forma mais simples, e este um problema de que tenho que tratar em seguida, mas mencionei antes *como simplificar uma fração eliminando os fatores comuns* ao numerador e ao denominador.

A figura (1.3), página 18, apresenta um algoritmo gráfico para ilustrar a regra de soma de frações.

O principal objetivo era conseguir que toda fração tivesse um inverso multiplicativo:

$$n \neq 0 \text{ e } m \neq 0 \implies \frac{n}{m} \frac{m}{n} = \frac{mn}{mn} = 1 \quad (1.58)$$

não sendo necessário indicar que $m \neq 0$ porque já excluí a possibilidade de haver frações com denominador nulo.

O conjunto das frações é o conjunto dos números racionais e é designado com o símbolo $\mathbb{Q}$.

Resumindo, valem para este novo conjunto de objetos, $\mathbb{Q}$, todas as propriedades

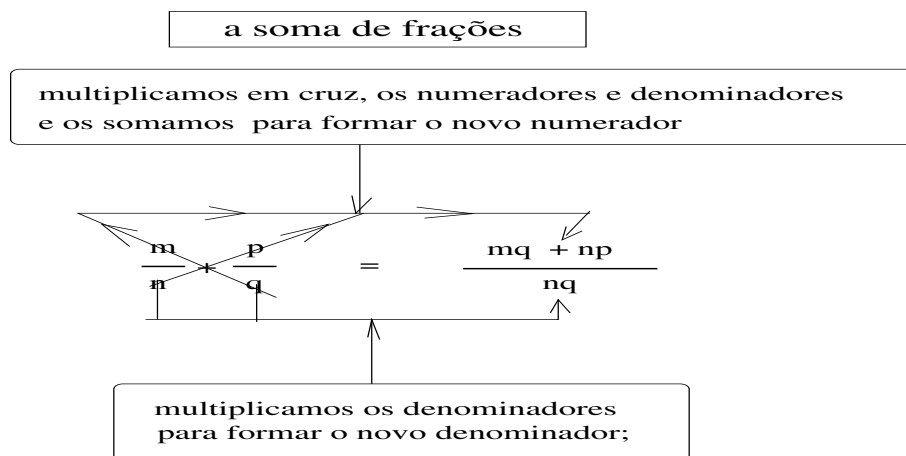


Figura 1.3: gráfico mostrando a soma de frações

1. $\underline{A}(\mathbf{Q}, +)$ é um grupo comutativo sendo a fração $\frac{0}{q} = 0; q \neq 0$ o elemento neutro deste grupo.
2. $\underline{M}(\mathbf{Q}^*, *)$ é um grupo comutativo sendo a fração $\frac{q}{q} = 1; q \neq 0$ o elemento neutro deste grupo. $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$ é uma notação habitual.
3. AM-1 O elemento neutro da adição, zero, multiplicado por qualquer número natural resulta em zero.
4. AM-2 a multiplicação é distributiva relativamente à adição.

conceito da
ento que posso

Agrupei as propriedades usando a definição de grupo. Tem-se aqui um *grupo aditivo*, um *grupo multiplicativo* e as duas propriedades que estabelecem relação entre estes dois grupos. São estas propriedades que fazem de $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ um *corpo comutativo*, porque a multiplicação é comutativa.

A propriedade, “o zero multiplicado por qualquer número resulta em zero” é uma simples consequência da *propriedade distributiva* como mostra o cálculo seguinte

$$(\forall a \in \mathbf{Q})(0 * a = (-b + b) * a = -ab + ab = 0); \quad (1.59)$$

Esta propriedade AM-1 é um teorema e não precisava estar relacionada como propriedade.

Relação de equivalência

As *relações de equivalência* resolvem problemas formais de unicidade e outros problemas de identificação como é o caso de polígonos semelhantes que a geometria precisa de identificar. São objetos diferentes mas eles precisam ser “equivalentes”. A relação de equivalência é uma generalização da igualdade.

No caso das frações há uma infinidade de frações que representam o mesmo número, $\frac{n}{n} \equiv 1; n \neq \text{zero}$, por exemplo. Isto *cria problemas para a Álgebra* que precisa que o *inverso dum número seja único*, então como no caso dos triângulos semelhantes, é preciso identificar as frações que representarem o mesmo número colocando-as todas numa mesma *classe de equivalência*. Duas frações iguais formam o que chamamos de *proporção* então o *produto dos meios é igual ao produto dos extremos* e assim se chega à regra de equivalência de frações:

$$\frac{n}{m} \equiv \frac{p}{q} \iff nq = mp \quad (1.60)$$

é interessante observar que todas as frações equivalentes ficam sobre uma mesma reta determinada pela representação mais simples, pela fração irredutível, a figura (1.4) página 19, mostra as classes de equi-

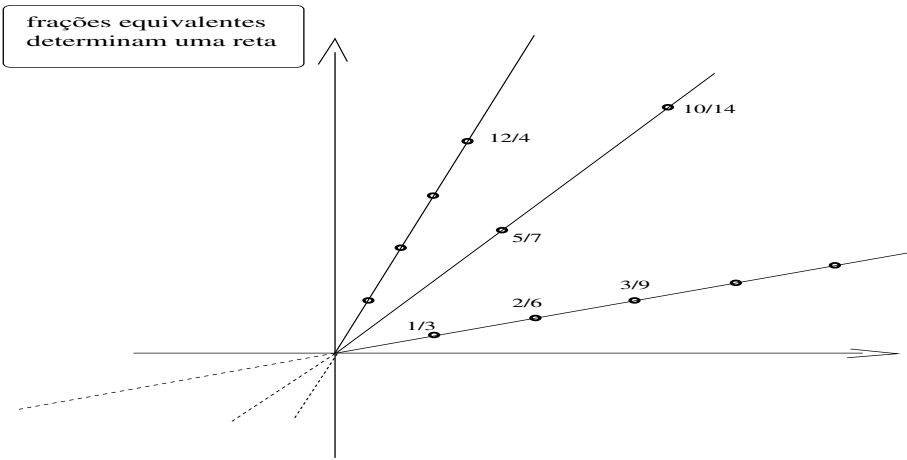


Figura 1.4: retas do plano de Gauss são classes de equivalência de frações

valência das frações como pontos das retas contidas no plano de Gauss, o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Representação geométrica de Q

Os números racionais tem uma propriedade de “densidade” que os inteiros não têm:

- 1. dados dois números racionais sempre tem outro número racional *entre* eles.
- 2. dados dois números racionais, sempre tem outro à esquerda;
- 3. dados dois números racionais, sempre tem outro à direita;

A figura (1.5), página 19, compara com o que acontece na reta a propriedade de densidade dos números

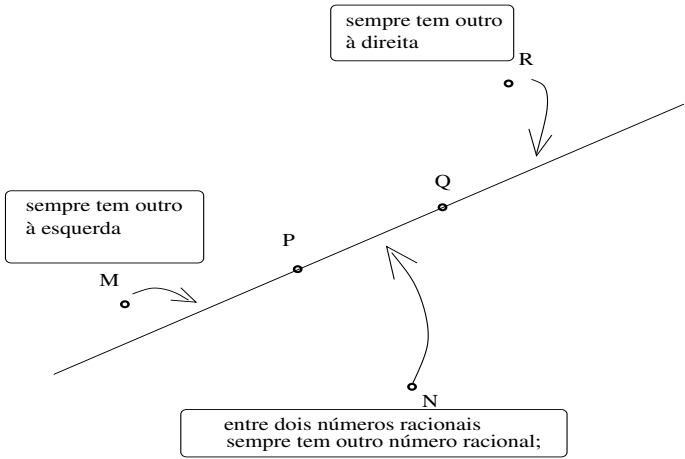


Figura 1.5: entre dois pontos, na reta ...

racionais. Esta comparação sugere fazer uma interpretação geométrica dos números racionais.

1. Selecciona-se um ponto na reta, O , para a dividir em duas semirretas: a *semirreta positiva* e a *semirreta negativa*. O é o representante do zero.
2. Depois, com um compasso, seleccionam-se os inteiros à distâncias iguais, os inteiros positivos na semirreta positiva, e os inteiros negativos na semirreta negativa. A escolha de qual é a semirreta positiva é decisão sua, e a outra é negativa.
3. O espaço que sobra é para as frações que não sejam inteiros.
4. Depois você irá ver que que na reta ainda tem números que não são racionais, os números irracionais, que também encontram lugar na reta.

Existe uma multitude de exemplares de retas representando $\mathbb{Q}$ e simplesmente vou dizer que todas estas retas são equivalentes como representação de $\mathbb{Q}$, e isto vai me permitir a *definição geométrica* das operações aritméticas de $\mathbb{Q}$. Por exemplo, a figura (1.6), página 20, ilustra o produto 2×3 usando

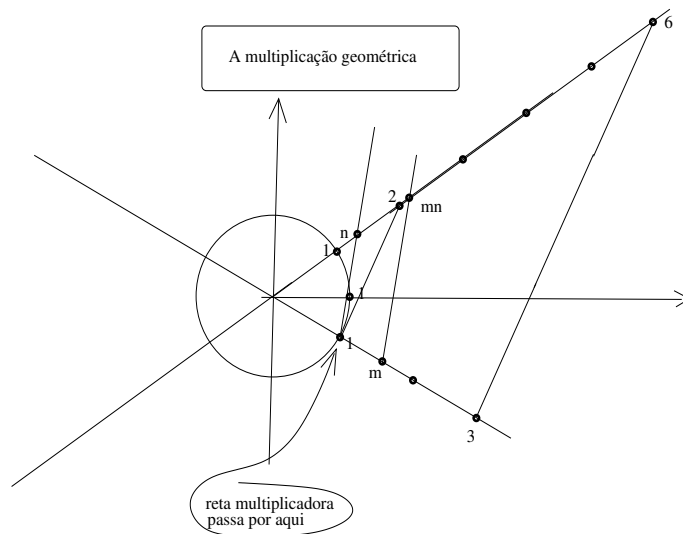


Figura 1.6: A multiplicação geométrica

semelhança de triângulos.

- Escolhi duas retas para representar $\mathbb{Q}$ e encontrei o resultado da multiplicação em uma das retas.
- Para não poluir muito a figura eu marquei a unidade, em uma das retas, por onde vão passar as *retas multiplicadoras*,
- paralelas a elas vão passar as *retas multiplicando* pelo *ponto multiplicando*.

Observe que *precisei da relação de equivalência entre as retas numéricas* para construir a multiplicação geométrica.

Vou lhe deixar dois desafios:

1. Altere a figura (1.6), página 20, para, usando *equivalência de triângulos*, provar que o *produto é comutativo*.
2. Uma propriedade que é bem difícil de ser demonstrada algebricamente, o produto de dois números negativos resulta num número positivo. A demonstração geométrica é trivial e fica-lhe como um desafio. Você vai precisar de marcar o -1 , use um compasso. Calcule $(-1)^2$!

1.1.5 Os números reais

Um **número real** é uma **dízima**

- que pode ser *periódica*, e então é um *número racional*, ou
- *não ser periódica*, e então é *número irracional*.

Esta seção precisa do conceito de *limite* que está fora do escopo da Geometria Analítica. Sugiro uma *leitura rápida* apenas para tomar conhecimento, as afirmações que vou fazer precisam do Cálculo e da Álgebra. Vou seguir em frente dentro do objetivo que já declarei no início: *a Geometria Analítica deve servir como motivação para estudos mais avançados de Matemática, aqui, da Álgebra e do Cálculo*.

Há um pequeno erro na afirmação anterior que somente vou poder elucidar ao final deste texto, entretanto não custa nada alertá-lo, dizendo-lhe qual é o erro mas pedindo que conviva com ele até que seja possível mostrar os detalhes. As *dízimas* são representantes das classes em que os números reais estão divididos.

Como no caso dos números racionais, $\frac{1}{3}$ é o *melhor* representante da classe das frações que lhe são equivalentes, porque é uma *fração irredutível*. Eu não vou poder dizer o mesmo das *dízimas*, e o erro da frase inicial seria equivalente à afirmação “*um número racional é uma fração irredutível*”...

Deixe-me dar lhe os dois exemplos:

1. $\frac{1}{3} = 0.333333\ldots = 0.(3)$ é uma *dízima periódica*, com período (3) e você tem no começo a geratriz desta *dízima*, um número racional,

2. 3.14159265358979323848... que é a *constante de Arquimedes* que eu obtive usando `calc` com 20 casas decimais, é uma aproximação do número irracional π . Não é uma *dízima periódica*, os dígitos vão se suceder de uma forma “arbitrária” de tal modo que é impossível criar um algoritmo que mostre o termo de ordem n para qualquer valor de n . Não há nenhum padrão repetido. Existem fórmulas que geram os dígitos de π com alguma precisão, mas o valor é sempre *aproximado*. Na minha instalação Debian/Gnu/Linux eu tenho um programa, um “*aplicativo*”, `pi`, e eu posso digitar na máquina

$\text{pi}=4*\text{atan}(1)$

(a) `pi 30` que me resulta, na linha seguinte 3.14159265358979323846264338327

(b) ou `pi 300` que me resulta, nas linhas seguintes 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127

(c) e eu também digitei `pi 30000`, que eu deixo que você experimente, se estiver usando Debian/Gnu/Linux, porque eu não vou conseguir lhe mostrar de forma adequada o resultado numa página...

Há três formas clássicas de construir o conjunto dos números reais partindo dos números racionais como *material primário*, no sentido de que $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, o conjunto dos números racionais é um subconjunto do conjunto dos números reais

1. os cortes de Dedekind,
2. os intervalos encaixados, que é bem parecido com os *cortes*, e possivelmente também se deve a Dedekind,
3. as *sucessões de Cauchy*, que é o meu método preferido porque é baseado na estrutura algébrica que surge de forma natural da estrutura algébrica do conjunto dos números racionais. Nos outros casos é preciso construir a estrutura algébrica em cima dum *conjunto novo* e eu entendo que isto

é muito mais difícil de fazer do que o surgimento dum *conjunto novo* oriundo das sucessões de números racionais que já tem uma estrutura algébrica bem justificada, e vou mostrar aqui *como se faz* usando este terceiro método.

Leia sem estresse, o assunto depende fortemente de Álgebra e eu vou apenas lhe dar uma ideia do processo.

Partindo do conjunto $\mathbf{Q}$, como *material primário*, é simples mostrar que existe um novo conjunto $\mathbf{R}$; $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, usando uma *intuição geométrica*. Confira os detalhes em *números racionais* mas vou, rapidamente, repetir os passos essenciais aqui. Deixe-me dar um nome ao *conjunto das sucessões de números racionais* uma vez que vou estar sempre me referindo a este conjunto que será o meu material de trabalho. Seja S o *conjunto das sucessões de números racionais*. É um novo conjunto, é diferente de $\mathbf{Q}$ mas algebricamente se pode mostrar que $\mathbf{Q} \subset S$ as sucessões constantes são a *representação* de $\mathbf{Q}$ em S .

O conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais tem as mesmas propriedades da reta na geometria euclidiana:

1. Entre dois “pontos” $x, y \in \mathbf{Q}$ sempre tem um ponto no *meio*, embora este conceito, “*meio*”, esteja indefinido na geometria euclidiana, ele é considerado um *axioma* o que dispensa uma definição. Em $\mathbf{Q}$ este conceito pode ser melhor apresentado, dizendo-se que dados $x, y \in \mathbf{Q}$ qualquer *média* entre eles se encontra no segmento que eles determinam. Aqui, “*entre eles*” pressupõe a existência duma *relação de ordem* inexistente na reta da geometria euclidiana, mas existente em $\mathbf{Q}$. E a relação de ordem de $\mathbf{Q}$ é facilmente transferida para o conjunto das sucessões de números racionais, S . Fiz referência a “qualquer média” porque há distintos tipos de média, *aritméticas, geométricas* ...
2. Dados dois “pontos” $x, y \in \mathbf{Q}$ sempre tem um ponto fora do segmento determinado por estes dois pontos, a geometria euclidiana se refere ao segmento de reta determinado por dois pontos. Em que $\mathbf{Q}$ esta regra é mais forte. Posso escolher “ $x \leq y$ ” e afirmar que existe um ponto $t < x$ e um ponto $w > y$,

$$t \leq x < y \leq w; \quad (1.61)$$

3. Ambas as propriedades podem iteradas garantindo que $\mathbf{Q}$ seja infinito entre dois dos seus elementos como fora do segmento que os dois elementos determinam. Esta é uma forma livre de fazer referência à *propriedade arquimediana* que qualquer reta possui, assim como $\mathbf{Q}$.

Estas propriedades permitem que se faça uma *identificação* entre $\mathbf{Q}$ e um *subconjunto de qualquer reta* criando-se o conceito de *reta numérica*.

Acho que está passando do *momento* de dar um nome a este novo conjunto, o *conjunto dos números reais*: $\mathbf{R}$. Qualquer *reta numérica* é um representante de $\mathbf{R}$ e de agora em diante eu vou usar a expressão *reta numérica* como equivalente ao símbolo $\mathbf{R}$ que representa o *conjunto dos números reais*.

A geometria mostra que na *reta numérica* tem pontos que não pertencem a $\mathbf{Q}$, confira a figura (fig 1.7), página 23, em que posso desenhar uma sucessão de círculos de raio $\sqrt{n}$ que, *com algumas exceções*, é um número irracional. Os círculos oferecem o método de determinação geométrica de $\sqrt{n}$ na *reta numérica*. Se você construir, na figura (fig 1.7), um triângulo retângulo de altura 1 com o cateto horizontal medindo x a hipotenusa, que é o raio do círculo, vai medir $\sqrt{x^2 + 1}$ então o círculo com este raio vai encontrar o eixo OX . O último círculo desenhado foi obtido com $x = \sqrt{3}$ que marcou no eixo OX o número 2.

Então a *reta numérica* é uma outra *coisa* diferente de $\mathbf{Q}$, é um novo conjunto que chamei de $\mathbf{R}$.

O exemplo mais comum, e o que aparece na figura (fig 1.7), página 23, é $\sqrt{2}$ cujo algoritmo cria de forma muito engenhosa uma *dízima não periódica*, embora o algoritmo não sirva como uma prova de que

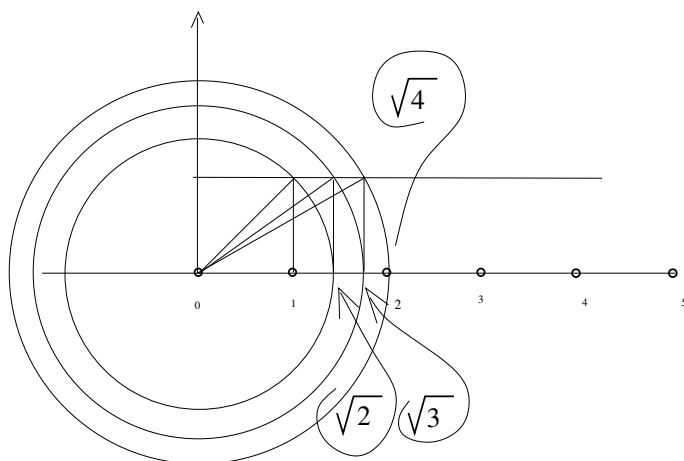


Figura 1.7:

$\sqrt{2}$ é *dízima não periódica*. Esta demonstração é feita por contradição,

$$x = \frac{p}{q} = \sqrt{2} \text{ é uma fração irredutível;} \quad (1.62)$$

$$x = \frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2; \quad (1.63)$$

$$x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ é par;} \quad (1.64)$$

$$p^2 \text{ é par} \Rightarrow p \text{ é par} \Rightarrow p = 2m; m \in \mathbf{N} \quad (1.65)$$

$$x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{4m^2}{q^2} = 2 \Rightarrow \frac{2m^2}{q^2} = 1 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \quad (1.66)$$

$$q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par} \Rightarrow q \text{ é par;} \quad (1.67)$$

$$p, q \text{ são pares} \Rightarrow \frac{p}{q} \text{ não é irredutível;} \quad (1.68)$$

Na equação (eq.68) eu cheguei a uma contradição porque eu parti da hipótese de que $x = \frac{p}{q}$ fosse uma *fração irredutível*.

1.1.6 periódicas ou não periódicas

Eu comecei dizendo que os *números* eram *dízimas* que se dividiam em duas classes:

- *dízimas periódicas* e as
- *dízimas não periódicas*.

As primeiras têm uma representação no formato $\frac{p}{q}$ que é a *geratriz* da *dízima*, são os números racionais.

As *dízimas não periódicas* não admitem uma geratriz porque, os algarismos aparecem numa sequência imprevisível, é impossível aplicar-lhes o algoritmo da soma dos termos duma *série geométrica* que produz a geratriz no caso das *dízimas periódicas*.

Então na reta numérica tem pelos menos um número, $\sqrt{2}$, que não é uma *dízima periódica*. Claro, tem uma infinidade, para começar $\sqrt{n}$ como a figura (fig 1.7), página 23 mostra sempre que n não for um quadrado perfeito, por exemplo, qualquer número primo, portanto uma infinidade. Outros dois exemplos menos intuitivos são π e e que nem mesmo são *números algébricos* coisa que $\sqrt{n}$ é.

os círculos
mostram apenas $\sqrt[n]{n}$

Esta linha de raciocínio leva naturalmente ao método de Dedekind para construção dos números reais, mas ela tem o defeito de oferecer uma grande dificuldade para introduzir no novo conjunto os métodos algébricos que existem em $\mathbf{Q}$. Somente para mostrar-lhe a razão da dificuldade do método de Dedekind, ele trabalha com um par de sucessões de números racionais, portanto, pelo menos, é duas vezes mais complicado do que trabalhar apenas com uma sucessão de números racionais.

Eu vou deixar de lado este método, apenas guardando o fato de que o conjunto $\mathbf{Q}$ tem uma representação geométrica que se chama de *reta numérica*, que é qualquer reta na qual se tenha eleito um *ponto* para representar o zero e outro *ponto* para representar 1, definindo, deste modo, as semirretas, *positiva* e *negativa*. O que leva a definir a *ordem* na *reta numérica*. Confira a figura (fig 1.8), página 24,

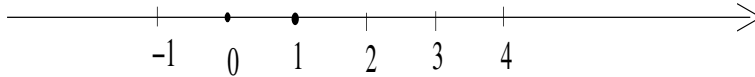


Figura 1.8: reta numérica

E eu vou aproveitar esta construção geométrica do *novo conjunto* que contém $\mathbf{Q}$ para apresentar-lhe este *novo conjunto* de forma diferente. Mas se você for crítico, deverá estar observando que estou falando de três coisas sem estabelecer conexão entre elas:

- dízimas,
- pontos da *reta numérica*,
- sucessões de números.

Mas como definir as operações neste novo conjunto? Para responder a esta questão eu preciso apresentar uma forma de construir o *novo conjunto dos números reais* aproveitando a estrutura algébrica existente, e conhecida, dos números racionais.

novo conjunto
do antigo...

$$\frac{1}{3} = 0.3333333333333333 \dots \in \mathbf{Q}; \quad (1.69)$$

$$\frac{1}{3} = \{0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots, 0.33333333, \dots\}; \text{ é periódica}; \quad (1.70)$$

$$\sqrt{5} \approx 2.23606797749978969641 \dots \notin \mathbf{Q}; \quad (1.71)$$

$$\sqrt{5} = \{2, 2.2, 2.23, 2.236, 2.2360, \dots, 2.2360679774997, \dots\}; \text{ não é periódica}; \quad (1.72)$$

$$\frac{1}{3}, \sqrt{5} \in \mathbf{R}; \quad (1.73)$$

Alguma conexão eu já estabeleci quando mostrei que posso identificar os números racionais na *reta numérica*, a figura (fig 1.8), página 24, apresenta os inteiros, mas já fiz menção às médias que preenchem os intervalos entre dois inteiros com frações, as *dízimas periódicas*, e também já mostrei, geometricamente, que algumas *dízimas não periódicas* se encontram na *reta numérica*. Falta-me completar o quadro estabelecendo a estrutura algébrica da *reta numérica*.

- Primeiro mostrando que uma *dízima* é uma *sucessão de números racionais*. O conjunto das *dízimas*, que é $\mathbf{R}$, é um subconjunto de S , o conjunto de todas as sucessões de números racionais.

$$\mathbf{R} \subset S; \quad (1.74)$$

O conjunto de todas sucessões tem mais elementos do que aquilo que me interessa, só me interessam as dízimas porque elas têm *limite*.

Vou já mostrar que $\mathbf{R}$ um subconjunto próprio de S , e com isto vou chegar ao conceito de *limite*. Este ponto é crítico, partir dos números racionais:

1. como material conhecido, ou ainda como *material primário* que vou usar para construir um novo conjunto,
2. eu preciso como material para esta construção *do conjunto*, S das sucessões de números racionais que herdaram de maneira natural a estrutura algébrica de $\mathbf{Q}$,
 - (a) posso *somar sucessões* e tem a sucessão nula que é o elemento neutro e valem todas propriedades da adição de números para o conjunto das sucessões,
 - (b) posso *multiplicar sucessões* e tem a sucessão constante 1 que é o elemento neutro para a multiplicação e valem todas propriedades do produto de números para o conjunto das sucessões,
 - (c) mas tem *sucessões inconvenientes* como

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbf{N} \quad (1.75)$$

que crescem indefinidamente, elas não tem *limite* então eu tenho que encontrar um meio de eliminar as *sucessões inconvenientes*

Neste contexto $\mathbf{N}$ é uma sucessão *chata*!

- (d) *limite* é a ferramenta que vou usar para eliminar as *sucessões inconvenientes*.
3. deste conjunto eu vou retirar o *subconjunto*, dos números reais, o *conjunto das sucessões convenientes*... as sucessões que têm limite. E aqui tem um pequeno problema, duas coisas diferentes, *conjunto das sucessões limitadas* e o *conjunto das sucessões que têm limite*, duas coisas diferentes e ainda vou voltar a tratar disto, mas você já pode fazer uma pesquisa na Wikipédia para ver a diferença com exemplos.
4. O processo de escolha é um novo conceito, *limite*. Desta forma eu estou colocando em funcionamento dois processos completamente integrados,
 - a criação dum novo conjunto e
 - apresentação dum novo conceito. .

Um número real é um limite e com isto eu vou eliminar um *doloroso processo* que é o estudo das propriedades do limite, são nada mais do que as propriedades dos números reais.

Vou já mostrar que $\mathbf{R}$ um subconjunto próprio de S , e com isto vou chegar ao conceito de *limite*.

- Depois mostrando que em S está definida uma estrutura algébrica que vai ser então *estampada* em $\mathbf{R}$, deixando o projeto completo.

Sempre que eu *produzir* uma dízima o que estou *produzindo* é uma sucessão

$$\begin{cases} s_0 = 1, s_1 = 1.4, s_2 = 1.41, \dots, s_{19} = 1.4142135623730950488, \dots \\ s_0, s_1, s_2, \dots, s_{19} \in \mathbf{Q}, \dots; s = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_{19}, \dots) = \sqrt{2}; \end{cases} \quad (1.76)$$

$$\begin{cases} t_0 = 0, t_1 = .3, t_2 = 0.33, \dots, t_{19} = 0.3333333333333333333, \dots \\ t_0, t_1, t_2, \dots, t_{19} \in \mathbf{Q}, \dots; t = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_{19}, \dots) = \frac{1}{3}; \end{cases} \quad (1.77)$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1, \sigma_1 = -1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -1, \dots, \sigma_k = (-1)^k, \dots; \\ \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_k \in \mathbf{Q}, \dots; \sigma = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots); \end{cases} \quad (1.78)$$

mas recíproca é falsa, σ é uma *sucessão limitada* mas não é uma dízima. Observe a diferença:

$$1.4142135623730950488 \text{ cortando um pedaço } 0.0000000003730950488; \quad (1.79)$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots \text{ cortando um pedaço } 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1; \quad (1.80)$$

$$(1.81)$$

a diferença, em dos casos acima é que o sobra depois de *cortar um pedaço*, é que, num dos casos, decida qual, o que sobra é muito pequeno, no outro caso, decida qual, o que sobra é praticamente a mesma coisa. . . . Isto é que vai caracterizar o *limite*.

Uma *sucessão limitada* não precisa ter limite. Mas toda sucessão que tiver limite é também *limitada*. Um dos casos acima é que tem limite, e é também limitada, no outro caso, decida qual, é limitada mas não tem limite.

Quer dizer que o conjunto de *todas as dízimas* é um subconjunto do conjunto de todas as sucessões de números racionais. Repetindo, uma *dízima* é uma *sucessão de números racionais*, mas *sucessão de números racionais* não precisa ser uma *dízima*. O terceiro exemplo, na equação (eq.78), é uma sucessão de números racionais que não é uma dízima.

Uma dízima é uma sucessão, na equação (eq.76) você tem uma *dízima não periódica* e na equação (eq.77) você tem uma *dízima periódica*.

Mas tem *sucessões de números racionais* que não são *dízimas*, que é o exemplo da sucessão da equação (eq.78), é uma sucessão de números racionais que não é uma dízima. O que diferencia estes dois conceitos no conjunto das sucessões, *dízimas* de *não dízimas* é um novo conceito, *limite*, sobre o qual eu pretendo oferecer-lhe uma introdução aqui. Este conceito é um dos mais difíceis que a estudante encontra quando começa a estudar a Matemática superior.

Mas tem *sucessões de números racionais* que não são *dízimas*,

$$s_k = (-1)^k; s = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots); \quad (1.82)$$

que é o exemplo da sucessão da equação (eq.78), é uma sucessão de números racionais que não é uma dízima. O que diferencia estes dois conceitos no conjunto das sucessões, *dízimas* de *não dízimas* é um novo conceito, *limite*, sobre o qual eu pretendo oferecer-lhe uma introdução aqui. Este conceito é um dos mais difíceis que a estudante encontra quando começa a estudar a Matemática superior.

Mas fique alerta, “*difícil*” não é sinônimo de “*impossível*”! Aquilo que é difícil, o é porque representa um salto no conhecimento. Sim, o conhecimento é feito de saltos, nem sempre os dados se conectam facilmente. E *limite* representa um destes saltos. Mais a frente eu vou voltar a discutir o *salto lógico* que representa a passagem de $\mathbf{Q}$ para $\mathbf{R}$, e ele representa este salto do conhecimento que você pode encontrar procurando pela palavra chave *salto de cardinalidade*. Quem descobriu este salto foi o matemático Cantor e que, ao morrer, começava a duvidar de sua descoberta que somente ficou devidamente esclarecida 100 anos depois num grande esforço que foi feito na década de 40 para entender os fundamentos da Matemática que estavam seriamente desestruturados por várias correntes de pensamento. Está é uma outra história que merece um artigo a parte.

Para romper este salto eu vou usar duma estratégia, dos exemplos de onde eu vou tirar a teoria. A Matemática é uma linguagem, e a melhor maneira de aprender uma linguagem é pelos exemplos, foi assim que você aprendeu a falar a sua língua materna, talvez português, como é o meu caso.

Primeiro eu vou definir um tipo particular de *limite*, na verdade uma *classe de limites*. Não se assuste com esta referência a uma *classe*, lembre-se que um número racional, uma fração, é uma classe:

$$\frac{1}{3} \equiv \frac{2}{6} \equiv \frac{10}{30} \dots \quad (1.83)$$

e você convive muito bem com as classes de números racionais. A primeira fração que eu escrevi desta classe de números racionais, $\frac{1}{3}$ é um *representante* desta classe, a *fração irredutível* da classe. Mas todas as outras são tão boas como a primeira. Quer dizer que existe uma infinidade de representações para $\frac{1}{3}$, e você convive perfeitamente com isto. O conjunto dos números reais é formado também de classes e é o *limite* que caracteriza cada uma das classes, e agora eu vou apresentar-lhe a classe do zero, o limite zero.

A classe do zero

A palavra chave agora é *convergir*, que é quase que um sinônimo de *limite*. Eu vou definir a *classe das sucessões de números racionais que convergem para zero*. Começo com a definição de convergência para zero e mostro que o conjunto de tais sucessões não é vazio e tem uma estrutura algébrica interessante.

Eu vou usar esta classe para definir um tipo particular de *limite* que vai me permitir a construção da teoria dos limites que é necessária ao Cálculo Diferencial e Integral.

Deixe-me começar com um exemplo do qual vou tirar todos os dados para fazer uma definição.

$$t = (0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots); t_k = 0; \quad (1.84)$$

$$s = (s_k)_{k \in \mathbb{N}}; \begin{cases} k > 0 \Rightarrow s_k = \frac{1}{k}; \\ k = 0 \Rightarrow s_0 = 0; \end{cases} \quad (1.85)$$

A sucessão identicamente nula definida na equação (eq.84) é um exemplo de sucessão que converge para zero, é a sucessão constante zero. Um outro exemplo de sucessão que converge para zero está definida na equação (eq.85). em que eu incluí uma *regra de proteção* para o índice $k = 0$, entretanto a definição poderia ser arbitrária, porque o que interessa numa sucessão é o seu *comportamento para grandes valores do índice* e isto chama-se de *comportamento assintótico*.

Quando um índice dá problema, a gente o elimina!

Na figura (fig 1.9), página 27, você pode ver o gráfico da sucessão definida na (eq.85). Nela

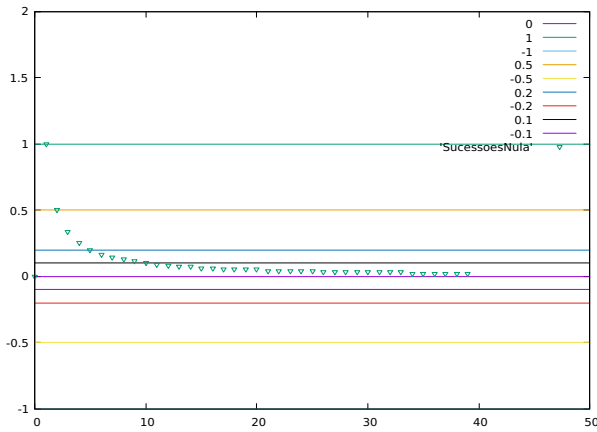


Figura 1.9:

você também pode ver retas horizontais marcando a abertura dum “*paquímetro*” com diâmetros $d \in \{1, 0.5, 0.2, 0.1\}$, a última “*abertura*” ficou pouco visível.

Paquímetro é o instrumento que você pode ver na figura (1.10), página 29. É um instrumento de alta precisão que serve para medir os diâmetros, interno ou externo, de figuras cilíndricas e usado pelos *torneiros mecânicos*.

coisa que uma bruxa confundiu com enca-nador...
Presidente Lula
é *torneiro mecânico*.

Aqui eu estou usando um *paquímetro* para determinar quando

$$|s_k| < \epsilon; \epsilon \in \{0.5, 0.2, 0.1\}; \quad (1.86)$$

e você pode verificar na figura

1. $\epsilon = 0.5$ vale para todo $k > 2$;

$$k > 2 \Rightarrow |s_k| < 0.5 = \epsilon;$$

2. $\epsilon = 0.2$ vale para todo $k > 5$;

$$k > 5 \Rightarrow |s_k| < 0.2 = \epsilon;$$

3. $\epsilon = 0.1$ vale para todo $k > 10$;

$$k > 10 \Rightarrow |s_k| < 0.1 = \epsilon;$$

Procure entender as “traduções” que eu fiz de cada sentença nos três casos que eu considerei. É esta tradução que eu vou usar na definição.

Eu estou querendo determinar a partir de qual índice k é verdade que “ $|s_k| < \epsilon$ ” e a figura me mostra três respostas para esta indagação.

Agora vou fazer a a definição de *sucessão que converge para zero* usando a experiência com sucessão da equação (eq.85).

Definição 5 (sucessão) que converge para zero Seja $s = (s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists K \in \mathbb{N}) (k > K \Rightarrow |s_k| < \epsilon); \quad (1.87)$$

Então s_k converge para zero e se usa a notação

$$s_k \rightarrow 0; \quad (1.88)$$

para indicá-lo.

Observação 1 .

A expressão matemática da convergência para zero tem uma tradução em linguagem humana:

- Para qualquer abertura $\epsilon > 0$ do paquímetro,
- existe um índice $K \in \mathbb{N}$,
- a partir de K , ou ainda $k > K$, posso garantir (implica) que $|s_k| < \epsilon$, ou ainda, todos os termos da sucessão ficam dentro da abertura do paquímetro.

Há também outra notação sobre a qual vou fazer comentários mais adiante.

O exemplo da equação (eq.85) me deu as três respostas listadas acima, mas não provou nada. Mas logo eu fazer esta demonstração.

Geometricamente, melhor dizendo, “figurativamente”, se você pegar um *paquímetro*, cuja imagem você pode ver na figura (1.10), página 29, você pode estabelecer uma abertura ϵ , como estabelece a definição e percorrer o gráfico duma sucessão até encontrar o índice K , a partir do qual a sucessão fica confinada numa faixa de raio ϵ em volta do eixo OX como mostra a figura (fig 1.10), página 29. O *paquímetro* serve para determinar *diâmetros*, aqui estou usando para encontrar a *largura* ϵ duma faixa em que os termos da sucessão ficam confinados a partir de um índice K . Se isto for possível, para qualquer que seja ϵ , você obteve

$$(k > K \Rightarrow |s_k| < \epsilon); \quad (1.89)$$

você encontrou o índice K que corresponde à abertura ϵ e a partir de K todos os termos da sucessão ficam confinados numa faixa de largura ϵ .

Agora eu preciso ter uma demonstração de que afirmação vale para valores arbitrário de ϵ , então a sucessão se encontra no conjunto S_0 . Preciso demonstrar porque exemplos nada provam.

Vou fazer *demonstrações*, e vou começar com exemplos simples para que você compreenda a *razão da coisa*. Deixe-me provar que a sucessão do exemplo apresentado na (eq.85) pertence ao conjunto S_0 .

$$\frac{1}{k} < \epsilon \Rightarrow k > \frac{1}{\epsilon}; \quad (1.90)$$

$$K = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor; \quad (1.91)$$

$$k > K \Rightarrow \left| \frac{1}{k} \right| < \epsilon \quad (1.92)$$

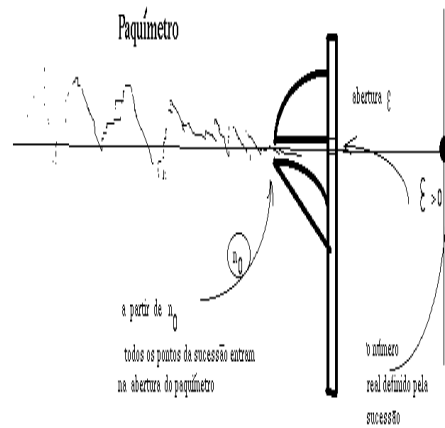


Figura 1.10: paquímetro e uma sucessão nula

Então $K > \frac{1}{\epsilon}$, entretanto eu procuro o *menor inteiro* que satisfaz esta condição, porque eu preciso especificar um inteiro a partir do qual fica garantido que s_k entra dentro da faixa de raio ϵ que fica em volta do eixo OX porque estou definindo quando s_k tem limite zero.

Deixe-me trocar em miúdos o conteúdo da sentença da equação (eq.91). Você viu na figura (fig 1.9)

$$k > \frac{1}{0.5} = 2 = K \Rightarrow \frac{1}{k} < 0.5 \quad (1.93)$$

mas nem sempre $\frac{1}{\epsilon}$ é um número inteiro e os índices das sucessões são números inteiros é por isto que eu preciso estipular o *menor inteiro que seja maior ou igual* $\frac{1}{\epsilon}$ que é o conteúdo da notação $\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$. A maioria das linguagens de programação entendem este símbolo da Matemática que elas chamam de `floor`, que significa *piso* em inglês, na *linguagem do império*.

- O menor inteiro que é menor ou igual a -0.5 é -1
- O menor inteiro que é menor ou igual a 0.5 é 0
- O menor inteiro que é menor ou igual a 1.5 é 1
- O menor inteiro que é menor ou igual a 2.5 é 2
- O menor inteiro que é menor ou igual a 3.5 é 3
- O menor inteiro que é menor ou igual a 4.5 é 4
- O menor inteiro que é menor ou igual a 5.5 é 5
- O menor inteiro que é menor ou igual a 6.5 é 6
- O menor inteiro que é menor ou igual a 7.5 é 7
- O menor inteiro que é menor ou igual a 8.5 é 8
- O menor inteiro que é menor ou igual a 9.5 é 9
- O menor inteiro que é menor ou igual a 10.5 é 10

para obter estes exemplos chamei Python3 e em seu terminal eu digitei

```
from math import ceil, floor;
I = range(0, 12);
for x in I:
    print('O inteiro, menor ou igual a', x-0.5, 'é', floor(x-0.5))
```

Observe a tabulação! Ela é que caracteriza os *blocos lógicos* na linguagem Python3.

- O primeiro comando, `from math import ceil, floor;` importa os comandos de matemática `ceil, floor`, do inglês, respectivamente, *piso, teto* que significam, respectivamente, *menor ou igual, maior ou igual*.
- `I = range(0, 12);` cria um *domínio inteiro de variação*, neste caso $I = \{0, 1, \dots, 11\}$.
- `for x in I:` abre um *bloco lógico*, uma sequência de comandos percorrendo I e executando uma sentença que está na próxima linha, dentro do *bloco lógico*.
- Quando você abre Python3 aparece no início da linha de comandos o símbolo `>>>` logo depois do qual você começa a digitar.
- Ao dar enter, Python3 aguarda nova entrada de dados, `>>>`, quando o comando é executável que eu sempre termino com `;`,
- ou quando for o começo dum *bloco lógico*, que deve ser terminado por `:`, Python3 lhe mostra as reticências `...`, neste caso, primeiro, use o tabulador, foi quando comecei a digitar o comando:
`print('O inteiro, menor ou igual a', x-0.5, 'é', floor(x-0.5));`
- Termine o comando dando, enter para encerrar o *bloco lógico* e Python3 resolve a questão que você tiver pedido, se tudo estiver sintaticamente correto.

Na prática esta definição me permite encontrar uma *aproximação* para o *valor assintótico* que a sucessão representa, quer dizer um valor que eu posso colocar no lugar de $s_k = \frac{1}{k}$ para ser usado como *representante* para esta sucessão com um erro da ordem ϵ .

Esta frase não é fácil, e ela representa um primeiro passo para a compreensão do limite que Richard Courant dizia que “*era o limiar do ensino superior*”, e ele falava isto em 1940... Continua ainda sendo a porta de entrada para o Cálculo. Se você passar por esta porteira o resto é bem mais simples. E eu vou justificar isto ao longo deste texto.

O que me interessa numa *sucessão que convirja para zero* é que ela tenha *propriedades*, e isto quer dizer, satisfaça a sentenças que possam ser traduzidas para um programa de computador que, pelo menos, mostre graficamente a relação K, ϵ para um valor de ϵ estipulado.

Foi o que usei para obter dois dos gráficos que aparecem neste texto que foram produzidos com auxílio de duas linguagens de programação, Python3, para fazer as contas, e gnuplot, [WKo10], para produzir os gráficos. O programa que usei para obter estes gráficos pode ser baixado de [Pra07, SucessoesNulas.calc]. O caso destes dois gráficos é um exemplo simples da *intrínseca praticidade* que tem o *formalismo matemático*.

Não somente para eu possa traduzir para um programa de computação, mas eu preciso de *sentenças* que caracterizem logicamente o conjunto que eu quero definir que eu preciso escrever formalmente para usar tanto em demonstrações como em programas de computação. Eu vou traduzir várias listas de equações para a linguagem de programação Python3 sem grandes diferenças.

Vou estabelecer isto de forma algébrica. Como já dei dois exemplos de tais sucessões, posso tranquilamente falar que existe um conjunto de tais sucessões e dar-lhe um nome.

$$S_0 = \{s; s \text{ sucessão que converge para zero}\}; \quad (1.94)$$

e os dois exemplos acima mostram que $S_0 \neq \emptyset$

Propriedades do conjunto S_0 .

1. Para todo número $K \in \mathbf{Q}$, se $s \in S_0 \Rightarrow Ks \in S_0$.

E que significa esta afirmação? Significa que o conjunto S_0 é estável por multiplicação: $KS_0 \subset S_0$ para qualquer número racional K . Para acender *sua curiosidade*, esta sentença significa que S_0 é um *ideal* do anel das sucessões, assunto da Álgebra!

E aqui eu posso falar baixinho um segredo, $K * 0 = 0$? Sim, eu vou querer depois definir S_0 como a *classe do zero*! É isto que é *limite*, são *classes de equivalência* que definem números. Um *ideal* do anel das sucessões!

2. $s, t \in S_0 \Rightarrow s + t \in S_0$ que significa que S_0 é fechado para adições. Isto já começa a fornecer uma estrutura algébrica ao conjunto S_0 . Pode ser que $(S_0, +)$ seja um *grupo* com a operação de adição. A propriedade anterior confirma, porque se $s \in S_0$ então $-s \in S_0$ tomando agora $K = -1$. Quer dizer que todo elemento em S_0 tem um inverso aditivo.

Olha o segredo: $0 + 0 = 0$; $-0 = 0$; $K * 0 = 0 \dots$

3. A propriedade comutativa é nata, uma vez que estarei somando sucessões de números racionais, assim como as propriedades associativa e distributiva. Repetindo a soma de sucessões é *comutativa*, *associativa* e *distributiva* do produto em relação à soma. Com isto cheguei a que $(S_0, +)$ é um *grupo* comutativo. Confira a definição de *grupo*, mas é a mesma estrutura que tem $(\mathbf{Z}, +)$ que é um *grupo*. Os *ideais* dum anel são subgrupos do anel.
4. Se $s, t \in S_0 \Rightarrow |s_k||t_k| < \epsilon^2 < \epsilon$ quando eu escolher $\epsilon < 1$, para um valor máximo das escolhas de K que satisfizerem à condição para cada uma das sucessões s, t . Esta frase ficou complicada! Para cada uma das sucessões s, t e tenho índices K_1, K_2 que eu posso colocar na definição de limite e garantir que

$$|s_k| < \epsilon, |t_k| < \epsilon \quad (1.95)$$

mas considere o maior dos dois K_1, K_2 e chame-o de K e agora vale

$$k > K \Rightarrow |s_k| < \epsilon, |t_k| < \epsilon; \quad (1.96)$$

$$k > K \Rightarrow |s_k||t_k| < \epsilon^2 < \epsilon; \quad (1.97)$$

$$k > K \Rightarrow |s_k||t_k| < \epsilon; \quad (1.98)$$

Esta explicação extra que dei agora é um exemplo interessante, os autores muitas vezes atropelam os leitores tirando conclusões curtas como eu fiz, antes de me corrigir. Desconfie sempre que você não entender um texto de Matemática, muito provavelmente o autor está atropelando, tente *abrir as contas* que é uma gíria muito usada entre os estudantes de Matemática quando encontram um resultado meio complicado. É porque ficaram escondidos os passos intermediários. Abra as contas!

Então $(S_0, \cdot)$ é fechado para multiplicação isto faz com que $(S_0, +, \cdot)$ seja um anel. Ou seja este conjunto de sucessões que convergem para zero é uma estrutura algébrica semelhante à $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$.

E porque eu fiz a restrição $\epsilon < 1$? Porque interessa-me garantir que $s \in S_0$ então s é uma sucessão assintoticamente pequena, quer dizer, na desigualdade

$$|s_k| < \epsilon; \quad (1.99)$$

eu vou precisar de escolher valores pequenos para ϵ .

E olha o segredo, $S_0 * S_0 \subset S_0$; $0 * 0 = 0$;

você precisa ler os cálculos feitos nas equações (eq.106)- (eq.109) para entender o que vou agora comentar. O *erro* ao considerar o limite de s como sendo $s_{20} = 1.3333333333333333$ é menor do que $\frac{3}{10^{21}}$.

Repetindo, $\frac{4}{3} \neq 1.3333333333333333$ mas tomar 1.3333333333333333 em lugar de $\frac{4}{3}$ representa cometer um erro da ordem de $\frac{3}{10^{21}}$.

Claro, $\frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$ e nós sabemos, os computadores sabem, fazer contas com este símbolo. O que *nem os computadores e nem nós* sabemos é fazer contas com π . E é esta a razão deste texto. Como é que vamos *falar com os computadores* e lhes passar um valor para π , ou qualquer outro número que não seja racional? A única forma de fazê-lo é passando um *valor aproximado* como

$$\frac{4}{3} \approx 1.3333333333333333; \quad (1.110)$$

No caso dos números racionais eu posso passar a um programa de computador o seu valor exato $\frac{p}{q}$ que também é um valor simbólico. No caso de π eu tenho que usar

$$\pi \approx 3.14159265358979323848 \quad (1.111)$$

sabendo que estou cometendo um erro da ordem de $\frac{3}{10^{21}}$.

Observe que eu *sei* que estou cometendo um erro desta ordem, o que ainda significa que eu tenho o controle do erro que estou cometendo. Isto ainda quer dizer que *sei* qual é o limite duma sucessão de números racionais que se *aproxima* de π e posso parar o processo algorítmico do cálculo de π quando for atingida a precisão que eu precisar.

Estes cálculos me deixam no ponto de mostrar-lhe o método para verificar se uma sucessão tem limite ou não, se ela é convergente ou não e finalmente se for convergente como tomar decisão pela escolha dum valor aproximado. As diferenças $|s_m - s_n|$ é que vão controlar a escolha de m como o ponto de decisão e então o limite $r \approx s_m$ e assim eu cheguei no *critério de Cauchy* para determinação de duas coisas:

1. se s_n é convergente, quando ela satisfizer ao *critério de Cauchy*,
2. a decisão de quando parar o algoritmo quando a precisão desejada for atingida.

É raro um autor se referir ao *critério de Cauchy* como um *método prático de aproximação*. Usualmente ele é apresentado como um *método teórico*, o que ele é, mas é importante o seu aspecto de determinação da aproximação desejada, ou necessária. Deixe-me enunciar o *critério de Cauchy* que é simples reformulação das contas que eu fiz nas equações (eq.106)- (eq.109).

critério de Cauchy
é uma condição
de existência!

Definição 7 (critério) de Cauchy

$$(\forall \epsilon) (\exists K \in \mathbb{N}) (m, n > K \Rightarrow |s_m - s_n| < \epsilon) \iff s_n \text{ converge}; \quad (1.112)$$

A sucessão s converge se e somente se satisfizer ao critério de Cauchy.

Observe que o *critério de Cauchy* garante que a sucessão *converge* mas fica *silencioso* a respeito do valor do limite. Quando o *critério de Cauchy* for verificado, então eu sei que qualquer um dos dois valores s_m, s_n podem ser usados como uma aproximação para o valor do limite com a *garantia* de que o erro cometido é da ordem de ϵ .

O *critério de Cauchy* é uma garantia de que o limite existe, ele estabelece quando um sucessão é convergente. É ele que divide as sucessões em duas grandes classes: a *classe das sucessões convergentes*, aquelas que definem *dízimas* e a *classe das sucessões divergentes*, aquelas que não definem *dízimas*.

Pensando no *paquímetro* a *semântica da coisa* fica ligeiramente diferente, agora o que estou verificando é todos os termos da sucessão, a partir de K ficam confinados numa faixa de raio ϵ e portanto o *limite* fica dentro desta faixa e em geral eu não vou conseguir calculá-lo exatamente.

Deixe-me dar-lhe um exemplo usando $\frac{4}{3}$, *exatamente* porque eu sei tudo a respeito deste símbolo. s_n é a dízima periódica que aparece na (eq.110). Eu quero que o erro máximo envolvido com uma aproximação seja 0.1 *para ser modesto...*

$$m, n > 3 \Rightarrow |s_m - s_n| < 0.1 = \epsilon; \quad (1.113)$$

$$|1.3333333333333333 - 1.3| = 0.03333333333333333 < 0.1; \quad (1.114)$$

então $s_1 = 1.3$ é o *valor do limite* com um erro $\epsilon = 0.1$, bem modesto.

Observe que eu evitei de usar os exemplos com π porque o algoritmo para determinar as decimais desta dízima é bem complicado e mais adiante, no Curso de Cálculo você irá encontrá-lo quando estiver estudando integral. Neste momento seria difícil de fazer uso deste exemplo.

Observação 2 *Mas você pode fazer!. um desafio!*

- um polígono regular convexo inscrito num círculo de raio 1 tem como perímetro, descoberto pelos gregos ou egípcios, ou armênios, sei lá, 2π .
- Você pode escrever um programa em Python3 que calcule o perímetro dum tal polígono S_n e ordenar que o programa pare quando $|S_n - S_m| < 0.0001 = \epsilon$

Você estará usando o critério de Cauchy para encontrar o valor de 2π com um erro $0.0001 = \epsilon$. Mas devo alertá-lo que isto será como milagres nas igrejas, para fazer o programa você vai ter que usar a fórmula do cálculo do perímetro usando trigonometria e, assim, estará usando π , indiretamente, dentro do programa. Mas será divertido como aplicação do critério de Cauchy. Vou deixar como desafio para os leitores corajosos. Se alguém me enviar o programa funcionando, eu incluo no livro com o registro do nome do autor.

Agora eu posso redefinir S_0 , como o conjunto de todos os elementos do anel das sucessões convergentes que têm limite zero. É a classe das sucessões de Cauchy que definem o zero. $\pi + S_0$ é a classe das sucessões de Cauchy que definem π , apenas eu não sei fazer esta conta.

Então eu vou encontrar uma saída bem a gosto dos Matemáticos que adoram brincar de *faz de contas*. Vou fazer de contas que eu sei, e é incrível como este método funciona, e por isto que Matemática é uma grande diversão, que infelizmente também serve para os banqueiros colocarem para funcionar o videogame que eles chamam de *mercado*.

Vou fazer exatamente a mesma coisa que se faz com os números racionais, com as frações, se define uma relação de equivalência. Agora vou usar o *critério de Cauchy* como uma *relação de equivalência*.

Definição 8 (critério) *Cauchy como relação de equivalência*

Considere duas sucessões s, t se

$$(\forall \epsilon) (\exists K \in \mathbf{N}) m, n > K \Rightarrow (|s_m - t_m| < \epsilon) \iff s \equiv t; \quad (1.115)$$

As duas sucessões s, t são equivalentes à Cauchy. Se uma delas for convergente, a outra também será e terão o mesmo limite, ou melhor, definirão o mesmo número real. Se uma delas for divergente, a outra também será.

Agora S_0 é a classe do zero, é uma classe de equivalência desta relação recém definida. É uma classe de sucessões de Cauchy de números racionais. Embora esta definição possa, inicialmente, parecer esdrúxula, é precisa e exata. Compare com um número racional, que também é uma classe frações equivalentes, embora isto não seja dito com frequência. Em geral se diz, erradamente, que um número racional é uma fração $\frac{p}{q}$; $q \neq 0$, quando na verdade é uma classe de equivalência de tais frações.

Da mesma forma um número real é uma classe de equivalência de sucessões de Cauchy um dos exemplos mais fáceis é o caso de $\sqrt[n]{n}$.

π pode ser obtido de forma muito rudimentar com uma definição geométrica que os gregos tonaram muito conhecida, é mais simples do que $\sqrt{2}$, porque uma aproximação para π pode ser obtida com polígonos regulares convexos:

- 1. Os polígonos circunscritos num círculo de raio 1, produzem uma sucessão decrescente que converge para π , considere o desafio já proposto.
- 2. Os polígonos inscritos num círculo de raio 1, produzem uma sucessão crescente que converge para π

Aqui você vê duas *sucessões de Cauchy*, que têm o mesmo limite, consequentemente duas sucessões de Cauchy equivalentes, dois exemplos da classe designada pelo símbolo π .

Na figura (fig 1.11), página 35, você pode ver duas sucessões, uma decrescente e a outra decrescente

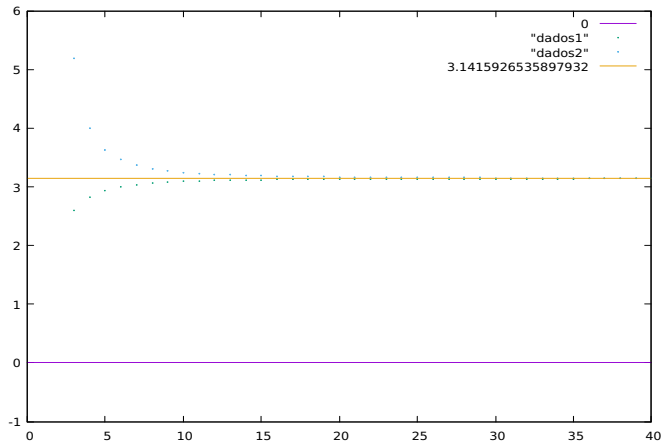


Figura 1.11: 2 dízimas que aproximam π

que convergem para π . Elas foram obtidas considerando os perímetros de polígonos regulares circunscritos e inscritos. Este é um exemplo *corrupção lógica*, o programa que rodei usa π para calcular o perímetro dos polígonos e naturalmente esta não pode ser uma forma de construir uma sucessão que convirja para π . Satisfaz ao meu objetivo neste texto porque mostra, graficamente, duas sucessões que convergem para π uma por valores maiores e outra por valores menores. Mas os gregos chegaram ao π usando o perímetro de polígonos, *medindo* e em sucessivas tentativas, provavelmente, obtiveram números parecidos com 3.21460183660255169038 que obtive usando Python3...

Mas, como já disse, avançando no estudo das integrais você vai encontrar uma que fornece um algoritmo para calcular a constante de Arquimedes. Na figura (fig 1.11), a linha horizontal cheia representa a dízima π .

O programa você encontra em [Pra07, NumerosReais.calc].

Qualquer sucessão convergente de números racionais é uma sucessão de Cauchy. Outra forma de dizer isto é *toda dízima* é um sucessão de números racionais convergente definindo um número real. Um número real é uma dízima, se for *dízima periódica* é um número racional, se não for *periódica* é um *número irracional*.

Para $\sqrt{2}$ se pode usar o algoritmo do cálculo da raiz escolhendo-se ora uma casa inferior ora uma cada superior, no algoritmo, para obter duas sucessões equivalentes que convergem para $\sqrt{2}$,

1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, ... (1.116)

2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214, ... (1.117)

Esta é uma introdução à construção dos números reais, uma das três mais conhecidas que é a minha preferida: via sucessões de Cauchy. Fazendo uma rápida defesa das *sucessões de Cauchy*, ou melhor do

teste de Cauchy, este teste provê uma aproximação para um número real com o erro estipulado ϵ :

$$\forall \epsilon > 0; \exists K \in \mathbf{N}; \quad (1.118)$$

$$n, m > K \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon \quad (1.119)$$

querendo parar o processo de construção dum número real com precisão ϵ basta descobrir $K \in \mathbf{N}$ do teste de Cauchy, então qualquer $x_n; n > K$ é uma ϵ aproximação para o número real procurado. Portanto um método prático e não um difícil método teórico como algumas vezes é pintado o teste de Cauchy.

Os passos desta construção eu vou apenas mencionar como uma lista de exercícios, não muito fáceis, para o leitor interessado em Álgebra.

1. O conjunto de todas as sucessões de números racionais, seja S este conjunto, é uma álgebra com divisores de zero. Dê pelo menos um exemplo de divisor de zero.
2. O conjunto de todas as sucessões que converjam para zero (logo sucessões de Cauchy) é um *ideal maximal* da álgebra S . Deixe-me chamar este ideal maximal de S_0 .
3. O quociente por um ideal maximal, numa álgebra, é um corpo, neste caso o corpo dos números reais: $S/S_0 = \mathbf{R}$.

Uma das consequências desta construção é

1. as propriedades do *limite* que se tornam óbvias neste contexto e praticamente impossível de serem demonstradas, como se pretende, no Cálculo Diferencial e Integral a não ser que os exercícios acima sejam feitos,
2. em outras palavras, o Cálculo Diferencial e Integral precisa da teoria dos anéis para demonstrar as propriedades do limite,
3. consequência, o assunto necessariamente fica confuso dentro do Cálculo Diferencial e Integral e Courant tinha razão, *limite é a porta de entrada da Matemática Superior* e precisa da Álgebra ...

Eu fujo fortemente da regra no que diz respeito à notação do *limite*. Para começar o próprio conceito de limite deve ser discutido. O *limite* é um *operador* que se aplica a distintos tipos de função e você vai ver isto ao longo do Curso de Cálculo. No caso das sucessões, que são funções cujo domínio é o conjunto $\mathbf{N}$, interessa-me saber qual é o comportamento assintótico duma sucessão que é o seu *valor* no ∞ . Se ela tiver um valor no ∞ , quer dizer que *ela tem limite* ou ainda é convergente.

Então a notação que eu uso é

$$s \in S_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0; \quad (1.120)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1.333 \dots = 1.(3) = \frac{4}{3}; \quad (1.121)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3.1415926 \dots = \pi; \quad (1.122)$$

são exemplos do valor do operador *limite* atuando sobre algumas das dízimas conhecidas.

1.1.7 O salto de cardinalidade

Foi Cantor que descobriu o *salto de cardinalidade* e que tentou demonstrá-lo sem sucesso e nem mesmo convencer os matemáticos de sua época de que havia um salto de cardinalidade, a tal ponto que ao final da vida nem mesmo ele acreditava em sua descoberta. Morreu doido!

Se um conjunto S tiver n elementos, $n \in \mathbf{N}$, então o *conjunto das partes* de S , $\mathbf{P}(S)$ terá 2^n elementos. Isto é uma consequência imediata do binômio de Newton que descreve em cada linha do *triângulo de Pascal* as combinações de n elementos tomados $p - a - p$ porque dado um conjunto com n elementos os seus subconjuntos são as combinações dos seus elementos. 2^n é a soma da linha de ordem n do *triângulo de Pascal*.

Em outras palavras *combinação* é sinônimo de *subconjunto*.

Mais,

$$S \subset \mathbf{P}(S); S \text{ é um elemento de } \mathbf{P}(S); \quad (1.123)$$

$$\begin{array}{l} \text{card}(S) \\ \text{card}(\mathbf{P}(S)) = 2^n \end{array} = n;$$

subconjunto próprio valendo logo para o $\emptyset$. Se um conjunto for finito, então $\text{card}(S) = n$, $\text{card}(\mathbf{P}(S)) = 2^n$ são números naturais. É o que ocorre com *conjuntos finitos*!

Uma *sucessão* é uma função definida em $\mathbf{N}$ com valores num certo conjunto. Aqui estou pensando em sucessões de números, de números racionais. Então uma sucessão de números racionais é um *arranjo com repetição* dos elementos de $\mathbf{Q}$, o conjunto de chegada entre estes arranjos se encontra a sucessão constante

$$\{s_0 = a; s_1 = a; \dots s_n = a; \dots\} \mapsto a; \quad (1.124)$$

uma sucessão constante *representa* o número racional a são *arranjos infinitos*, têm um número infinito de elementos.

Então o conjunto S das sucessões de números racionais contém como subconjunto próprio o conjunto $\mathbf{Q}$ e contém também como subconjunto próprio $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$, é quando deixa de valor a relação

$$\text{card}(S) = n \Rightarrow \text{card}(\mathbf{P}(S)) = 2^n; \quad (1.125)$$

porque no caso dos conjuntos infinitos, como $\mathbf{Q}$ $\text{card}(\mathbf{Q})$ não é um número foi assim que Cantor descobriu que a cardinalidade de $\mathbf{Q}$ e de $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$ tinham que ser distintas e que, se eu pudesse escrever a desigualdade *sem sentido*

$$\text{card}(\mathbf{Q}) < \text{card}\mathbf{P}(\mathbf{Q}) \quad (1.126)$$

e não havia *nenhum conjunto* com cardinalidade intermediária. Portanto havia um salto de cardinalidade. Na verdade a *cardinalidade* é uma classificação das *complexidades*. Eu entendo que cardinalidade e complexidade se equivalem.

Cantor não conseguiu uma demonstração para sua descoberta e nem mesmo conseguiu convencer a ninguém que tal salto existia. Foram precisos passar 100 anos para que Paul Cohen completando a tese de Gödel e estabelecendo que não é possível ter em Matemática uma única teoria dos conjuntos e sim pelo menos duas, uma delas é a chamada teoria dos conjuntos de ZFC (Zermelo-Fraenkel). Na teoria dos conjuntos de ZFC o *salto de cardinalidade* é um *axioma* que Cantor estava tentando demonstrar. Cantor, no final da vida começou a duvidar da sua teoria da cardinalidade e de fato morreu doido.

É o que Richard Courant sentia e expressou dizendo que *limite*, quer dizer, *número real* era o limiar da Matemática Superior. Em boa parte é isto que torna tão difícil provar as propriedades do limite, na verdade o que se está tentando provar são as propriedades dos números reais que eu aqui contornei produzindo $\mathbf{R}$ a partir dum conjunto que tem uma estrutura algébrica bem estabelecida e de fácil demonstração. $\mathbf{R}$ herda as propriedades de $\mathbf{Q}$ deixando de existir uma coisa chamada *propriedades do limite* que são, simplesmente, as propriedades de $\mathbf{R}$.

Finalizando, a cardinalidade de $\mathbf{R}$ é um novo salto na escala de cardinalidades que é chamada de c a cardinalidade do contínuo. Se deve a Cantor o *salto da cardinalidade* e ao morrer, Cantor, começou a duvidar do seu invento! Na Wikipédia você pode ler mais a respeito da vida e obra de Georg Cantor e se eu copiar aqui estarei cometendo plágio.

1.1.8 A propriedade arquimediana da reta

Para os números a propriedade adquire a redação “*entre dois números diferentes quaisquer, sempre tem outro entre eles, um terceiro que é maior dos que estes dois e um quarto que é menor do que eles todos*”.

Isto é consequência da escolha do 0 e do 1 criando uma *ordem na reta*.

Em símbolos ficaria assim, em que $\mathbf{R}$ representa a reta numérica

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \Rightarrow (\exists c \in \mathbf{R})(a \leq c \leq b); \quad (1.127)$$

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \Rightarrow (\exists d \in \mathbf{R})(a \leq b \leq d); \quad (1.128)$$

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \Rightarrow (\exists e \in \mathbf{R})(e \leq a \leq b \leq e); \quad (1.129)$$

e posso iterar esta propriedade indefinidamente *porque a reta é infinita*, consequentemente o *espaço é infinito*.

Todas as propriedades da *reta geométrica* se aplicam a *reta numérica*, mas a *reta numérica* é uma reta especializada que tem mais propriedades do que a *reta geométrica* o que a transforma no conjunto dos números reais.

A *reta numérica* é o conjunto $\mathbf{R}$.

Vou agora considerar um par de *retas numéricas* concorrentes no zero como mostra a figura (fig 1.12), página 38. Posso agora “numerizar” o plano. Com três retas podemos numerizar o espaço 3D e assim

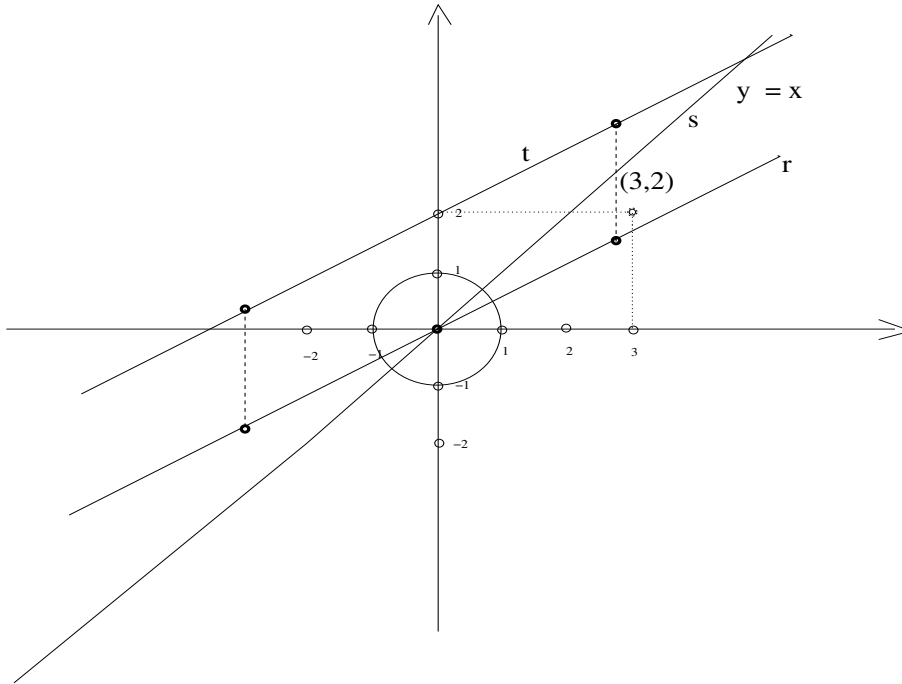


Figura 1.12: Sistema de coordenadas cartesianas

por diante. A figura (fig 1.12) é uma representação do produto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ criando o *plano numérico*. Mas esta denominação não é usada, o *plano numerizado* é chamado de *o plano coordenado* em oposição ao uso que se tem de chamar a *reta numerizada* de *reta numérica*.

1.1.9 Os números complexos

Ainda hoje existe um preconceito relativo aos números complexos, de que eles são um conceito difícil. Eu terminei o Ensino Médio com conhecimentos bem fragmentados de Matemática, meu pai sonhava que eu me formasse em Direito que era um sonho da vida dele e me conduziu nesta direção e eu até fiz o vestibular de Direito e depois terminei *caindo* na Matemática onde penei até me equilibrar ficando várias vezes reprovado. Mas eu aprendi os números complexos no Ensino Médio porque tive um professor de Matemática que vibrava com os *números complexos* e me passou esta vibração. O Cálculo fica muito mais fácil se for desenvolvido usando os *números complexos* e eu vou usá-los neste livro.

Um número complexo é um número da forma $a + bi$

$$a + bi; \quad (1.130)$$

$$a, b \in \mathbf{R}; i = \sqrt{-1} \quad (1.131)$$

Estes números surgem naturalmente como soluções de equações do segundo grau quando o *determinante de equação* for negativo então a *fórmula de Baskhara* produz os *números complexos*. Confira o exemplo,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad (1.132)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow x \notin \mathbf{R} \quad (1.133)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac; \quad (1.134)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow -\Delta > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm \sqrt{(-1) - \Delta} = \pm i \sqrt{-\Delta}; i = \sqrt{-1} \quad (1.135)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = a + bi; \quad (1.136)$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -11 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i \sqrt{11}; \quad (1.137)$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{3+i\sqrt{11}}{2}, \frac{3-i\sqrt{11}}{2} \right\}; \quad (1.138)$$

$$a + bi \in \left\{ \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{11}}{2} \right\}; \quad (1.139)$$

Quando $\Delta < 0$ se define $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$ confira equação (eq.135) fazendo aparecer os números com o formato $a + bi$; $a, b \in \mathbf{R}$, na equação (eq.136) ou ainda na equação (eq.138).

Observe que esta invenção expande uma propriedade dos números, agora

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}; \quad (1.140)$$

que somente valia para os números reais positivos e agora vale para qualquer número complexo.

O nome que estes números adquiriram caracteriza o preconceito que durante muito tempo eles carregaram quando eles não eram considerados números e inclusive esta denominação criou, e segue criando dificuldades na assimilação destes números no ensino da juventude. Confira *complexo, número* para obter mais informações sobre o conjunto dos números complexos, sua estrutura algébrica.

Praticamente tudo que se possa dizer sobre os números reais, também pode ser dito sobre os números complexos. Existe uma exceção importante a esta regra, que é sobre a relação de ordem. O conjunto dos números reais é um corpo *totalmente ordenado*, quer dizer, todo subconjunto $K \subset \mathbf{R}$ que seja limitado, tem um *supremo* b e um *ínfimo*, a . dois números reais únicos que determinam um intervalo, $K \subset [a, b]$.

O conjunto dos números complexo não possui uma relação de ordem perfeita como é a ordem em $\mathbf{R}$: todo conjunto limitado de números reais tem um *supremo* e um *ínfimo*, e esta afirmação não pode ser feita para o conjunto dos números complexos. Por exemplo, a bola unitária é limitada e não está contida em nenhum intervalo. Quando você avançar em Matemática vai ver que o conjunto dos números complexos tem uma propriedade substituta, todo conjunto limitado tem um módulo máximo, em outras palavras,

todo conjunto limitado do conjunto dos números complexo está contido numa bola, é a propriedade do *módulo máximo*.

Tem mais coisa que tornam os dois conjuntos diferentes e vou mostrar isto quando tratar das *funções complexas* num próximo volume desta coleção.

No próximo capítulo vou voltar aos números complexos sob a forma de vetores. Antes de terminar vou fazer uma breve lista de operações com os números complexos.

A notação que eu vou usar é a chamada *forma polar* em que se expressa um número complexo como um múltiplo de um elemento do círculo unitário $\mathbf{S}^1$. Faça-lhe a sugestão de verificar todas estas fórmulas e se habituar com elas porque aparecem com frequência nos cálculos.

$$u = (a, b) = \rho(\cos(\alpha), \sin(\alpha)); \rho = \|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad (1.141)$$

$$v = (p, q) = \sigma(\cos(\beta), \sin(\beta)); \sigma = \|v\| = \sqrt{p^2 + q^2}; \quad (1.142)$$

$$u + v = (a + p, b + q); \langle u, v \rangle = ap + bq = \|u\|\|v\|\cos(\gamma) = \cos(\gamma); \quad (1.143)$$

$$\lambda u = (\lambda a, \lambda b); \lambda \in \mathbf{R}; \quad (1.144)$$

$$\bar{u} = (a, -b) \text{ conjugado de } u; \quad (1.145)$$

$$u\bar{u} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = \|u\|^2; \quad (1.146)$$

$$\frac{1}{u} = \frac{\bar{u}}{\|u\|^2}; u \neq 0 \quad (1.147)$$

Mas, para terminar, faço-lhe um alerta, todos os livros de Cálculo ignoram os números complexos e com isto ajudam a manter o terror injustificado que eles infundem nos estudantes. Fazer cálculos com os números complexos é apenas duas vezes mais difícil porque eles têm duas coordenadas, na verdade quatro vezes mais difícil, observando que o produto de números complexos envolve o cálculo de quatro expressões. E o ganho que se tem adotando os números complexos é imenso.

Parte II

Funções e curvas polinomiais

Capítulo 2

O espaço bidimensional

2.1 Geometria Analítica

2.1.1 Funções e seus gráficos

Função é um tipo de *relação* entre elementos dum produto cartesiano de dois conjuntos, $A \times B$, isto quer dizer, o gráfico da função é um subconjunto de $A \times B$.

Considere o produto cartesiano $A \times B$ de dois conjuntos não vazios. O primeiro, A , é o *domínio* duma função f cujo gráfico são os pontos

$$\{(x, y); x \in A, y \in B; y = f(x); \}; \quad (2.1)$$

$$f : A \longrightarrow B; x \mapsto y = f(x); \quad (2.2)$$

$$A \xrightarrow{f} B; A \ni x \mapsto y = f(x) \in B; \quad (2.3)$$

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}; x \mapsto y = f(x) = x^2; \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

e o segundo, B é o *contradomínio* da função f . Algumas vezes se usa a denominação mais intuitiva *conjunto de saída*, para o *domínio* e *conjunto de chegada* para o *contradomínio*. A notação na equação (eq. 3) é mais esquisita mas você deve se preparar para encontrá-la sendo equivalente ao que está expresso na equação anterior. A última equação define inteiramente uma função polinomial do segundo grau.

Há muitas relações que atendem a especificação acima, mas será uma função se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B); y = f(x); \quad (2.6)$$

$$\text{a imagem } y \text{ é única para cada } x \in A; \quad (2.7)$$

1. todos os elementos do domínio A são utilizados;
2. a imagem $f(x)$ é única para todos $x \in A$;
3. observe que a condição anterior não impede que uma mesma imagem $f(x)$ corresponda a vários elementos, como é o caso das funções constantes.

O conjunto A é o domínio, o conjunto B é o contradomínio da função f , e a expressão $y = f(x)$ é uma relação que especifica como se pode obter a imagem dum elemento dado, x .

Observe que pode não haver condição de usar de todos os elementos do contradomínio B , em particular, a *função constante*, que associa todos os elementos do domínio A com um único elemento do contradomínio B é uma função de grande importância e faz uso de apenas um elemento do B se este não for um conjunto unitário.

A figura (fig 2.1), página 44, ilustra todos os conceitos descritos acima usando *diagramas de Venn*.

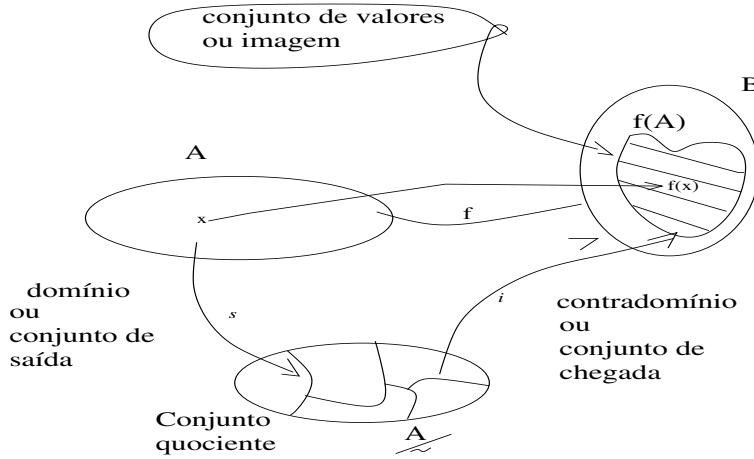


Figura 2.1: $f: A \rightarrow B$;

O subconjunto de B formado por todas as imagens $f(x)$; $x \in A$ é chamado de *conjuntos dos valores* de f , ou *imagem* de f .

Se todos os elementos do contradomínio forem utilizados, cabe pensar numa função inversa e ela existe em dois casos:

1. injetividade se f for *injetiva*,

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \text{ ou } f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

neste caso f é também bijetiva representando uma forma de identificar os dois conjuntos A, B .

Posso usar isto para identificar duas estruturas algébricas, como $(R, +)$ e $(R^{++}, \cdot)$ porque a função $\log$ é uma bijeção entre os dois conjuntos subjacentes a estas duas estruturas.

2. Se o conjunto B for todo utilizado, mas f não for injetiva confundindo elementos que tenha a mesma imagem, posso definir uma relação de equivalência ($\text{mod } f$) e definir uma função bijetiva do *conjunto quociente* ($\text{mod } f$) em B que então será bijetiva. É isto que ocorre na congruência, nos restos da divisão por um número inteiro maior ou igual a 2, chamadas *classes dos restos*. As classes de equivalência ($\text{mod } f$) são definidas como os subconjuntos de A , do domínio, que tenham a mesma imagem em B . “Equivalente”, aqui, quer dizer *ter a mesma imagem*.

Neste caso a função inversa existe mas não é do tipo

$$f^{-1}B \rightarrow A; \quad (2.8)$$

e sim do tipo

$$f^{-1}B \rightarrow \mathbf{P}(A); \quad (2.9)$$

associando a cada elemento de B com um subconjunto de A .

Neste segundo caso f não tem inversa, mas com frequência é preciso de trabalhar com a “inversa” neste caso para encontrar a classe de equivalência a que pertence um determinado elemento que é o nome de cada subconjunto de A que é imagem de algum elemento $y \in B$. Um exemplo muito comum, bem seu conhecido, é o caso da raiz quadrada que você costuma escrever

$$x \mapsto \pm \sqrt{x} \tag{2.10}$$

a imagem de x é um conjunto formado por dois elementos, estes dois elementos formam uma classe de equivalência que é a imagem única de x . Você tem aqui um exemplo comum em que a função tem como imagem um conjunto de classes de equivalência.

A Matemática contornou o problema de valores múltiplos criando o conceito de classe de equivalência e conjunto quociente!

- 3. Conjunto quociente aparece na figura (fig 2.1), página 44, identificado com o símbolo $A/\approx$ das classes de equivalência $mod(f)$. Fazer um comentário sobre esta notação, penso, acresceta dados para que você compreenda o conjunto quociente. Esta é uma notação das mais expressivas, de fato o conjunto A está sendo dividido em subconjuntos que são as classes de equivalência que a função gera no domínio, volte à figura (fig 2.1), página 44, onde você vai ver o conjunto quociente que eu desenhei copiando o conjunto A dividido em subconjuntos. A está dividido em classes de equivalência.
- 4. Decomposição canônica duma função que aparece na figura (fig 2.1), página 44, com os morfismos i, s então $ios = f$.

Na figura (fig 2.2), página 45, você pode identificar três subconjuntos do produto cartesiano $A \times B$ e

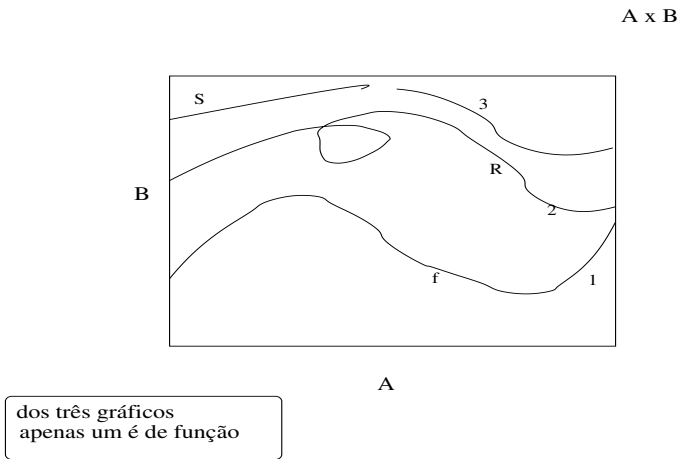


Figura 2.2: dos três gráficos, apenas um é de função

apenas um deles é o gráfico de uma função, o que está marcado com a etiqueta (1). No gráfico marcado com (2) falha a condição da equação (eq. 7) uma vez que há pontos do conjunto A que têm dupla imagem, mais de uma imagem. No gráfico marcado com (3) falha a condição da equação (eq. 6) uma vez que há pontos de A que não tem nenhum correspondente no gráfico.

Para definir uma função, um gráfico é suficiente, então o gráfico na figura (fig 2.2) marcado com a etiqueta (1) define uma função:

$$f : A \rightarrow B; y = f(x); \tag{2.11}$$

sendo a equação o próprio gráfico que pode ter sido obtido por um aparelho que esteja medindo algum fenômeno e registrando a intensidade do mesmo numa folha de papel com um plotador “durante o tempo”

que o conjunto A representa, um intervalo de tempo. Neste caso o conjunto B também seria um intervalo de números reais e existe um *subconjunto* do conjunto B que corresponde à variação do fenômeno descrito por f que é o nome da função. Na mesma figura você também pode ver identificados os gráficos das relações R, S que não são do “*tipo função*”.

É muito comum que se defina uma função com auxílio de uma equação também fornecendo o domínio, A e o contradomínio, B , em cujo produto cartesiano, $A \times B$ está o gráfico da função:

$$y = f(x) = (x + 3)(x - 4); x \in [-5, 10]; f : [-5, 10] \rightarrow \mathbf{R}; \quad (2.12)$$

cujo gráfico você pode ver na figura (fig 2.3), página 46, e você pode observar que o contradomínio, $\mathbf{R}$, é

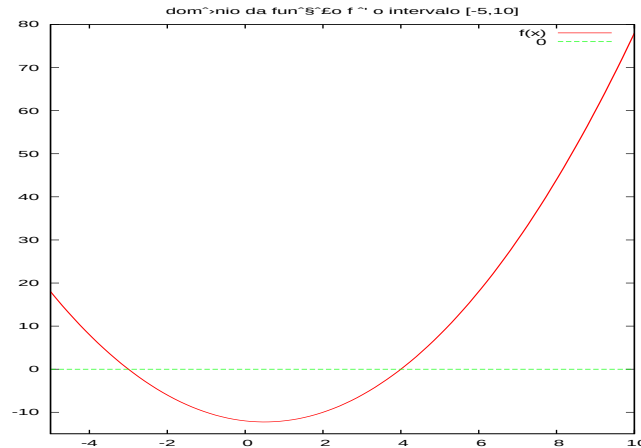


Figura 2.3: domínio da função f é o intervalo $[-5, 10]$

muito grande, mas o domínio, $[-5, 10]$ foi totalmente utilizado.

A equação poderia ter sido escrita como $z = f(t) = (t + 3)(t - 4)$ e na verdade não há “*variáveis*” em funções. A presença de x, y, t, z na redação da equação apenas indicam defeitos de linguagem como você pode ver na próximo exemplo.

Considere g o polinômio do terceiro grau com coeficientes 3, 4, 5, 0 em ordem decrescente das potências. Esta é uma forma aparentemente complicada de dizer

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}; g(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x; \quad (2.13)$$

mas ilustra a afirmação de que não existem variáveis em funções, eu poderia dizer, com um certo erro, que uma função é um *gráfico* e o erro está em que nem sempre posso *apresentar o gráfico* duma função embora ele exista e seja impossível apresentá-lo usando algum dispositivo gráfico. Algumas vezes é apenas muito difícil construir o gráfico duma função.

Há autores que definem *função* usando o conceito de gráfico:

Definição 9 (função) como um gráfico

Dados dois conjuntos A, B , um subconjunto $\text{graf}(f) \subset A \times B$ é o gráfico duma função se qualquer que seja a reta perpendicular ao conjunto A corta $\text{graf}(f)$ uma e somente uma vez.

Fica claro que a “*função raiz quadrada*” não é uma função, mas precisamos dela com frequência para resolver equações do segundo grau então a solução é defini-la usando as classes de equivalência. . .

Uma reta perpendicular ao conjunto B pode cortar $\text{graf}(f)$ mais de uma vez. Esta definição é particularmente útil para determinar qual é o gráfico que é de função na figura (fig 2.2).

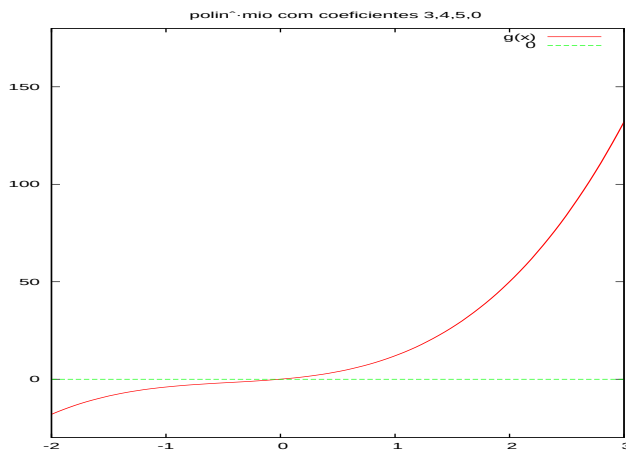


Figura 2.4: o polinômio com coeficientes 3, 4, 5, 0

Na figura (fig 2.4), página 47, você tem o gráfico do polinômio g que está especificado apenas com a indicação de quais são os seus coeficientes na ordem decrescentes da potência. Como foi indicado o coeficiente zero, então fica claro que o coeficiente de maior grau é 3 do contrário não se teria um polinômio do terceiro grau. Este exemplo mostra que não preciso de nenhuma variável para descrever completamente a função g , entretanto, para obter o seu gráfico com `gnuplot` eu me vi obrigado a escrever

$$g(x) = 3 * x ** 3 + 4 * x ** 2 + 5 * x;$$

novamente por um defeito de linguagem para comunicar-me com a linguagem de programação que não tem um vocabulário suficiente para que eu lhe diga que desejo o gráfico do polinômio com coeficientes 3, 4, 5, 0, uma deficiência de linguagem. As funções podem ser vistas como extensões do conceito de número e nesta forma de ver posso somar, multiplicar, subtrair, dividir, calcular potências de funções e a maioria das linguagens de programação entendem estas operações. Considere este exemplo como `gnuplot`

```
pow(x,n) = x**n;    ## (1)
g(x) = 3*pow(x,3)+ 4*pow(x,2)+5*x; ## (2)
set title "polinômio com coeficientes 3,4,5,0 "; ## (3)
set xrange [-2:3]; set yrange [-30:180]; ## (4)
f(x) = sin(x)*g(x)    ## (5)
plot g(x),0, f(x);    ## (6)
plot f(x)+g(x)+4      ## (6)
pause -2 "aperte enter para terminar" ## (7)
```

O símbolo do jogo da velha significa para `gnuplot` o início dum comentário fazendo-o ignorar tudo daquele ponto até o fim da linha, e desta forma pode ignorar uma linha completa, se o comentário estiver no início da linha. Estou usando os comentários para fazer referência a cada linha do *programa*

Raspe e cole este código num terminal do `gnuplot` [WKO10] para conferir o resultado e se habituar a usar `gnuplot` que ajuda muito a entender a Matemática.

1. defini a função `pow()` usando uma expressão nativa de `gnuplot`.
2. defini um polinômio de grau 3, observe que está sendo efetuado o produto de $3 * \text{pow}(x, 3)$, do número 3 pela função polinomial x^3 . Também uma soma de funções que finalmente define o

polinômio g portanto `gnuplot` sabe multiplicar números por funções, somar funções. Confira a linha de número (6).

3. Um título foi dado ao gráfico.
4. A definição do domínio e do contradomínio.
5. Definição da função f como produto da função $\sin$ pelo polinômio g .
6. O comando que gera os gráficos de g , f e do eixo OX . No “plot” seguinte você vê que `gnuplot` “sabe” somar três funções f , g , 4, três ou mais, você é quem decide!
7. Um comando que para `gnuplot` permitindo que o gráfico fique na tela, apertando “enter” faz com que `gnuplot` prossiga e neste caso seja encerrado.

As, funções como extensão dos números, servem para guardar, memorizar, a intensidade de fenômenos. O exemplo do código do `gnuplot` mostra que você pode trabalhar com a *álgebra de funções*

2.2 Variedades lineares

O conceito *variedade* foi introduzido para romper a prisão em que Geometria Euclidiana nos manteve por séculos. Variedade é um objeto geométrico, portanto uma reta é uma variedade, um círculo é uma variedade, um plano é uma variedade.

Há uma diferença entre círculo e reta: retas são *variedades lineares* e círculos são *variedades não lineares*. Eu vou adotar a forma como um professor de línguas dá aulas incrementando o vocabulário com exemplos. Então vou dar exemplos de *variedades* e aos poucos este conceito vai se tornar nativo no seu vocabulário matemático.

Como o objetivo da Geometria Analítica é algebrizar e numerizar os entes geométricos, então o próximo passo é encontrar a equação da reta. Mas reta é uma *variedade linear de dimensão 1*. Um novo conceito, *dimensão*! É mais fácil dar exemplos para que você adquira este novo conceito.

1. No primeiro capítulo descrevi os *números* terminando com dois tipos de números, os números reais que se identificaram com uma reta, uma variedade dimensão 1 e
2. os números complexos que se identificaram com um *plano*, uma variedade dimensão 2.
3. O “espaço”, como pensavam os gregos, é o

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad (2.14)$$

uma *variedade linear de dimensão 3*.

Então eu já lhe apresentei alguns exemplos e vou agora somar estas ideias em conjunto:

- Um ponto é *variedade de dimensão zero*, eu vou dizer que é uma *variedade linear de dimensão 0*, pode ser uma *variedade não linear de dimensão 0*, funciona! E funciona porque um ponto pode ser visto como um círculo de raio zero.
- Uma reta é uma *variedade linear de dimensão 1*.
- Um círculo é uma *variedade não linear de dimensão 1*. As curvas são *variedades de dimensão 1*, se o raio não for nulo...

- Um plano é uma *variedade linear de dimensão 2*, porque num plano há uma infinidade de retas com distintos ângulos entre elas. Mas eu ainda preciso mostrar como vou calcular o ângulo entre retas. Neste momento estou usando a sua experiência e se eu lhe pedisse que traçasse num papel duas retas que tivessem entre si um ângulo reto, você saberia desenhar, portanto você sabe que existe ângulos entre retas que estejam no mesmo plano. É isto que caracteriza o plano como uma *variedade linear de dimensão 2*, nele há retas que têm ângulos diferentes de zero, entre elas.
- O “espaço”, $\mathbf{R}^3$ é uma *variedade linear de dimensão 3*, porque eu posso ter *retas reversas*, quer dizer, duas retas que não se encontram num mesmo plano e, conseqüentemente, eu posso ter planos distintos dentro do $\mathbf{R}^3$ então a dimensão do $\mathbf{R}^3$ tem que ser maior do que 2. Como seria um exemplo de $u \in \mathbf{R}^3$? Acho que você aceitaria que eu lhe disse que $u = (x, y, z)$ um objeto determinado por três coordenadas. Os elementos de $\mathbf{R}^3$ são desta forma, eu preciso de *três informações independentes* para determinar um elemento do $\mathbf{R}^3$ é o que caracteriza que $\mathbf{R}^3$ tem dimensão 3. Além disto ele contém retas e planos que seria uma forma de caracterizar $\mathbf{R}^3$ como uma variedade linear de dimensão 3.
- duas retas perpendiculares determinam um plano, e um plano é uma variedade linear de dimensão 2, dois planos perpendiculares determinam o “espaço”, $\mathbf{R}^3$, que assim é uma variedade linear de dimensão 3. Quando eu souber escrever equações de retas e planos, eu vou poder calcular ângulos entre estas variedades.

Estes conceitos antigos, agora traduzidos como variedades, podem ser mais adiante concretizada, neste momento, sei, são afirmações ainda vagas produzidas pela via de exemplos.
Então vou apresentar as equações das variedades lineares.

2.3 Equação duma variedade linear de dimensão 1

Dado um vetor $u \in \mathbf{R}^2$, $u = (a, b)$ seus múltiplos geram triângulos semelhantes é o que você pode ver na figura (fig 2.5), página 49, e, conseqüentemente, se encontram sobre uma mesma reta. Para

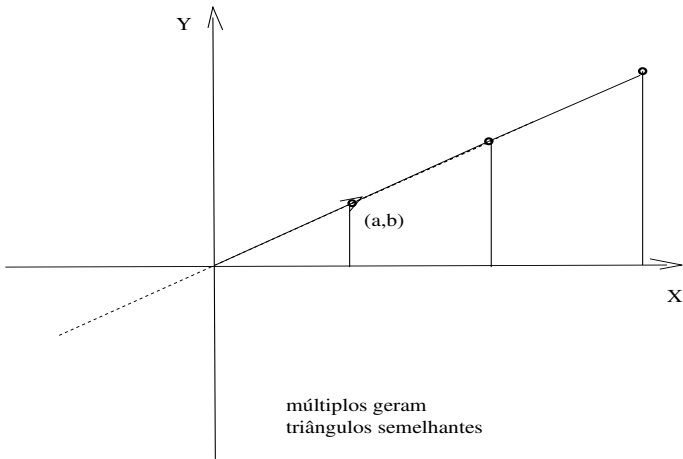


Figura 2.5: reta e proporcionalidade

demonstrá-lo, negue a afirmação: “eles não se encontram sobre a mesma reta”, então os catetos não são proporcionais, mas eles foram obtidos por multiplicação de constantes que produzem a mesma razão!

Aqui entre o coeficiente angular de reta.

Ou seja, não estarem sobre a mesma reta contradiz que eles sejam múltiplos portanto sendo múltiplos se encontram sobre uma mesma reta. Esta razão é o *coeficiente angular da reta* que contém estes vetores. Vou falar do *coeficiente angular* de retas mas sou crítico a respeito: quando um módulo estiver navegando no espaço e precisar sair na direção duma reta, não vai haver *coeficiente angular* que seja útil... A figura (fig 2.6), página 50, lhe mostra como posso me livrar do *coeficiente angular* usando um vetor

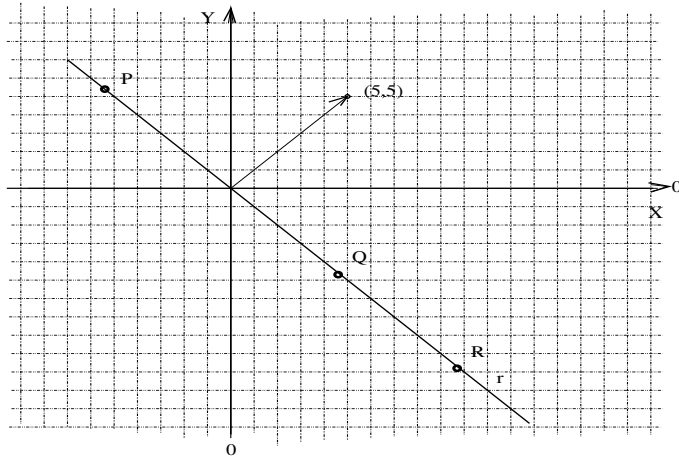


Figura 2.6: Vetor perpendicular a uma reta

perpendicular à reta que além do mais lhe oferece uma maneira simples de escrever a equação da reta quando ela passa na origem,

$$u = (A, B); u \perp r; (x, y) \in r \Rightarrow \langle (A, B), (x, y) \rangle = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{equação da retar é } Ax + By = 0; \quad (2.16)$$

$$(p, q) \in r \Rightarrow Ap + Bq = 0; \quad (2.17)$$

que lhe mostra como usando a direção do vetor $\vec{u}$ mais um ponto $(p, q) \in r$ eu posso obter a equação cartesiana da reta r quando ela passa na origem.

Comecei com um caso particular: a reta r passa na origem, deixe-me ver o caso de uma reta s , paralela à reta r que não passe na origem. Tome um ponto $(m, n) \in s$ e considere a expressão

$$t = \{(x - m, y - n); (x, y) \in s\} = s - (m, n); \quad (2.18)$$

O conjunto t é um *deslocamento* da reta pelo vetor (m, n) e um dos elementos de t é $(0, 0)$ quando $(x, y) = (m, n)$ então $t = r$, pela Geometria Euclidiana, porque t é paralela à reta r e tendo um ponto em comum $(0, 0)$ elas coincidem: $t = r$ e a expressão na equação (eq.18) é uma outra forma de escrever a equação da reta r e eu vou reescrever a equação (eq.16) usando esta informação:

$$u = (A, B); u \perp r; (x - m, y - n) \in r \Rightarrow \langle (A, B), (x - m, y - n) \rangle = 0 \quad (2.19)$$

$$\text{equação da retas é } A(x - m) + B(y - n) = 0; \quad (2.20)$$

$$Ax + By - (Am + Bn) = Ax + By + C = 0; C = -(Am + Bn); \quad (2.21)$$

A equação duma reta perpendicular ao vetor (A, B) é $Ax + By + C = 0$ e você determina o valor de C aplicando esta equação a um ponto que pertença à reta.

Exemplo 3 (equação da reta) perpendicular a (A, B)

Se a reta r for perpendicular ao vetor (A, B) e passe pelo ponto (a, b) sua equação será

$$Ax + By + C = 0$$

e como passa no ponto (a, b) então $Aa + Bb + C = 0 \Rightarrow C = -(Aa + Bb)$.

Na figura (fig 2.6), página 50, r passa na origem então

$$(p, q) = (0, 0) \in r \Rightarrow Ap + Bq + C = 0 \Rightarrow C = 0; \quad (2.22)$$

$$\text{equação da retar é } Ax + By = 0; \quad (2.23)$$

$$(0, 0) \in r \Rightarrow (A, B) \perp r \Rightarrow \text{equação da retar } Ax + By = 0; \quad (2.24)$$

O *produto escalar* vai me dar uma saída para evitar o *coeficiente angular*.

Uma variedade linear de dimensão 1, que passe na origem, é o lugar geométrico dos pontos do espaço que contém vetores com coordenadas proporcionais.

Esta propriedade vai me permitir de encontrar a equação duma *variedade linear de dimensão 1* que passe na origem. Qualquer ponto (x, y) sobre esta variedade é da forma $(\lambda a, \lambda b)$

$$x = \lambda a; y = \lambda b; \frac{y}{x} = \lambda; y = \lambda x; \quad (2.25)$$

esta fórmula não vale para retas que sejam perpendiculares ao eixo OX , criando uma exceção. Então eu vou encontrar uma outra forma de criar equações para *variedades lineares de dimensão 1* que passem na origem. λ é o *coeficiente angular* desta reta.

O *produto escalar* vai me dá uma saída para evitar o *coeficiente angular*, e eu insisto que a Geometria Analítica serve para muitas aplicações, com auxílio do Cálculo e das Equações Diferenciais, para escrever programas que gerenciem o tráfego dos módulos espaciais.

Mostrei como com o vetor $u = (A, B)$ podia estabelecer a condição para determinar o conjunto dos pontos do plano que sejam perpendiculares a u . Geometricamente é uma reta, certo? Quem o garante é a Geometria Euclidiana. Tome um ponto (x, y) genérico em cima desta reta e exigindo que ela passe na origem, então

$$\langle (x, y), (A, B) \rangle = 0 \quad (2.26)$$

porque dois vetores perpendiculares determinam o ângulo $\frac{\pi}{2}$ cujo cosseno é zero. Então

$$\langle (x, y), (A, B) \rangle = 0 \Rightarrow Ax + By = 0; \quad (2.27)$$

é a equação duma reta que seja perpendicular ao vetor $u = (A, B)$ e que passe na origem.

Agora não interessa qual é a *inclinação* de $u = (A, B)$, qualquer que seja $u = (A, B)$, a equação dum reta que lhe seja perpendicular e que passe na origem é $Ax + By = 0$. Você pode desenhar diversos exemplos e calcular equações de retas passando na origem perpendiculares a um dado vetor $u = (A, B)$.

Deixe-me fazer uma modificação na equação $Ax + By = 0$ para lhe mostrar a maneira prática de determinar a equação $Ax + By + C = 0$ duma reta que não passa na origem.

$$Ax + By + C = 0; C \neq 0; Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = \frac{-(Ax + C)}{B}; \quad (2.28)$$

e eu obtive a equação duma variedade linear deslocada de $-\frac{C}{B}$ se $B \neq 0$. Se $B = 0$ posso repetir as contas dividindo agora por A . E uma das duas constantes, A ou B tem que ser diferente de zero do contrário este exemplo se trivializa, tudo é zero!

Defina agora a função do primeiro grau

$$B \neq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-(Ax + C)}{B} = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}; B \neq 0; \Rightarrow f(0) = -\frac{C}{B}; \quad (2.29)$$

O Cálculo precisa da equação da reta com coeficiente angular.

Neste livro vou ignorar que existem Geometrias não euclidianas... mas elas existem, a geometria da Terra não é euclidiana!

E, no espaço, será assim que um programa irá encontrar a equação da reta que interessar.

e a equação $Ax + By + C = 0$ é a equação de uma reta perpendicular ao vetor $u = (A, B)$ que passa no ponto $(0, -\frac{C}{B})$. No gráfico da função $f(x) = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ o número $-\frac{A}{B}$ é o coeficiente angular desta reta e depois no Cálculo você vai aprender que é a *derivada constante* de uma função do primeiro grau. Se $B = 0$ refaça as contas dividindo por A e não tem sentido que sejam ambos, A, B sejam nulos. O número $-\frac{C}{B}$ é chamado de coeficiente linear desta reta e estou fazendo este registro porque ainda estes dois “coeficientes” são muito usados na literatura e sobre tudo em questões de concursos...

Se uma reta, uma variedade linear de dimensão 1, não passar na origem sua equação é da forma $Ax + By + C = 0$ com $C \neq 0$. Em geral a afirmação que se faz é

$$Ax + By + C = 0 \quad (2.30)$$

é a equação de uma variedade linear de dimensão 1 que não passa na origem se $C \neq 0$, por uma questão de beleza no formato da equação e a Matemática é a ciência do belo. Mas, ela continua sendo perpendicular ao vetor $u = (A, B)$. Esta é a razão que esta formulação para encontrar a equação de uma reta é mais eficiente, e é ela vai servir quando você estiver programando a viagem dum módulo espacial.

2.4 Distância entre objetos

2.4.1 Entre dois pontos

A Geometria Analítica *digitalizou* o espaço e a geometria euclidiana, tornando possível a algebrização da geometria. Assim (x, y) , para dois números reais dados, representa um ponto do espaço $\mathbb{R}^2$, que é um plano ou um espaço bidimensional, ou (x, y, z) , para três números reais dados, representa um ponto do espaço $\mathbb{R}^3$, um espaço tridimensional, ou

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_k \in \mathbb{R}; P \in \mathbb{R}^n \text{ uma variedade linear de dimensão } n; \quad (2.31)$$

Dados dois pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, $P = (a, b)$ e $Q = (m, n)$, confira a figura (fig 2.11), página 64, posso

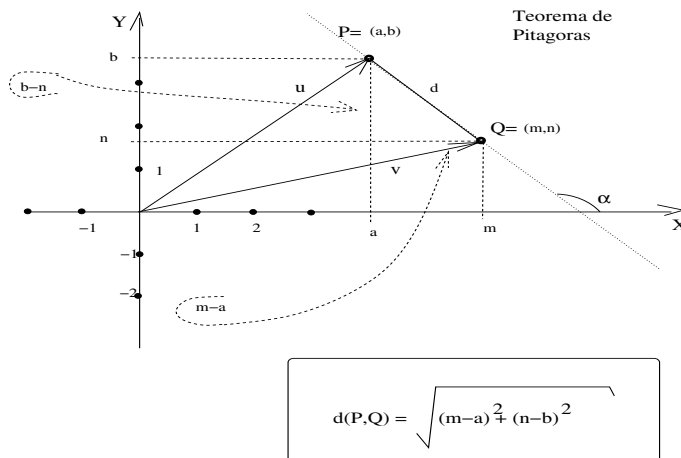


Figura 2.7: Distância entre dois pontos e o teorema de Pitágoras

calcular a distância entre eles usando o teorema de Pitágoras,

$$d(P, Q) = \sqrt{(m-a)^2 + (n-b)^2} = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2}; \quad (2.32)$$

O módulo das diferenças que aparecem na equação (eq. 32) medem o comprimento dos lados do triângulo retângulo que o segmento $\overline{PQ}$ determina com retas paralelas aos eixos coordenados.

As propriedades da distância são:

1. reflexividade $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$
2. simetria $d(P, Q) = d(Q, P)$;
3. desigualdade triangular $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ A soma de 2 lados é maior ou igual do que o terceiro lado;

Qualquer função de duas variáveis que tenha estas propriedades define uma distância num conjunto M e é quando se diz que (M, d) é um espaço métrico. Esta frase sugere que há distintos meios de definir distância, o que é verdade. É a mesma coisa que dizer que *existem diversas geometrias* e vou logo lhe dar um exemplo bem simples de esta diversidade é necessária.

Como todas as diversidades...

A companhia de energia elétrica, *que não deveria ser privada*, vai cabear o ponto de energia dum poste até sua casa. Para evitar que fiquem fios elétricos no ar, ela poderia conduzir os fios por dentro do poste até uma caixa no chão e desta para outra caixa também no chão para o outro lado da rua para finalmente chegar em sua casa onde deveria haver no chão uma caixa de conexão onde os fios seriam conectados à sua casa. Tudo isto com segurança e beleza, sem fios espalhados pelo ar. A distância calculada não seria a “euclidiana” e sim a soma dos segmentos de linha reta usados para fazer este serviço. Esta distância é chamada *distância l_1* . A *distância l_2* , é a *distância euclidiana*, definida na equação (eq. 32), que seria inútil para calcular a distância do ponto de energia elétrica até sua casa. O “2” se refere ao índice da raiz quadrada.

A distância é uma *propriedade bidimensional* porque envolve em suas propriedades no máximo três elementos do espaço que determinam um plano deste espaço, o que facilita muito nas demonstrações das propriedades mais gerais da distância. Para o $\mathbf{R}^n$ a fórmula na equação (eq. 32) fica

$$\begin{cases} d(P, Q) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (p_k - q_k)^2}; \\ P = (p_1, \dots, p_n); Q = (q_1, \dots, q_n); \end{cases} \quad (2.33)$$

Uma forma de definir a distância passa pelo *produto escalar* ou *produto escalar* que está definido em todos os espaços de dimensão finita e também em espaços de dimensão não finita. O *produto escalar*, como meio de definir distância também pode ser definido de várias maneiras. A definição usual no $\mathbf{R}^n$ é

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=1}^n p_k q_k = \|P\| \|Q\| \cos(\gamma); \quad (2.34)$$

em que γ é o ângulo entre P e Q .

Os pontos P, Q também determinam dois vetores, u, v , do plano e o segmento de reta mede a diferença $u - v$ ou $v - u$. Como a diferença entre dois vetores é um vetor, eu posso calcular o módulo do vetor $P - Q$ para obter a distância entre os pontos P, Q usando o *produto escalar*

$$u - v = (a - m, b - n); v - u = (m - a, n - b); \quad (2.35)$$

$$\|u - v\| = \|v - u\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = \sqrt{(m - a)^2 + (n - b)^2} = d(P, Q); \quad (2.36)$$

e o resultado é o mesmo.

A primeira expressão na (eq. 34) é uma *forma bilinear* definida em $\mathbf{R}^n$ e a segunda é a expressão bidimensional da mesma no plano determinado pelos dois vetores.

Observe que a equação (eq. 34) nos oferece a oportunidade de definir ângulo entre dois vetores dum espaço qualquer em que esteja definido um produto escalar, usando a função $\text{acos}()$. Tais espaços se chamam *espaço com produto escalar*.

Observação 3 triedro positivo

A ordenação de vetores no espaço é uma questão importante e apenas traduz as leis da Física ou da Natureza. Observe como isto é feito usando a regra do sacarrrolhas que também poderia ser chamada de regra do parafuso.

Como dois vetores no $\mathbf{R}^n$ determinam um plano do $\mathbf{R}^n$, então o ângulo é um conceito geométrico claro, é o menor segmento do círculo trigonométrico que os dois vetores determinam. Na figura (fig 2.8), página 54, você vê dois vetores do $\mathbf{R}^n$ que determinam

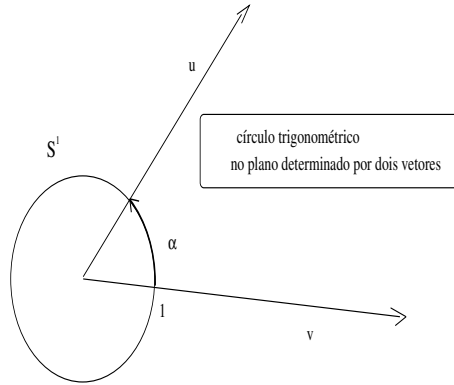


Figura 2.8: o ângulo entre dois vetores do $\mathbf{R}^n$

um plano e tomando a origem comum aos dois vetores como centro de um círculo de raio 1 um dos vetores corta o círculo trigonométrico na origem do círculo.

Aqui parecem haver alguns conceitos difusos, mas não é bem assim. Existe uma orientação padrão para os vetores no espaço, dada pela regra do sacarrrolha. O sacarrrolha segue a orientação dos parafusos, para enfiá-lo na rolha a rotação é negativa, é a mesma orientação para enfiar um parafuso numa peça. Com esta regra a figura (fig 2.8), mostra no círculo trigonométrico o ponto inicial marcado pela reta suporte do vetor $\vec{v}$, estando os vetores $\vec{v}, \vec{u}$ orientados positivamente pela regra do sacarrrolhas. Se houver um terceiro vetor ele vai ocupar a posição do sacarrrolhas pronto para “sacar uma rolha” mostrando a posição de três vetores formando um triedro com ordenação positiva.

Para que você se convença de que esta regra é consistente, deixe-me sugerir-lhe um experimento: considere dois vetores perpendiculares, tome a figura (fig 2.8) como padrão, pensando nos dois vetores $\vec{v}, \vec{u}$ cortando o círculo trigonométrico na quarta parte, $\frac{\pi}{2}$.

Mas agora considere que $|\vec{v}| = |\vec{u}| = 1$, por construção, você selecionou $\vec{v}, \vec{u} \in S^1$, no círculo trigonométrico.

O sacarrrolhas na origem dos eixos, o ponto comum dos vetores $\vec{v}, \vec{u}$, representando um terceiro vetor “arrancando a rolha”, na direção positiva, é o vetor $\vec{z}$ e também $|\vec{z}| = 1$, tudo por construção.

Os dois vetores $\vec{u}, \vec{z}$, determinam um plano e o vetor $\vec{v}$ é o sacarrrolhas nesta nova situação. O produto vetorial de vetores executa, algebricamente, esta operação:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \vec{z}; \vec{u} \times \vec{z} = \vec{v}; \quad (2.37)$$

ou ainda, como na Física:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad (2.38)$$

sendo que esta operação não é comutativa...

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \quad (2.39)$$

A eletricidade se comporta de acordo com esta regra para definir o sentido da corrente positiva gerada por gerador montado com ímãs eletromagnéticos. A regra do sacarrrolhas apenas traduz o que se passa no mundo eletromagnético. Se você inverter as conexões nos polos duma bateria, o eletroímã vai rodar no sentido inverso:

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \quad (2.40)$$

Uma propriedade que tem uso intenso é a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$| \langle P, Q \rangle | \leq \|P\| \|Q\| \quad (2.41)$$

que tem uma demonstração simples no plano, mas eu já observei que, dados dois vetores, eles determinam um plano do espaço a que eles pertencem portanto demonstrá-la num plano não é uma restrição.

Para isto preciso mostrar que a forma trigonométrica da definição na equação (eq. 34) é idêntica à expressão da soma de produtos na mesma equação porque

$$| \langle P, Q \rangle | = \|P\| \|Q\| \cos(\gamma) \leq \|P\| \|Q\|; \quad (2.42)$$

Dem:

Se $n = 2$ é consequência direta da *fórmula de Euler* porque, dividindo pelo módulo dos vetores teremos:

$$\langle \frac{P}{\|P\|}, \frac{Q}{\|Q\|} \rangle = \frac{|\langle P, Q \rangle|}{\|P\| \|Q\|} \leq 1; \quad (2.43)$$

$$\langle \frac{P}{\|P\|}, \frac{Q}{\|Q\|} \rangle = \langle (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), (\cos(\beta), \sin(\beta)) \rangle; \quad (2.44)$$

$$\langle \frac{P}{\|P\|}, \frac{Q}{\|Q\|} \rangle = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\gamma); \quad (2.45)$$

Na equação (eq. 43) usei a propriedade das formas bilineares que permite a distribuição dos coeficientes $\|P\|, \|Q\|$ entre os dois fatores¹.

Na equação (eq. 44) usei uma representação plana dos dois vetores que podem ser expressos como pontos do círculo trigonométrico sendo α, β os seus ângulos e γ é o ângulo entre eles. Na passagem da equação (eq. 44) para a equação (eq. 45) usei a expressão do produto escalar

$$\langle (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), (\cos(\beta), \sin(\beta)) \rangle = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta); \quad (2.46)$$

Os cálculos mostram que posso me reduzir, na demonstração, ao caso dos vetores unitários. Então, na sequência vou supor que $\|P\| = \|Q\| = 1$.

A passagem crítica, na demonstração por indução que está na passagem de $n - 1$ para n que é semelhante à passagem da dimensão 2 para 3, mas esta é mais intuitiva. Deixe-me agora considerar $P, Q \in \mathbf{R}^3$, vetores unitários, portanto pontos de $\mathbf{S}^2$ a esfera unitária do $\mathbf{R}^3$. Mas estes dois vetores determinam um plano que corta $\mathbf{S}^2$ segundo um círculo unitário, uma curva plana, e, pela demonstração anterior, $\cos(\gamma)$ é o valor do produto escalar entre eles, em que γ é ângulo entre os vetores.

Mas esta demonstração não seria necessária dentro do escopo duma demonstração por indução, ela é simplesmente tomada como verdadeira para todo $N \leq n - 1$ e temos que considerar agora $P, Q \in \mathbf{R}^n$, dois vetores unitários. Mas estes vetores definem um plano do $\mathbf{R}^n$ e o valor do produto escalar para dois vetores, no plano, em dimensão $N < n$, por hipótese de indução, é $\cos(\gamma)$, em que γ é o ângulo entre os vetores, o que termina a demonstração.

q.e.d.

2.4.2 Distância dum ponto a uma reta

Vou começar com o caso mais simples e depois vou fazer um comentário mostrando como este caso mais simples facilmente se generaliza para os casos mais complicados. Vou calcular a distância dum ponto a uma variedade linear de dimensão 1, o caso mais simples.

Vou mostrar-lhe um *algoritmo* sob forma de equação matemática que depois vou traduzir para um *algoritmo computacional*, quer dizer, um programa escrito numa linguagem de programação, para calcular a *distância dum ponto a uma reta*.

A distância do ponto $P = (a, b)$ a reta r é obtida fazendo-se a projeção de P ao longo da reta s perpendicular à reta r , e seja $Q = (m, n)$ esta projeção, $Q \in s$. A distância de P à reta r é a medida do segmento PQ .

O método vetorial para estabelecer a equação da reta torna imediato a passagem da equação da reta r para a equação da reta s , $s \perp r$, porque na equação da reta aparece o vetor (A, B) que lhe é perpendicular logo na equação da reta s , $s \perp r$ vão aparecer as coordenadas do vetor $(A, -B) \perp (A, B)$. E não importa qual seja a posição da reta e também não preciso fazer uso do *coeficiente angular*...

Confira como exemplo a figura (fig 2.9) em que aparecem as retas r e $s \perp r$, em que usei como caso particular a reta r definida pela equação

$$r = \{(x, y); 3x + 4y - 1 = 0\}; \quad (2.47)$$

o ponto $P=(a,b)$ cuja distância à reta r vai ser calculada.

¹as formas bilineares generalizam o produto de números que um exemplo de forma bilinear.

Na figura (fig 2.9), página 56, mostro a projeção $Q \in s$, do ponto P , ao paralelamente ao vetor $(3, 4)$ que é perpendicular à r .

O ponto P determina a reta s , $s \perp r$ que vai encontrar a reta r no ponto $Q = r \cap s$. Como a reta r é perpendicular ao vetor $(3, 4)$ então a reta s é perpendicular ao vetor $(4, -3)$ e a medida do segmento PQ que é a distância de P à reta r

$$|PQ| = |(a - m, b - n)| = \sqrt{(a - m)^2 + (b - n)^2}; \quad (2.48)$$

A figura (fig 2.9), página 56, lhe mostra o método de cálculo da distância de P à r

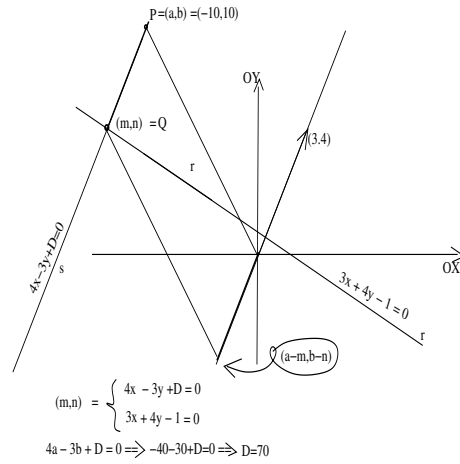


Figura 2.9:

$$Q \in s; Q = r \cap s; d(P, r) = |\overline{PQ}|; \quad (2.49)$$

$$d(P, r) = |\overline{PQ}| = |(a - m, b - n)| = \sqrt{(a - m)^2 + (b - n)^2}; \quad (2.50)$$

$$d(P, r) = |\overline{PQ}| = |(a - m, b - n)|; \quad (2.51)$$

obtida pelo “deslocamento” do segmento $\overline{PQ}$ para origem produzindo o $(a - m, b - n)$. Eu preferi interpretar a figura (fig. 2.9) como um paralelograma mas você também pode pensar em diferença entre vetores. O importante é compreender que distância do ponto P à reta r é dada pela medida do vetor $(a - m, b - n)$.

Por exemplo, os cálculos para obter a distância do ponto $P = (-10, 10)$ a reta $r, 3x + 4y - 1 = 0$:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0; \\ 4x - 3y + D = 0 \perp r; P = (-10, 10) = (a, b) \in s; \\ P = (-10, 10) = (a, b) \in s \Rightarrow -40 - 30 + D = 0 \Rightarrow D = 70; \quad ; \\ 12x + 16y - 4 = 0; P = (-10, 10) = (a, b) \Rightarrow \\ 12x - 9y + 210 = 0; \end{cases} \quad (2.52)$$

$$16y + 9y - 4 - 210 = 0 \Rightarrow 25y = 214 \Rightarrow y = 8.56; \quad (2.53)$$

$$3x + 4y - 1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 - 4y \Rightarrow x = -11.08; \quad (2.54)$$

$$Q = (m, n) = (-11.08, 8.56) \in s \perp r; \quad (2.55)$$

$$s \text{ é a perpendicular a reta } r \text{ que passa por } P = (a, b); \quad (2.56)$$

$$P = (-10, 10) = (a, b) \in s \perp r \Rightarrow C = 3b - 4a; \Rightarrow C = 30 + 40 = 70; \quad (2.57)$$

$$\text{usando a solução do sistema para o ponto } Q = (m, n); \quad (2.58)$$

$$Q = (-11.08, 8.56) \in (\perp r); \quad (2.59)$$

$$d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{(-11.08 + 10)^2 + (8.56 - 10)^2}; \quad (2.60)$$

$$d(P, r) \approx 1.8; \quad (2.61)$$

Para testar, eu fiz as contas usando a linguagem de programação `calc` e mostro mais abaixo um programa que executa toda esta tarefa, dada uma reta r e um ponto P . Mas para construir o programa eu primeiro descrevi o problema em forma abstrata, transformando o exemplo num algoritmo para calcular a distância de um ponto P qualquer a uma reta r cuja equação seja

$$Ax + By + C = 0 \text{ a reta dada, } r;$$

$$Ax + By + C = 0 \text{ a reta dada, } r; \quad (2.62)$$

$$P = (a, b) \text{ ponto cuja distância à reta } r \text{ quero calcular}; \quad (2.63)$$

$$Bx - Ay + D = 0 \text{ reta } s \perp r; P \in s; Q = (m, n) \in s \cap r; \quad (2.64)$$

$$P \in s \Rightarrow Ba - Ab + D = 0 \Rightarrow D = -(Ba - Ab); \quad (2.65)$$

$$\text{equação da reta } s; Bx - Ay + D = 0 \quad (2.66)$$

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0; \text{ a reta } r; \\ Bx - Ay + D = 0 \perp r; \text{ reta } s; P \in s; \end{cases} \quad (2.67)$$

$$\begin{cases} ABx + B^2y + BC = 0; \text{ a reta } r; \\ ABx - A^2y + AD = 0; s \perp r; P \in s; \end{cases} \quad (2.68)$$

$$(B^2 + A^2)y + BC - AD = 0; \quad (2.69)$$

$$y = n = -\frac{BC-AD}{B^2+A^2} = \frac{AD-BC}{B^2+A^2}; \quad (2.70)$$

$$x = m = -\frac{By+C}{A} \text{ usando } Ax + By + C = 0; \quad (2.71)$$

$$Q = (m, n) \in s \cap r; Q = \left(-\frac{D-By}{A}, \frac{AD-BC}{B^2+A^2}\right); \quad (2.72)$$

$$d(P, Q) \text{ é a distância do ponto } P \text{ à reta } r; \quad (2.73)$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2}; \quad (2.74)$$

Transformei esta lista de equações (eq. 2.4.62) (eq. 2.4.70) no programa escrito em `calc` que lhe mostro a seguir. É possível que você tenha alguma dificuldade em reconhecer a lista de equações dentro do programa, mas não esqueça que o programa é um algoritmo que vai “*conversar consigo*” lhe pedindo

I.A. é um programador,
escondido num código,
falando com você!

os dados da questão, os coeficientes da equação da reta r e as coordenadas do ponto P cuja distância à reta você quer calcular. Então estes diálogos foram incluídos no programa.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: utf-8 -*-
# -*- coding: latin-1 -*-
### verificado com tarefa do geogebra DistanciaPontoReta.ggt
from os import popen

def apeteco():
    print(" Aperte enter para continuar ");
    popen("read teste");

def distancia(P,Q):
    from math import pow,sqrt;
    y = pow(P.pop(0)-Q.pop(0),2);
    y = y + pow(P.pop(0)-Q.pop(0),2);
    y = sqrt(y);
    return(y);

def DadosDaReta_r():
    print('r: Ax + By + C = 0 ;P=(a,b),Q=(m,n) in r;Q in r cap s ');
    print('O valor de A'); A = input('A = '); print('A = ',A);
    print('O valor de B'); B = input('B = '); print('B = ',B);
    print('O valor de C'); C = input('C = '); print('C = ',C);
    reta = [A,B,C];
    return(reta);

def DadosDoPonto_P():
    print('Forneça as coordenadas de P=(a,b), para calculo d(P,r)');
    print('as coordenadas de P=(a,b)'); P=[];
    P.insert(0,input('primeira cordenada a = '));
    P.insert(1,input('segunda coordenada b = '));
    a = float(P.pop(0)); b= float(P.pop(0)); P=[a,b];
    return(P);

def CalculoDoPonto_Q(reta,P):
    A=float(reta.pop(0)); B=float(reta.pop(0)); C=float(reta.pop(0));
    a=float(P.pop(0));b=float(P.pop(0));
    print('s perp r; s = Bx - Ay + D = 0, cálculo de D ');
    D = -(B*a-A*b); print("O valor de D = ", D); apeteco();
    print('Resolvendo o sistema para encontrar o ponto Q');
    print("s, reta perpendicular à r é", B,"x -", A,"y + ",D," = 0");
    apeteco();
    print("resolvendo o sistema para encontrar Q in s cap r");
    y = ( A*D - B*C)/(A**2+B**2);x= -(B*y+C)/A; m=x; n=y; Q=[m,n];
    print( "O ponto Q na reta perpendicular passando por P é ");
    print("Q = ", "(",m,"",",",n,")", "Q =", Q);
    return(Q);

def Main():
```

```

print("P=(a,b) e a reta r cuja distância de P a ser calculada!");
print("Q=(m,n) está na interseção r cap s; s perp r; P in s");
print("r = Ax + By + C = 0, forneça A,B,C");
reta = DadosDaReta_r();
P = DadosDoPonto_P();
a=float(P.pop(0));b=float(P.pop(0)); P=[a,b];
print("na Main(), P = ", "(",a,"",b,")", "P =", P);  apeteco();
Q = CalculoDoPonto_Q(reta,P);
m=float(Q.pop(0));n=float(Q.pop(0)); Q=[m,n];
print("na Main(), Q = ", "(",m,"",n,")", "Q =", Q);  apeteco();
P=[a,b]; print(Q,P); apeteco();
print("calculando a distância d(P,Q) que é a distância de P a r.");
apeteco();
print("a distância de P = (" ,a,"",b,") à reta r é ",distancia(P,Q));

print('depois de lido o programa basta chamar Main()');
Main();
apetecof();
quit();

```

Eu costumo escrever programas usando o estilo da linguagem C que consiste de algumas funções que serão chamadas por uma *função principal*, `Main()`, que funciona como um script, chamando as funções do programa com a lógica adequada.

Como um script
duma peça teatral...

No programa deixei sob comentário os comandos usados pelo `gnuplot` entretanto o arquivo `DistanciaPontoReta.gnuplot` contém os dados para obter o gráfico com `gnuplot`, os dados devem ser atualizados a partir dum teste feito com `DistanciaPontoReta.py`.
Experimentando o programa com

$$\text{reta } r : 3x + 7y + 5 = 0; P = (-3, -3) \notin r; \quad (2.75)$$

$$\text{reta } s : 7x - 3y + D = 0; D = -(7 * (-3) - 3 * 0 - 3 * (-3)); \quad (2.76)$$

$$\text{reta } s : 7x - 3y + 12 = 0; Q = (-1.714285, 0) \in s; \quad (2.77)$$

$$\text{distancia}(P, Q) = 3.26390304102695428093; \quad (2.78)$$

Usei `xfig` traçando as retas r, s ; $P = (-3, -3) \in s$ desenhei um círculo tendo por diâmetro o segmento $\overline{PQ}$ pedi ao `xfig` a área S deste círculo e calculei

$$\begin{cases} S = \pi r^2; \\ r^2 = \frac{S}{\pi}; \\ r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}; \\ r = \sqrt{S/\pi} \Rightarrow 2r = 2\sqrt{S/\pi}; \end{cases} \quad (2.79)$$

obtendo o diâmetro do círculo que é a distância procurada.

$$3.21776070859632801312 = 2r = \text{distancia}(P, Q);$$

Há uma *diferença na precisão* que é consequência dum gráfico feito à mão com o editor `xfig`.

O gráfico que corresponde a esta experiência se encontra na figura (fig 2.10), página 60,

A figura (fig 2.10) mostra as retas r, s , os pontos P, Q de acordo com a notação desenvolvida acima.

Eu também construí nesta figura o círculo que passa nos pontos P, Q tendo por diâmetro o segmento

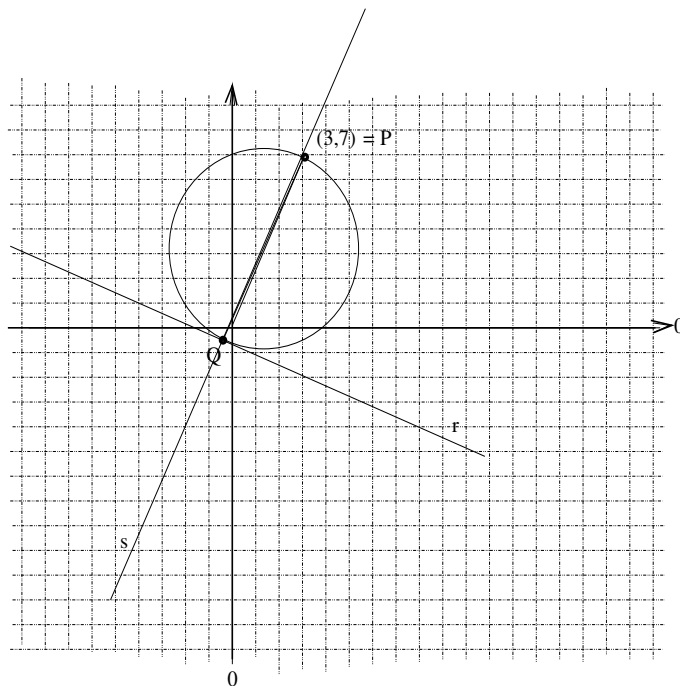


Figura 2.10: distância dum ponto a uma reta

$\overline{PQ}$. Se esta construção for feita com geogebra há duas maneiras de determinar a distância $d(P, r)$, uma delas é medindo o segmento $\overline{PQ}$, a outra é medindo a área S determinada pelo círculo e usando a sequência

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}; d(P, r) = 2r = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (2.80)$$

Eu calculo $d(P, r)$ usando este mesmo caminho usando o editor gráfico `xfig` como aparece na figura (fig 2.10).

Para usar este programa em `python3`, leia o programa depois de abri-lo um terminal do `python3` com o comando

```
python3 'DistanciaPontoReta.py'
```

se o programa estiver gravado no arquivo com este nome, caso contrário use o nome que você tiver usado.

Forneça os dados como solicitado e o programa vai calcular o terceiro coeficiente da equação da reta s de modo que seja encontrada $Q \in r \cap s$. A reta s é perpendicular à reta r e foi determinada pelo ponto P portanto a interseção, Q , é o ponto que determina o segmento PQ perpendicular à r cujo comprimento é $d(P, r)$.

O programa `DistanciaPontoReta.py` vai

- encontrar o ponto Q sobre a reta s perpendicular à reta r que passa em $P = (a, b)$.
- Calcular a distância $d(P, Q) = d(P, r)$;

Este é o arquivo `DistanciaPontoReta.gnuplot`.

```
## rode primeiro DistanciaPontoReta.py com A,B,C,a,b;
## DistanciaPontoReta.py vai calcular D, lance o valor abaixo.
```

```

A = 3; B= 4; C = -1;a=-10;b=10; D=70;  ## lance aqui D
f(x) = -1.0*(A*x + C)/B ## transformando equação da reta em função
g(x) = 1.0*(B*x + D)/A  ## transformando equação da reta em função
set pointsize 0.1
unset arrow; ## para limpar os vetores da memória do gnuplot
set xrange [-10:10]; set xrange [-20:20]; ## janela gráfica
set arrow from 0, -20 to 0, 20 head; ## eixo OY
set arrow from 0,0 to a,b head; ## vetor OP
## para obter o gráfico com xfig
set terminal fig color big size 14cm,14cm portrait
set output 'teste.fig'
plot f(x), g(x), 0 ## faz o gráfico
## pause -2 'Aperte enter para continuar' ## mantém o gráfico visível.

```

Deixe-me acrescentar duas observações:

1. programação, programas, são ferramentas muito úteis mas de um certo ponto, perniciosas. O objetivo dum programa como `DistanciaPontoReta.py` é lhe dar a oportunidade de verificar se os cálculos que você tiver feito manualmente foram corretos. Se você não souber calcular então você não vai dominar a Matemática,
2. `gnuplot` é excelente, de domínio público, tem uma história que vale a pena ser conhecida e creio que no “help” dele você consegue ler a respeito, mas os gráficos *podem* ficar distorcidos. Você pode corrigi-los alterando com o mouse a dimensão da janela.

2.4.3 Equação vetorial da reta

A **equação vetorial da reta** é uma expressão para uma reta no espaço de qualquer dimensão, portanto também pode ser usada para uma reta no plano.

Exemplos ajudam para começar.

Exemplos

Se a reta s passar na origem ela é o lugar geométrico dos pontos do espaço obtidos como múltiplo de um certo vetor (A, B, C) . Se passar no ponto $P(a, b, c)$ tenho que somar a este múltiplo as coordenadas de $P(a, b, c)$. Vou, assim, *levar a reta para o ponto* $P(a, b, c)$.

$$s \parallel (A, B, C); \quad (2.81)$$

$$u = (x, y, z) \in r \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda A, \lambda B, \lambda C); \lambda \in \mathbf{R}; \quad (2.82)$$

$$r \parallel (A, B, C) \text{ passando pelo ponto } P = (a, b, c) \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda A, \lambda B, \lambda C) + (a, b, c); \quad (2.83)$$

$$r \parallel (A, B, C) \text{ passando pelo ponto } P = (a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda A + a; \\ y = \lambda B + b; \\ z = \lambda C + c; \end{cases} \quad (2.84)$$

é a equação da reta r paralela ao vetor $(A, \vec{B}, C)$ passando pelo ponto $P = (a, b, c)$. Para obter uma reta que passe na origem escolha $P = (0, 0, 0)$. Posso obter qualquer elemento de r selecionando um valor para o número real λ .

É a equação vetorial da reta que passa no ponto $P = (a, b, c)$ e é paralela ao vetor (A, B, C) . Há um hábito de dizer-se que se leva a reta r para a origem, porque, subtraindo P da equação desta reta, como $P \in r$ então eu estarei levando o ponto P para a origem e com ele a reta r :

$$P \in s; P = (a, b, c); \quad (2.85)$$

$$\Rightarrow (\lambda A + a, \lambda B + b, \lambda C + c); \lambda \in \mathbf{R}; \quad (2.86)$$

$$P \in s; P = (a, b, c); \quad (2.87)$$

$$v \in r \Rightarrow v = \lambda(A, B, C) + (a, b, c); \quad (2.88)$$

Na segunda equação eu repeti a primeira equação em forma mais compacta, expressando um vetor $v \in r$ como soma dum múltiplo de (A, B, C) mais o vetor deslocamento $P = (a, b, c)$.

Use apenas duas coordenadas e você vai encontrar a equação da reta em dimensão dois. Ou use mais coordenadas para obter a equação da reta em dimensão n de sua escolha.

É interessante discutir o caso da equação vetorial da reta no plano porque posso obter a equação na forma $y = mx + b$ partindo da equação vetorial. Vou começar pelo caso mais simples, quando a reta passa na origem.

Por exemplo, $P = (a, b) = (0, 0), (A, B) \in \mathbf{R}^2$ então

$$P \in r; P = (0, 0); \Rightarrow x = \lambda A; y = \lambda B; \lambda \in \mathbf{R}; \quad (2.89)$$

$$\frac{y}{x} = m = \frac{\lambda B}{\lambda A} = \frac{B}{A}; \quad (2.90)$$

$$y = mx = \frac{B}{A}x; m = \frac{B}{A} \text{ coeficiente angular}; \quad (2.91)$$

e estas contas somente são válidas se $A \neq 0$ quer dizer o vetor (A, B) não é $(0, B)$ que seria paralelo ao eixo OY , o defeito da equação expressa em termos do *coeficiente angular*.

Se a reta não passar na origem a equação fica

$$y = mx + b; b \neq 0; \quad (2.92)$$

e você encontra o valor de b aplicando a equação a um ponto arbitrário por onde a reta passe, de maneira semelhante ao que já foi feito com *equação geral da reta* $Ax + By + C = 0$ para encontrar o valor de C . Esta equação, $Ax + By + C = 0$ é comumente chamada de *equação geral da reta* porque agora não importa se algum dos coeficientes, A, B, C é zero. Observe que esta equação pode ser a equação dum plano ou de qualquer variedade linear. Sempre é necessário informar em que dimensão a coisa se encontra...

Apresentei a equação da reta com *coeficiente angular* m , que eu em geral me recuso a usar porque não tem equivalente em dimensão maior do que dois. Entretanto estes cálculos mostram que posso voltar da *equação vetorial da reta* para a equação da reta, dado um *coeficiente angular* r e um ponto $P \in r; P = (a, b)$, a reta que passa no ponto P com *coeficiente angular* m .

Eu tive que abrir uma exceção, $m \neq 0$ o caso da reta perpendicular ao eixo OX , quando não existe *coeficiente angular* mostrando, mais uma vez a fragilidade deste conceito.

No espaço o *coeficiente angular* é inútil...

O que salva o *coeficiente angular* nas contas das equações (eq. 2.4.89) (eq. 2.4.93) é no caso do plano eu reproduzi a equação dum *função do primeiro grau* cujo gráfico é equação da reta “que passa no ponto” $P = (p, q)$. E o *coeficiente angular* é a *derivada constante* dum função do primeiro grau.

A *equação vetorial da reta* vale para qualquer dimensão apenas, em lugar do *coeficiente angular*, vão aparecer as *derivadas parciais* quando eu definir a função do primeiro grau cujo gráfico é equação da reta.

A denominação *derivada parcial* vem dum tempo em que não se tinha uma ideia precisa do que era a derivada, as *derivadas parciais* são as coordenadas do *gradiente* que é a *derivada* dum função multivariada.

Vou fazer as mesmas contas que fiz no caso da reta no plano, agora com equação vetorial da reta no espaço, me fixando no $\mathbf{R}^3$ mas as contas serão as mesmas em qualquer dimensão, apenas neste caso ficam mais resumidas.

$$P = (a, b, c) \in r \Rightarrow x = \lambda A - a, \lambda B - b, \lambda C - c \in r; \lambda \in \mathbf{R}; \quad (2.93)$$

$$Q \in r; Q = (m, n, p) \Rightarrow \begin{cases} m = \lambda x - a; n = \lambda y - b; p = \lambda z - c; \\ \frac{p}{m} = \frac{\lambda_0(z-c)}{\lambda_0(x-a)} = \frac{z-c}{x-a} = \frac{\partial F}{\partial x}; \\ \frac{p}{n} = \frac{\lambda_0(z-c)}{\lambda_0(y-b)} = \frac{z-c}{y-b} = \frac{\partial F}{\partial y}; \end{cases} \quad (2.94)$$

$$F(x, y) = \left(\frac{p}{m}(x - a), \frac{p}{n}(y - b) \right); \quad (2.95)$$

Na equação (eq. 2.4.95) você tem a expressão vetorial duma função do primeiro grau de duas variáveis e neste caso as *derivadas parciais* são constantes, se você quiser falar em *coeficiente angular*, o gráfico duma função do primeiro grau é um plano, neste caso particular é uma reta que está contida num plano no espaço, e as derivadas parciais são os *coeficientes angulares* calculados nas direções dos eixos coordenados.

2.4.4 Equação do plano

Um plano é uma *variedade linear de dimensão 2*, e não tem *coeficiente angular* porque num plano há uma infinidade de retas, cada uma com o seu *coeficiente angular* o que rouba este conceito do plano. Excelente, agora eu posso começar exatamente do ponto final quando descrevi a equação duma *variedade linear de dimensão 1*. Uma reta é perpendicular a um vetor dado (A, B) e sua equação é

$$Ax + By + C = 0 \quad (2.96)$$

e a constante C , sendo diferente de zero, a reta não passa na origem.

Da mesma forma um plano é perpendicular a um dado vetor. Melhor, dado um vetor você pode se perguntar qual é a equação dum plano que lhe seja perpendicular. Da mesma forma como eu lhe mostrei o que acontece com as retas, há muitos planos que são perpendiculares ao vetor $u = (A, B, C)$, mas vou logo encontrar o caso mais simples, como fiz com a reta.

Vou considerar um plano π que passe na origem, ele é um subconjunto dos pontos (x, y, z) do “espaço” e eu vou exigir que sejam os pontos que formem um conjunto perpendicular ao vetor $u = (A, B, C)$ então

$$\langle (A, B, C), (x, y, z) \rangle = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0; \quad (2.97)$$

$$Q = (p, q, r) \in \pi \Rightarrow A(x - p) + B(y - q) + C(z - r) = 0; \quad (2.98)$$

a equação, (eq. 2.98), é a equação do plano π que passa no ponto (p, q, r) , algumas vezes se diz que o plano foi levado para a origem. O ponto (p, q, r) pertence ao plano π que é perpendicular ao vetor $u = (A, B, C)$.

Da mesma forma como eu fiz com a reta, se eu somar uma constante D a equação (eq. 2.97) eu estarei deslocando o plano, portanto vou obter a equação de outro plano que é paralelo ao primitivo e portanto ainda perpendicular ao vetor $u = (A, B, C)$ e sua equação será

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.99)$$

e da mesma forma como eu fiz com a reta, eu posso definir uma função linear de duas variáveis a partir da equação (eq. 2.99), sempre supondo que alguma das constantes A, B, C , seja diferente de zero, e vou escolher $A \neq 0$, tenho

$$f(x, y) = -\frac{By + Cz + D}{A} = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z - \frac{D}{A}; \quad (2.100)$$

Eu desprezei o *coeficiente angular* e agora me vejo forçado a reconsiderar a situação. No Cálculo você vai descobrir que o *coeficiente angular* é a derivada das funções lineares que são aquelas cujos gráficos são *variedades lineares*. E no caso das funções multivariadas, há vários coeficientes angulares que são as *derivadas parciais*. Mas você vai encontrar esta questão quando estiver estudando Cálculo. No espaço não existem *coeficientes angulares* e sim vetores perpendiculares às *variedades lineares*.

Também, o que é uma variedade linear depende em que dimensão você estiver trabalhando

$$2x - 7y + 5 = 0 \text{ é perpendicular ao vetor } (7, 2, 0, 0); \quad (2.101)$$

$$\langle (A, B, 0, 0), (B, A, 0, 0) \rangle = 0 \quad (2.102)$$

Há um hábito de dar nome aos planos letras gregas... Vou me submeter ao costume.

se você a interpretar como uma variedade do $\mathbf{R}^4$, então uma *variedade linear* de dimensão 3 porque você “se encontra num espaço de dimensão 4. Uma tal *variedade linear* se chama de *hiperplano* significando que ela é a *variedade linear* de dimensão máxima dentro do espaço em questão,

hiperplano é um conceito relativo.

- Um ponto é um *hiperplano* duma reta, uma *variedade linear* de dimensão 1,
- Uma reta é um *hiperplano* dum plano, uma *variedade linear* de dimensão 2,
- Uma plano é um *hiperplano* dum “espaço”, uma *variedade linear* de dimensão 3,
- O “espaço” da Geometria Euclidiana é um *hiperplano* dum espaço de dimensão 4.

E cabe-lhe o direito de perguntar se não há aqui uma confusão proposital. Não há! precisamos com frequência de fazer referência à *variedade linear* de dimensão máxima dum determinado espaço e é então cômodo se referir a uma tal variedade como um *hiperplano* do espaço. É a forma mais resumida de dizer “a variedade linear de dimensão máxima do espaço” em questão. Muito útil quando se trabalha com espaços de dimensão infinita quando é impossível subtrair uma unidade à dimensão. . .

O nosso *universo tridimensional* está imerso numa multidão de espaços de dimensão maior do que 3, os celulares são objetos que tem 9 – 8817 – 8817 nove coordenadas portanto pertencem a um *espaço de telecomunicações* de dimensão nove.

Dados dois números reais x, y , a expressão (x, y) representa um ponto do espaço $\mathbf{R}^2$, que é um plano ou uma *variedade linear de dimensão 2*, ou (x, y, z) , para três números reais dados, representa um ponto do espaço $\mathbf{R}^3$, um espaço tridimensional, uma *variedade linear de dimensão 3*,

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, x_k \in \mathbf{R}; \quad (2.103)$$

$$P \in \mathbf{R}^n \text{ uma variedade linear de dimensão } n; \quad (2.104)$$

Dados dois pontos $P, Q \in \mathbf{R}^2$, $P = (a, b)$ e $Q = (m, n)$, confira a figura (fig 2.11), página 64, posso

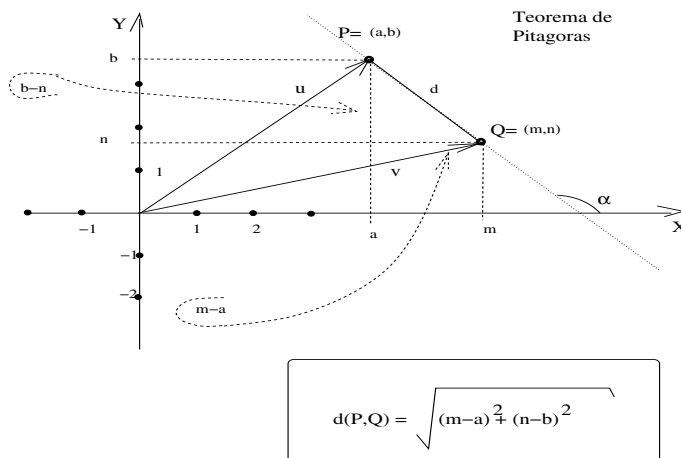


Figura 2.11: Distância entre dois pontos e o teorema de Pitágoras

calcular a distância entre eles usando o teorema de Pitágoras,

$$d(P, Q) = \sqrt{(m-a)^2 + (n-b)^2} = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2}; \quad (2.105)$$

O módulo das diferenças que aparecem na equação (eq. 105) medem o comprimento dos *catetos* do triângulo retângulo que o segmento $\overline{PQ}$ determina com retas paralelas aos eixos coordenados.

Os pontos P, Q também determinam dois vetores, u, v , do plano e o segmento de reta mede a diferença $u - v$ ou $v - u$. Como a diferença entre dois vetores é um vetor, eu posso calcular o módulo do vetor $u - v$ para obter a distância entre os pontos P, Q usando o *produto escalar*

$$u - v = (a - m, b - n); v - u = (m - a, n - b); \quad (2.106)$$

$$\|u - v\| = \|v - u\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = \sqrt{(m - a)^2 + (n - b)^2} = d(P, Q); \quad (2.107)$$

e o resultado é o mesmo.

As propriedades da distância são

1. reflexividade $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$
2. simetria $d(P, Q) = d(Q, P)$;
3. desigualdade triangular $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ a soma de dois lados é maior, ou igual, ao terceiro lado.

Qualquer função de duas variáveis que tenha estas propriedades define uma distância num conjunto M e é quando se diz que (M, d) é um espaço métrico. Esta frase sugere que há distintos meios de definir distância, o que é verdade. É a mesma coisa que dizer que *existem diversas geometrias* e vou logo lhe dar um exemplo bem simples de que esta diversidade é necessária.

Como todas as
diversidades...

A companhia de energia elétrica, que *não precisaria ser privada* vai cabear o ponto de energia dum poste até sua casa. Para evitar que fiquem fios elétricos no ar, ela poderia conduzir os fios por dentro do poste até uma caixa no chão e desta para outra caixa também no chão para o outro lado da rua para finalmente chegar em sua casa onde deveria haver no chão a uma caixa de conexão onde os fios seriam conectados à sua casa. Tudo isto com segurança e beleza, sem fios espalhados pelo ar. A distância calculada não seria a “euclidiana” e sim a soma dos segmentos de linha reta usados para fazer este serviço. Esta distância é chamada *distância l_1* . A *distância l_2* , é a *distância euclidiana*, definida na equação (eq. 105), que seria inútil para calcular a distância do ponto de energia elétrica até sua casa. O 2 se refere ao índice da raiz quadrada.

A distância é uma *propriedade bidimensional* porque envolve em suas propriedades no máximo três elementos do espaço que determinam um plano deste espaço, o que facilita muito nas demonstrações das propriedades mais gerais da distância. Para o $\mathbf{R}^n$ a fórmula na equação (eq. 105) fica

$$\begin{cases} d(P, Q) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (p_k - q_k)^2}; \\ P = (p_1, \dots, p_n); Q = (q_1, \dots, q_n); \end{cases} \quad (2.108)$$

2.4.5 distância do ponto $P = (a, b, c)$ ao plano π

Ao mostrar-lhe como calcular a distância dum ponto a uma reta eu lhe falei que seria o caso mais simples e que sua generalização seriam casos mais complexos. Vou lhe falar dum exemplo que fica fora do escopo da *Geometria Analítica* porque precisa das técnicas do Cálculo, aliás, eu já venho fazendo isto com frequência porque o objetivo da Geometria Analítica, hoje, é de uma preparação para o Cálculo e portanto criar motivação para o estudo do Cálculo está dentro do objetivo deste livro. E tenho usado exemplos de viagens espaciais, assunto bem “*momentoso*”, nas também passo-lhe a advertência de que Geometria Analítica é “*deficiente*” para resolver estes problemas.

Um módulo espacial destinado a fotografar a superfície dum planeta distante, tem que calcular a sua distância ao planeta para decidir se já se encontra dentro das condições dos seus aparelhos óticos para obter uma imagem de boa resolução. O módulo espacial é um *ponto* no Universo e sua distância a um planeta, que é relativamente grande, tem ser calculado relativamente a uma *variedade linear de dimensão dois* tangente ao planeta. É o Cálculo que vai lhe dar as técnicas para encontrar *variedades lineares tangentes*, retas tangentes, planos tangentes. É este o uso da derivada! Então neste momento eu vou lhe mostrar como calcular a distância dum ponto a um plano, e será no Cálculo que você vai aprender a encontrar planos tangentes e agora você sabe porque é preciso saber encontrá-los.

A distância dum ponto P a um plano depende da reta r perpendicular ao plano passando por P , exatamente como eu já fiz com a *distância dum ponto a uma reta*, tenho que procurar uma reta perpendicular ao plano *determinada* pelo ponto P . A geometria do Universo não é a euclidiana, é a *teoria da relatividade* que nos diz isto, mas para “pequenas distâncias”, como esta dum *módulo espacial* a um planeta, apenas alguns milhões de quilômetros, a *geometria euclidiana* funciona, como também funcionam as leis de Newton, embora um módulo em órbita dum planeta *se encontra em queda livre* e muita coisa já se explica com com *teoria da relatividade* como a ausência de peso dos astronautas. . . Mas, deixe-me voltar para *Geometria Analítica* e ficar na *Geometria Euclidiana* e seguir com as *leis de Newton da gravitação*, porque, para *pequenas distâncias* como dum módulo espacial para um planeta podemos supor que a *luz é um raio* e caminha em linha reta. . .

Tenho um plano, π no espaço, $\pi \subset \mathbf{R}^3$, uma variedade linear de dimensão 2, e um ponto P cuja distância ao plano π eu quero calcular. Preciso duma reta que passe por P encontrando o plano π perpendicularmente no ponto Q e a distância de P ao plano π é $d(P, Q)$.

Vou repetir o parágrafo anterior colocando como uma *aplicação ao cálculo da distância dum módulo espacial a um planeta*. O módulo espacial é o ponto P e a distância de P ao planeta é obtida usando um plano tangente ao planeta, e isto é coisa que você vai entender melhor no Cálculo, mas estou lhe mostrando uma aplicação futura desta questão. É aqui que preciso da equação da reta s , no espaço, passando por P cuja interseção com o plano π , perpendicularmente, é o ponto Q e a distância de P ao plano π é $d(P, Q)$, semelhante ao caso da distância do ponto P para a reta r .

Portanto $s \parallel (A, B, C)$ que é o vetor perpendicular ao plano como foi visto na determinação da equação dum plano ou duma reta.

Deixe-me colocar os dados numa sequência de equações a partir das quais posso escrever o algoritmo computacional.

$$P = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3; \quad (2.109)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ o plano } \pi; (A, B, C) \perp \pi; \quad (2.110)$$

$$P \in s; s \perp \pi \Rightarrow s \parallel (A, B, C); \quad (2.111)$$

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; (x, y, z) = \lambda(A, B, C) + (a, b, c); \quad (2.112)$$

$$Q = (m, n, q) \in s \cap \pi \Rightarrow (m, n, q) = \lambda(A, B, C) + (a, b, c); \quad (2.113)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m - a = \lambda A \Rightarrow m = \lambda A + a; \\ n - b = \lambda B \Rightarrow n = \lambda B + b; \\ q - c = \lambda C \Rightarrow q = \lambda C + c; \\ Q \in \pi \Rightarrow Am + Bn + Cq + D = 0; Q \in \pi; \\ m = \lambda A + a; n = \lambda B + b; q = \lambda C + c; \\ A(\lambda A + a) + B(\lambda B + b) + C(\lambda C + c) + D = 0; \\ A^2\lambda + aA + B^2\lambda + bB + C^2\lambda + cC = -D; \\ (A^2 + B^2 + C^2)\lambda = -(D + aA + bB + cC); \\ \lambda = -\frac{D + aA + bB + cC}{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{D + aA + bB + cC}{\|(A, B, C)\|^2}; \end{array} \right. \quad (2.114)$$

$$Q = (m, n, q) = (\lambda A + a, \lambda B + b, \lambda C + c); \quad (2.115)$$

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \sqrt{\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 + \lambda^2 C^2}; \quad (2.116)$$

$$d(P, \pi) = \|\lambda\| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \|\lambda\| \|(A, B, C)\|; \quad (2.117)$$

Explicando cada linha desta sucessão de equações:

1. Na equação (eq.4.109) eu escrevi as coordenadas do ponto P cuja distância ao plano π quero calcular.
2. na equação (eq.4.110) está a equação do plano π , com a indicação de que o vetor $(A, B, C) \perp \pi$.

3. A equação (eq.4.111) lembra-lhe que o ponto P deve determinar a reta s paralela ao $\vec{(A, B, C)}$ para que seja perpendicular ao plano π .
4. A equação (eq.4.112) define a reta s , vetorialmente. Ela passa no ponto P o que está indicado com a soma $\lambda(A, B, C) + (a, b, c)$ dum múltiplo de (A, B, C) .
5. Na equação (eq.4.113) estou construindo o ponto $Q = (m, n, q) \in s$ como um elemento da reta s que pertence à interseção $Q = (m, n, q) \in s \cap \pi$. $Q = (m, n, q) \in s \cap \pi$ é o ponto que eu quero encontrar no plano π para calcular a distância $d(P, Q) = d(P, \pi)$. Aqui tem um defeito de notação, eu devia ter usado λ_0 para indicar que é um valor particular de λ que corresponde à determinação do ponto Q .
Na próxima equação vou resolver um *sistema de equações* para determinar as coordenadas de Q como um elemento da interseção $s \cap \pi$, na interseção da reta s com o plano π . Vou encontrar o valor particular de λ .
6. Na equação (eq.4.114) se encontra o sistema equações que vai determinar os valores de m, n, q e o valor particular de λ . Os dados da questão são $a, b, c; P = (a, b, c), A, B, C, D$ e λ é a solução, o coeficiente que vai determinar os coeficientes de Q na próxima equação.
7. A equação (eq.4.115) determina Q com o valor de λ encontrado.
8. Na equação (eq.4.116) a distância $d(P, \pi)$ é calculada.
9. A equação (eq.4.117) apresenta a distância colocando $||\lambda||$ em evidência, os *astronautas* vão precisar de encontrar o *melhor valor de λ* que produza a *resolução ideal* para a imagem do planeta em questão ...

E a Geometria Analítica informa aos *programadores do módulo espacial* qual é a melhor posição para obter imagens do planeta, *aguarde o Cálculo para saber o significado de $||\lambda|| = ||(A, B, C)||$* como informação para os astronautas...

A Geometria Analítica *sabe* calcular a distância dum ponto a um plano, o Cálculo *sabe* calcular um plano tangente a uma superfície, à superfície dum planeta... Os astronautas têm que *saber* Geometria Analítica, Cálculo, Equações Diferenciais e programação, para encontrar o momento certo de produzir as imagens com a precisão necessária. O meu objetivo é a Geometria Analítica como motivação para o resto que virá depois.

Vou transformar este sistema de equações num programa para calcular a distância de um ponto, *um módulo espacial*, ao plano π *tangente ao planeta*.

2.4.6 Produto vetorial

Vou apresentar-lhe o *produto vetorial* que ainda é chamado de *produto externo* porque dados dois vetores u, v o produto $u \times v \perp v$, é um vetor que é perpendicular ao plano determinado pelos vetores u, v , e assim tem sentido chamá-lo de *produto externo*.

$$u \times v \perp v; u \times v \perp u; \quad (2.118)$$

é um vetor que é perpendicular ao plano determinado pelos vetores u, v .

Da mesma forma como o *produto escalar* há duas formas equivalentes de definir $u \times v$, uma é algébrica e a outra é geométrica. Eu vou cololar as duas formas na próxima definição e em seguida vou mostrar que elas produzem o mesmo resultado.

Definição 10 (Produto) Vetorial

Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ o determinante formal

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \quad (2.119)$$

O *determinante formal*, porque não se trata dum “determinante” mas funciona como se fosse um “determinante”, estabelece como calcular os coeficientes de cada um dos vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ em $u \times v$.

Observe que a primeira linha contém os vetores da Física e no cálculo deste determinante vou usar o desenvolvimento pela primeira linha caindo em subdeterminantes de ordem dois, que vão produzir os coeficientes de cada um dos vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Ao mesmo tempo as propriedades do *determinante* se transferem para $u \times v$ que é *anticomutativo*, trocando a ordem de duas linhas dum determinante se lhe troca o sinal então

$$u \times v = -v \times u; u \times u = 0; \quad (2.120)$$

Vou aplicar a definição a dois vetores do círculo unitário $\mathbf{S}^1$ e como consequência vou obter uma outra caracterização do *produto vetorial*.

O *produto vetorial* é geométrico por natureza, não sei qual é a sua origem histórica, mas certamente, como muitas fórmulas da Matemática, ele deve ter surgido na Física e traduz efeitos físicos como por exemplos os efeitos eletromagnéticos ou da eletricidade. Depois a Matemática se apossou da definição que aparece mais a frente incorporada ao produto tensorial que é um tipo de *produto multilinear alternado*. É a razão pela qual estou colocando uma coordenada nula nos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ para caracterizar que são dois vetores do $\mathbf{R}^3$, necessário para escrever corretamente o *determinante*.

$$\vec{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0); \vec{v} = (\cos(\beta), \sin(\beta), 0); \quad (2.121)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} = \quad (2.122)$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\beta) & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{vmatrix}; \quad (2.123)$$

$$u \times v = \vec{k} \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{vmatrix} = \vec{k} (\cos(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\beta) \sin(\alpha)); \quad (2.124)$$

$$\vec{k} \sin(\beta - \alpha); \quad (2.125)$$

$$|u \times v| = |u||v| \sin(\beta - \alpha); \quad (2.126)$$

A última equação é verdadeira sob a condição de que $u, v \in \mathbf{S}^1$ mas posso agora refazer as contas com $u, v \in \mathbf{R}^2$ escritos na *forma polar* que é a recuperação de dois vetores quaisquer, do plano, a partir de sua projeção no círculo trigonométrico então

$$\vec{u} = |u|(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0); \vec{v} = |v|(\cos(\beta), \sin(\beta), 0); \quad (2.127)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ |u|\cos(\alpha) & |u|\sin(\alpha) & 0 \\ |v|\cos(\beta) & |v|\sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} = \quad (2.128)$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} |u|\sin(\alpha) & 0 \\ |v|\sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} |u|\cos(\alpha) & 0 \\ |v|\cos(\beta) & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} |u|\cos(\alpha) & |u|\sin(\alpha) \\ |v|\cos(\beta) & |v|\sin(\beta) \end{vmatrix}; \quad (2.129)$$

$$u \times v = \vec{k} \begin{vmatrix} |u|\cos(\alpha) & |u|\sin(\alpha) \\ |v|\cos(\beta) & |v|\sin(\beta) \end{vmatrix} = \vec{k}|u||v|(\cos(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\beta)\sin(\alpha)) \vec{k} \sin(\beta - \alpha) \quad (2.130)$$

$$|u \times v| = |u||v|\sin(\beta - \alpha); \quad (2.131)$$

E assim eu obtive a expressão para o módulo do *produto externo*.

Esta formulação seria inválida para dois vetores $u, v \in \mathbf{R}^n$ para o cálculo de $u \times v$, mas um pequeno esforço de imaginação serve para adaptá-la para este caso uma vez que dois vetores determinam um espaço bidimensional dentro dum espaço de *qualquer dimensão*, então a expressão é válida e deixo esta extensão para sua imaginação. . .

Sumário das propriedades do produto externo

- $\|\vec{w}\| = |\vec{u} \times \vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\gamma)$ em que γ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ no círculo unitário do plano que eles determinam.
- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}$ são colineares.
- Se os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ não forem colineares, então eles determinam um plano e os três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$, nesta ordem, formam um triedro orientado positivamente. Basta para isto mostrar que, tomados dois a dois, estes três vetores não colineares então eles são linearmente independentes e determinam um espaço de dimensão três.
- Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \quad (2.132)$$

em que o “determinante” é apenas uma forma de calcular as coordenadas do novo vetor e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são os *vetores da Física*. Desta forma o menor de ordem dois, identificado pelo vetor i fornece a primeira coordenada de $\vec{u} \times \vec{v}$, e assim sucessivamente para o cálculo da segunda e terceira coordenada.

Eu preciso mostrar que o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular ao plano determinado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ mas isto é consequência direta da definição usando o determinante formal e já foi *praticamente feito* quando eu considerei acima dois vetores com a terceira coordenada nula obtendo, portanto elementos do plano determinado por $\vec{i}, \vec{j}$ resultando num vetor que é múltiplo do vetor $\vec{k}$ que é perpendicular ao plano determinado pelos vetores $\vec{i}, \vec{j}$.

Se os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ forem colineares então o “determinante” é nulo e portanto $\vec{u} \times \vec{v} = 0$.

O “determinante” utilizado na definição para o cálculo de $\vec{u} \times \vec{v}$ tem um lado positivo porque mostra uma propriedade fundamental do produto vetorial, a anticomutatividade:

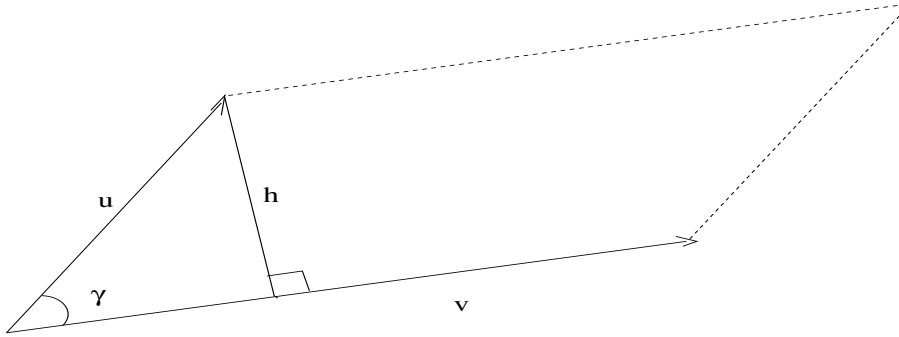
$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad (2.133)$$

pela troca de linhas no determinante.

Mas tem um lado negativo com a sugestão de que se trate dum produto restrito à dimensão três. Algumas vezes se chama este produto de *produto exterior* porque o resultado é um vetor perpendicular ao plano determinado pelos dois fatores, e isto vale em qualquer dimensão: $u, v, u \times v$ forma um triedro positivamente orientado se u, v forem linearmente independentes. Se não forem linearmente independentes o produto vetorial é nulo porque dois vetores linearmente dependentes se encontram sobre uma mesma reta e portanto o seno do ângulo entre eles é zero, consequência da propriedade do módulo de $u \times v$.

Na figura (fig 2.12), página 70, se pode ver que o significado geométrico do produto vetorial de dois

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin(\gamma)$$



$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \text{Área do losângulo}$$

Figura 2.12: $\vec{u} \times \vec{v} = \text{Área do losango}$

vetores

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\gamma) \quad (2.134)$$

Eles determinam um losango quando se copia, paralelamente, os segmentos que correspondem aos vetores e a projeção de $\vec{u}$ sobre a perpendicular à reta suporte de $\vec{v}$ vale $\|\vec{u}\| \sin(\gamma)$. O produto $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\gamma)$ é a área deste losango determinado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$.

Para verificar o módulo do *produto vetorial*, deixe-me observar que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ determinam um espaço de dimensão 2, se forem l.i. que vou supor que sejam inicialmente, e portanto eu posso transportá-los sob forma de equivalência geométrica para o plano complexo e assim obter dois vetores da forma $re^{i\alpha}, se^{i\beta}$ que os representem. O produto vetorial destes dois vetores é igual, em módulo, ao produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos(\alpha) & r \sin(\alpha) & 0 \\ s \cos(\beta) & s \sin(\beta) & 0 \end{vmatrix} = rs(\cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cos(\beta))k = \quad (2.135)$$

$$rs \sin(\alpha - \beta)k; \gamma = \alpha - \beta; \quad (2.136)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = rs |\sin(\alpha - \beta)| = rs |\sin(\alpha - \beta)| = rs |\sin(\gamma)| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\gamma) \quad (2.137)$$

Exemplos com os vetores do triedro fundamental da Física:

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}; \text{ triedro dos vetores unitários da Física; } \quad (2.138)$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \quad (2.139)$$

$$(2.140)$$

Se a dimensão do espaço E for maior ou igual a três, o *produto vetorial* é uma operação binária bilinear alternada (anticomutativa) em E . Esta afirmação é válida para $\mathbf{R}^3$ munido com o triedro da Física.

O produto vetorial não foi criado por acaso, ele permite sintetizar importantes propriedades físicas o que torna natural a sua definição com o “determinante” trazendo na primeira linha os três vetores da Física. A Matemática em seguida absorveu a definição que se originou na Física com o nome de “produto exterior” que é um exemplo de denominação de má qualidade se originando do fato de que $u \times v$ não pertence ao plano determinado por pelos dois fatores. Se a dimensão do espaço for maior ou igual a três o produto vetorial passa a ser uma operação binária, não comutativa, do espaço e *nada exterior*.

Entre as muitas propriedades do produto vetorial tem-se a chamada *Regra BAC-CAB*

$$A \times (B \times C) \stackrel{?}{=} B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (2.141)$$

$$P = A \times (B \times C) = A \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \quad (2.142)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix} = \quad (2.143)$$

$$= (a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3), a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1), a_1(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2)) = \quad (2.144)$$

$$= D - E \stackrel{?}{=} B(A \cdot C) - C(A \cdot B); \quad (2.145)$$

$$D = (b_1, b_2, b_3)(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3); E = (c_1, c_2, c_3)(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3); \quad (2.146)$$

$$D = (b_1(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3), b_2(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3), b_3(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)) \quad (2.147)$$

$$E = (c_1(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3), c_2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3), c_3(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)); \quad (2.148)$$

$$D - E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix} = A \times (B \times C) \stackrel{!}{=} P \quad (2.149)$$

Embora esta demonstração tenha sido feita no $\mathbf{R}^3$ ela segue válida em qualquer dimensão maior ou igual a três.

O produto vetorial foi concebido para lidar com espaços de dimensão três e uma forma de demonstrar as propriedades deste produto pode facilmente ser feita definindo os vetores como combinação linear dos vetores da Física para os quais valem

$$i \times j = k; j \times i = -k; j \times k = i; k \times j = -i; k \times i = j; i \times k = -j; \quad (2.150)$$

Exercícios 1 Variedades

Os exercícios servirão para desenvolver a sua intuição a partir das ideias aqui expostas.

Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos, 2, 3, 5, 7, 11. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta gabarito, você pode encontrar o produto dos números primos que correspondem às opções verdadeiras. É possível que o gabarito esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Mas havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro. Quando for o caso de que uma resposta tenha que ser dada aproximadamente, o valor fornecido terá quatro dígitos depois do ponto, ou vírgula, decimal, para ser considerado correto.

1. Plano cartesiano Na figura (2.13), página 72, você tem o o plano cartesiano com quatro pontos marcados e alguns segmentos de reta traçados. O plano cartesiano é dividido em quatro quadrantes habitualmente referenciados com algarismos romanos, I, II, III, IV com a ordem crescendo no sentido positivo, anti-horário. Selecione as opções corretas nas afirmações abaixo.

Dos tempos em relógios tinham ponteiros...

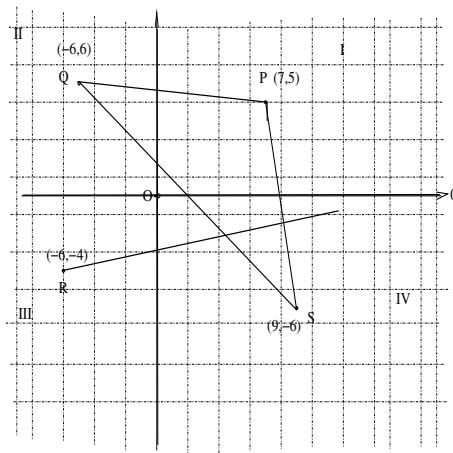


Figura 2.13: O plano cartesiano

- (2) (V) [] (F) [] O segmento de reta $\overline{PQ}$ se encontra no primeiro quadrante.
- (3) (V) [] (F) [] O segmento de reta $\overline{PQ}$ corta o eixo OY em sua parte negativa.
- (5) (V) [] (F) [] O segmento de reta $\overline{PQ}$ corta o eixo OY em sua parte positiva e atravessa do quadrante I para o quadrante II.
- (7) (V) [] (F) [] O segmento de reta que se origina no ponto R aparentemente corta o segmento $\overline{PS}$ perpendicularmente.
- (11) (V) [] (F) [] O segmento de reta que se origina no ponto R aparentemente corta o segmento $\overline{QS}$ formando ângulos agudos e obtidos.

gabarito:

2. Plano cartesiano Considere ainda a figura (2.13), página 72.

- (2) (V) [] (F) [] A distância entre P e S é $\sqrt{(7-9)^2 + (5-6)^2}$.
- (3) (V) [] (F) [] A distância entre P e S é $\sqrt{(7+9)^2 + (5+6)^2}$.
- (5) (V) [] (F) [] A distância entre S e Q é $\sqrt{(7+5)^2 + (5-6)^2}$.
- (7) (V) [] (F) [] A distância entre S e Q é $\sqrt{(9+6)^2 + (6+6)^2}$.
- (11) (V) [] (F) [] A distância entre S e Q é $\sqrt{(9-5)^2 + (6+6)^2}$.

gabarito: 21

3. Plano cartesiano Considere a figura (fig 2.14), página 73.

- (2) (V) [] (F) [] O ponto médio do segmento de reta $\overline{PQ}$ é $(\frac{13}{2}, \frac{11}{2})$.
- (3) (V) [] (F) [] O ponto médio do segmento de reta $\overline{PQ}$ é $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.
- (5) (V) [] (F) [] O ponto médio do segmento de reta $\overline{PQ}$ é $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

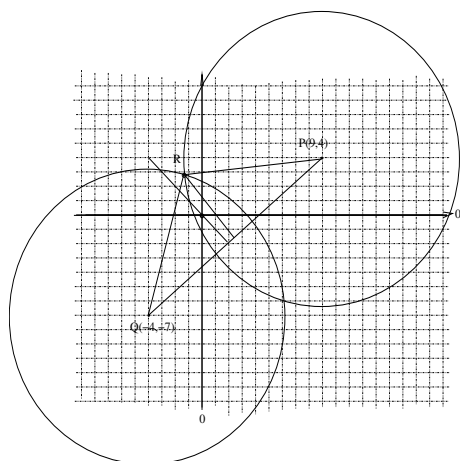


Figura 2.14: Segmentos de reta no plano cartesiano

- (7) (V) [] (F) [] Com um compasso (eletrônico) eu tracei dois círculos com centro nos pontos P e Q . Traçando um segmento de reta que passe na interseção dos círculos eu posso obter o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$.
- (11) (V) [] (F) [] O segmento de reta que passa na interseção dos círculos com centro nos pontos P e Q vai cortar o segmento $\overline{PQ}$ perpendicularmente no seu ponto médio.

gabarito: 385

4. Plano cartesiano Considere a figura (fig 2.14), página 73.

- (2) (V) [] (F) [] O segmento de reta que passa na interseção dos círculos irá cortar o segmento $\overline{PQ}$ exatamente ao meio se e somente se os raios dos círculos forem iguais.
- (3) (V) [] (F) [] Traçando um triângulo que tenha por lado o segmento $\overline{PQ}$ e o terceiro vértice um dos pontos de interseção dos círculos vai se obter um triângulo isósceles se os raios dos círculos forem iguais.
- (5) (V) [] (F) [] Considere R um dos pontos de interseção dos círculos na figura (fig 2.14). Também aceite que os raios dos círculos são iguais, como parecem. A altura do triângulo RPQ encontra o segmento $\overline{PQ}$ em seu ponto médio.
- (7) (V) [] (F) [] Considere R um dos pontos de interseção dos círculos na figura (fig 2.14). Também aceite que os raios dos círculos são iguais, como parecem. A área do triângulo RPQ é menor do que $6\sqrt{13^2 + 11^2}\sqrt{2}$.
- (11) (V) [] (F) [] Considere R um dos pontos de interseção dos círculos na figura (fig 2.14). Também aceite que os raios dos círculos são iguais, como parecem. A área do triângulo RPQ é exatamente igual a $6\sqrt{13^2 + 11^2}\sqrt{2}$.

gabarito:

5. Equação da reta A figura (fig 2.16), página 74, apresenta o vetor $u = (5, 5)$ que é perpendicular à reta r .

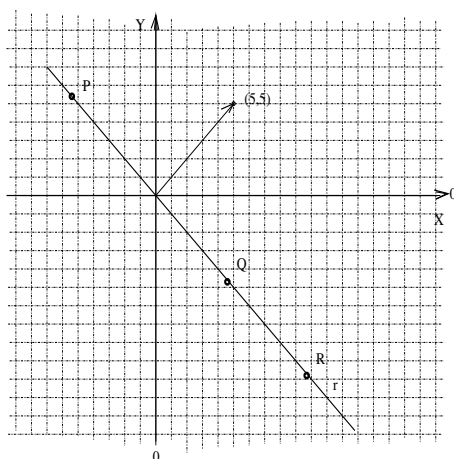


Figura 2.15: Equação da reta

- (2) (V) [] (F) [] A equação da reta r na figura (fig 2.16) é $y - x = 0$.
- (3) (V) [] (F) [] A equação da reta r na figura (fig 2.16) é $5y - 5x = 0$.
- (5) (V) [] (F) [] A equação da reta r na figura (fig 2.16) é $5y = 5x$.
- (7) (V) [] (F) [] A equação da reta r na figura (fig 2.16) é $5y = -5x$.
- (11) (V) [] (F) [] A equação da reta r na figura (fig 2.16) é $y + x = 0$.

gabarito:

6. Coefficiente angular

A figura (fig 2.16), página 74, mostra a reta r que é perpendicular ao vetor $u = (5, 5)$.

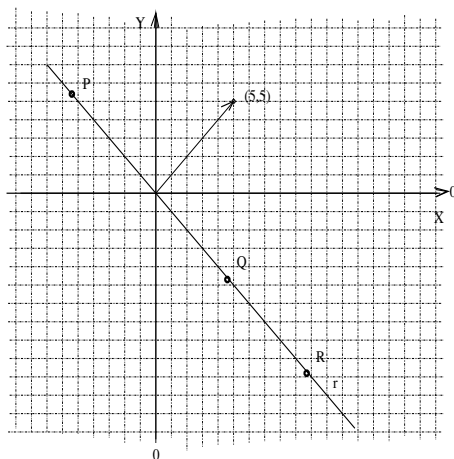


Figura 2.16: Equação da reta

- (2) (V) [] (F) [] r é perpendicular ao vetor $u = (1, 1)$.

- (3) (V) [](F) [] Como r é perpendicular ao vetor $u = (1, 1)$ então sua equação é $x + y = 0$.
- (5) (V) [](F) [] Como r é perpendicular ao vetor $u = (1, 1)$ e passa na origem então sua equação é $x + y = 0$.
- (7) (V) [](F) [] O coeficiente angular da reta r é -1 .
- (11) (V) [](F) [] Considere três pontos $P = (a, b)$, $Q = (p, q)$, $R = (m, n)$ escolhidos a esmo sobre a reta r . Então

$$\frac{b - q}{a - p} = \frac{q - n}{p - m} = \frac{n - b}{m - a} = -1; \quad (2.151)$$

gabarito: 770

7. Coeficiente angular Um quadrado de lado 5, com vértices P, Q, R, S lidos sequencialmente no sentido anti-horário, está centrado na origem com lados paralelos aos eixos coordenados.

- (2) (V) [](F) [] $P = (5, 0), Q = (5, 5), R = (-5, 0), S = (0, 5)$
- (3) (V) [](F) [] $P = (-5, 0), Q = (-5, -5), R = (-5, 5), S = (5, 5)$
- (5) (V) [](F) [] $P = (-5, 0), Q = (-5, -5), R = (-5, 5), S = (5, 5)$
- (7) (V) [](F) [] $P = (-2.5, -2.5), Q = (2, 5, -2.5), R = (2.5, 2.5), S = (-2.5, 2.5)$
- (11) (V) [](F) [] $P = (-2.5, -2.5), Q = (2, 5, 2.5), R = (-2.5, 2.5), S = (2.5, -2.5)$

gabarito:

8. distância entre dois pontos

Três vértices dum quadrilátero retângulo são $P = (4, 2), Q = (-1, -3), R = (4, -3)$

- (2) (V) [](F) [] O quarto vértice S é $S = (1, 2)$
- (3) (V) [](F) [] O quarto vértice S é $S = (2, -1)$
- (5) (V) [](F) [] O quarto vértice S é $S = (-2, 2)$
- (7) (V) [](F) [] O quarto vértice S é $S = (-1, 2)$
- (11) (V) [](F) [] O quarto vértice S é $S = (-1, 1)$

gabarito:

9. distância entre dois pontos Os três vértices dum triângulo são $P = (-5, 9), Q = (5, 9), R = (0, 0)$

- (2) (V) [](F) [] O triângulo PQR é equilátero.
- (3) (V) [](F) [] Todos os lados do triângulo PQR têm medidas diferentes.
- (5) (V) [](F) [] A área do triângulo PQR é 90;
- (7) (V) [](F) [] O triângulo PQR é isósceles.
- (11) (V) [](F) [] A área do triângulo PQR é 45;

gabarito:

10. Distância dum ponto a uma reta Considere no plano XOY a reta r de equação $3x - 7y + 10 = 0$.

(2) (V) [] (F) [] O ponto $P = (-1, 5)$ não se encontra na reta r .

(3) (V) [] (F) [] O ponto $P = (-1, 5)$ se encontra na reta r .

(5) (V) [] (F) [] O ponto $P = (-1, 1)$ é um ponto da reta r .

(7) (V) [] (F) [] O vetor $(7, 3)$ é paralelo à reta r .

(11) (V) [] (F) [] O vetor $(3, -7)$ é perpendicular à reta r .

gabarito: _____

11. Distância dum ponto a um plano Considere no plano XOY a reta r de equação $3x - 7y + 10 = 0$.

(2) (V) [] (F) [] A distância do ponto $P = (-1, 5)$ à reta r é

$$d(P, r) \approx 5.077 \text{ aproximadamente} \quad (2.152)$$

(3) (V) [] (F) [] A distância do ponto $P = (-1, 5)$ à reta r é

$$d(P, r) 5, \text{ exatamente.} \quad (2.153)$$

(5) (V) [] (F) [] A reta s , de equação $3x - 7y = 0$, é paralela à reta r . A distância entre as retas r, s é 10.

(7) (V) [] (F) [] A reta s , de equação $3x - 7y = 0$, é paralela à reta r . A distância entre as retas r, s é aproximadamente 5.077.

(11) (V) [] (F) [] A distância entre duas retas paralelas r, s é o comprimento dum segmento de reta $\overline{PQ}$ tal que $P \in r, Q \in s$ e $\overline{PQ} \perp r$, o segmento de reta $\overline{PQ}$ é perpendicular à reta s .

gabarito: _____

12. Equação do plano no $\mathbf{R}^3$ A equação linear $5x + 7y = 0$ representa um plano π do $\mathbf{R}^3$.

(2) (V) [] (F) [] Um vetor perpendicular ao plano π é o vetor $(7, -5, 0)$

(3) (V) [] (F) [] Um vetor perpendicular ao plano π é o vetor $(5, 7, 0)$

(5) (V) [] (F) [] O ponto $(1, 10, 8)$ pertence ao plano π .

(7) (V) [] (F) [] O ponto $(-7, 5, 0)$ pertence ao plano π .

(11) (V) [] (F) [] A distância do ponto $P = (5, 7)$ ao plano π é $\sqrt{5^2 + 7^2}$.

gabarito: _____

13. Equação do plano no $\mathbf{R}^3$

A equação do plano π é $z = 0$

(2) (V) [] (F) [] A distância do ponto $(0, 0, 1)$ ao plano π é 1.

(3) (V) [] (F) [] O ponto $(1, 1)$ pertence ao ao plano π .

(5) (V) [] (F) [] O ponto $(0, 1)$ pertence ao ao plano π .

(7) (V) [](F) [] O vetor $(0, 0, 10)$ é perpendicular ao plano π .

(11) (V) [](F) [] A distância do ponto $(1, 1, 1)$ ao plano π é 1.

gabarito: _____

14. Equação do plano no $\mathbf{R}^3$

A equação do plano π é $-z = 0$.

(2) (V) [](F) [] A distância do ponto $(0, 0, 1)$ ao plano π é 1.

(3) (V) [](F) [] O ponto $(0, 1)$ pertence ao ao plano π .

(5) (V) [](F) [] O ponto $(1, 1)$ pertence ao ao plano π .

(7) (V) [](F) [] O vetor $(0, 0, 1)$ é perpendicular ao plano π .

(11) (V) [](F) [] A distância do ponto $(1, 1, 3)$ ao plano π é 3.

gabarito: _____

15. distância Os pontos $(1, 3), (7, 3), (9, 8), (3, 8)$ determinam o quadrilátero Q .

(2) (V) [](F) [] Q é um paralelogramo.

(3) (V) [](F) [] A área de Q é 30.

(5) (V) [](F) [] A área de Q é 40.

(7) (V) [](F) [] Q é um retângulo.

(11) (V) [](F) [] Q é um quadrado.

gabarito: _____

16. distância dum ponto a um plano A equação do plano π é $5x + 7y + 3z + 10 = 0$

(2) (V) [](F) [] O vetor $(-5, -7, -3)$ é perpendicular ao plano π .

(3) (V) [](F) [] A distância do ponto $P = (3, 4, 5)$ ao plano π é aproximadamente 7.4639.

(5) (V) [](F) [] Dado um ponto $P = (a, b, c)$ a reta s que passa por P , perpendicularmente ao plano π , é paralela ao vetor $\vec{V} = (A, B, C) = (5, 7, 3)$. A equação vetorial da reta s é

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; (x, y, z) = \lambda(5, 7, 3); \lambda \in \mathbf{R}; \quad (2.154)$$

(7) (V) [](F) [] Dado um ponto $P = (a, b, c)$ a reta s que passa por P , perpendicularmente ao plano π , é paralela ao vetor $\vec{V} = (A, B, C) = (5, 7, 3)$. A equação vetorial da reta s é

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; (x - a, y - b, z - c) = \lambda(5, 7, 3); \lambda \in \mathbf{R}; \quad (2.155)$$

(11) (V) [](F) [] A distância do plano π à origem é aproximadamente 1.0976.

gabarito: _____

17. distância dum ponto a um plano São dados três pontos $A = (-1, 1, 7), B = \text{list}(3, 4, 7), C = \text{list}(5, -1, 7)$

- (2) (V)[](F)[] O triângulo ABC é equilátero.
 (3) (V)[](F)[] O triângulo ABC é isósceles.
 (5) (V)[](F)[] O triângulo ABC é escaleno.
 (7) (V)[](F)[] Os pontos A, B, C determinam um plano paralelo ao plano XOY .
 (11) (V)[](F)[] A equação do plano determinado pelos pontos A, B, C é $z = 7$.

gabarito:

18. distância dum ponto a um plano A figura (fig 2.17), página 78, lhe mostra um triângulo de vértices

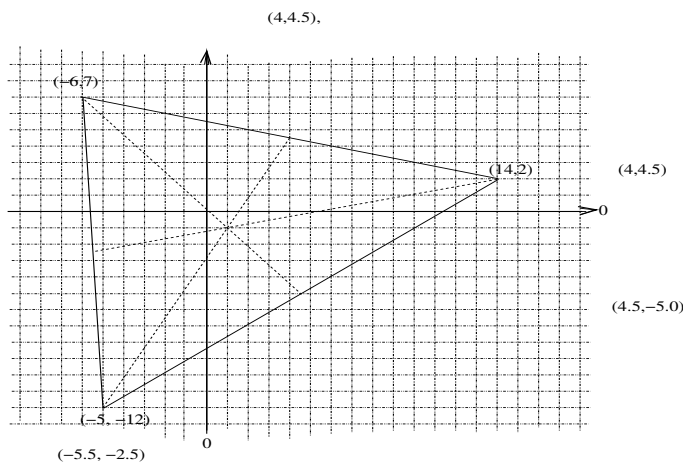


Figura 2.17: Triângulo

$P = (-6, 7), Q = (-5, -12), R = (14, 2).$

- (2) (V)[](F)[] O triângulo PQR é escaleno.
 (3) (V)[](F)[] O ponto de encontro das bissetrizes no triângulo PQR é $(1, -1)$
 (5) (V)[](F)[] O triângulo $P_1Q_1R_1$

$$P = (-6, 7), Q = (-5, -12), R = (14, 2); \quad (2.156)$$

$$P_1 = (0, 0), Q_1 = (1, -19), R = (20, -5); \quad (2.157)$$

$$(2.158)$$

é idêntico ao triângulo PQR mas foi deslocado por uma translação de tal forma que um dos vértices se encontra na origem.

(7) (V)[](F)[] A área do triângulo $P_1Q_1R_1$ é igual a área do triângulo PQR e vale $\frac{375}{2}$

(11) (V)[](F)[] A área do triângulo PQR é $\frac{D}{2} = \frac{\det(M)}{2}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -19 & 0 \\ 20 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.159)$$

gabarito:

19. distância dum ponto a um plano Considere a expressão

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; A(x-3) + B(y-4) + C(z-5) = 0\} \quad (2.160)$$

(2) (V)[](F)[] Se A, B, C forem três constantes dadas, S é um plano.

(3) (V)[](F)[] Se A, B forem duas constantes dadas, e $C \in [-1,1]$ S é uma família de planos determinada pelo vetor (A, B, C) passando pelo ponto $P = (3, 4, 5)$.

(5) (V)[](F)[] Se A, B forem duas constantes dadas, e $C \in [-1,1]$ S é uma família de planos determinada pelo parâmetro $C \in [-1,1]$.

$$A(x-3) + B(y-4) + C(z-5) = 0; \quad (2.161)$$

$$(z-5) = -\frac{A(x-3) + B(y-4)}{C}; \quad (2.162)$$

$$z = 5 - \frac{A(x-3) + B(y-4)}{C} = -\frac{A}{C}(x-3) - \frac{B}{C}(y-4); \quad (2.163)$$

$$F(x, y) = 5 - \frac{A}{C}(x-3) - \frac{B}{C}(y-4); \quad (2.164)$$

$$G(x, y) = 5 - \frac{A}{T}(x-3) - \frac{B}{T}(y-4); \quad (2.165)$$

$$F(x, y) - G(x, y) = \frac{(AS - AT)(x-3)}{ST} + \frac{(BT - BS)(y-4)}{ST}; \quad (2.166)$$

$$F(x, y) - G(x, y) = \frac{(AS - AT)(x-3) - (BT - BS)(y-4)}{ST}; \quad (2.167)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 - \frac{A}{C}(x-3) - \frac{B}{C}(y-4) = F(x, y); \\ 5 - \frac{A}{D}(x-3) - \frac{B}{D}(y-4) = G(x, y); \\ \frac{(AS-AT)(x-3)}{ST} + \frac{(BT-BS)(y-4)}{ST} = \frac{(AS-AT)(x-3) - (BT-BS)(y-4)}{ST}; \\ \frac{(AS-AT)(x-3)}{ST} - \frac{(AS-AT)(x-3) + \frac{(BT-BS)(y-4)}{ST} + (BT-BS)(y-4)}{ST}; \end{array} \right. \quad (2.168)$$

(7) (V)[](F)[]

(11) (V)[](F)[]

gabarito:

20. distância dum ponto a um plano A base de um triângulo é o segmento de reta vai do ponto $(0,0)$ ao ponto $(a,0)$ e a diferença das distâncias entre estes dois pontos e o terceiro vértice (x,y) é constante.

(2) (V)[](F)[] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x,y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $2ax + a^2$

(3) (V)[](F)[] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x,y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $-2ax - a^2$

(5) (V)[](F)[] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x,y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $-2ax + 2a^2$

(7) (V)[](F)[] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x,y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $-ax + a^2$

(11) (V) [] (F) [] A diferença das distâncias mencionada entre o ponto (x, y) e os extremos do segmento à base do triângulo é $-2ax + a^2$

gabarito:

Capítulo 3

Integral das funções polinomiais

3.1 integração com somas de Riemann

Há várias formas de entender a *integral*, a mais elementar é como uma área.
Se f for uma *função univariada integrável no sentido de Riemann* então o símbolo

$$\int_a^b f(x)dx \tag{3.1}$$

representa a área limitada pelo gráfico de f , pelo eixo OX desde o ponto a até o ponto b , quer dizer que é uma área algébrica porque o sinal muda se ela for calculada de b para a . Na figura (3.1) página 81, você

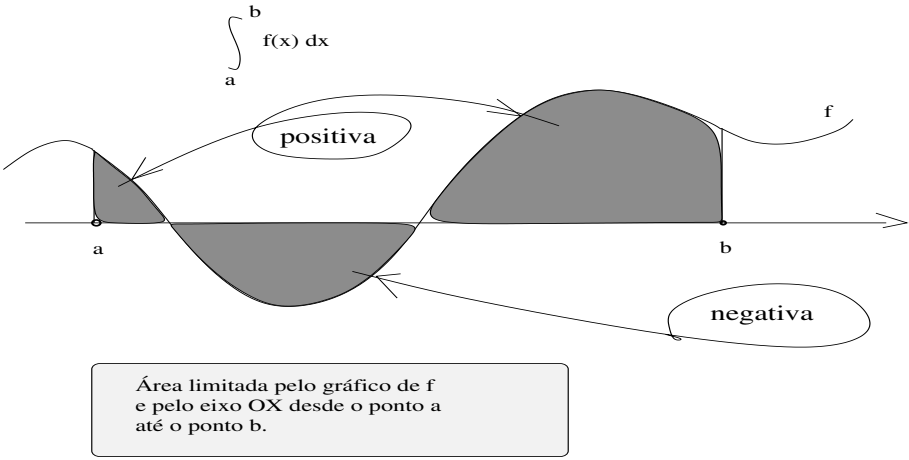


Figura 3.1:

pode ver a interpretação geométrica da integral de f com a indicação de que algumas das “subáreas” são positivas ou negativas.
A razão do sinal é que a integral, mesmo interpretada como área, é uma quantidade de um determinado fenômeno: *quantidade calor, quantidade de movimento, distância percorrida*, dependendo do significado de f .

Se f representar a velocidade com que um corpo se move, se tem a distância percorrida pelo corpo entre os pontos a e b . E este exemplo justifica bem que a integral seja um *área algébrica*, tenha sinal.

Um bom exemplo é do pêndulo que justifica bem que a integral seja um *área algébrica*, tenha sinal. Supondo que ele esteja funcionando em *condições ideais*, sem atrito, sem resistência do ar, ele balançaria eternamente do ponto de saída de volta para o ponto de saída, quer dizer a distância percorrida seria zero. Mas mesmo considerando um pêndulo nas condições normais, ele vai e volta sem atingir o ponto inicial mas chega perto portanto a distância percorrida é quase zero, porque, de volta, a distância percorrida é negativa.

Nem sempre é possível o cálculo da integral de uma função qualquer, por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ não é integrável à Riemann se o ponto $x = 0$ pertencer ao intervalo de integração. A integral sobre o intervalo $[a, b]$ que não tenha o zero em seu interior existe mas o cálculo é um pouco mais trabalhoso. As integrais simples de serem calculadas é das funções polinomiais e vou me especializar neste caso agora.

3.2 Integral das funções polinomiais

A integral de uma função univariada é uma *área algébrica* limitada pelo gráfico da função, o eixo OX e dois limites definindo um intervalo. Este conceito é do Cálculo, “*área algébrica*” é uma especialização do conceito de área, considerando o sinal. O símbolo

$$(eq.16) \int_a^b f(x)dx \quad (3.2)$$

representa esta ideia e neste caso o intervalo é $[a, b]$ quando se tem

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (3.3)$$

em que uma das áreas se inicia no ponto $x = a$, com condição inicial $x = a$, e a outra se inicia no ponto $x = b$, com condição inicial $x = b$, iguais em módulo mas com sinais contrários.

Existem diversas fórmulas que foram descobertas ao longo dos quase trezentos anos de existência do Cálculo para calcular exatamente uma grande quantidade de integrais. Sabe-se calcular, exatamente, qualquer integral de função polinomial, de diversas funções trigonométricas, de muitas funções que sejam composição de polinômios com funções trigonométricas, de algumas funções racionais...

Mas se pode dizer que o cálculo de todas estas integrais mencionadas acima foram descobertas por acaso, ou indiretamente. Facilmente pode-se cair numa integral para a qual não haja fórmulas que permitam o cálculo exato, e um exemplo bem simples é

$$f(a) = \int_1^a \frac{1}{x} dx; a > 0; \quad (3.4)$$

que é uma integral de grande importância prática porque

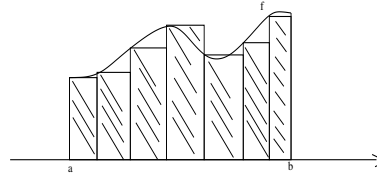
$$f(t) = \ln(t); f'(t) = \frac{1}{t}; t > 0; \quad (3.5)$$

Ou seja, $\ln(t)$ é um nome de uma nova função definida como uma integral.

Este exemplo vai me levar a restrição de estudar as integrais das funções polinomiais porque elas são as únicas para as quais nós temos um método efetivo para encontrar uma fórmula: *as somas de Riemann*.

Partindo da suposição de que exista a integral de $y = f(x)$ sobre um intervalo $[a, b]$, confira a representação geométrica na figura (fig. 3.2), página 83 uma forma de calcular a integral consiste em fazer uma aproximação do seu valor pela área de retângulos contidos na região limitada pelo gráfico de f , o eixo OX e os limites de integração definidos pelo intervalo considerado.

O gráfico na figura (fig. 3.2), página 83 mostra geometricamente esta ideia. No gráfico, figura (fig. 3.2) tive o cuidado de fazer as subdivisões para minimizar os erros, um dos retângulos representa a área por excesso noutra tanto há excesso como falta e nos demais a área foi calcula por falta, de modo que há uma certa compensação visual. Mas isto é um detalhe sem relevância, o que interessa é que a quantidade n de subdivisões do intervalo $[a, b]$ seja grande.



Aproximação da integral com áreas de retângulos

Porém, muito melhor do que estas tentativas de compensação, que são necessariamente visuais, portanto rudimentares, consiste, simplesmente, em reduzir a medida das bases dos retângulos e melhor ainda considerá-las todas iguais com valor $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ em que N é a quantidade de tais retângulos, para finalmente fazer o cálculo com um programa de computador. Se a função for contínua o Cálculo demonstra que as *somas de Riemann uniformes* são suficientes para serem usadas para obter o limite desejado.

Figura 3.2: Soma de Riemann

A soma das áreas dos retângulos se expressa com a soma de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k); \quad (3.6)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k; \Delta x_k = x_{k+1} - x_k; \quad (3.7)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k; \Delta x_k = x_k - x_{k-1}; \quad (3.8)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x); \quad (3.9)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}; \quad (3.10)$$

Vou fazer comentários a respeito de cada uma destas equações. Este tipo de soma que aparece nas equações (eq. 6) (eq. 7) se chama *soma de Riemann*. e elas podem aparecer com vários formatos alternativos como o do equação (eq. 8). A expressão da *soma de Riemann* que aparece na equação (eq. 9) é particularmente importante, é chamada de *soma de Riemann uniforme*. Observe que nela o *passo da soma* foi obtido dividindo o intervalo em n partes iguais: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Vantagem das *somas de Riemann uniformes*, eu pude usar a propriedade distributiva do produto relativamente à soma, colocando Δx em evidência. Isto dá um ganho computacional imenso, faço as somas das alturas e depois multiplico pelo tamanho comum das bases.

É válido usar *somas de Riemann uniformes* se for possível, primeiro, provar que a integral existe, e aqui, sim, existe um caminho teórico, científico, para a demonstração da existência de integrais, por exemplo, pode-se provar que se f for contínua, então $\int_a^b f(x)dx$ existe em qualquer intervalo contido no domínio de f portanto vale aplicar somas de Riemann e programas de computador para rapidamente calcular esta integral. É o caso das funções polinomiais.

Um programa vai ajudar a compreender a validade do método que você pode inclusive aplicar em funções não polinomiais.

```

def f(x):
    return (x+3)*(x-5);

def g(x):
    return x**2; ## a função do segundo grau

def P(x):
    return 3*x**2 + 4*x + 7;

def h(x):
    return P(x)*sin(x);

def riemann(f, inicio, fim, n):
    x, soma, deltax = inicio, 0, (fim-inicio)/float(n);
    while(x < fim):
        soma += f(x); ## incrementa soma com f(x)
        x += deltax;
    return(soma*deltax);

inicio = 0; fim = 10; n = 10000;
riemann(f, inicio, fim, n);

```

Aplicando a riemann às funções definidas:

```

riemann(f, 0, 1, n);
-15.668216665000065

```

```

riemann(g, inicio, fim, n);
333.38333500003193

```

```

riemann(P, 0, 1, n);
10.00105000499965

```

Defina a função F que você desejar e calcule sua integral no intervalo $[a, b]$ com a precisão n executando

```
riemann(F, a, b, n);
```

O método oferecido por este programa o libera da necessidade da resposta das integrais no seu livro de Cálculo, ou melhor, complementa o seu livro de Cálculo oferecendo-lhe um meio de verificar se você fez as contas corretamente. Claro, o resultado é aproximado, se o valor da integral for $\frac{1}{3}$ o programa vai lhe fornecer 0.3333328333339961 com precisão $n = 1000000$ e não adianta aumentar muito a precisão porque os erros acumulados do algoritmo podem piorar o resultado.

3.3 O caso $f(x) = x^2$

Vou logo calcular $\int_0^a x^2 dx$ e depois mostrar que este "caso particular" pode ser rapidamente extrapolado para o cálculo de $\int_0^a x^n dx$ e finalmente para qualquer polinômio.

$$f(x) = x^2; \Delta = (b - a)/N; x_k = a + k\Delta \quad (3.11)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta; \quad (3.12)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k); \quad (3.13)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta \sum_{k=1}^n (x_k)^2; \quad (3.14)$$

1. Na equação (eq. 11) defini $f, \Delta, x_k = a + k\Delta$. Os nós, onde estou definindo os valores de f formam uma progressão aritmética, a grande vantagem do método como logo vou mostrar.
2. Na equação (eq. 12) escrevi a soma de Riemann que me dá uma aproximação para o valor da integral $\int_a^b f(x)dx$.
3. Na equação (eq. 13) eu coloquei Δ em evidência.
4. Na equação (eq. 14) escrevi a expressão de $f(x_k)$ como segunda potência dos termos da progressão aritmética.

3.3.1 Somas de potencias

Agora vem a grande vantagem das funções polinomiais, as somas das potências n dos termos de uma progressão aritmética são obtidas por um polinômio bem definido do grau $n + 1$. Vou continuar, por um momento com o caso particular $f(x) = x^2$ porque as ideias para chegar no caso geral $f(x) = x^n$ ficam bem evidentes a partir deste exemplo particular. Exemplos particulares bem escolhidos levam facilmente a uma generalização!

O caso aqui é *soma dos quadrados dos termos numa p.a.* Vou listar os resultados e deixar-lhe as demonstrações como exercício. Se você quiser dominar a Matemática terá que aprender a colocar a mão na massa, e neste caso, lhe garanto, é uma questão de persistência. Vou chamar os resultados de *teoremas*, mas não se assuste, enfrente!

Teorema 1 (Diferença) de polinômios

Se $P(x)$ for um polinômio do grau n então $Q(x) = P(x - a) - P(x)$ é um polinômio do grau $n - 1$.

Dem: Basta demonstrar no caso particular $P(x) = x^n$ porque, na diferença, todos os termos de $P(x) = A_n x^n + \dots + A_0$ vão cair de um grau e A_0 desaparece. Comece pelo caso $P(x) = x^2$ depois $P(x) = x^3$ passa para $P(x) = x^n$. Coragem!

q.e.d.

Teorema 2 (Soma de) potências numa p.a.

Considere a progressão aritmética

$$a_0, a_1, \dots, a_n; a_k = a_0 + k\Delta \quad (3.15)$$

A soma

$$a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2 = P(a_n) - P(a_0) \quad (3.16)$$

em que P é um polinômio do grau 3.

Dem:

É consequência do teorema anterior, a diferença $P(a_n) - P(a_0)$ é dada por um polinômio do grau 2, chame o polinômio do segundo grau que está sendo aplicado aos termos da progressão aritmética de Q e agora faça

$$P(a_n) - P(a_{n-1}) = Q(a_n); \quad (3.17)$$

$$P(a_{n-1}) - P(a_{n-2}) = Q(a_{n-1}); \quad (3.18)$$

$$P(a_{n-2}) - P(a_{n-3}) = Q(a_{n-2}); \quad (3.19)$$

$$\dots \quad (3.20)$$

$$P(a_2) - P(a_1) = Q(a_2); \quad (3.21)$$

$$P(a_1) - P(a_0) = Q(a_1); \quad (3.22)$$

$$P(a_n) - P(a_0) = \sum_{k=1}^n Q(a_k); \quad (3.23)$$

A soma da coluna com as diferenças se resume a $P(a_n) - P(a_0)$ porque de uma linha para outra se dá um cancelamento, a soma da coluna depois das igualdade é $\sum_{k=1}^n Q(a_k)$. **q.e.d.**

Capítulo 4

A derivada das funções polinomiais

4.1 derivada das funções polinomiais

Derivada dos polinômios é um caso particular de derivação que é fácil de construir e pode servir como primeiro passo para o estudo da derivada.

Para que você entenda melhor esta questão do *coeficiente angular instantâneo* um exemplo da Física é bem instrutivo.

Considere a seguinte situação, representada no gráfico da figura (fig 4.1), página 87. Neste gráfico estou simulando o que aconteceria se eu estivesse rodando uma pedra presa a um cordão que, num determinado instante, se quebrasse. A pedra, enquanto presa à minha mão pelo cordão, em movimento, muda de direção a cada instante. Mas quando o cordão se quebra ela se mantém numa direção fixa, a da tangente.

Quando garoto, morando em Belém que era a cidade das mangueiras, quando chovia, a molecada corria para as ruas para comer mangas. As que caíam no chão não prestavam, já estavam arrebentadas e sujas, melhor era, com uma pedra presa a um cordão, girar com força e soltar o cordão no *no momento certo* quando a pedra subia em direção a um cacho de mangas rosadas, bem maduras, então era só balançar o galho com jeito para as mangas caíssem nas mãos dum companheiro que estava *na bicora*. A figura (fig 4.1), página 87. lhe mostra a *Física* do processo, a pedra sai pela tangente e o garoto experiente consegue que o cordão fique preso num cacho de mangas bem madurinhas.

É o que vou estudar agora, a derivada. Enquanto a pedra está rodando presa ao cordão, o seu coeficiente angular está mudando a todo instante. É uma lei da *Física*, quando o cordão for solto, no momento certo, a pedra parte em linha reta com o último *coeficiente angular*, o *coeficiente angular instantâneo*. É uma lei da *Física*: se nenhuma força estiver atuando sobre um corpo, ele se mantém em movimento retilíneo uniforme. Se não houvesse a *força da gravidade* a pedra seguiria pela reta tangente, mas devido a atração terrestre ela segue por uma parábola que é do máximo interesse do moleque com foco nas man-

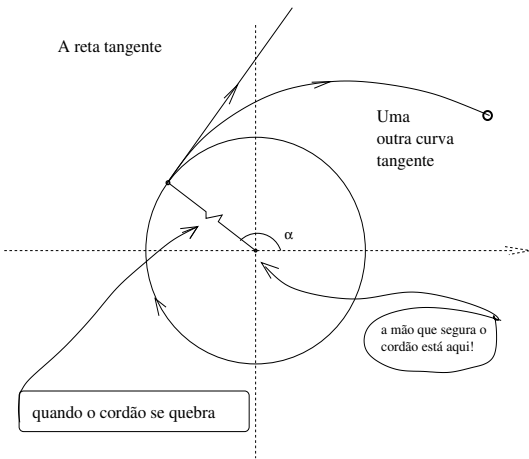


Figura 4.1: e cordão se quebra!

gas, a pedra sobe e faz uma curva junto ao cacho de mangas e neste momento o cordão fica preso em volta das mangas, o *moleque* balança o cacho e as mangas caem.

É a *derivada* que me dá o *coeficiente angular instantâneo* duma curva e que me permite escrever a equação da *reta tangente* num ponto da curva, confira a figura (fig. 4.2) que mostra as tangentes ao gráfico da função $y = f(x) = x^2 - x - 6$ em dois pontos escolhidos no gráfico.

Calcular a derivada de funções polinomiais é simples e vou começar com um caso bem trivial, mais simples do que este da figura (fig. 4.2). Vou calcular a derivada de $f(x) = x^2$, acompanhe as contas depois das quais eu vou comentários.

$$y = f(x) = x^2; x = a \Rightarrow (a, a^2) \in \text{graf}(f); \quad (4.1)$$

$$(a + \Delta x, (a + \Delta x)^2) \in \text{graf}(f); \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \Delta y = f(a + \Delta x) - f(a); \\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ coef. ang. da secante;} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$m = \frac{a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 - a^2}{\Delta x} = 2a + \Delta x; \quad (4.4)$$

$$r(x) = f(a) + m(x - a); \text{ equação da reta secante;} \quad (4.5)$$

$$\Delta x = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \mapsto \frac{dy}{dx} = f'(a) = m; r(x) = f(a) + m(x - a); \quad (4.6)$$

Antes de fazer os comentários sobre as contas eu lhe proponho que faça a experiência seguinte, usando *gnuplot* que é um programa de *domínio público* para fazer gráficos de vários tipos, inclusive de funções. Você encontra *gnuplot* neste URL:

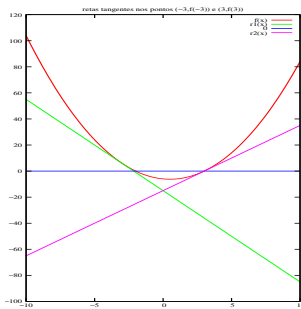


Figura 4.2: tangentes

<http://www.gnuplot.info/>

- Abra o *gnuplot*, se não tiver, instale-o!
- No terminal do *gnuplot* copie cada uma das linhas abaixo acionando o *enter* depois da última linha.
- Coloque o cursor, o *ratinho* dentro da janela gráfica e acione pausadamente o botão esquerdo do o *ratinho*.

Você deverá ver as secantes se movendo e se aproximando da tangente no ponto $a = 2$.

```
f(x) = x**2;    ## defini a função f, escolha outra!
Deltax = 2;    ## valor inicial para Deltax
```

```

a=2;          ## ponto de tangência...
m=(f(a+Deltax)-f(a))/Deltax; ## coef. angula da reta secante
## equação da reta secante com coeficiente angular m
r(x) = f(a) + m*(x-a); ## equação da reta
set xrange [0:5]; set yrange [-3:15]; ## janela gráfica p gnuplot
## o comando que faz a coisa rodar .....
while (Deltax>1) { \
m=(f(a+Deltax)-f(a))/Deltax;\
plot f(x), r(x), 0; \
Deltax = Deltax-0.2;\
pause mouse;}
## experimente raspar e colar esta três linhas:
Deltax = 2;
while (Deltax>1) {m=(f(a+Deltax)-f(a))/Deltax;\
plot f(x), r(x), 0; Deltax = Deltax-0.2;pause mouse;}
Deltax = 0; replot;

```

Substitua "pause mouse" por "pause 3" e agora fique apenas olhando a janela gráfica acontecer!

Comentando o sistema de equações.

1. Na (eq.1) eu escrevi a equação da função f e também observei que o ponto (a, a^2) pertence ao gráfico de f ,
2. na (eq.2) eu observei que o ponto $(a + \Delta x, (a + \Delta x)^2)$ também está no gráfico de f . Eu preciso de dois pontos para traçar a reta secante,
3. na equação (eq.3) calculei o coeficiente angular m da reta secante que passa nos pontos (a, a^2) e $(a + \Delta x, (a + \Delta x)^2)$. Δx e $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ são os dois catetos do triângulo retângulo que determina a reta secante como hipotenusa.
4. na equação (eq.4) expandi as contas da equação anterior. Como a^2 foi eliminado eu pude simplificar cancelando Δx e obtendo a expressão do *coeficiente angular* m ,
5. na (eq.5) escrevi a equação da reta secante com coeficiente angular m .
6. na equação (eq.6) eu calculei o valor de m quando $\Delta x = 0$ que é o coeficiente angular da reta tangente, também chamado de *coeficiente angular instantâneo*. Quando $\Delta x = 0$ obtenho o limite das retas secantes que é a reta tangente, com o coeficiente angular $f'(a) = \frac{dy}{dx}$. Este *símbolo*, $\frac{dy}{dx}$, *não é uma fração* porque $\Delta x = 0$, foi uma invenção atribuída a Leibniz como o limite da fração $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $\Delta x = 0$.

A fração de Leibniz

O *coeficiente angular instantâneo* é o coeficiente angular da reta tangente, é o caso da pedra rodando presa ao cordão que, quando o cordão for solto, a pedra segue na direção da tangente, é este o *coeficiente angular instantâneo*.

O *símbolo* $\frac{dy}{dx}$ não é uma fração, mas funciona como se fosse e você vai encontrá-la no Cálculo funcionando como se fosse uma fração, $f'(a) = \frac{dy}{dx}$. Eu considero este *símbolo* um dos *mais intrigantes* da Matemática e como o numerador dy e o denominador dx são "limites", e no segundo caso zero, $\frac{dy}{dx}$ não é uma fração. E funciona como se fosse uma fração, provocou muitas tentativas de explicá-lo sem sucesso, inclusive criando um conceito mal fundamentado, *infinitesimal* e o nome do Cálculo, até o

começo do século 20 era *Cálculo integral e infinitesimal*. Você vai encontrar $\frac{dy}{dx}$ no Cálculo onde ele será usado como se fosse uma fração!

A última operação, usando $\Delta x = 0$, somente pode ser feita com as *funções polinomiais* para se obter *exatamente* o limite que é o coeficiente angular instantâneo, o coeficiente angular da reta tangente, porque o termo líder da expressão polinomial é cancelado na diferença, e Δx pode ser colocado em evidência para eliminar o denominador Δx . Como não há mais Δx no denominador posso calcular exatamente o coeficiente angular da reta tangente dando a Δx o valor zero.

Eu usei uma função que me permitiu contas bem rápidas, mas valem as mesmas contas para qualquer função polinomial porque o principal efeito vale para todas elas: “o termo líder da expressão polinomial é cancelado” permitindo que se coloque Δx em evidência para eliminar o denominador Δx e obter o valor do limite simplesmente dando a Δx o valor zero.

Deixo-lhe como exercício refazer as contas que eu fiz com $f(x) = x^2$ com qualquer função polinomial de sua escolha, comece com $f(x) = x^3$ que tem um termo a mais de $f(x) = x^2$, depois teste

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \quad (4.7)$$

um pouco mais de contas mas verá ao final que o mesmo acontece, o termo líder, $4x^3$ desaparece permitindo que você coloque Δx em evidência. Depois dê a Δx o valor zero para encontrar a derivada:

1. A derivada de $f(x) = x^2$ no ponto x é $2x + \Delta x = 2x$,

2. A derivada de $f(x) = x^3$ no ponto x é

$$\frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \quad (4.8)$$

$$= 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2; \quad (4.9)$$

$$\Delta x = 0 \Rightarrow 3x^2 \text{ a derivada no ponto } x; \quad (4.10)$$

3. A derivada de $f(x) = x^4$ no ponto x é $4x^3$.

4. A derivada de $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ no ponto x é $12x^2 + 6x + 2$.

5. A derivada de $f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ no ponto x é $20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$.

6. A derivada de $f(x) = 3x$ no ponto x é 3, e tinha que ser, o coeficiente angular de uma reta é constante.

A regra de derivação da função polinomial $f(x) = Ax^n$ é $f'(x) = nAx^{n-1}$ que você pode aplicar a cada monômio de uma função polinomial.

4.2 A derivada implícita

A notação de Leibniz $\frac{df(x)}{dx}$ me diz que a derivada está sendo calculada relativamente à variável x e me permite calcular a derivada de uma expressão algébrica sem saber se há alguma função que possa ser definida. Olhe um exemplo:

$$x^2 + y^2 = 4; \quad (4.11)$$

$$2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow 2ydy = -2xdx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad (4.12)$$

Na equação (eq.11) eu escrevi uma expressão algébrica que mais a frente você vai ver que é a equação do círculo de centro na origem e raio 2. Na equação (eq.12) eu calculei a *derivada implícita* da expressão

anterior e para isto derivei cada monômio relativamente a uma *variável* deixando indicado, dx ou dy , relativamente a quem a derivada estava sendo calculada. Usei a intrigante propriedade do *símbolo de Leibniz* $\frac{dy}{dx}$, que não é uma fração, mas que funciona como se fosse, para calcular a derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (4.13)$$

de uma função f que eu não conheço. Eu vou usar *derivada implícita* para compreender a estrutura de expressões algébricas no próximo capítulo em que vou trabalhar com as equações das cônicas então eu posso encontrar a equação de uma reta tangente a equação do círculo, por exemplo. Vou fazer as contas e depois explicar cada passo.

$$x^2 + y^2 = 4; \quad (4.14)$$

$$2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x := a; dx := x - a; \\ y := b; dy := y - b; \\ 2a(x - a) + 2b(y - b) = 0; \\ 2b(y - b) = -2a(x - a) \Rightarrow b(y - b) = -a(x - a); \end{cases} \quad (4.15)$$

$$(y - b) = -\frac{a}{b}(x - a) \Rightarrow y = b - \frac{a}{b}(x - a); \quad (4.16)$$

Comentando,

1. Estou partindo de uma hipótese:

$$(a, b) \in x^2 + y^2 = 4; y^2 = 4 - x^2 y = \sqrt{4 - x^2} \quad (4.17)$$

quero dizer, o ponto (a, b) satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 4$ coisa que eu obtive de alguma maneira, ou estou simplesmente fazendo a hipótese que pode dar certo depois. Os matemáticos com frequência fazem hipóteses deste tipo, suponho que seja verdade que o ponto (a, b) satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 4$ e vou em frente fazendo contas. Se der certo eu terei encontrado alguma coisa interessante! E funciona!

2. Na (eq.15) eu substituí x por a e dx por $x - a$ é o significado do símbolo “:=”. Também substituí y por b e dy por $y - b$ que me permitiu, na (eq.16), escrever a equação da reta que passa no ponto (a, b) com coeficiente angular $-\frac{a}{b}$

O ponto $(1.2, 1.6)$ *aproximadamente* satisfaz a equação (eq.14) descobri isto experimentando com Python3, então eu vou considerar $(a, b) = (1.2, 1.6)$ e vou fazer o gráfico do círculo com sua reta tangente no ponto $(1.2, 1.6)$. Usando as equações que escrevi acima tenho

$$y = b - \frac{a}{b}(x - a); (a, b) = (1.2, 1.6); \quad (4.18)$$

$$y = 1.6 - \frac{1.2}{1.6}(x - 1.2); \quad (4.19)$$

A figura (fig 4.3), página 92, mostra que *meu experimento*, usando a *derivada implícita* e também a “*fração de Leibniz*”, eu consegui traçar o gráfico de uma reta tangente à curva com equação $x^2 + y^2 = 4$ que eu *estou supondo* que seja um círculo. Funciona!

Eu nem mesmo preciso saber que $x^2 + y^2 = 4$ é um círculo, se o ponto pertencer a esta curva, com a derivada implícita eu posso fazer o gráfico de uma reta tangente à curva. Experimentando com uma *linguagem de programação* eu posso descobrir vários pontos sobre uma curva e, traçando tangentes, eu posso ter uma ideia do gráfico da curva. . . .

Você pode repetir estas contas com a equação de uma função polinomial qualquer, escolhendo um ponto $(a, b) = (a, f(a))$, calcular a derivada $\frac{df(x)}{dx}|_{x=a} = f'(a)$ escrever a equação da reta tangente $r(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ e pedir que *gnuplot* faça os gráficos de f, r para ver aparecer a reta tangente ao gráfico de f . O código do *gnuplot* com $(a, b) = (1.2, 1.6)$ o ponto que descobri no círculo,

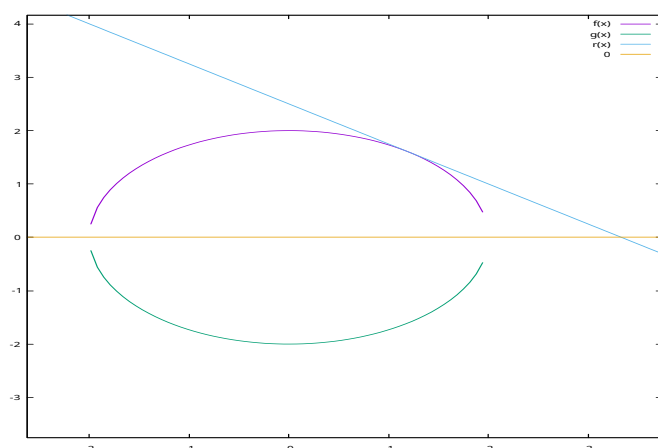


Figura 4.3: Reta tangente ao círculo

```

a = 1.2; b = 1.6;
m = -a/b;    ## o valor da derivada
f(x) = sqrt(4- x**2); g(x) = -sqrt(4- x**2);
r(x) = b - m*(x-a);    ## a reta tangente
set yrange [-4:4]; set xrange [-4:4]; ## janela gráfica do gnuplot
plot f(x),g(x),r(x),0    ## comando para fazer o gráfico

```

Troque os dados no “programa do gnuplot com os dados de uma função polinomial de sua escolha. Dê a m o valor da derivada calculada no ponto a ;

Vou usar esta ferramenta no capítulo sobre as curvas da Geometria Analítica.

Capítulo 5

A Geometria Analítica

5.1 Círculo e elipse

Se você desenhar numa folha, *com um compasso*, um círculo e depois inclinar a folha um pouco *vai ver uma elipse* em lugar do círculo. Quer dizer que uma elipse é um *círculo deformado*. A aparência que lhe passo com esta introdução é de que círculos são irrelevantes e nem mereciam ser tratados, e *estou lhe passando uma informação falsa*. Embora não haja nenhum círculo, ou esfera, em todo o Universo, assim como não há retas, estas equações são importantes no processo de construção de aproximações que é coisa que você vai encontrar no Cálculo ou em programas para conduzir módulos espaciais ...

O círculo é uma variedade não linear de dimensão 1, é uma curva fechada assim como a elipse.

Ocorre que, apesar de que no Universo *não haja uma única reta e nem planos*, retas, planos, círculos e elipses são essenciais para construir aproximações e foi por esta razão que o segundo capítulo se dedicou às retas e planos, as variedades lineares. A Matemática é uma ciência de modelos embora na prática os modelos que a Matemática constrói têm que ser adaptados o que se chama de aproximação.

Vou continuar pela equação do círculo.

O círculo é uma cônica, quer dizer uma curva determinada pela interseção dum plano com um cone de duas folhas, e aqui estou me referindo a uma curva espacial porque um cone é um sólido, uma *variedade* dum espaço tridimensional. Confira também a *equação da elipse* para uma análise destas interseções, confira elipse, parábola, hipérbole ou reta. . .

Há uma *imprecisão* neste texto que será corrigida mais a frente, mas procure descobri-lo você mesma.

5.1.1 Equação geral do círculo

Da geometria, *círculo* é “o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dum ponto chamado *centro*”. Vou usar a definição de *distância entre dois pontos* para obter a equação dum círculo.

Deixe-me identificar o centro com as coordenadas $C = (a, b)$ e um ponto genérico, P , do plano com as coordenadas (x, y) . A frase da geometria que define círculo pode então ser traduzida algebricamente como

Definição 11 do Círculo de centro $C = (a, b)$ e raio r

$$d(P, C) = r; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r; \quad (5.1)$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2; \quad (5.2)$$

em que r é a distância constante entre P e C .

A figura (fig 5.1), página 94, lhe apresenta a ideia, da geometria, contida na definição do círculo.

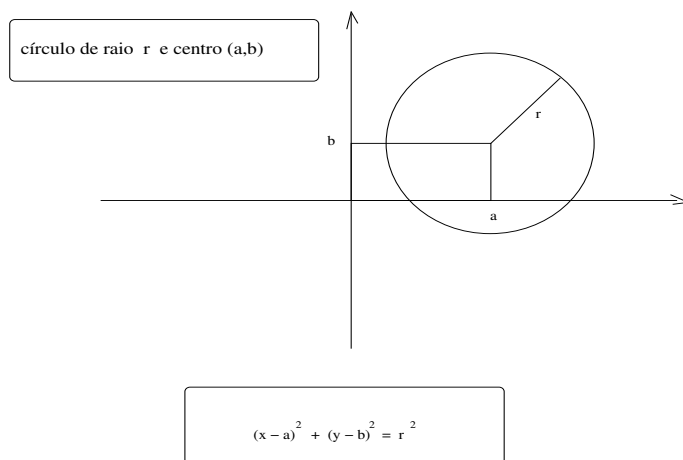


Figura 5.1: círculo de raio r e centro (a, b)

A expressão na equação (eq. 1) poderia ser considerada a equação do círculo, mas não é nesta forma que você vai encontrá-la, habitualmente, mas sim na forma no formato da equação (eq. 2). Entretanto qualquer uma das duas equações é perfeita para representar o círculo, apenas, no primeiro caso podem surgir problemas se for usada num programa de computador pela presença da raiz que exige que o seu “parâmetro”, o radicando, seja positivo então será preciso ter cuidado com o domínio das variáveis. Também a raiz quadrada é positiva então para usar esta expressão da equação (eq. 1) é preciso usar o sinal $\pm$ na frente do radical. Então é melhor fazer o que todo mundo faz e considerar (eq. 2) como a equação do círculo.

Como a equação (eq. 2) é um polinômio em duas variáveis, eu vou também expressar a equação do círculo no formato

$$P(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2; \quad (5.3)$$

esta expressão é muito útil dentro dum programa. $P(x, y) = 0$ é a equação do círculo com centro no ponto (a, b) e raio r .

Um caso importante da equação do círculo é quando a origem é o centro do círculo quando a equação fica

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0; \quad (5.4)$$

Basta que você substitua $a = 0, b = 0$ na equação (eq. 3) ou na equação (eq. 2) para voltar da equação do círculo de centro no ponto (a, b) para a equação do círculo de centro na origem.

5.1.2 Identificando um lugar geométrico

O objetivo da *geometria analítica* é duplo, por um lado, codificar em equações algumas figuras geométricas, as cônicas, e por outro lado, identificar numa expressão algébrica “geral” que tipo de figura geométrica se encontra codificada na expressão. Este segundo problema não é nada fácil e na verdade melhor faz parte do ambiente matemático mais amplo que é a *geometria algébrica*, mas é exatamente este segundo problema que aparece na maioria dos exercícios de *geometria analítica*: “*dado o polinômio*”.

$$P(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (5.5)$$

em que A, B, C, D, E, F são constantes dadas, quero saber qual é a cônica que a equação (eq. 5) “representa” ou se não representa nenhuma cônica.

Vou me especializar, neste momento com o caso do círculo para encontrar as regras e fazer esta identificação, partindo da expressão que se encontra na equação (eq. 5), se expandir esta equação, quando vou encontrar a sequência de expressões

$$P(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0; \quad (5.6)$$

$$P(x, y) = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0; \quad (5.7)$$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0; \quad (5.8)$$

$$P(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0; \quad (5.9)$$

$$\text{Se } A = B \text{ poderá ser um círculo, continuando...}; \quad (5.10)$$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0; \quad (5.11)$$

$$C = 0; D = -2a; E = -2b; F = (-r^2 + a^2 + b^2); \quad (5.12)$$

$$a = -\frac{D}{2}; b = -\frac{E}{2}; F = -r^2 + a^2 + b^2; \quad (5.13)$$

$$-r^2 = F - (a^2 + b^2) \Rightarrow r^2 = (a^2 + b^2) - F \Rightarrow a^2 + b^2 - F \geq 0 \quad (5.14)$$

Na equação (eq.6) eu escrevi o modelo da equação do círculo de centro (a, b) . Na equação (eq.9) eu tenho a expressão que desejo testar, verificar se é ou não a equação dum círculo. Então nas equações que seguem eu comecei a fazer a *completação de quadrados* para estabelecer as regras que os *coeficientes dados* A, B, C, D, E devem satisfazer para que $P(x, y) = 0$ seja a equação de um círculo. A condição $A = B$ é necessária, se for falsa a resposta imediata será “Não pode ser um círculo” que vai ser a *resposta dum programa* para testar se expressão na equação (eq.9) é a equação dum círculo. E se esta condição $A = B$ for verdadeira o programa vai responder “Pode ser um círculo” e o programa vai seguir testando acompanhando os cálculos feitos acima. Neste caso, para simplificar o programa, divido a equação toda por A quer dizer que o programa agora vai testar se

Uma sequência de equações é um modelo para um programa...

$$x^2 + y^2 + Cx + Dx + Ey + F = 0; \quad (5.15)$$

e um círculo e vou passar os dados

$$A = 1; B = 1; C; D; E; F; \quad (5.16)$$

Comparando as duas equações deduzo que se $A = B$ poderei ter um círculo, continuando...e se $A \neq B$ a expressão pode representar uma elipse, uma hipérbole ou nenhuma cônica. Estes outros casos vão ser tratados posteriormente e vou produzir os programas que farão os respectivos testes no momento certo.

As contas que vou fazer, semelhantes a estas feitas na equação (eq.6), costumam ser rotulados como *completação dos quadrados* porque se procura “compactar” uma expressão algébrica, fatorando-a, reversamente, para obter somas de quadrados ou produtos de expressões algébricas do primeiro grau.

$$P(x, y) = x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0; \quad (5.17)$$

$$P(x, y) = x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0; \quad (5.18)$$

$$P(x, y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 - 4 = 0; \quad (5.19)$$

$$P(x, y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 16 = 0; \quad (5.20)$$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0; \quad (5.21)$$

$$P(x, y) = (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 - 4^2 = 0; \quad (5.22)$$

$$P(x, y) = Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad (5.23)$$

$$A = B = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad (5.24)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0; \quad (5.25)$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0; \quad (5.26)$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - r^2 + a^2 + b^2 = 0; \quad (5.27)$$

$$A = 1; B = 1; D = -2a; E = -2b; F = a^2 + b^2 - r^2; \quad (5.28)$$

$$P(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 4^2; \quad (5.29)$$

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2; \quad (5.30)$$

que é a *representação algébrica* do círculo de centro $C = (2, -3)$ e raio $r = 4$. Eu obtive esta mesma resposta usando o programa

```
\begin{tabbing}
def VerificaCirculo(A,B,C,D,E,F):
    a=0; b=0; r=0;
    if (A == B):
        if not (A==0):
            B=B/A; C=C/A; D=D/A; E=E/A; F=F/A;
            print(A,B,C,D,E,F); %% mostra os coeficientes
            apeteco();
            if (C==0):
                print("Não pode ser um círculo! ");
            else:
                a= -D/2; b = -E/2; %% calcula a,b
                if ($r >= 0$):
                    print('É o círculo de centro (' ,a,' ,',b,') e raio', $\sqrt{r}$);
                else:
                    print('Não pode ser um círculo!');
        else:
            print("Não pode ser um círculo, verifique se é uma elipse!");
```

Se você quiser experimentar este programa, grave-o num arquivo, por exemplo `TestaCirculo.py`. Antes deste texto dê os valores que lhe interessam para A, B, C, D, E, F . Digite na linha de comandos

```
python3 TestaCirculo.py
```

e você vai ter uma das resposta do programa para os valores que você tiver dado as constantes A, B, C, D, E, F .

Na sequência de contas das equações (eq. 17) -(eq. 21) usei uma técnica denominada *completação de quadrados* em vez de procurar identificar os coeficientes da equação geral (eq. 17). Quando se identifica

$A = B$, é mais prático seguir por este método, simplificando toda a equação na divisão por A que já foi verificado não ser zero, para testar se a expressão representa um círculo.

Para dominar as técnicas envolvidas no trabalho com *geometria analítica*, como em qualquer disciplina ou atividade humana, a regra é bem simples: fazer uns mil exercícios... e você os encontra aos milhares em textos livres distribuídos na Internet. Aliás, esta regra vale para dominar qualquer assunto em Matemática, tem que diga que Matemática é *noventa por cento cálculo* e no máximo *dez por cento invenção* e mesmo as invenções são consequências de cálculos porque, de repente, aparece uma *expressão interessante no meio da calculeira*.

Mais acima, no texto, se encontra uma *imprecisão* ao dizer que uma expressão como $P(x, y)$ representa uma certa *variedade*. A falha consiste em não identificar a dimensão do espaço em que esta expressão “codifica” algum objeto.

Por exemplo, num espaço de dimensão 3,

$$x^2 + y^2 = 1; \quad (5.31)$$

representa o cilindro cuja base é o círculo unitário do plano XOY e a geratriz é o eixo OZ . Apenas mencionar esta equação, sem identificar o Universo em que ela estiver sendo considerada, deixa uma indefinição. Este erro é muito comum nos textos, mas é difícil de ser corrigido sem criar uma redação muito complexa, em geral se admite, implicitamente, que se houver apenas duas variáveis, então a *dimensão do Universo* é dois: um plano, *uma variedade linear de dimensão dois*,

É interessante *responder* a uma pergunta que sempre é feita. Porque a $P(x, y) = 0$ é que representa a *equação do círculo* e não apenas $P(x, y)$? É que escrevendo “apenas $P(x, y)$ ” você tem uma expressão livre que pode assumir qualquer valor em função dos valores dados às variáveis x, y e consequentemente $P(x, y)$ se refere a qualquer ponto (x, y, z) do $\mathbf{R}^3$ em que $z = P(x, y)$.

Em outras palavras, se $P(x, y) = 0$ for um círculo então $z = P(x, y)$ será um *paraboloide*. Experimente com `gnuplot`

```
set contour
f(x,y) = x**2 + y**2;
splot f(x,y), 10;
```

e você vai ver o *paraboloide* cortado à altura $z = 10$ produzindo um círculo e no plano você vai ver as *curvas de nível* que são círculos, é o efeito do `set contour` que liga o *modo curvas de nível* do `gnuplot`.

A restrição $P(x, y) = 0$ limita esta expressão a $z = 0$. Outra forma de dizê-lo, é que $P(x, y) = 0$ corresponde ao sistema de equações

$$\begin{cases} z = P(x, y); \\ z = 0; \end{cases} \quad (5.32)$$

em que a primeira equação representa o gráfico da função bivariada $z = P(x, y)$ e a segunda equação representa o gráfico da função bivariada $z = 0$, o gráfico do plano XOY ou seja, a equação (eq. 32) representa a interseção de duas superfícies, *duas variedades de dimensão 2*, que pode ser uma curva. As curvas num espaço de dimensão maior, como aqui seria o $\mathbf{R}^3$, são determinadas por interseção de superfícies. Assim, o erro mencionado acima fica amenizado com um sistema de equações como na equação (eq. 32).

A indefinição persiste... uma curva é uma variedade de dimensão 1 e a expressão $P(x, y) = 0$ apenas sugere que existam duas variáveis o que daria para calcular a dimensão por uma regra prática que diz que a dimensão é uma unidade menor do que o número de variáveis.

Regras práticas
são perigosas!

Ao escrever

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0 \quad (5.33)$$

não contém nenhuma informação sobre a variável z , o que significa que ela pode ter qualquer valor então esta expressão no $\mathbf{R}^3$ é um *parabolóide* uma vez que não está estabelecida nenhuma restrição sobre z e existem restrições apenas sobre os valores de x, y . No $\mathbf{R}^3$ é uma *variedade de dimensão 2*, uma superfície, No $\mathbf{R}^4$ é uma *variedade de dimensão 3*, um sólido. Infelizmente o `gnuplot` ainda não chegou ao $\mathbf{R}^4$.

Entre escrever textos extremamente complicados termina valendo o bom senso que é determinado pelo contexto.

5.1.3 O círculo trigonométrico

O *círculo trigonométrico*, ou círculo unitário, $\mathbf{S}^1$, é uma figura geométrica que aparece em muitas situações merecendo assim um tratamento especial. Eu costumo me referir a $\mathbf{S}^1$ como um transferidor. Posso partir da equação (eq. 4), basta dar o valor 1 ao $r = 1$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 = 1; \quad (5.34)$$

$$x = \cos(\theta); y = \sin(\theta); (x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta)); \quad (5.35)$$

$$\rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \in \mathbf{C}; \quad (5.36)$$

A afirmação contida na equação (eq. 35) é a *relação fundamental da trigonometria* e vale sempre que a soma de dois quadrados for 1. Explicando melhor, se a soma de dois quadrados for 1, como na equação (eq. 34) então os números x, y são, respectivamente cosseno e seno de algum ângulo.

A equação (eq. 36) é a fórmula de Euler-De-Moivre comumente referida apenas como fórmula de Euler, mas De-Moivre a encontrou e provou de forma muito mais complicada alguns anos antes que Euler,

Tenho assim a forma polar do *círculo trigonométrico* quando $\rho = 1$, ou dum círculo qualquer quando $\rho \in \mathbf{R}^+$.

5.1.4 O poder da Geometria Analítica

Neste ponto eu posso lhe mostrar como é poderoso o método analítico, quando ele puder ser usado. A equação dum círculo é da forma

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0; \quad (5.37)$$

em que considere $A = B = 1$.

Quantas “amostras” eu preciso para determinar a equação dum círculo? Nesta equação há três incógnitas, C, D, E e dando valores a x, y eu posso obter um sistema de equações nas *variáveis* C, D, E .

Eu tenho três *incógnitas*, C, D, E , então eu preciso de uma *amostragem* com três elementos para construir um sistema de três equações e assim determinar as três *incógnitas*, C, D, E . Eu não posso dar um exemplo facilmente, porque esta *amostragem* tem que ser “legal”, não podem ser três pontos (x, y) quaisquer, eles têm que ser escolhidos em cima dum círculo, coisa que não tenho neste momento... então eu tenho que prosseguir *de forma abstrata*, é assim que entra a *abstração* em Matemática e mesmo noutros ramos do conhecimento, a gente continua como se tivesse as condições ideais e depois alguns testes terminam por nos colocar no trilhos... e você vai ver logo, nas linhas abaixo, que eu vou entrar nos trilhos.

Observe que eu já terminei o meu objetivo de mostrar como é poderoso o método analítico, se convença, releia e verifique que o que vou dizer encerra o assunto do que vou agora fazer um sumário.

Com uma *amostragem legal* de três elementos eu determino a equação dum círculo, observe a sequência.

- Um triângulo determina um círculo. Se eu precisava duma “*amostragem legal*”, ei-la, pegue um *triângulo qualquer* que ele determina um círculo. Isto é um teorema da Geometria Euclidiana nada fácil de demonstrar com os métodos da Geometria, e eu acabei de demonstrá-lo analiticamente, pegue um triângulo qualquer que ele determina um círculo e aplique a fórmula aos três vértices. Já tenho uma *amostragem legal*.
- Para todo triângulo existe um único círculo no qual ele está inscrito. É uma outra versão do teorema da Geometria citado acima. Nada fácil de demonstrar com os métodos da Geometria Euclidiana.
- Para determinar um círculo bastam três pontos, e aperte o cinto, e eles podem estar todos numa mesma linha reta, o resultado é a própria reta que é um *círculo degenerado*. . . Tirando este caso *degenerado*, fica a afirmação inicial de que todo triângulo determina um círculo.

5.1.5 A derivada implícita

Vou terminar a discussão sobre o círculo com uma propriedade geométrica que a *ótica geométrica* prova, experimentalmente, e eu vou obter este resultado experimental com apoio da derivação implícita. Vou mostrar que os círculos são soluções dum tipo particular de *equação diferencial* das mais fáceis de serem resolvidas. Não se assuste que este livro não se dedica às equações diferenciais mas pode fazer referência a elas para que você já esteja acostumado quando lá chegar.

A figura (fig 5.2), página 99,

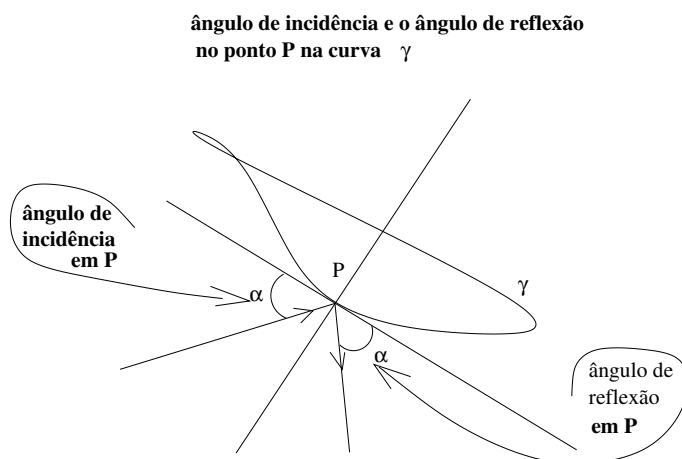


Figura 5.2:

mostra-lhe o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão dum raio de luz que ao incidir sobre uma superfície polida sob um ângulo α se refrate segundo o mesmo ângulo α . Não vou entrar na questão da Física sobre o que é a luz, onda ou não, o que interessa é que os cálculos com *raios de luz* funcionam de acordo com a *ótica geométrica* que é o que me interessa aqui. Também não vou colocar na discussão que há modificação do *ângulo de reflexão* quando a luz atravessa distintos meios, vou considerar que tudo se passa dentro dum meio homogêneo, porque o que me interessa aqui é a superfície sobre a qual incide um raio de luz e saber o que acontece no caso específico de que seja uma superfície esférica, apesar de que eu esteja me restringindo ao caso de um curva, o círculo.

Na figura (fig 5.2) você vê uma curva, e poderia ser uma superfície polida, sobre a qual incide um *fecho de luz* segundo o ângulo α e o resultado é a luz se reflete de acordo com o mesmo ângulo de incidência, α . Na figura também aparece a reta tangente no ponto de incidência, e no Cálculo você vai

Este resultado depende do meio onde a luz se propaga.

ter a explicação exata de porque preciso da reta tangente para registrar o ângulo α , porque isto envolve a *derivada* que não pode ser meu assunto aqui. Esta questão do ângulo de incidência aparece no Ensino Médio onde não aparece a derivada portanto você tem todas as razões para aceitar o que estou propondo agora.

A equação da esfera generaliza uma dimensão na equação do círculo, agora ela trabalha com três variáveis. Derivar implicitamente a equação da esfera e depois vou fazer algumas substituições que eu já fiz antes quando lhe apresentei a *derivada implícita* na seção sobre a derivada. Depois das contas eu vou tecer comentários sobre cada uma das equações que você poderá pular se considerar que não precisa lê-las.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \quad (5.38)$$

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0; \quad (5.39)$$

$$\begin{cases} x := a; dx := x - a; \\ y := b; dy := y - b; \\ z := c; dz := z - c; \end{cases} \quad (5.40)$$

$$2a(x - a) + 2b(y - b) + 2c(z - c) = 0; \quad (5.41)$$

$$\langle (2a, 2b, 2c), (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0; \quad (5.42)$$

$$\langle (a, b, c), (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0; \quad (5.43)$$

1. Na equação (eq.38) apresentei a equação da esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio r .
2. Na equação (eq.39) calculei a derivada implícita da equação da esfera e como de hábito as *variáveis* dx, dy, dz indicam relativamente a quem estou calculando a derivada e como r^2 é uma constante sua derivada é zero. O ponto (a, b, c) é o local, na superfície onde esta sendo calculada a derivada, como se trata duma esfera então (a, b, c) é a extremidade do raio que parte da origem até a superfície da esfera. dx, dy, dz vão ser substituído de acordo com a regra que explicada a seguir.
3. Na equação (eq.39) apresentei as substituições que vão me permitir obter a equação dum plano tangente agora, no espaço a derivada produz um plano tangente a uma superfície.
4. Na equação (eq.39) identifiquei a soma da equação anterior como um produto escalar entre dois vetores, e como o produto escalar é zero então os vetores são perpendiculares.
5. Na equação (eq.39) eu eliminei a constante comum as coordenadas do vetor $(2a, 2b, 2c)$ obtendo uma expressão mais simples para dois vetores perpendiculares. O vetor $(x - a, y - b, z - c)$ é um vetor genérico de uma variedade linear porque todas as equações das coordenadas são do primeiro grau, então é um vetor que descreve um plano do espaço tridimensional e como foi obtido por derivação é o objeto tangente à superfície da esfera. Conclusão, o produto escalar representa a equação duma variedade linear de dimensão dois, comumente chamada de *plano* onde posso identificar um vetor perpendicular a ela: (a, b, c) , o raio da esfera no ponto (a, b, c) , o que prova que o plano tangente à superfície da esfera é perpendicular ao vetor posição.

$$(a, b, c) \perp (x - a, y - b, z - c) \quad (5.44)$$

6. O vetor (a, b, c) é vetor que representa um segmento de reta, e tanto (a, b, c) como qualquer múltiplo deste vetor, é o caso de $(2a, 2b, 2c)$ são perpendiculares ao plano tangente mas interessa-me identificar a propriedade *numa esfera, e também num círculo, o raio é perpendicular à variedade linear tangente*. Observe, neste frase, o ganho que tenho usando o conceito de *variedade* significa tanto reta quanto plano!

Tradução geomérica: O raio da esfera é sempre perpendicular ao plano tangente.

O que me interessa mesmo é o círculo e a *ótica geométrica* vai me ajudar a revelar uma importante propriedade desta curva que é um dos assuntos deste capítulo. A próxima figura, (fig 5.3), página 101, lhe mostra um círculo e agora o raio de luz, ao incidir sobre o círculo irá fazê-lo *sempre* na direção do centro do círculo, determinada pelo raio, vai se refletir na mesma direção, na direção determinada pelo raio o que significa que a tangente é perpendicular ao raio porque os ângulos de incidência e de reflexão são iguais a $\frac{\pi}{2} = \alpha$. Este é o resultado dum *experimento impossível da ótica geométrica*. Eu tentei realizar o experimento num quarto escuro com uma bola de ginástica sem sucesso, quando um colega da Física me mostrou que seria impossível pela *estrutura porosa da matéria* que difrata o raio de luz ...

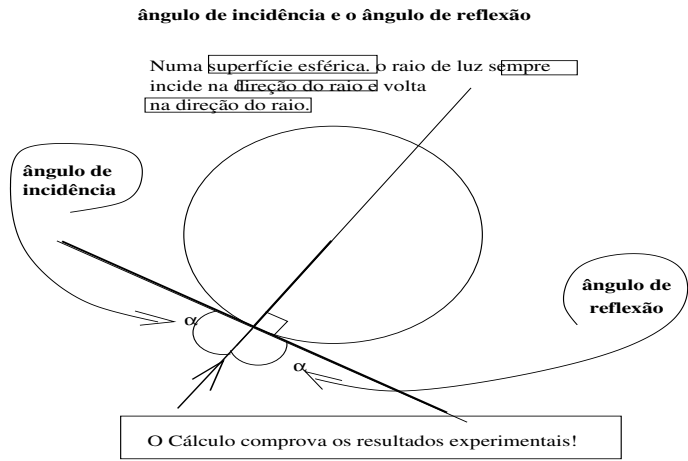


Figura 5.3:

Eu estou me valendo da *ótica geométrica* que somente pode *comprovar* experimentalmente: um raio de luz se reflete perpendicularmente à qualquer *superfície esférica*, diz a *ótica geométrica*. No Cálculo esta questão vai ser demonstrada com precisão, usando a *derivada implícita*, que não pode ser meu assunto aqui. No Cálculo você vai aprender a *equação diferencial* do círculo que leva facilmente à demonstração desta propriedade experimental da *ótica geométrica*. refletir sobre a mesma direção em que veio, a direção perpendicular à reta tangente. Este resultado experimental me diz que no círculo a tangente é perpendicular ao raio e o Cálculo vai lhe mostrar que esta é uma forma de definir círculo, a *única curva que em qualquer ponto a tangente é perpendicular ao raio*. Esta afirmação vale para qualquer superfície esférica que são as únicas que a *ótica geométrica* poderia testar. Mas o Cálculo prova facilmente aquilo que eu nunca conseguiria verificar experimentalmente ... e a ferramenta é a *derivada implícita* que produz uma *equação diferencial*, uma das poucas de fácil solução.

5.2 Equação da elipse

A equação da elipse, é uma expressão polinomial do segundo grau que descreve, no plano, uma elipse. É um item da *Geometria Analítica*.

5.2.1 Os dois focos da elipse

O círculo se define a partir do raio e dum ponto chamado centro, a *elipse* tem dois focos F_1, F_2 e você pode construir uma elipse com lápis e papel

1. marcando dois pontos que representam os dois focos,
2. em cada um dos focos pregando *uma taxa*, e nas taxas amarrando uma linha,
3. estique a linha com um lápis e com ela *sempre esticada* movimento o lápis.

A figura resultante é uma elipse e a soma distâncias de cada ponto sobre esta curva a cada um dos focos é constante que é o comprimento da linha.

A definição geométrica da elipse é “*o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é constante*”. Então, você pode construir uma elipse com auxílio dum pedaço de linha com extremos fixos em dois pontos, os focos, fazendo a ponta dum lápis se movimentar mantendo a linha esticada.

Se você juntar os focos num ponto o resultado será um círculo.

5.3 O discípulo e o mestre

A elipse é uma das cônicas e sua importância se encontra na Astronomia uma vez que é, aproximadamente, a forma das curvas descritas pelos astros em seus movimentos em torno dum polo de gravidade, como a Terra em volta do Sol ou da Lua em volta da Terra. Foi Kepler que corrigiu a teoria heliocêntrica de Copérnico analisando os dados que herdou de Tycho Brae. Copérnico afirmou que os astros percorriam uma órbita circular em volta do Sol.

Há várias formas de definir esta curva chamada elipse. Kepler, se beneficiando das medições que Tycho Brae fez ao longo de toda sua vida, conseguiu matar a charada que Copérnico havia deixado quando criou a teoria *heliocêntrica*, que quase lhe custou a vida nas mãos da cúpula da igreja católica, que impunha a “teoria” *geocêntrica*. Copérnico propôs que a rota dos planetas seriam círculos tendo o Sol como centro. Em sua teoria, entretanto, ficou o problema do movimento de Marte que parecia ter uma velocidade negativa relativamente a dos demais planetas, andava para trás. Analisando os dados coletados por Tycho Brae, Kepler concluiu que seriam elipses as rotas dos planetas em volta do Sol, e assim conseguiu resolver o problema deixado por Copérnico com a rota de Marte que é uma elipse com *excentricidade* um pouco maior do que a da Terra¹, e, em sua segunda lei, estabeleceu que “*se um planeta estivesse ligado ao Sol por uma linha, esta linha cobriria iguais áreas durante iguais intervalos de tempo*”. Observou também que o Sol estaria colocado num ponto fora do centro do movimento. Na figura (fig 5.4), página 103, você vê o caminho da Terra em volta do Sol, uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos.

Um feito relativamente recente, pode motivá-la a compreender a equação da elipse. O módulo espacial Rosetta da agência espacial europeia, fez grande parte de sua viagem que durou 10 anos, para depositar um robot na superfície do cometa 67P/Churyumov–Gerasimenko, usando a gravitação universal como força de propulsão. Este feito, que pode ser visto no link

<http://wp.me/psvm-2fu>

mostra como uma nave espacial pode obter propulsão da gravidade de um planeta para seguir sua viagem pelo Universo. Para fazer uso da gravidade é preciso compreender, entre outras coisas, a equação da trajetória dos astros e a elipse é um caso comum.

¹ A excentricidade é a medida de como uma elipse distorce um círculo a ela relacionado, é a razão $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$, em que $2a$ é soma das distâncias dum ponto sobre a elipse aos focos e $2c$ é a distância entre os focos. No círculo $c = 0$ zerando a excentricidade do círculo visto como elipse.

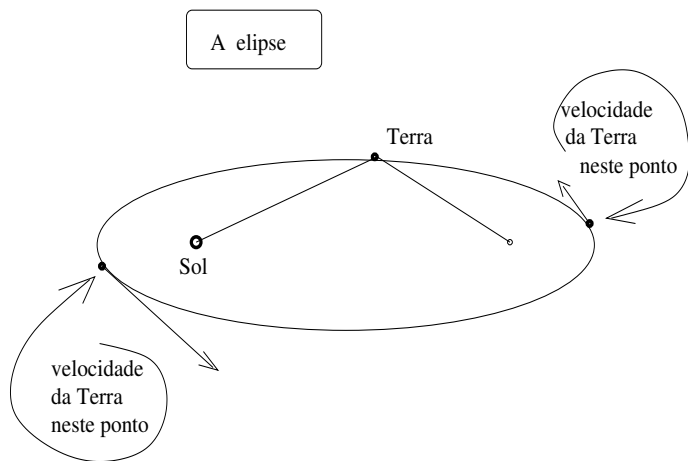


Figura 5.4: elipse é a rota da Terra em volta do Sol

5.4 Espaçoave sul-coreana

Em 4 de janeiro de 2023 a Coreia anunciou o envio dum foguete para uma viagem de exploração da Lua. Estou traduzindo um texto distribuído na internet pelo ministério das Ciências da Coreia como um exemplo do uso da *elipse* em viagens interplanetárias, um exemplo concreto. Vou omitir alguns detalhes que são propaganda americana. Também estou omitindo detalhes de horário que não interessam para os fatos da Geometria Analítica. A palavra chave, é *Danuri*, o nome dado pelos coreanos ao foguete, se você quiser pesquisar na Internet e ver o texto de onde tirei os dados.

A primeira manobra foi enviar *Danuri* numa rota balística numa velocidade de 8.000 km/h e num certo momento reduzida para 7.500 km/h. Embora o texto não forneça dados mais precisos, se trata duma operação determinada pela *equação diferencial* que descreve a gravitação universal. Como o foguete perdeu massa, queimou combustível, então era preciso ajustar sua velocidade para encontrar a órbita que lhe correspondia em volta da Lua com a velocidade certa. Também é uma questão que pode ser bem explicada num texto de Cálculo, há uma velocidade certa, determinada pelo peso do objeto, para que ele entre em órbita no ponto de encontro com a mesma. *Danuri* pesava 678 quilos no momento de seu lançamento e parte deste peso seria do combustível. No momento relativo à sua distância da Lua, esta velocidade deveria ser corrigida para *Danuri* se aproximasse da *órbita desejada* com a *velocidade certa* para entrar em órbita do nosso satélite e foi o que ocorreu, “*ficou confirmado que Danuri havia sido capturado pela atração gravitacional da Lua transformando-se num satélite lunar.*” Esta questão, no Cálculo, pode ser tratada em diversos momentos, um deles é quando se estuda derivada descrevendo quando, no momento certo, a trajetória do foguete encontrou a órbita lunar que lhe correspondia dadas as condições de peso e velocidade, uma solução precisa duma *equação diferencial*, coisa que já mencionei anteriormente, as equações diferenciais são o instrumento certo para governar a trajetória de objetos em viagens espaciais, com o necessário uso de *programas de computação* para ajustar as órbitas.

No dia 28 de dezembro de 2022 o módulo espacial foi conduzido a quatro manobras que o levaram a uma *órbita circular* da Lua, e neste ponto eu acrescento que deve haver imprecisão na notícia porque não há trajetórias circulares, elas são necessariamente elípticas e podem ser, e deve ser o caso, com baixa *excentricidade* ou quase circular, como é o caso da Terra em sua trajetória em volta do Sol, é uma elipse quase circular. O resto da notícia fala dos objetivos da missão que você pode encontrar usando a chave mencionada acima e inclusive poderá ver fotos relacionadas à missão.

5.5 Cenário geométrico das cônicas

Esta seção talvez você deva omitir *num primeira leitura*, eu tentei torná-la didática, mas confesso que não tive sucesso. Melhor será esperar para quando você terminar de estudar todo o livro e queira retornar para reforçar esta discussão. Pular esta discussão não lhe tratará nenhum prejuízo para entender o resto da discussão sobre as cônicas.

As cônicas, círculo, elipse, parábola e hipérbole, são o resultado do corte feito num *cone de duas folhas* por um plano. É o que vou descrever aqui usando uma figura plana.

Vou mostrar que as cônicas se alteram na passagem entre círculos e parábolas. Por exemplo, uma elipse é apenas um círculo deformado e uma pequena deformação dada a um elipse faz surgir uma parábola. Inclusive isto tem aplicação na Astronomia ou melhor na exploração espacial em que uma nave espacial pode ser deixada *hibernando* numa elipse e repentinamente sair da elipse para uma parábola mudando a trajetória como foi o caso do projeto com a nave espacial Rosetta da agência espacial europeia, ou caso do módulo espacial *Danuri*, descrito na página 103, do ministério da Ciência da Coreia do Sul. Uma pequena alteração num plano que produz uma parábola e o resultado é uma hipérbole. Você vai ver, também, que existem *hipérboles degeneradas*.

Vou descrever a origem dos círculos, das elipses, das hipérboles e das parábolas como interseções dum *cone de duas folhas*.

5.5.1 Singulares ou estáveis

As cônicas são geradas no espaço tridimensional quando um plano corta um *cone de duas folhas*, portanto o cenário é tridimensional, o $\mathbf{R}^3$, mas o resultado é projetado no plano no $\mathbf{R}^2$. As cônicas são *curvas planas*.

Para estabelecer um *cenário* deixe-me fixar alguns “quadros” da geometria envolvendo um cone de duas folhas. Há duas classes de planos que delimitam os *eventos* produzindo círculos e parábolas e depois você verá que *elipses e hipérboles* são variações destas duas curvas, na verdade os *eventos estáveis* cujos limites são os *eventos instáveis círculos e das parábolas*. . . mas você não precisa dar muita importância a esta frase se ainda não souber o que são *sistemas dinâmicos*, que é uma forma de entender as *equações diferenciais*. Este vocabulário é típico das *equações diferenciais*. Mas você não precisa saber resolver *equações diferenciais* para continuar lendo, apenas precisa saber que será quando você estudar este tipo de equações que esta figura vai adquirir uma coloração definitiva. Que sirva para alimentar o seu desejo de estudar estas equações num certo futuro.

Vou também definir um *plano codificador* de onde vou deduzir um *círculo codificador* obtendo uma forma mais efetiva e simples para classificar melhor os eventos e descrever todas as possibilidades de cônicas. Eu gostaria, pelo menos, que tudo ficasse simples.

As cônicas são obtidas pelo *plano codificador*. Alguns itens precisam ser esclarecidos antes que eu entre na *codificação geométrica*.

O *cone de duas folhas* é uma *superfície* gerada por uma reta, chamada *geratriz* que circula em torno de uma outra reta chamada *eixo do cone*. Estas duas retas, no espaço, se cortam num ponto V chamado *vértice do cone*. Confira a figura (fig. 5.5), página 105.

- círculo qualquer plano perpendicular ao eixo do cone, corta o cone segundo um círculo. Na figura (fig. 5.5) estou mostrando interseções de planos perpendiculares ao *eixo do cone*. Quer dizer que posso gerar uma infinidade de cônicas a partir da escolha dum certo plano. Para tornar mais simples a linguagem, eu vou passar a falar no *singular* me fixando num único plano, o *plano que vai determinar as cônicas deste texto*. Observe que este círculo é uma curva espacial mas se o eixo do cone coincidir com o eixo OZ , sua projeção no plano XOY será um círculo e se o eixo do cone não for paralelo ao eixo OZ a projeção seria uma curva diferente. Então, *para não complicar*, vou também considerar que o eixo do cone é o eixo OZ . Aliás esta uma regra importante na construção

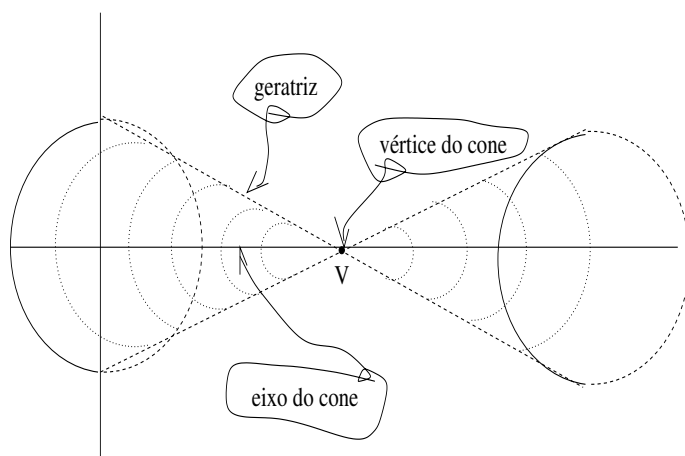


Figura 5.5: Cone de duas folhas

científica, procurar identificar o caso mais simples a partir do qual todos os outros casos sejam obtidos por transformações adequadas.

- parábola um plano tangente à superfície do cone em uma das *folhas*, contém uma imagem da *geratriz*, ou qualquer plano paralelo a ele. Um tal plano corta a superfície do cone segundo uma parábola se não contiver a *diretriz*. E vai cotar apenas uma das folhas. O caso do plano tangente à superfície do cone que são aqueles que contém a *diretriz*, é uma *situação limite* que pertence ao “caso da hipérbole”. Eu vou discutir este caso sob o título *hipérboles degeneradas*.
- *Caso limite ou solução singular* Se o plano for tangente à superfície do cone, o resultado é uma reta que se confunde com *geratriz* quando ela “passar” na reta tangente. Eu estou pensando no movimento de rotação *geratriz* em torno do eixo. Esta reta é uma *hipérbole degenerada*, linguagem da geometria. As Equações diferenciais chamam esta figura de um *caso limite*, uma solução singular *duma equação diferencial*. Por que *solução singular*? Porque qualquer toque no plano e ele deixa de ser tangente produzindo de volta uma parábola, num sentido, e no outro uma *hipérbole* porque estará cortando as duas folhas.

A teoria das *equações diferenciais* chamam estas soluções de singulares porque em geral elas não são soluções que se possam obter com cálculos algébricos, o Cálculo as chama de “*limites*”. Elas surgem rapidamente na passagem das parábolas para as hipérboles. É também o caso dos círculos que *aparecem abruptamente* dando lugar às elipses. Para as *equações diferenciais* elipses e hipérboles são *soluções estáveis*. Círculos e parábolas são *soluções singulares* que aparecem e “*instantaneamente*” desaparecem. O Cálculo pode explicar melhor estes efeitos.

Estes três casos mostram que é preciso relacionar ângulos entre planos. Vou agora precisar de fazer referência aos ângulos que um plano faria com os planos das duas classes descritas com as etiquetas *círculo* e *parábola*. Determinamos o ângulo entre dois planos usando duas retas perpendiculares, cada uma delas, a um dos planos. É o ângulo entre estas retas que define o ângulo entre os planos. O que determina a equação duma *variedade linear* é a reta que é perpendicular a ela, então o ângulo entre *duas variedades lineares* é o ângulo entre as respectivas retas que as determinam.

5.6 Plano codificador

Tem uma outra forma de codificar o cenário com projeções sobre um plano.

Existe *exatamente* um plano, deixe-me chamá-lo *plano codificador*, que é determinado pela geratriz e pelo eixo do cone, duas retas concorrentes no vértice V .

Posso *codificar todo o cenário* repetindo a análise que fiz anteriormente agora tendo como cenário o plano determinado pela *geratriz*, parada, junto com o eixo. Da mesma forma como eu descrevi no cenário anterior, estou me referindo a um plano que corta o eixo do cone no ponto Q . Usando *este plano* como vou passar a fazer, o *plano codificador* é o que aparece na figura (fig 5.7), página 109, com a etiqueta 0 para a classe do *círculo* e a etiqueta 1 para a classe da *parábola*, contendo as imagens da geratriz e do eixo do cone. A geratriz é única, mas ela roda no espaço produzindo duas imagens no *plano codificador*, duas retas concorrentes em V .

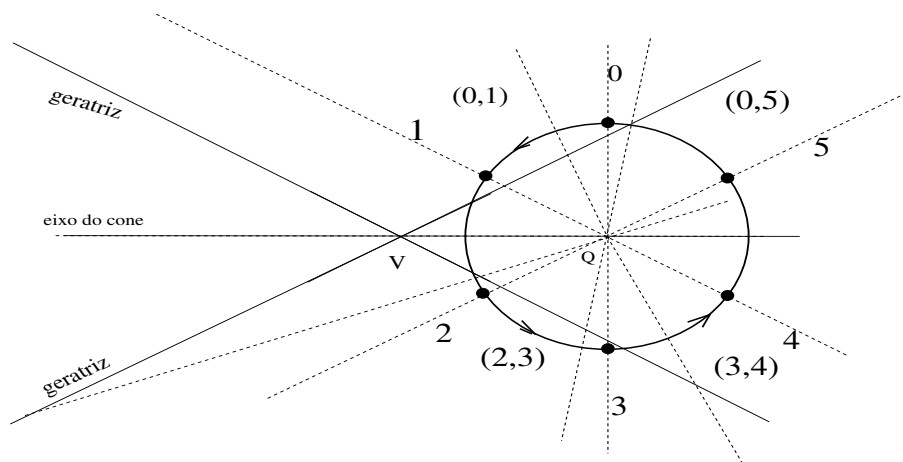


Figura 5.6: o círculo codificador

Deixe-me descrever a figura (fig 5.7), página 109, e partir para uma especialização da codificação que vai agora ficar restrita apenas ao círculo que aparece na figura (fig 5.7), o *círculo codificador*. Este círculo tem o centro em um ponto Q do eixo do cone e raio qualquer. Apenas para obter uma figura menos poluída é bom selecionar o raio menor do que $d(Q, O)$ em que O é ponto de concorrência da diretriz e o eixo do cone. Este círculo é uma abstração que encontrei para descrever como se obtém todas as possíveis cônicas, ele é apenas uma referência ao movimento dum plano que corte o cone, este plano irá rodar de acordo com este círculo portanto se trata dum círculo centrado no ponto Q do eixo do cone mas que se encontra num plano perpendicular ao plano determinado pelas duas imagens da geratriz mencionadas acima. Portanto o ‘*círculo codificador*’ não faz parte das cônicas, ele apenas registra do movimento do plano que corta o cone de *duas folhas*, é um círculo que codifica as cônicas, repito, uma *abstração* que eu espero que descreva bem o que ocorre.

Melhor seria um filme que eu ainda não sei como produzir e se eu conseguir produzir, vou apagar todo este parágrafo anterior!

Nele, no *círculo codificador*, você pode identificar seis pontos que foram etiquetados com os números $\{0, 1, 3, 4, 5\}$ e que vou agora associar às cônicas que se podem obter, “seis” porque estou começando a etiquetar com zero.

- círculo A classe dos planos perpendiculares ao eixo marcada com os números 0, 3 e reduzida a uma reta perpendicular ao eixo do cone passando pelo centro do *círculo codificador* que aparece na figura (fig 5.7).

Qualquer reta perpendicular ao eixo do cone, na figura (fig 5.7) representa um plano desta classe que está agora reduzida as etiquetas 0, 3 do *círculo codificador*.

- parábola a classe dos planos cuja interseção produzem parábolas, marcada com os números 1, 2, 4, 5 e reduzida às duas retas paralelas à alguma das representações da geratriz, passando pelo centro do *círculo codificador* que aparece na figura (fig 5.7). A geratriz é única, mas ela roda no espaço e assim aparece no plano da figura (fig 5.7) duas vezes.

As imagens das diretrizes não pertencem a esta classe porque elas vão gerar *hipérboles degeneradas* de que vou tratar mais a frente. Observe que círculos e parábolas são determinados por pontos isolados do *círculo codificador* em comparação com as elipses e hipérboles que vão ficar determinadas por intervalos.

- o universo dos planos que nos interessam são os planos perpendiculares ao plano da (fig 5.7). Outra forma de fixar os planos interessantes é considerando a reta perpendicular ao *plano codificador*, (fig 5.7), passando pelo centro do *círculo codificador*: são os planos do espaço que contenham esta reta ou planos paralelos a estes.

O conjunto dos planos que contem um reta se chama *um feixe de planos*, portanto nos interessam todos os planos paralelos a um dos planos do feixe determinado pela reta perpendicular ao *círculo codificador* passando pelo seu centro.

Entenda os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 como etiquetas no *círculo codificador* que se vê na figura (fig 5.7). E agora estou partindo para forma ainda mais especializada (e simples) de codificar usando apenas pontos ou setores do *círculo codificador* que aparece na (fig 5.7).

Estes números, 0, 1, 2, 3, 4, 5 não seriam as melhores escolhas para etiquetar, talvez melhor fosse usar o ângulo da diretriz com o eixo do cone, entretanto isto dependeria da escolha da diretriz e implicaria numa maior complexidade da linguagem. A escolha que fiz usa a figura (fig 5.7) e portanto mostra, por semelhança de triângulos a dependência do ângulo que a diretriz faz com o eixo do cone. Enfim, fazer uma *codificação* implica em tomar uma decisão para escolher o código.

Todos os planos do universo que nos interessa, agora ficam classificados assim, usando apenas pontos ou segmentos de arco do *círculo codificador*:

- Os planos que produzem cônicas são os planos do feixe de planos determinado pela reta perpendicular ao *círculo codificador* passando pelo centro mesmo, ou planos paralelos a algum dos planos deste feixe.
- círculo os planos que determinam a reta etiquetada com 0, 3 ou uma sua paralela.
- parábola os planos que determinam as retas etiquetadas com 1, 2, 4, 5, ou uma paralela a ela, exce- tuando as imagens da geratriz, confira o item hipérbole.
- elipse os planos que determinarem com o centro do *círculo codificador* uma reta nos intervalos (0, 1), (2, 3), (3, 4), (0, 5) Estas etiquetas significam mesmo um intervalo aberto porque os extremos do intervalo ficam para círculo ou parábola. Como observei acima, círculos e parábolas ficam determinadas por pontos do *círculo codificador*. Estas figuras são muito instáveis, por exemplo um objeto astronômico raramente se encontra sobre uma trajetória do tipo círculo ou parábola. . . se isto ocorrer será por uma instabilidade que deve ser corrigida.

- hipérbole os planos do feixe que pertencerem ao complementar das opções anteriores, ou ainda, quando um plano determinar uma reta que passando pelo centro do círculo que não esteja nas classes anteriores. Um plano da classe *parábola*, representa uma *situação limite* exatamente representado pelos planos tangentes ao cone, eles determina *hipérboles degeneradas* que se reduzem a duas semi retas representadas por qualquer das diretrizes. Eu vou voltar a esta questão na construção da equação da hipérbole.
- retas A interseção dum plano com o cone pode ser uma reta, se ele for tangente à superfície do cone. Tecnicamente, tais retas seriam hipérboles degeneradas. Observe que as hipérboles têm dois ramos desconexos, neste caso seriam duas semi retas conetadas na origem. . . os dois ramos duma hipérbole degenerada.

É um bom exercício corrigir as etiquetas deste modelo transformando-as em ângulos no forma π —radianos usando o ângulo α entre uma das imagens da diretriz e o eixo do cone. O autor agradece se você lhe enviar esta a proposta e promete analisá-la para alteração do texto como uma contribuição sua.

Rota hiperbólica dum asteroide

Entre 2017 e 2023 o mundo dos astrônomos foi sacudido pela passagem dum asteroide incomum pela nossa vizinhança e que os astrônomos Darryl Seligman, Gregory Laughlin concluíram em um artigo publicado no Arkiv astro-ph arXiv:2005.12932 se tratar possivelmente dum bloco de gelo e hidrogênio destacado dalguma estrela longínqua, mas pertencente à nossa *via láctea*, que transitou nas vizinhanças do nosso Sol numa trajetória, *provavelmente hiperbólica* um fato raro, de ser observado, tanto a *trajetória hiperbólica* como um objeto externo ao sistema solar, na vizinhança onde vivemos. <https://arxiv.org/abs/2005.12932>

Eu tomei conhecimento desta visita de 2017 num artigo publicado na *Scientific American* de 03 de junho de 2020. O artigo referido menciona a conclusão a que chegaram os dois astrônomos, Darryl Seligman da Universidade de Chicago e Gregory Laughlin da Universidade de Yale, publicada num artigo, da *Astrophysical Journal Letters* mas que primeiro apareceu no *preprint da arXiv.org*. O objeto foi inicialmente chamado de ‘Oumuamua, uma palavra havaiana para denominar visitantes trazendo notícias é o primeiro objeto inter estelar observado no nosso sistema solar e sua trajetória seria *hiperbólica*.

O plano que corta o cone, na figura (fig 5.10), página 112, foi selecionado no feixe de planos de modo que a reta com que ele corta o *círculo codificador* determine neste círculo um ângulo no intervalo $(0, 1)$, confira o *plano codificador* que aparece na figura (fig 5.7), página 109.

Para obter elipses basta alterar a posição do plano da posição 0. na figura (fig. 5.7), página 109,

Na figura (fig 5.10), página 112, você vê o corte do plano produzindo uma elipse.

Uma elipse é um círculo deformado, e vou mostrar como podemos desfazer a deformação para obter dados da elipse, como por exemplo a sua área. Então é importante compreender como se vai e volta duma elipse para um círculo, um exemplo de codificação e decodificação.

Vou considerar uma elipse desenhada com os dois focos sobre o eixo OX com a origem dos eixos no ponto médio dos pontos focais, como você pode ver na figura (fig 5.9), página 110.

Na figura você também vê dois círculos, um deles inscrito na elipse, com raio b e a elipse está inscrita no outro com raio B .

Com esta definição vou obter os dados de medição da elipse.

- Chamando $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$; $c \geq 0$, aos dois pontos focais, que se encontram sobre o eixo OX e considerando $P = (x, y)$ um ponto genérico que descreve a elipse inicialmente localizado sobre o eixo OY .

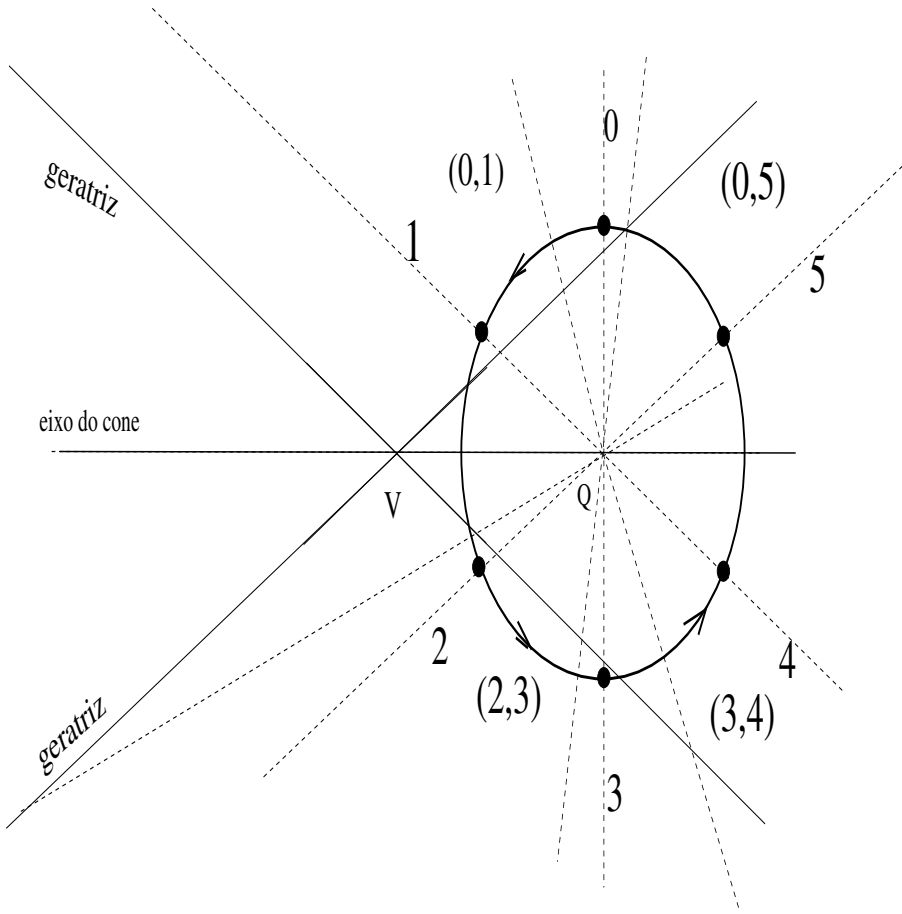


Figura 5.7: Esquema de corte do cone

- Nesta localização inicial escolhida, o ponto $P = (x, y)$ que descreve a elipse, se encontra numa posição de simetria determinando dois triângulos retângulos semelhantes, com a origem e qualquer dos focos. A hipotenusa mede a e os dois catetos medem, respectivamente, b, c . O cateto que mede c é a metade da distância entre os focos, então a distância focal é convenientemente chamada de $2c$. Como o outro cateto mede b , pelo teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad (5.45)$$

- Se o ponto P estiver sobre o eixo OX , se conclui que a soma das distâncias de P aos focos é $2B$, o diâmetro do círculo de raio maior:

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) = \overline{F_1O} + \overline{OP} + \overline{PF_2}; \quad (5.46)$$

$$c + B + |B - c| = \quad (5.47)$$

$$c + B + B - c = 2B; \quad (5.48)$$

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2B; \quad (5.49)$$

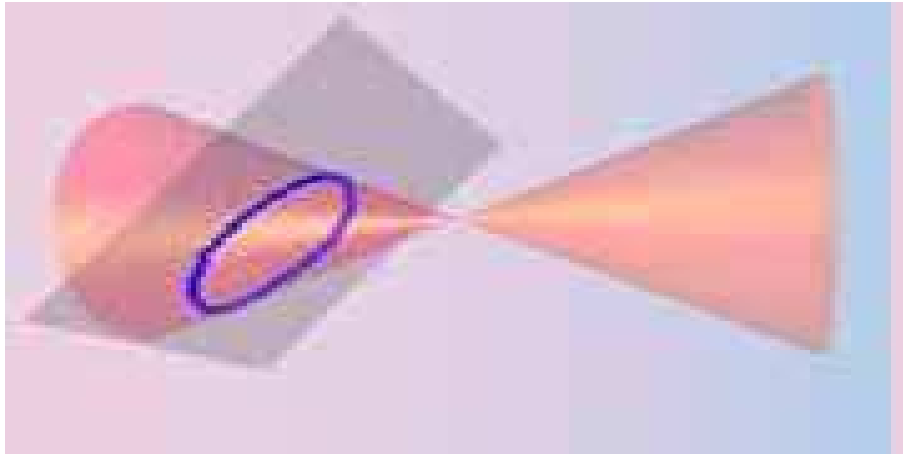


Figura 5.8: Plano corta cone segundo uma elipse

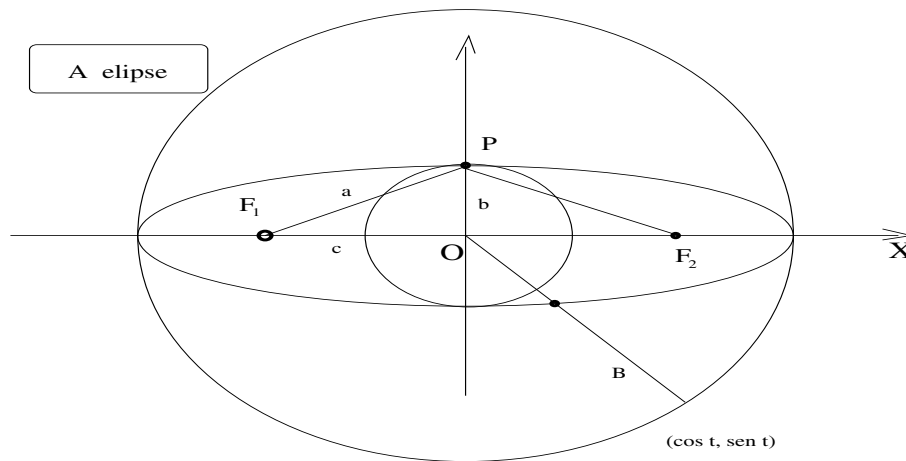


Figura 5.9: As medidas da elipse

- Suponha agora que o ponto $P = (x, y)$ se encontre numa posição arbitrária. Posso calcular a expressão da soma das distâncias aos focos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2B; \quad (5.50)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2B; \quad (5.51)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2B - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad (5.52)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros e simplificando os termos semelhantes vem:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4B^2 - 4B\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2; \quad (5.53)$$

$$(x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 - 4B^2 = -4B\sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad (5.54)$$

$$4xc - 4B^2 = -4B\sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad (5.55)$$

$$xc - B^2 = -B\sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad (5.56)$$

$$(xc - B^2)^2 = B^2((x-c)^2 + y^2); \quad (5.57)$$

$$x^2c^2 - 2B^2xc + B^4 = B^2((x-c)^2 + y^2); \quad (5.58)$$

$$x^2c^2 - 2B^2xc + B^4 = B^2(c^2 + x^2 + y^2 - 2cx); \quad (5.59)$$

$$x^2c^2 + B^4 = B^2c^2 + B^2x^2 + B^2y^2; \quad (5.60)$$

$$x^2c^2 = -B^4 + B^2c^2 + B^2x^2 + B^2y^2; \quad (5.61)$$

$$x^2c^2 - B^2x^2 = -B^4 + B^2c^2 + B^2y^2; \quad (5.62)$$

$$x^2(c^2 - B^2) = B^2(c^2 + y^2 - B^2); \quad (5.63)$$

$$x^2(B^2 - c^2) = B^2(B^2 - c^2 - y^2); \quad (5.64)$$

Deixe-me chamar o número positivo $B^2 - c^2$ de r^2 :

$$r^2 = B^2 - c^2 = (B-c)(B+c) > 0 \quad (5.65)$$

Posso simplificar a expressão na equação (eq. 64), repetida abaixo, com os seguintes cálculos:

$$x^2(B^2 - c^2) = B^2(B^2 - c^2 - y^2); \quad (5.66)$$

$$x^2r^2 = B^2(r^2 - y^2); \quad (5.67)$$

$$x^2 = B^2 \frac{r^2 - y^2}{r^2}; \quad (5.68)$$

$$\frac{x^2}{B^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^2}; \quad (5.69)$$

$$\frac{x^2}{B^2} = 1 - \frac{y^2}{r^2}; \quad (5.70)$$

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1; \quad (5.71)$$

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{B^2 - c^2} = 1; \quad (5.72)$$

Esta não é a forma comum como aparece a equação da elipse na literatura, e sim com a seguinte expressão:

$$p = B^2; q = B^2 - c^2; \quad (5.73)$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1; \quad (5.74)$$

em que p, q são dois números positivos, aqui você está vendo de onde vêm estes dois números positivos associando-os aos dois círculos que elipse tangencia, por fora, o de menor raio, e por dentro o de maior raio.

Posso expressar y como função de x obtendo então duas equações de funções

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{p}}; |x| \leq \sqrt{p}; \quad (5.75)$$

$$g(x) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{p}}; |x| \leq \sqrt{p}; \quad (5.76)$$

e usar `gnuplot` para obter o gráfico da elipse dando valores para B, p que pode ser vista na figura (fig 5.10), página 112,

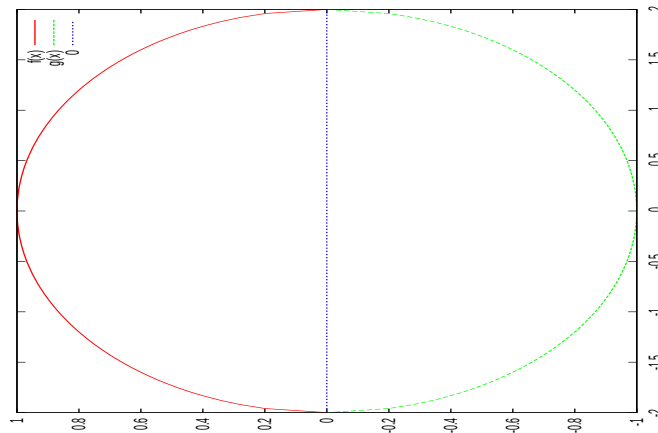


Figura 5.10: gráfico duma elipse com `gnuplot`

Se fosse possível associar botões controlando potenciômetros que alterassem o tamanho de $b \in (0, B)$ poderíamos

- ver a elipse colapsar para um segmento de reta e coincidir com o diâmetro do círculo maior, quando $b = 0$ e neste caso $c = a$,
- ou, quando $b = B$, e neste caso $c = 0$, a elipse coincidiria com o círculo maior, e a equação (eq. 83) se transformaria na equação do círculo de raio B

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \equiv x^2 + y^2 = B^2 \quad (5.77)$$

- excentricidade da elipse. Ainda observando a figura (fig 5.9), se $c = 0$ então os dois círculos ficam coincidentes e a elipse se transforma num círculo. A excentricidade é definida pela razão $\frac{c}{a}$, usando a hipotenusa e um dos catetos do triângulo retângulo. É uma convenção a escolha do cateto que mede c , bem conveniente. $c \in [0, a]$ e quando $c = 0$, os dois círculos na figura (fig 5.9) ficam coincidentes. O cateto que mede b não oferece esta variação e certamente foi esta razão da escolha que se tem para a definição da excentricidade.

Um círculo é uma elipse com excentricidade nula. A excentricidade da rota da Terra em volta do Sol fica próximo de zero variando próximo do número 0.016710 ou seja é uma órbita quase circular.

Uma forma de perceber a *excentricidade duma elipse* se dá quando você desenhar um círculo numa folha de papel. Ao olhar para figura com o papel perpendicular ao eixo do seu *cone de visão* você verá um círculo, produzindo um ângulo diferente do ângulo reto, você terá a impressão de ver uma elipse. Esta experiência tem o que ver com a próxima.

Um cone, em geometria, é uma figura espacial que se obtém quando se fizer girar uma reta, *chamada geratriz do cone*, em torno de outra que lhe seja oblíqua, *chamada eixo do cone*. O resultado será um *cone de duas folhas* como aparece na figura (fig 5.7), página 109.

Uma terceira forma de obter uma elipse consiste em cortar um cone de forma que o plano de corte não seja perpendicular ao eixo do cone. Você pode ter uma visão disto se desenhar um círculo sobre uma

folha de papel e olhar o desenho com o papel inclinado em relação ao *eixo do cone de sua visão*. Se a inclinação for de 90 graus, o papel estiver perpendicular ao eixo do cone de sua visão, você estará vendo um círculo, com qualquer outro ângulo, até zero, verá uma elipse. Esta definição ainda tem um outro grande interesse: o plano que corta o cone irá produzir todas as cônicas dependendo do ângulo do corte.

Não é fácil passar da forma geométrica para a forma algébrica na definição da elipse, as contas são muito complicadas.

Vou mostrar como se pode obter a equação duma elipse que esteja colocada numa posição arbitrária, mas com dados conhecidos, no plano, como *transformação* da equação obtida com os eixos da elipse sobre os eixos coordenados.

Primeiro deixe-me aplicar uma translação à elipse usando o vetor (r, s) transformo, assim, a equação

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{B^2 - c^2} = 1; \quad (5.78)$$

na equação

$$\frac{(x - r)^2}{B^2} + \frac{(y - s)^2}{B^2 - c^2} = 1; \quad (5.79)$$

esta é a equação da elipse com polos $F_1 = (-c, r)$ e $F_2 = (c, s)$ obtidos com a soma do vetor de translação aos focos anteriores. Observe que a translação é (r, s) , mas aparece dentro da equação $(x - r, y - s)$.

5.7 Círculo, elipse reta e plano

Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos, 2,3,5,7,11. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta *gabarito*, você pode encontrar o produto dos números primos que correspondem às opções verdadeiras. É possível que o *gabarito* esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro.

Exercícios 2 Reta, círculo, elipse

1. Círculo e reta Considere a expressão

$$P(x, y) = x^2 + 6x + y^2 + 8y + 9 \quad (5.80)$$

(2) (V)[](F)[] Completando os quadrados tenho

$$P(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 4)^2 + 9; \quad (5.81)$$

(3) (V)[](F)[] Completando os quadrados tenho

$$P(x, y) = (x + 3)^2 + (y + 4)^2 - 16; \quad (5.82)$$

(5) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de raio 9.

(7) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de raio 16.

(11) (V)[](F)[] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de raio 4 e de centro $(-3, -4)$

gabarito:

2. Círculo e reta

$$P(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11; \quad P(x, y) = 0; \quad (5.83)$$

(2) (V)[J(F)[]] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(1, 2)$

(3) (V)[J(F)[]] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(-1, -2)$ e raio 16.

(5) (V)[J(F)[]] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(-1, -2)$ e raio 4.

(7) (V)[J(F)[]] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(-1, 2)$ e raio 4.

(11) (V)[J(F)[]] $P(x, y) = 0$ é a equação dum círculo de centro $(1, -2)$ e raio 4.

gabarito:

3. Círculo e reta

Considere a figura (fig 5.11), página 114,

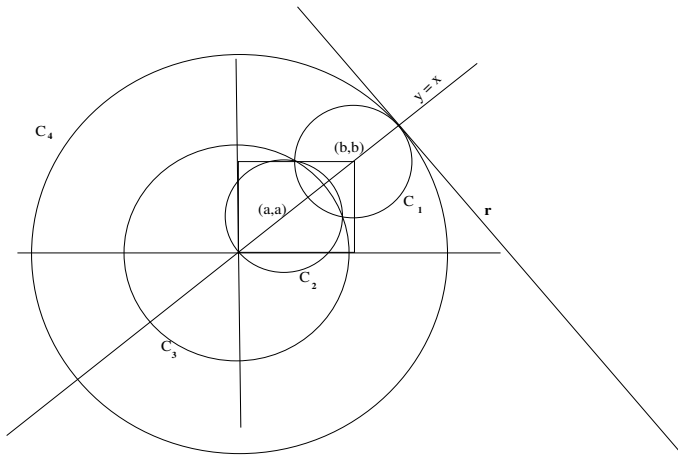


Figura 5.11: Círculos

$$a = 3; b = 5; \quad (5.84)$$

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 - s^2 = 0; \quad (5.85)$$

$$(x - b)^2 + (y - b)^2 - s^2 = 0; \quad (5.86)$$

(2) (V)[J(F)[]] O valor de s nas equação do círculo de centro (a, a) é $\sqrt{2}$.

(3) (V)[J(F)[]] O valor de s nas equação do círculo de centro (a, a) é $2a$.

(5) (V)[J(F)[]] O valor de s nas equações do círculos de centro (a, a) é $a\sqrt{2}$.

(7) (V)[J(F)[]] O valor de s nas equações do círculo de centro (b, b) é $a\sqrt{2}$.

(11) (V)[J(F)[]] O valor de s nas equações do círculos de centro (b, b) é $a\sqrt{2}$.

gabarito:

4. Círculo e reta Na figura (fig 5.11), página 114, o círculo C_4 contém em seu interior três outros círculos C_3, C_2, C_1 .

(2) (V)[](F)[] O raio do círculo C_4 mede $(a + b)\sqrt{2}$.

(3) (V)[](F)[] O raio do círculo C_4 mede $b\sqrt{2}$.

(5) (V)[](F)[] O raio do círculo C_4 mede $2a\sqrt{2}$.

(7) (V)[](F)[] O raio do círculo C_3 mede $2a\sqrt{2}$.

(11) (V)[](F)[] O raio do círculo C_3 mede mais do que $a\sqrt{2}$.

gabarito:

5. Círculo e reta Na figura (fig 5.11), página 114, há quatro círculos, C_4, C_3, C_2, C_1 . e a reta r .

(2) (V)[](F)[] Os círculos C_1 e C_4 são tangentes à reta r .

(3) (V)[](F)[] Os círculos C_1 e C_4 são tangentes à um ao outro.

(5) (V)[](F)[] A equação da reta r é $y - x = 0$

(7) (V)[](F)[] A equação da reta r é $y + x + C = 0; C > 0$

(11) (V)[](F)[] A equação da reta r é $y + x + C = 0; C < 0$

gabarito:

6. Círculo e reta

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 - r^2 = 0; \quad (5.87)$$

(2) (V)[](F)[] A equação (eq.7.87) representa no plano cartesiano um círculo de centro num ponto da primeira bisetriz.

(3) (V)[](F)[] Se o parâmetro “a” na equação (eq.7.87) for considerado um parâmetro variando no intervalo $[-1, 1]$ irá gerar uma figura com fronteira formada por dois semicírculos e dois segmentos de reta.

(5) (V)[](F)[] Se o parâmetro “a” na equação (eq.7.87) for considerado um parâmetro variando no intervalo $[-1, 1]$ irá gerar um losango.

(7) (V)[](F)[] Se o raio r for igual a 1, $r = 1$, na equação (eq.7.87) a área do disco delimitado por este círculo será π .

(11) (V)[](F)[] Se o raio r for igual a 2, $r = 2$, na equação (eq.7.87) a área do disco delimitado por este círculo será 4π .

gabarito:

7. círculo e reta

$$P(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0; \quad (5.88)$$

(2) (V)[J(F)[]] Se $A = 1, B = 1, C = -6, D = 4, E = -12$ então $P(x, y) = 0$ é o círculo de centro $(3, -2)$

(3) (V)[J(F)[]]

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0; \quad (5.89)$$

É o círculo de centro $(3, -2)$ e raio 5

(5) (V)[J(F)[]]

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0; \\ 6(y - 1) + 8(x - 7) = 0; \end{cases} \quad (5.90)$$

É a interseção do círculo de centro $(3, -2)$ e raio 5 com uma reta que passa no ponto $(7, 1)$ e este sistema de equações tem uma única solução.

(7) (V)[J(F)[]]

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0; \quad (5.91)$$

É o ponto $(3, -2)$, um círculo com este centro e raio zero.

(11) (V)[J(F)[]]

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0; \\ x - 3 + y + 2 = 0; \end{cases} \quad (5.92)$$

É a interseção do círculo de centro $(3, -2)$ e raio 6 com uma reta que passa no ponto $(3, -2)$ e portanto este sistema de equações tem apenas duas soluções.

gabarito:

8. círculo e reta Os pontos $P = (6, 6), Q = (2, 3), R = (4, 7)$ são os vértices do triângulo PQR .

(2) (V)[J(F)[]] Os pontos $(0, 0), (-4, -3), (-2, 1)$ são os vértices dum triângulo equivalente ao triângulo PQR .

(3) (V)[J(F)[]] Os pontos $(2, -1), (-2, -4), (0, 0)$ são os vértices dum triângulo equivalente ao triângulo PQR .

(5) (V)[J(F)[]] Os vetores $(2, -1), (-2, -4)$ são perpendiculares e isto prova que PQR é um triângulo retângulo.

(7) (V)[J(F)[]] Os catetos do triângulo PQR medem $\sqrt{5}, \sqrt{20}$.

(11) (V)[J(F)[]] A área do triângulo PQR é 5.

gabarito:

9. círculo e reta

$P = (4, -4), Q = (-4, 4), R = (4\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ são os vértices do triângulo PQR

(2) (V)[J(F)[]] O triângulo com vértices $P' = (0, 0), Q' = (-8, 8), R' = (4\sqrt{3} - 4, 4\sqrt{3} + 4)$ é equivalente ao triângulo PQR .

(3) (V)[J(F)[]] O triângulo com vértices $P' = (0, 0), Q' = (-8, 8), R' = (4\sqrt{3} - 1, 4\sqrt{3} + 1)$ é um triângulo retângulo.

(5) (V)[J(F)[]] O triângulo com vértices $P' = (0, 0), Q' = (-8, 8), R' = (4(\sqrt{3} - 1), 4(\sqrt{3} + 1))$ é um triângulo equilátero.

- (7) (V) [](F) [] A área do triângulo com vértices $P' = (0, 0)$, $Q' = (-8, 8)$, $R' = (4\sqrt{3} - 1, 4\sqrt{3} + 1)$ é aproximadamente -55.42562
- (11) (V) [](F) [] $P = (4, -4)$, $Q = (-4, 4)$, $R = (4\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ são os vértices do triângulo PQR que determina o círculo de equação

$$x^2 + y^2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}x - \frac{10\sqrt{3}}{3}y - 16 = 0; \quad (5.93)$$

gabarito:

10. círculo e reta Dados os pontos

$$P = (3, 7), Q = (6, 5), R = (15, -1) \quad (5.94)$$

decida o que se pode dizer

- (2) (V) [](F) [] PQR é um triângulo isósceles.
- (3) (V) [](F) [] PQR é um triângulo retângulo.
- (5) (V) [](F) [] PQR é um triângulo equilátero.
- (7) (V) [](F) [] PQR é um triângulo degenerado.
- (11) (V) [](F) [] Os vértices do triângulo PQR se encontram sobre uma mesma reta r .

gabarito:

11. círculo e reta

Suponha dados três pontos P, Q, R que determinam o triângulo PQR . Vou designar os lados do triângulo como $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}$.

- (2) (V) [](F) [] A lei de Charles diz que $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = 0$
- (3) (V) [](F) [] Se $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ então a soma de dois lados do triângulo é igual ao terceiro e isto é impossível.
- (5) (V) [](F) [] Se $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ então a soma de dois lados do triângulo é igual ao terceiro é o caso da igualdade, na desigualdade triangular, quando se tiver um triângulo degenerado.
- (7) (V) [](F) [] Se os pontos P, Q, R não forem colineares então a soma dos módulos de dois lados será sempre maior do que o módulo do terceiro lado, pela desigualdade triangular.
- (11) (V) [](F) [] O triângulo PQR determina um único círculo no qual ele está inscrito.

gabarito:

12. círculo e reta O triângulo com vértices $(9, 3), (7, -1), (1, -1)$ determina um círculo C no qual ele está inscrito.

- (2) (V) [](F) [] O centro do círculo C é $(4, 3)$
- (3) (V) [](F) [] O raio do círculo C é $\sqrt{\frac{50}{3}}$.
- (5) (V) [](F) [] O raio do círculo C é 4.

(7) (V)](F) [] Indefinido porque pode haver vários círculos determinados por este triângulo.

(11) (V)](F) [] É o círculo de centro $(4, 3)$ e raio $\sqrt{\frac{50}{3}}$ porque há um único círculo determinado por este triângulo.

gabarito:

13. triângulo e círculo O triângulo PQR está inscrito em $\mathbf{S}^1$, o círculo trigonométrico.

(2) (V)](F) [] Se PQR for equilátero então existe um triângulo semelhante a PQR cujos vértices são as entradas da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos(\frac{2\pi}{3}) & \sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\frac{4\pi}{3}) & \sin(\frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

(3) (V)](F) [] Se PQR for equilátero então as coordenadas dos seus vértices não podem ser todas números inteiros.

(5) (V)](F) [] PQR for um triângulo equilátero e todas as coordenadas dos seus vértices são números inteiros.

(7) (V)](F) [] Se PQR for equilátero então existe um triângulo semelhante a PQR cujos vértices são as entradas da matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}); \\ \cos(\frac{7\pi}{6}) & \sin(\frac{7\pi}{6}); \\ \cos(\frac{11\pi}{6}) & \sin(\frac{11\pi}{6}); \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

(11) (V)](F) [] Não existem triângulos equiláteros inscritos em círculos.

gabarito:

14. triângulo, área

Os vértices do triângulo ABC são $(2, 3)$, $(4, 7)$, $(-5, 2)$.

(2) (V)](F) [] A área de ABC é dada pelo determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.97)$$

mas o valor tem que ser corrigido.

(3) (V)](F) [] O triângulo cujos vértices são $(0, 0)$, $(2, 4)$, $(-7, -1)$ é uma imagem equivalente de ABC e que vértice $(2, 3)$ foi levado para a origem.

(5) (V)](F) [] A altura de ABC relativamente ao lado $\overline{BC}$ é aproximadamente 2.5253.

(7) (V)](F) [] A área de ABC é 13.

(11) (V)](F) [] A altura de ABC relativamente ao lado $\overline{BC}$ é aproximadamente 1.2626.

gabarito:

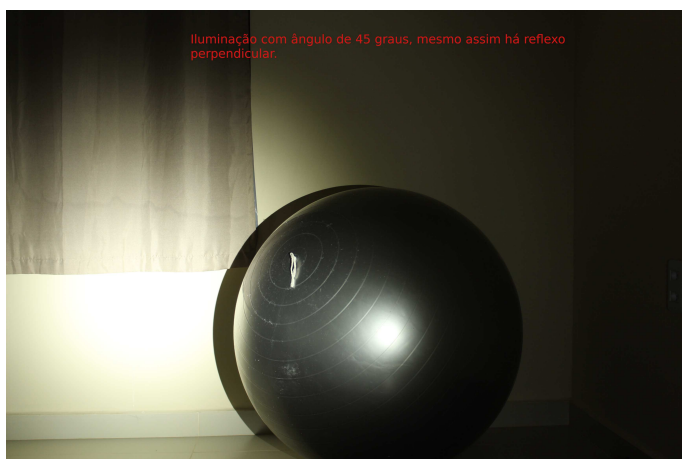


Figura 5.12:

15. reta, círculo, equação A figura (fig 5.12), página 119,

mostra o círculo C de centro $(-3, -4)$ de raio 5 e a reta $8(x - 1) - 6(y + 7) = 0$ tangente ao círculo no ponto $(1, -7)$.

(2) (V)](F) [] A reta de equação

$$8x - 6y = 0; \quad (5.98)$$

é tangente ao círculo C .

(3) (V)](F) [] A reta de equação

$$8x - 6y = 50; \quad (5.99)$$

passa no ponto $P = (1, -7)$

(5) (V)](F) [] A reta de equação

$$8x - 6y - 50 = 0; \quad (5.100)$$

passa no ponto $P = (1, -7)$ onde ela tangencia o círculo C .

(7) (V)](F) [] A reta cuja equação é

$$8x - 6y = 50; \quad (5.101)$$

passa no ponto $P = (1, -7)$ e pelo centro do círculo C

(11) (V)](F) [] A reta cuja equação é

$$8x - 6y - 10 = 0 \quad (5.102)$$

é tangente ao círculo C

gabarito:

16. círculo, reta Na figura (fig 5.13), página 120, a reta de equação $x + y + a = 0$ corta o círculo C cuja equação é $x^2 + y^2 = a^2$.

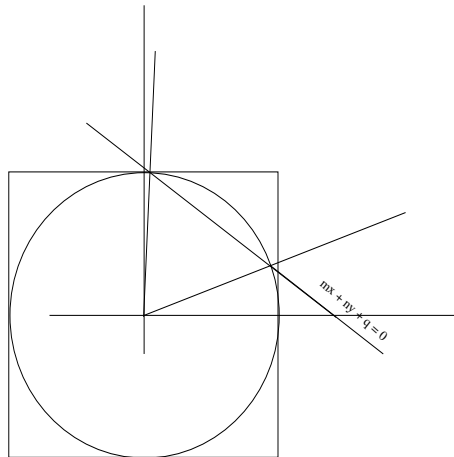


Figura 5.13: círculo e reta

- (2) (V)[](F)[] O círculo C é inscrito num quadrado de lado a .
 (3) (V)[](F)[] O círculo C é inscrito num quadrado de lado $2a$.
 (5) (V)[](F)[] Os pontos de interseção são $(0, 0)$, $(2a, 2a)$;
 (7) (V)[](F)[] Os pontos de interseção são (a, a) , $(-a, -a)$;
 (11) (V)[](F)[] Os pontos de interseção são $(0, -a)$, $(-a, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$;

gabarito:

17. Reta numérica $5(x^2 + y^2 + ax + by) = 9ab$ é a equação do círculo C .

- (2) (V)[](F)[] C é o círculo de centro $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.
 (3) (V)[](F)[] C é o círculo de centro (a, b) .
 (5) (V)[](F)[] C é o círculo de centro $(2a, 2b)$.
 (7) (V)[](F)[] C é o círculo de centro $(-a, -b)$.
 (11) (V)[](F)[] C é o círculo de centro $(-a/2, -b/2)$.

gabarito:

18. completação dos quadrados Verifique, para a expressão geral do segundo grau

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad (5.103)$$

a condição para que seja a equação dum círculo.

- (2) (V)[](F)[] Para que uma equação do segundo grau em x, y represente um círculo, como a equação (eq.103), é preciso que $a = b$ portanto a expressão geral para analisar seria

$$x^2 + y^2 + axy + bx + cy + e = 0 \quad (5.104)$$

(3) (V)[](F)[] Completando o quadrados na equação (eq.104) tem-se

$$x^2 + y^2 + axy + bx + cy + e = 0 \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + \left(y + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} + axy + e = 0 \quad (5.105)$$

donde se conclui que uma condição necessária é $a = 0$.

(5) (V)[](F)[] Considerando $a = 0$ na equação (eq.104) ao completar os quadrados se pode concluir que a expressão representa um círculo se $e > \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$.

(7) (V)[](F)[] Considerando $a = 0$ na equação (eq.104) ao completar os quadrados se pode concluir que a expressão representa um círculo se $e \leq \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$.

(11) (V)[](F)[] Considerando $a = 0$ na equação (eq.104) ao completar os quadrados se pode concluir que a expressão representa um círculo se $e = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$ mas neste caso representa um ponto.

gabarito:

19. equação do círculo

Condição para determinar um círculo

(2) (V)[](F)[] Dar o centro e o raio.

(3) (V)[](F)[] Fornecer três pontos que estejam no círculo.

(5) (V)[](F)[] Apresentar um triângulo retângulo, (fornecer as coordenadas dos vértices do triângulo), cuja hipotenusa seja o diâmetro do círculo.

(7) (V)[](F)[] Fornecer as coordenadas dos vértices de qualquer triângulo.

(11) (V)[](F)[] Fornecer as coordenadas dos vértices dum quadrado qualquer.

gabarito:

20. retas no espaço 3D

Marque as afirmações verdadeiras, ignore as falsas!

(2) (V)[](F)[] Dados os pontos

$$P_1 = (4, 8, 0); P_2 = (1, 2, 3); Q_1 = (0, 5, 0); Q_2 = (-3, -1, 3)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são perpendiculares entre si.

(3) (V)[](F)[] Dados os pontos

$$P_1 = (2, 1, 1); P_2 = (3, 2, -1); Q_1 = (0, 1, 4); Q_2 = (2, 3, 0)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são perpendiculares entre si.

(5) (V)[](F)[] Dados os pontos

$$P_1 = (3, 1, 4); P_2 = (-3, 2, 5); Q_1 = (4, 6, 1); Q_2 = (0, 5, 8)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são perpendiculares entre si.

(7) (V) [](F) [] Dados os pontos

$$P_1 = (3, 1, 4); P_2 = (-3, 2, 5); Q_1 = (4, 6, 1); Q_2 = (0, 5, 8)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são paralelas.

(11) (V) [](F) [] Dados os pontos

$$P_1 = (2, 1, 1); P_2 = (3, 2, -1); Q_1 = (0, 1, 4); Q_2 = (2, 3, 0)$$

eles determinam as retas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ que são paralelas.

gabarito:

21. Reta, círculo e elipse Dados os pontos

$$P_1 = (2, 1, 4), P_2 = (-1, 4, 1), Q_{0,5,1} = (), Q_2 = (3, -1, -2) \quad (5.106)$$

(2) (V) [](F) [] A reta $\overline{P_1P_2}$ passa no ponto P_1 e é paralela ao vetor $(-3, \vec{3}, -3)$.

(3) (V) [](F) [] A reta $\overline{P_1P_2}$ passa no ponto P_2 e é paralela ao vetor $(-3, \vec{3}, -3)$.

(5) (V) [](F) [] A reta $\overline{Q_1Q_2}$ passa no ponto P_2 e é paralela ao vetor $(-3, \vec{3}, -3)$.

(7) (V) [](F) [] A reta $\overline{Q_1Q_2}$ passa no ponto Q_2 e é paralela ao vetor $(3, -\vec{6}, -3)$.

(11) (V) [](F) [] A reta $\overline{P_1Q_2}$ passa no ponto Q_2 e é paralela ao vetor $(-1, -\vec{2}, -6)$

gabarito:

22. Reta, círculo e elipse

A equação da reta r e $Ax + By + C = 0$.

(2) (V) [](F) [] Se $A = 0$ então r é paralela ao eixo OX .

(3) (V) [](F) [] Se $B = 0$ então r é paralela ao eixo OY .

(5) (V) [](F) [] Se $B * A \neq 0$ então r não é paralela ao eixo OY .

(7) (V) [](F) [] Se $B * A \neq 0$ então r não é paralela ao eixo OX .

(11) (V) [](F) [] Se $B * A \neq 0$ então r é paralela ao vetor $(-B, A)$.

gabarito:

23. Equação paramétrica da reta

A equação da reta r e $Ax + By + C = 0$ com $AB \neq 0$ e r passa no ponto (p, q)

(2) (V) [](F) [] Então $q = -\frac{Ap+C}{B}$.

(3) (V) [](F) [] Se também r passar no ponto (m, n) então r é paralela ao vetor $(p-m, \frac{A(-p+m)}{B})$.

(5) (V) [](F) [] Se também r passar no ponto (m, n) então a equação $((p-m)t, \frac{A(-p+m)t}{B})$ descreve os múltiplos do vetor $(p-m, \frac{A(-p+m)}{B})$, portanto o lugar geométrico dos pontos que se encontram sobre uma reta paralela a reta r .

(7) (V)[](F)[] Se também r passar no ponto (m, n) então a equação $(p, q) + ((p-m)t, \frac{A(-p+m)t}{B})$ descreve os múltiplos do vetor $(p-m, \frac{A(-p+m)}{B})$ deslocados para o ponto (p, q) portanto uma reta paralela a reta r que passa no (p, q) .

(11) (V)[](F)[] Se também r passar no ponto (m, n) então a equação $(p, q) + ((p-m)t, \frac{A(-p+m)t}{B})$ descreve os múltiplos do vetor $(p-m, \frac{A(-p+m)}{B})$ deslocados para o ponto (p, q) sendo assim uma descrição da r , é equação paramétrica da reta r .

gabarito:

24. equação do plano e da reta

Considere as equações dos planos

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1; \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2; \end{cases} \quad (5.107)$$

e a expressão matricial deste sistema

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad (5.108)$$

(2) (V)[](F)[] A expressão matricial, equação (eq.108) transforma um sistema de equações numa função linear, T , em que a matriz é a constante e T se aplicar a qualquer “ponto” do $\mathbf{R}^3$ e no caso da equação (eq.108) os valores se encontram no $\mathbf{R}^2$.

(3) (V)[](F)[] Como a (eq.108), ou a (eq.107) que lhe é equivalente, vale para $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ então posso escolher $z = 0$ o que equivale a eliminar a terceira coluna da matriz na (eq.108). Posso também escolher $x = 0$ ou $y = 0$ e assim eliminar a primeira ou segunda coluna da matriz.

(5) (V)[](F)[] Do ponto de vista da matriz na equação (eq.108), zerar uma das coordenadas no domínio, equivale a considerar novos sistemas com matrizes 2×2 e assim resolver uma equação mais simples para depois retornar à (eq.107) com o valor obtido, se houver solução.

(7) (V)[](F)[] Se todos os determinantes menores na equação (eq.108) forem diferentes de zero, o sistema tem solução única. Se algum deles for nulo, ainda pode ter solução mas não será única.

(11) (V)[](F)[]

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix} \quad (5.109)$$

Este sistema tem uma infinidade de soluções, é a interseção de dois planos, portanto uma reta. Selecionando $x = 100$ vou encontrar a solução $(x, y, z) = (100, -138, 217)$.

A solução $(x, y, z) = (100, \text{Error 10001}, \text{Error 10001})$

gabarito:

25. equação do plano O plano π é perpendicular ao vetor $(100, 585, -462)$ e passa no ponto $(3, 5, -7)$.

(2) (V)](F) [] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z = 0; \quad (5.110)$$

(3) (V)](F) [] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z = 6459; \quad (5.111)$$

(5) (V)](F) [] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z = -6459; \quad (5.112)$$

(7) (V)](F) [] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z + 6459 = 0; \quad (5.113)$$

(11) (V)](F) [] A equação do plano π é

$$100x + 585y - 462z + 64 = 0; \quad (5.114)$$

gabarito:

26. equação do plano Selecione as afirmações corretas

(2) (V)](F) [] Um plano paralelo ao plano XOY tem por equação $z = c$ em que c é uma constante dada.

(3) (V)](F) [] Um plano paralelo ao plano XOZ tem por equação $y = c$ em que c é uma constante dada.

(5) (V)](F) [] Um plano paralelo ao plano $100(x - 3) + 585(y - 5) - 462(z + 7) = 0$; tem por equação $100(x - a) + 585(y - b) - 462(z - c) = 0$ em que a, b, c são constantes dadas.

(7) (V)](F) [] O plano π que é paralelo ao plano $100(x - 3) + 585(y - 5) - 462(z + 7) = 0$ tem por equação $100(x - a) + 585(y - b) - 462(z - c) = 0$ e o ponto (a, b, c) pertence ao plano π .

(11) (V)](F) [] Um plano π que seja paralelo ao plano $100(x - 3) + 585(y - 5) - 462(z + 7) = 0$ e passe pelo ponto $(-1, 1, 3)$ tem por equação $100(x + 1) + 585(y - 1) - 462(z - 3) = 0$.

gabarito:

27. equação do plano Selecione as opções corretas.

(2) (V)](F) [] Dois planos que sejam paralelos são perpendiculares a um mesmo vetor dado.

(3) (V)](F) [] Se o produto ABC de três números dados for diferente de zero então

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0 \quad (5.115)$$

é a equação dum plano que contém o ponto (a, b, c) ;

(5) (V)](F) [] A solução do sistema

$$\begin{cases} A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 4 \end{cases} \quad (5.116)$$

é um círculo de raio 4 que se encontra no plano cuja equação é

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0; \quad (5.117)$$

(7) (V)](F) [] Os pontos $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(-1, 2, 4)$ determinam um plano.

(11) (V)](F) [] Como o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad (5.118)$$

vale 4, os vetores $v = (3, -1, -1)$, $w = (2, -1, -2)$ determinam um losango com esta área.

gabarito:

28. equação do plano

$$\begin{cases} 3x - y - z = 7; \\ 2x - y - 2z = 10; \end{cases} \quad (5.119)$$

são as equações dos planos π e γ , nesta ordem.

(2) (V)](F) [] Os planos π e γ têm interseção vazia.

(3) (V)](F) [] Os planos π e γ têm interseção não vazia e determinam uma reta.

(5) (V)](F) [] Escolhendo um valor para z , arbitrariamente no sistema (eq. 7.119) permite calcular os correspondentes valores de x, y do ponto $P = (x, y, z)$ que pertence à reta determinada pelos planos π e γ .

(7) (V)](F) [] No sistema de equações (eq. 7.119) escolhendo $x = 100$ a solução única do sistema é $(x, y, z) = (100, 396, -103)$.

(11) (V)](F) [] No sistema de equações (eq. 7.119) escolhendo $z = 10$ a solução única do sistema é $(x, y, z) = (-13, -56, 10)$.

gabarito:

29. equação do plano A matriz expandida do sistema de equações é

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (5.120)$$

Na matriz expandida, em cada linha, na última entrada, os dados do sistema.

(2) (V)](F) [] No sistema (eq. 7.120) escolhendo o valor $z = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (46, 63, 100)$.

(3) (V)](F) [] No sistema (eq. 7.120) escolhendo o valor $x = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (100, 138, -217)$.

- (5) (V)[](F)[] No sistema (eq. 7.120) escolhendo o valor $x = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (100, 138, 217)$.
- (7) (V)[](F)[] No sistema (eq. 7.120) escolhendo o valor $x = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (100, -138, 217)$.
- (11) (V)[](F)[] No sistema (eq. 7.120) escolhendo o valor $z = 100$ tem por solução $(x, y, z) = (46.8181818181818182, -63.545454545454545455, 100)$.

gabarito:

30. equação do plano Considere a equação

$$2x + 3y + z - 3 = 0 \quad (5.121)$$

que representa a variedade linear π do $\mathbf{R}^3$.

- (2) (V)[](F)[] O ponto $P = (0, 0, 0) \in \pi$.
- (3) (V)[](F)[] A variedade linear π não passa na origem.
- (5) (V)[](F)[] O vetor $\vec{Q} = (2, 3, 1)$ é perpendicular à variedade linear π .
- (7) (V)[](F)[] O conjunto dos pontos $(x, y, z) = (2t, 3t, t); t \in \mathbf{R}$ representa uma reta que passa na origem e é perpendicular à variedade linear π .
- (11) (V)[](F)[] O conjunto dos pontos $\{(x, y, z) = (2t, 3t, t); t \in \mathbf{R}\}$ representa uma reta contida na variedade linear π .

gabarito:

31. equação do plano Dada a reta, r , de equação $3x - 4y + 12 = 0$ determina quais afirmações são verdadeiras.

- (2) (V)[](F)[] O ponto $P = (0, 0)$ satisfaz a equação da reta r .
- (3) (V)[](F)[] Há uma reta, s passando por $P = (0, 0)$, que é perpendicular à reta r .
- (5) (V)[](F)[] Como a reta, $s \perp r$ passa por $P = (0, 0)$, então sua equação é $-4x + 3y = 0$.
- (7) (V)[](F)[] A interseção das retas $s \cap r$ é o ponto $(-1.44, 1.92)$, aproximadamente.
- (11) (V)[](F)[] A distância de $P = (-1.44, 1.92)$ à reta r é 2.4, aproximadamente.

gabarito:

32. equação do plano r é a reta de equação $5x + 3y - 3 = 0$.

- (2) (V)[](F)[] A reta r passa nos pontos $(0, 3)(5, 0)$.
- (3) (V)[](F)[] O ponto $(4, 0)$ pertence à reta r , então sua distância à r é zero.
- (5) (V)[](F)[] A distância do ponto $(4, 0)$ à reta r é aproximadamente 2.9154.
- (7) (V)[](F)[] A reta s , de equação $3x - 5y - 12 = 0$, é perpendicular à reta r e o $(4, 0)$ pertence à reta s .
- (11) (V)[](F)[] A interseção entre as retas s e r é o ponto $Q = (-0.78, 2.3)$.

gabarito:

5.8 O que é uma parábola

Vou começar falando do cenário geométrico em que os atores são um *cone de duas faces* e um *plano* que corta o cone, neste capítulo discutindo o caso da *parábola*. Em seguida passo para a definição algébrica da parábola e você pode considerar este texto inicial como uma *discreção do assunto*, até porque a passagem desta apresentação geométrica para a definição algébrica não é nada fácil e não considero importante tratar dela aqui. Você pode facilmente encontrar esta discussão na *wikipedia* de forma muito melhor do que eu poderia fazer aqui e copiar seria plágio.

5.8.1 Parábola e o cone

Uma forma de iniciar a conversa sobre as *cônicas*, agora a *parábola*, é a geométrica, e o cenário é um cone de duas folhas, uma superfície, ou uma *variedade de dimensão dois*, um objeto do espaço tridimensional, que pode ser cortada por um plano, uma outra *variedade de dimensão dois*, também um objeto do espaço tridimensional, resultando numa curva, ainda no espaço tridimensional, mas que pode ser projetada no plano. Uma das possíveis curva é a *parábola* e vou me concentrar na *curva plana*.

É interessante conectar este estudo com um aspecto mais geral, o conceito de *estabilidade* que você vai encontrar quando estudar *equações diferenciais*, e lembro que, neste livro, estou sempre me referindo aos seus estudos futuros como motivação mesmo para que você se dedique à Geometria Analítica como base para o que vier depois.

Quando você estudar *equações diferenciais* irá passar por um capítulo que trata da *estabilidade* e neste momento deve se recordar do que agora vou dizer a respeito da parábola, ou a respeito do círculo. Qualquer *movimento angular* no plano secante e a figura *pula de parábola* para uma *elipse* ou para uma *hipérbole*. Trato da *hipérbole* no próximo capítulo, e tratei da *elipse* e do círculo, no capítulo anterior.

Uma pequena variação na posição do *ângulo do plano* e ele vai cortar a outra folha resultando numa curva *desconexa*, formada de duas curvas, uma *hipérbole*, fazendo referência aos *ramos duma hipérbole*, ou segue cortando apenas uma das folhas segundo uma *elipse*. Os círculos e as parábolas são duas figuras *instáveis*, qualquer variação no ângulo do plano secante e a figura deixa de ser círculo ou parábola.

Aqui, e ligado às *equações diferenciais*, se encontra a importância da Geometria Analítica, os objetos no espaço se encontram presos a outros objetos seguindo órbitas que se *chamam de elipses* porque estão bem próximas disto e saem deste tipo de órbita para seguir por *parábolas* quando recebem um empuxo próprio ou externo mas para voltar cair em elipses em órbita de outro corpo celeste. É mais um exemplo da instabilidade das *parábolas* agora nas órbitas dos objetos em viagens interplanetárias.

Confira a figura (fig 5.14), página 128, em que se pode ver um plano cuja interseção com um cone produz uma parábola.

No cenário geométrico, o plano que corta o cone, na figura (fig 5.14), página 128, se encontra paralelo a um dos planos tangentes à superfície do cone. **Variação possível:** não há nenhuma variação possível de ângulo, somente de deslocamento paralelo que ainda produza interseção, para que se obtenham parábolas.

Para se obter elipses ou hipérbolos se usam variações de ângulos, mas para obter parábolas ou círculos apenas é possível com a variação de deslocamentos paralelos a um plano que produza este tipo de curva. Confira o *cenário geométrico* na equação da elipse, para uma visão mais completa das cônicas. Confira a também a *equação da hipérbole* para ver que este tipo de curva é obtida quando o plano se encontra numa direção intermediária entre as imagens das diretriz no plano XOY .

Observação 4 Construção geométrica

Vou agora chegar à equação da parábola pela via de sua definição geométrica.

As parábolas têm uma definição geométrica, acompanhe a descrição na figura (fig 5.15), página 128.

Preciso de duas retas, uma chamada diretriz, d , e outra chamada de eixo da parábola, r .

Deixe-me explicar o que você está vendo e até sugiro que você repita o processo usando esta explicação para compreender a construção, e depois entender a definição algébrica da parábola.

Tycho Brae
mediu as órbitas
indexTycho Brae!Kepler e seu aluno, Ke-
pler, descobriu que eram elipses.

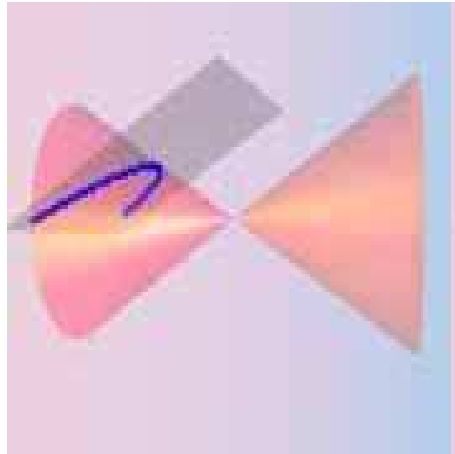


Figura 5.14: Plano paralelo à imagem da diretriz: parábola

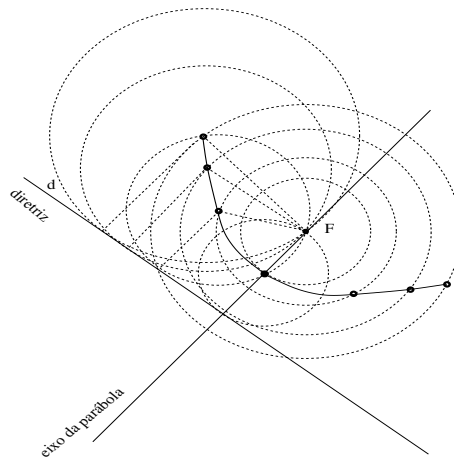


Figura 5.15: equação da parábola

No eixo selecione um ponto, F , chamado foco da parábola. Considere P um ponto arbitrário sobre a parábola, então $d(P, d) = d(P, F)$, a distância de P ao foco F é igual à distância de P à reta diretriz d . A figura (fig 5.15) foi desenhada com um compasso eletrônico, um editor de imagens, e usei `xfig`, o compasso é um círculo! Estas duas distâncias são calculadas de forma diferente, mas o compasso eletrônico e de grande ajuda. Para calcular $d(P, F)$ é abrir o compasso, e `xfig` me oferece duas formas para traçar círculo, uma começando pelo centro e abrindo o compasso até atingir o raio desejado, a outra, que é mais apropriada para construir parábolas, abrindo o compasso em cima do do foco F e quando ele tangenciar a diretriz d o centro do círculo estará sobre um ponto da parábola. O ponto médio entre F e d é um ponto da parábola que se chama de vértice da parábola.

Posso, imediatamente escrever as equações que definem uma parábola:

$$F = (0, p); p > 0; P = (x, y); \text{ diretriz é } OX - p = d; \quad (5.122)$$

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = d(P, d) = y + p; \quad (5.123)$$

$$x^2 + (y - p)^2 = y^2 + 2py + p^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2; \quad (5.124)$$

$$x^2 - 4py = 0; \Rightarrow y = \frac{x^2}{4p}; \quad (5.125)$$

Escolha $p = \frac{1}{4}$ e você tem a parábola padrão

$$y = x^2; F = (0, \frac{1}{4}); \quad (5.126)$$

em que o vértice da parábola é $(0, 0)$ e a diretriz é a reta $y = -\frac{1}{4}$, uma reta paralela ao eixo OX .

Eu fiz algumas escolhas para obter uma equação muito particular e bem conhecida que aparece até mesmo no Ensino Fundamental quando se estudam as equações do segundo grau.

É esta equação que estou chamando de equação padrão da parábola. Escolhi este “padrão” porque você certamente já encontrou esta equação anteriormente com a designação de parábola. E há uma outra razão que vai aparecer nos exercícios, dela você pode obter todas as outras fazendo transformações.

1. Escolhi o foco em cima do eixo OY .
2. Escolhi a diretriz já afastada do foco com distância $2p$ abaixo do eixo OX .
3. Ao final escolhi um valor para p que simplificou completamente a equação.

A primeira pergunta que você certamente se deve fazer é se foi legal fazer todas estas escolhas. Bom, eu sabia que o resultado seria este, depois apliquei às minhas escolhas a definição da parábola:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

que é exatamente a mesma que eu usei para fazer o desenho na figura (fig 5.15). Então estou dentro da legalidade... e obtive uma equação que com toda certeza você já passou por ela, com o nome de parábola!

A construção geométrica passa pelo uso de círculos, como descrevi acima, abertos a partir do ponto F e quando o círculo tangenciar a diretriz o centro do círculo estará sobre o ponto $P = (x, y)$, um ponto da parábola, porque sua distância à diretriz d igual ao raio, que é também a distância do centro ao foco F . O editor $\text{x}\text{T}\text{i}\text{g}$ tem dois métodos para desenhar círculos, imagine que seja o mesmo com os demais editores gráficos:

1. selecionando um ponto, no caso F , e puxando o ratinho você abre um círculo que passa no ponto F . Escolha este método e quando o círculo tangenciar a diretriz, o centro do círculo é o ponto P .
2. selecionando um ponto, no caso seria P , puxando o ratinho você abre um círculo de centro no ponto P . Não escolha este método!

Deixe-me mostrar-lhe outra maneira, para o caso de que o editor gráfico que você estiver usando apenas lhe permitir traçar círculos a partir do centro. Trace um círculo de centro em F , use a mesma abertura do compasso, ou copie este círculo se você estiver usando um programa editor de gráficos. Deslize o círculo que você tiver copiado com o centro sobre círculo original até que ele fique tangente à diretriz e passando pelo ponto F , quando isto acontecer o centro do círculo vai se encontrar à mesma distância da diretriz e do foco F , você encontrou um ponto sobre a parábola: é o centro do círculo. No caso da elipse você desliza o lápis com a linha esticada e aparece a elipse. No caso da parábola você tem que obter cada ponto, isoladamente,...

Mas não é nada fácil repetir esta experiência geometricamente, como é fácil construir a elipse com linha e duas taxas que descrevi no capítulo anterior.

É esta construção que você pode observar na figura (fig 5.15), na figura pode não ficar claro, mas os segmentos de reta que vão do centro ao ponto de tangência com diretriz são perpendiculares à diretriz porque a distância dum ponto a uma reta é comprimento do segmento perpendicular a reta que liga o ponto à reta. Desta construção geométrica se pode deduzir uma propriedade da parábola: ela fica inteiramente no semiplano determinado pela diretriz onde se encontrar o foco F porque

- o gráfico da parábola passa no ponto médio entre F e a diretriz, este ponto fica sobre o eixo da parábola e é o ponto em o gráfico da parábola se encontra à menor distância tanto do foco quanto da diretriz.
- Na medida que o ponto P se afastar desta posição inicial, mantendo a distância r ao foco, se vai afastar também da diretriz d , portanto não pode passar para o outro semiplano, sem cortar a diretriz d porque, num tal ponto a distância seria zero, impossível.
- Este ponto especial em que se dá a distância mínima tanto ao foco como à diretriz é o vértice da parábola. Este é um ponto importantíssimo em estudos de otimização/minimização.
- Assim, selecionando a diretriz, o plano fica dividido em dois semiplanos e o gráfico da parábola fica inteiramente num dos semiplanos, exatamente naquele em que se encontrar o foco F .
- Se você fizer o foco variar em cima do eixo, você pode obter uma parábola mais fechada, quando F estiver muito afastado da diretriz, ou mais aberta, quando F estiver mais próximo da diretriz. Tentei produzir isto com um programa, mas falhei, por enquanto, não desisti...
- Uma propriedade geométrica da parábola que é usada em ótica estabelece que toda semirreta paralela ao eixo, ao encontrar a parábola, se “reflete” seguindo por outra semirreta que passa pelo foco. Então se no foco da parábola houver uma fonte de irradiação, os raios emitidos encontram a superfície da parábola e se refletem ao longo duma semirreta paralela ao eixo. É este o princípio das antenas parabólicas, dos refletores de lâmpadas dos veículos, no foco fica colocado um receptor da irradiação que se pretende receber. No caso das lâmpadas dos veículos, no foco se encontra uma fonte luminosa cujos “raios” se refletem na parábola produzindo um “um feixe de raios paralelos” que iluminam o caminho em frente.

Não é impossível, resulta numa parábola degenerada que coincide com a geratriz, uma reta!

Estou fazendo de contas que a luz se propaga com linhas retas...

- Uma outra forma de dizer esta propriedade é a seguinte, o raio que vier paralelamente ao eixo da parábola, quando incidirem na parábola se refletem com o mesmo ângulo de incidência indo se abrigar no foco. O ângulo de incidência é calculado com a reta tangente à parábola no ponto de incidência. Se você tiver construído a parábola como foi descrito acima, traçando um reta paralela ao foco, e na interseção uma tangente, a perpendicular a tangente neste ponto lhe dará o ângulo de incidência. Repita este ângulo traçando uma reta e ela irá passar em cima do foco.

as ondas funcionam também como raios incidentes...

E a determinação da tangente depende do Cálculo.

Conta-se que os gregos usaram espelhos parabólicos para se defenderem de ataques de navios guerreiros concentrando a imagem dos raios solares em cima do foco que seriam os navios dos inimigos. É possível montar um forno ou fogão solar e aqui pode encontrar os dados para fazê-lo. Seria uma aplicação muito mais interessante do que usar a ciência para fazer guerra, o uso, para fins pacíficos, do conhecimento científico.

Vou repetir o processo com algumas escolhas levemente diferentes e vou encontrar uma outra expressão também sua conhecida. Mas você pode saltar esta segunda construção numa primeira leitura, é duma repetição e o resultado é uma rotação da parábola padrão.

Para obter uma equação, de forma simples, é interessante fazer algumas restrições. Depois vou mostrar-lhe como posso obter a forma mais geral a partir do resultado que vou obter.

- Escolher a diretriz, d , que simplifique as contas. Por exemplo, quando a projeção de $P = (x, y)$ sobre d for exatamente a primeira coordenada de P esta diretriz, d , é o eixo OX , porque a distância de qualquer ponto do plano ao eixo OX é exatamente o módulo da ordenada.

$$d(P, d) = |y| \quad (5.127)$$

- O eixo desta parábola será qualquer reta paralela ao eixo OY , então a melhor seleção para simplificar as contas é que seja exatamente o eixo OY .
- Ao selecionar o foco, $F = (0, c)$ estarei decidindo se o gráfico da parábola irá ficar no semiplano positivo ou negativo. Vou selecionar $c > 0$ e assim o gráfico estará no semiplano positivo.

O vértice da parábola é o primeiro ponto do gráfico é o ponto médio entre $F = (0, c)$ e a diretriz $d = OX$: $P(0, \frac{c}{2})$ que se encontra a meio caminho entre F e d . É o ponto da parábola que fica mais próximo da diretriz, uma outra forma de compreender a propriedade descrita acima, o gráfico da parábola fica inteiramente no semiplano determinado pela diretriz e pelo foco: uma reta, a diretriz d , e um ponto fora dela, o foco F , determinam o semiplano onde fica o gráfico da parábola.

Qualquer valor para $c > 0$, serve para para começar este cálculo, então, pela “análise geométrica” na observação 4, o gráfico desta parábola se encontra inteiramente no semiplano positivo, que corresponde ao semieixo positivo OY^+ .

Para continuar a construção, seguindo a descrição geométrica, vou construir círculos centrados no foco $F = (0, c)$. O ponto $P = (x, y)$, como se encontra sobre um círculo de centro $F = (0, c)$ e raio r satisfaz à equação do círculo

$$x^2 + (y - c)^2 = r^2 \quad (5.128)$$

e sua distância à diretriz, é $y = r$, que é a mesma distância ao foco F , pela escolha que eu fiz da diretriz $d = OX$, portanto $y > 0$.

$$y = r; \quad (5.129)$$

$$x^2 + (y - c)^2 = r^2; \quad (5.130)$$

$$x^2 + (r - c)^2 = r^2; \quad (5.131)$$

$$x^2 + r^2 - 2rc + c^2 = r^2; \quad (5.132)$$

$$x^2 - 2rc + c^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{c^2 + x^2}{2c}; \quad (5.133)$$

$$y = r = \frac{c^2 + x^2}{2c}; \quad (5.134)$$

$$y = f(x) = \frac{c^2 + x^2}{2c} = \frac{x^2}{2c} + \frac{c^2}{2c}; \quad (5.135)$$

Obtive y como função do segundo grau da variável x .

De fato, quando $x = 0$ eu terei encontrado o primeiro ponto, o vértice da parábola,

$$x = 0; y = \frac{c^2}{2c} = \frac{c}{2}; (0, \frac{c}{2}) \quad (5.136)$$

porque escolhi $c > 0$ e também por esta razão a função, $y = f(x) = \frac{c^2+x^2}{2c}$ é uma função positiva, o seu gráfico se encontra totalmente acima do eixo OX e posso transformar o gráfico na figura (fig 5.15) para refletir os cálculos que acabei de fazer, confira a figura (fig 5.16), página 131, que foi obtido por rotação

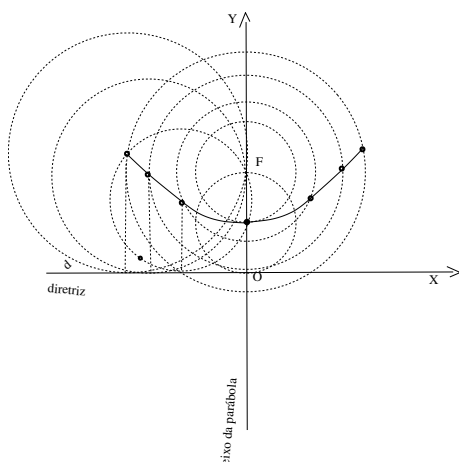


Figura 5.16: a parábola $y = f(x) = \frac{c^2+x^2}{2c}$

do gráfico na figura (fig 5.15) usando o editor gráfico `xfig`.

Observação 5 Invariância de rotações e translações

Esta operação que acabei de fazer usando um editor gráfico para reaproveitar um gráfico que eu já havia feito, lança luz numa propriedade da parábola (e de qualquer figura geométrica): independência dos movimentos rígidos: translação e rotação. A palavra técnica é invariância. Transladar ou rodar um figura geométrica não altera as suas propriedades geométricas. Fiz uso desta invariância ao selecionar as condições que me permitissem facilmente obter a equação.

Na figura (fig 5.17), página 132, você pode ver os gráficos, com os valores para $c \in \{1, 2, 3\}$, construídos com auxílio de `gnuplot`. O gráfico que está mais distante da geratriz é o que corresponde à maior constante $c = 3$.

O código fonte do `gnuplot` para obter estes gráficos é

```
pow(x,n) = x**n;
c1 = 1.0;
f1(x) = (pow(c1,2) + pow(x,2)) / (2*c1);
c2 = 2.0;
f2(x) = (pow(c2,2) + pow(x,2)) / (2*c2);
c3 = 3.0;
f3(x) = (pow(c3,2) + pow(x,2)) / (2*c3);
set yrange [-2:25];
plot f1(x), f2(x), f3(x), 0
pause -2 "aperte uma tecla para continuar "
```

Na geometria euclidiana você usa esta invariância, todo triângulo com lados 3,4,5 são retângulos não importa a posição em que eles se encontrem.

Nas geometrias não euclidianas esta invariância é falsa!

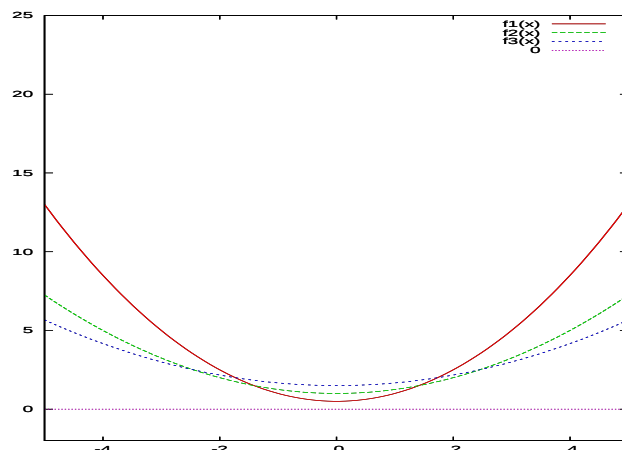


Figura 5.17:

Posso fazer imediatamente algumas generalizações. Sempre que o foco se encontrar na parte positiva do eixo OY a equação da parábola será esta que acabei de encontrar com o valor de c correspondente ao foco $F = (0, c)$. Você deduzir isto lendo o código do `gnuplot`, corresponde ao gráfico de `f3`.

Se o foco estiver na semirreta negativa do eixo OY , então $c < 0$ e pela análise geométrica, o gráfico vai estar no semiplano negativo que corresponde à semirreta negativa OY^- e as contas ficam

$$|y| = r; y = -r; r > 0; F = (0, c); c < 0; \quad (5.137)$$

$$x^2 + (y - c)^2 = r^2; \text{ equação do círculo} \quad (5.138)$$

$$x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = r^2 = y^2; \quad (5.139)$$

$$x^2 - 2yc + c^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{c^2 + x^2}{2c}; c < 0; \quad (5.140)$$

$$y = f(x) = \frac{c^2 + x^2}{2c} = \frac{x^2}{2c} + \frac{c^2}{2c}; c < 0; \quad (5.141)$$

é uma função negativa, porque $c^2 + x^2 > 0$, mas $c < 0$. É simétrica da que obtive anteriormente para o mesmo valor positivo de c .

Observação 6 Raio incidente e raio refletido

Este assunto necessita do Cálculo portanto eu vou descrever um problema para o qual eu não tenho a devida fundamentação. Entendo que vale a pena dentro do espírito que anunciei, estou usando a Geometria Analítica como uma fonte de estímulo para o estudo do Cálculo.

O objetivo é demonstrar a afirmação feita anteriormente: a todo raio incidente que venha paralelamente ao eixo da parábola, corresponde um raio refletido cuja reta suporte passa no foco da parábola.

Vou mostrar, por construção, que, quando um raio incidir sobre a superfície da parábola, pelo lado de dentro, onde se encontra o foco da parábola, se a superfície for refletora, o raio será refletido passando pelo foco. Aqui, ainda, vou usar a equação simplificada que obtive na equação (eq. 129). A invariância, sob movimentos rígidos, me permite a extensão da propriedade para qualquer parábola.

O princípio básico vem da Física Geométrica pelo qual um raio que incida sobre uma superfície refletora, num meio homogêneo, será refletido sob um ângulo igual ao ângulo de incidência, funcionando a reta perpendicular à superfície, no ponto de incidência, como mediatriz da soma dos ângulos: ângulo de incidência mais ângulo de reflexão. O que caracteriza uma superfície parabólica refletora é que o raio refletido passa pelo foco.

Os conceitos necessários:

1. reta tangente num ponto dado,
2. reta perpendicular num ponto dado,
3. ângulo de incidência,

4. ângulo de reflexão.

Como definir uma reta perpendicular a uma curva? Se eu tiver uma reta tangente à curva, no ponto desejado, então uma reta que seja perpendicular à tangente é também perpendicular à curva. Para obter a reta tangente preciso usar a derivação. Como neste ponto do livro você ainda não deve ter estudado derivada, “aceite” que a derivada é o método do Cálculo que permite encontrar uma reta tangente a uma curva.

Para obter a reta perpendicular a uma curva num ponto, vou primeiro construir a reta tangente ao ponto considerado, depois vou calcular a perpendicular à reta tangente no referido ponto. Acompanhe os cálculos com a figura (fig 5.18), página 133.

Reta tangente e reta perpendicular num ponto dado

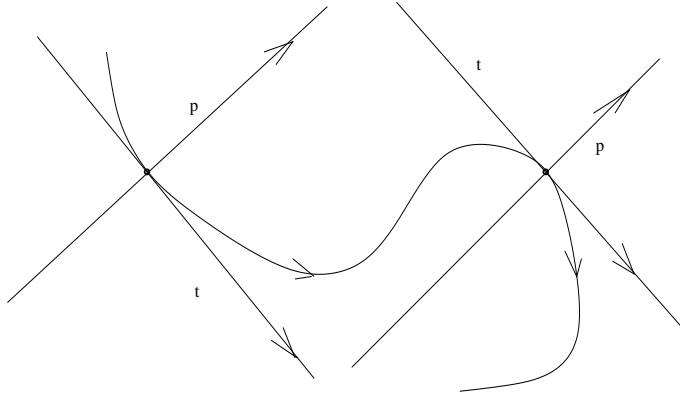


Figura 5.18: tangente e perpendicular num ponto da curva

Vou mostrar que a reta suporte do raio refletido passa no ponto $F = (0, c)$ completando a afirmação.

Com o Cálculo, posso obter a reta tangente ao gráfico duma função, para o que preciso da derivada da mesma. Neste nível, a derivada produz o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico.

O Cálculo nos ensina a determinar a reta tangente ao gráfico duma função, o método para fazê-lo é a derivada da função. Confira a reta tangente para relembrar a fórmula. A derivada das funções polinomiais é simples:

$$P(x) = x^n \Rightarrow P'(x) = nx^{n-1}; \quad (5.142)$$

$$P(x) = Ax^n + Bx^m \Rightarrow P'(x) = nAx^{n-1} + mBx^{m-1}; \quad (5.143)$$

$$P(x) = Ax^n + Bx^m; P'(a) = nAa^{n-1} + mBa^{m-1}; \quad (5.144)$$

$$b = P(a) \text{ o gráfico de } y = P(x) \text{ passa em } (a, P(a)); \quad (5.145)$$

$$m = P'(a); b = P(a); y = b + P'(a)(x - a) = y = b + m(x - a) = f(x); \quad (5.146)$$

A última equação é a fórmula de Taylor do primeiro grau, escolha valores para n, m, a , sugiro $n = 2, m = 3, a = 1$ e use `gnuplot` para fazer os gráficos de $P(x), f(x)$ e o resultado é a reta tangente ao gráfico de $y = P(x)$ no ponto $(a; b) = (a, P(a))$. Mas estou `textslfora` do contexto, lhe mostrando como usar `gnuplot` para ver a reta tangente ao gráfico duma função polinomial, para estimular seus estudos posteriores do Cálculo e é porisso que `textslusei` letra pequena.

Vou me fixar na expressão obtida na equação (eq. 135).

$$f(x) = \frac{x^2}{2c} + \frac{c^2}{2c}; c > 0; \quad (5.147)$$

$$f'(x) = \frac{x}{c} \quad (5.148)$$

e aqui está mais uma razão da minha escolha dum padrão para a equação da parábola, uma função.

Se eu considerar um ponto qualquer sobre a parábola, $P = (a, b) = (a, \frac{a^2+c^2}{2c})$ a reta tangente, t , que passa no ponto P é

$$P = (a, b) = (a, \frac{a^2+c^2}{2c}) = (a, f(a)); \quad (5.149)$$

$$\text{reta tangente } t: y = f(a) + f'(a)(x - a) = f(a) + \frac{a}{c}(x - a); \quad (5.150)$$

$$y = b + m(x - a) \text{ reta perpendicular } y = b - \frac{1}{m}(x - a); \quad (5.151)$$

$$y = f(a) - \frac{c}{a}(x - a); \quad (5.152)$$

$$y(0) = f(a) - \frac{c}{a}(-a) = f(a) + c \quad (5.153)$$

Derivada é estudada no Cálculo.

Confira a *reta tangente* para relembrar a fórmula, é a expressão da Fórmula de Taylor do primeiro grau, assunto do Cálculo.

uma reta que seja perpendicular a esta tem por coeficiente angular $m = -\frac{c}{a}$ quando $a \neq 0$, depois verei qual é o significado do caso $a = 0$, que é o vértice da parábola.

Cálculo da equação da reta perpendicular, p , que passa no ponto $P = (a, b) = (a, f(a))$

$$\text{reta } p : y = f(a) + m(x - a); m = -\frac{c}{a}; f(a) = \frac{a^2 + c^2}{2c}; \quad (5.154)$$

$$\text{reta } p : y = \frac{a^2 + c^2}{2c} - \frac{c}{a}(x - a); \quad (5.155)$$

A perpendicular é importante porque ela é que “divide” o ângulo dos raios incidente e refletido em dois ângulos iguais. Se α for o ângulo entre um raio (uma semirreta) e a perpendicular, incidindo no ponto $P = (a, f(a))$ o raio refletido vai fazer um ângulo α no sentido negativo, sentido horário, quando $a < 0$, também com a reta perpendicular.

Quando $a > 0$, se revertem os sentidos dos ângulos, o ângulo α do raio incidente é tomado no sentido positivo, sentido anti-horário, e no mesmo sentido o ângulo entre a perpendicular e o raio refletido. Estou deixando de lado o caso $a = 0$ que corresponde ao vértice da parábola.

Porque o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência, diz a Física, e a reta perpendicular é a mediatriz. O gráfico na figura (fig 5.18), página 133, foi feito à mão seguindo a definição geométrica da parábola então os ângulos de incidência e reflexão não estão precisos, sendo a figura apenas para efeito de ilustração.

Dizem que os gregos usaram isto para se defenderem de atacantes pelo mar, construindo espelhos parabólicos bastante recurvados, o que significa com o foco muito distante, em cima dos navios agressores.

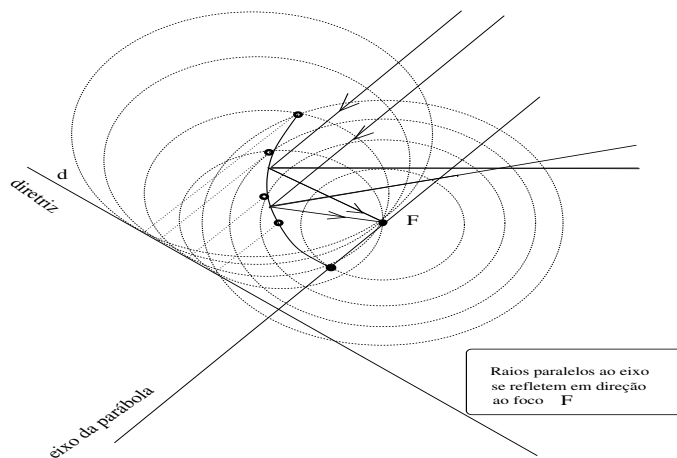


Figura 5.19: raios paralelos ao eixo da parábola

Raios paralelos ao eixo se refletem em direção ao foco. Tudo que é necessário para fazer “bom uso” dos raios solares, consiste em colocar o foco no ponto desejado, em cima dum barco que o faria pegar fogo... isto pelo menos conta a história!

De qualquer forma é possível usar espelhos parabólicos para assar a comida calculando corretamente a posição do foco dum espelho parabólico usando a ciência de forma benfazeja com finalidade pacífica.

Na figura (fig 5.20), página 135, você pode ver o gráfico feito com `gnuplot`, agora com maior precisão.

Os comandos do `gnuplot` para obter este gráfico estão listados abaixo, mas observe que estou usando derivada para obter o gráfico e vai ser no Cálculo que você terá a informação completa. Que sirva de motivação para os seus estudos do Cálculo.

```
pow(x,n) = x**n; ## redefini x**n fica compatível com C
c1 = 1.0;
f1(x) = (pow(c1,2) + pow(x,2)) / (2*c1);
c2 = 2.0;
f2(x) = (pow(c2,2) + pow(x,2)) / (2*c2);
c3 = 3.0;
f3(x) = (pow(c3,2) + pow(x,2)) / (2*c3);
set yrange [-2:25];
plot f1(x), f2(x), f3(x), 0
pause -2 "aperte uma tecla para continuar "
print "A partir daqui o objetivo é fazer o gráfico dum raio"
print "incidente e do raio refletido que irá passar no foco."
pause -2 "aperte uma tecla para continuar "
```

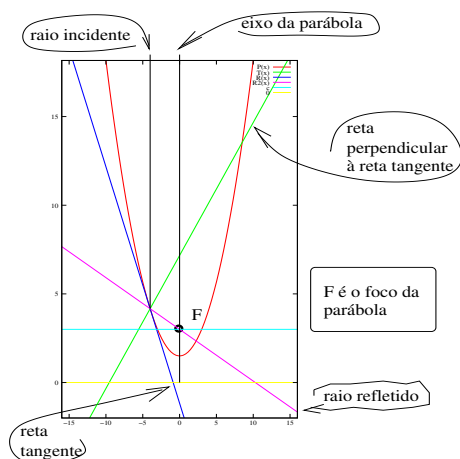


Figura 5.20: raio incidente e raio refletido

```

c = 3.0;
P(x) = (pow(c,2) + pow(x,2)) / (2*c);
dP(x) = x/c;
a = -4;
R(x) = P(a) + dP(a)*(x - a); ## reta tangente
T(x) = P(a) - (1.0/dP(a))*(x - a); ## normal
## eixo neste caso é paralelo ao eixo OY
M = P(10); ## dados para melhor aspecto
set yrange [-2:M] ## dados para melhor aspecto
set xrange [-16:16]; ## dados para melhor aspecto
set arrow from a,P(a) to a,20 nohead ## raio paralelo ao eixo
set arrow from 0,0 to 0,20 nohead ## eixo da parábola
pi2 = 2*atan(1); ## ângulo do eixo e tbém do raio incidente
theta = atan(- (1.0/dP(a))); ## ângulo da normal
alpha = pi2 - theta ## ângulo de incidência
beta = theta - alpha ## ângulo de reflexão
### raio refletido
R2(x) = P(a) + tan(beta)*(x - a);
pause -2 "aperte enter para continuar"
print "pi2= ",pi2," theta =",theta," alpha= ",alpha," beta = ", beta ;
pause -2 " P(x), T(x), R(x),R2(x) , 0 aperte enter para continuar"
## set terminal post enhanced color portrait ## imprimir em papel
## set terminal fig color portrait big solid ## imprimir em papel
## set output "equacaoparabola06.eps" ## imprimir na tela
## set output "equacaoparabola06.fig" ## imprimir em papel
plot P(x), T(x), R(x),R2(x) , c, 0 ;
pause -2 " terminou! ";

```

No código do `gnuplot`, o símbolo do jogo da velha marca o início dum comentário, coisa que `gnuplot` simplesmente ignora. Posso usar isto para guardar informações ou esconder comandos que, neste momento, eu não quero usar.

A luz, como o calor, são ondas e o modelo da Ótica Geométrica funciona bem nos cálculos, tanto assim que podemos captar sinais de satélites com antenas parabólicas. As ondas são *objetos multidimensionais* e nada do tipo de *segmentos de reta*, qualquer onda tem uma quantidade imensa de frequências que nos chegam alteradas pelo emissor guardando a informação enviada. Mas o modelo matemático

com que estou apresentando as ondas como um segmento de reta orientado, funciona, mas é apenas um modelo com o qual se consegue manipular a realidade em pequena escala e a *nível elementar*.

5.8.2 O caso do vértice da parábola

Depende de qual equação tiver sido escolhida para a parábola, se for a *equação padrão*, simples, a tangente é horizontal, é paralela à *reta diretriz* d , é paralela ao eixo OX . O eixo da *parábola padrão* é perpendicular à diretriz e neste caso é vertical, e coincide com o eixo OY , o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão: zero. O todos os raios passam e se refletem em cima do eixo OY e também passam no ponto F .

Este é um caso especial em que os cálculos *falham* porque o eixo da parábola, sendo uma reta perpendicular ao eixo OX , não tem *coeficiente angular* O coeficiente angular da tangente é zero e não posso calcular o coeficiente angular duma reta que seja perpendicular o eixo OX . Mas ainda assim funciona, os casos deste tipo se classificam como *pontos de singularidade* e o estudo destes pontos sempre oferecem alguma dificuldade junto com o fato de que eles são importantes para completar a teoria.

5.8.3 Equação geral da parábola

O modelo construído com a equação (eq. 135) funciona bem na maioria dos casos, se for possível, para construir o modelo, fazer a suposição de que a diretriz seja o eixo OX . Entretanto é preciso, em muitas circunstâncias, testar se uma determinada equação representa uma parábola, um círculo, uma hipérbole, uma elipse ou uma reta. Para isto é preciso reconhecer o que a equação representa sendo necessário construir a equação geral de cada cônica, no presente caso, da parábola.

As cônicas, como objetos da Geometria Algébrica, são representadas por equações polinomiais. Começando com as curvas planas, estou pensando em polinômios em duas variáveis e do segundo grau o que comporta todas as cônicas e muito mais do que elas.

Exemplo 4 (Transformação) matricial Vou começar com um exemplo completando uma afirmação feita antes, “todas as equações de parábolas podem ser obtidas da equação padrão mediante uma transformação matricial. Confira a sequência de equações depois das quais farei comentários.

$$P = \{(x, y); y = x^2; x \in \mathbf{R}\}; \quad (5.156)$$

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \quad (5.157)$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bx^2 \\ bx + ax^2 \end{pmatrix} = \{(X, Y); X(x) = ax - bx^2; Y(x) = bx + ax^2; x \in \mathbf{R}\}; \quad (5.158)$$

A matriz na equação (eq. 5.8.157) é uma matriz de Cauchy-Riemann, ela representa o número complexo $a + bi$ e produz uma rotação seguida duma homotetia. Selecionando $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$ a matriz M produz apenas uma rotação de ângulo θ porque $|a + bi| = 1$. Na (eq. 5.8.158) eu tenho as equações paramétricas dum novo objeto, o parâmetro é x e nada a ver com x na equação da parábola padrão. Na verdade eu deveria ter escrito a (eq. 5.8.158) com o formato:

$$\{(X, Y); X(t) = at - bt^2; Y(t) = bt + at^2; t \in \mathbf{R}\}; \quad (5.159)$$

como é habitual escreverem-se equações paramétricas usando a variável t como parâmetro e está pronta para usar no `gnuplot`. Experimente com `gnuplot`, eis a lista de comandos, no final de cada linha um comentário explica o comando. Se você quiser ver a parábola $x = -y^2$ escolha $\theta = \frac{\pi}{4}$ logo depois da “definição” de π , onde tem um comentário sugerindo que escolha o valor para o ângulo θ . Ou rode várias vezes o programa com valores que você desejar para o ângulo θ .

```
set param; ## liga o modo paramétrico
pi = 3.14159265358979323848 ## defini ''valor'' da constante. de Arquimedes
theta = pi/4; ## escolha aqui um valor para o ângulo
a = cos(theta); b = sin(theta); ## escolhi a+bi
X(t)=a*t-b*t**2; Y(t) = b*t + a*t**2; ## equações paramétricas
set arrow from -5,0 to 2,0 head; ## desenha OX
set arrow from 0,-5 to 0,6 head; ## desenha OY
```

```

XX(t)=0; YY(t)=t; XXX(t)=t;YYY(t)=0; ## eq. param dos eixos
set trange[-2:2] ## aparece um gráfico razoável
plot X(t),Y(t), XX(t),YY(t), XXX(t),YYY(t); ## parábola padrão, rotação pi/4
pause -2 "aperte enter para terminar" ## senão a imagem desaparece!

```

Você viu o resultado da rotação na figura (fig 5.21), página 137,

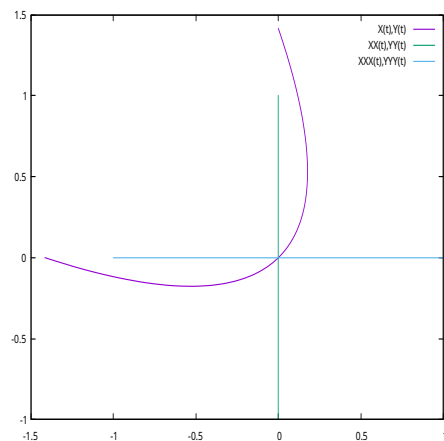


Figura 5.21: parábola padrão, rotação $\frac{\pi}{4}$

Não é trivial reescrever a equação (eq. 5.8.158) em coordenadas cartesianas como próprio gráfico produzido pelo `gnuplot` sugere, deixa de ser uma função da variável x , e não é uma função da variável y . `gnuplot` está lhe “provando” que o novo objeto “parece” uma parábola...

Experimente com $\theta = \frac{\pi}{2}$ e você vai ver o gráfico de $y = -x^2$, que corresponde a uma rotação $\frac{\pi}{2}$ aplicada à parábola padrão e neste caso eu consigo escrever facilmente a equação cartesiana. Basta-lhe alterar o comando que define `theta` na sequência de comandos do `gnuplot`, seleciona o valor desejado para obter parábolas com rotação θ . E se usar $|a + bi| \neq 1$ você irá obter parábolas modificadas com modulo de $a + bi$. Tenha cuidado, $a + bi \neq 0$...

A importância do exemplo 4 é que ele lhe mostra que, a partir da parábola padrão, eu posso obter qualquer que seja a parábola, e como a matriz M é inversível, o seu determinante é exatamente $|a + bi|$, então o processo é reversível.

5.8.4 Alterando gráficos com operações algébricas

`gnuplot` é uma calculadora gráfica, a definição é minha! Vale a pena usar o comando `help` do `gnuplot` para conhecer um pouco da sua história, uma história bonita de gente que produziu um programa e o deixou em domínio público a serviço de toda a Humanidade. Depois muitos outros se juntaram ao projeto que cresceu e é hoje uma calculadora gráfica. Você pode aplicar operações algébricas em gráficos como vou mostrar aqui.

Vou mostrar-lhe como obter outras expressões. acompanhe a sequência de equações ao final da qual vou tecer comentários. No `gnuplot` executei o comando “`unset param`” para desligar o modo paramétrico e voltar para *modo normal* em que a variável é x . Redefini as funções X, Y e agora vou usar três operações com a função X para descobrir experimentalmente como transformá-la em uma função igual a Y , são as operações

1. Aplicar uma matriz de Cauchy-Riemann, M , produzindo uma rotação seguida duma homotetia, equivalente a multiplicar, no plano complexo, pelo número $a + bi$.
2. Escrever as equações paramétricas, $X(t), Y(t)$.

3. multiplicação pela constante A : $X \mapsto A * X$ que produz uma *expansão* ou uma *contração* do gráfico conforme $|A|$ seja maior ou menor do que 1, é uma *homotetia* relativamente à origem. Estou descrevendo um caso particular, da *parábola padrão* cujo vértice é $(0, 0)$.
4. translação horizontal: $X(x) \mapsto X(x - B)$, observe, se eu quiser fazer uma translação no sentido positivo do eixo OX o número B tem que ser positivo, se eu quiser fazer uma translação no sentido negativo do eixo OX o número B tem que ser negativo. É um exercício *experimental*. O sinal “de menos” na expressão facilita pensar na escolha certa. . .
5. translação vertical: $X(x) \mapsto X(x) + C$

Quer dizer que eu vou trabalhar com a expressão

$$X(x) \mapsto AX(x - B) + C \text{ no gnuplot: } A * X(x - B) + C; \quad (5.160)$$

Comece a sua sessão de experimentos definindo $A = 1, B = 0, C = 0$, sem alterações, e peça que gnuplot faça o gráfico de $X(x), Y(x)$ e vai ver duas parábolas com concavidades distintas e quero que sejam iguais. . . É *proibido* usar $A = 0$! Como é *proibido proibir*, experimente $A = 0$. . .

Então, na linha anterior (leia o código do gnuplot), altere os valores de $A = 1, B = 0, C = 0$, comece com $A = -2$ e você vai ver que se produziu uma mudança na concavidade de X , é o papel do parâmetro A . A mudança na concavidade equivale a uma alteração do foco da parábola, mantendo o sinal de A você corre o foco F deixando-o mais próximo do vértice, $|A| < 1$, ou mais longo do foco F , $|A| > 1$. Com $A < 0$ você altera o semiplano onde vai ficar a parábola. Faça os experimentos, analise os resultados, aprenda fazendo porque *é andando que a gente faz o caminho*.

Agora preciso deslocar a combinação $A * X(x + B) + C$ para a esquerda, no sentido negativo do eixo OX , então troque $B = -1$ e você vai ver que é preciso “abrir” $A * X(x + B) + C$, quer dizer usar um valor em módulo menor para A , experimente $A = -1$ e você terá obtido duas parábolas aparentemente coincidentes. Aplicando “zoom” no gráfico poderá ver pequenas diferenças entre elas.

Estes experimentos servem para *lhe dar poder*! Você pode fazer operações algébricas com funções, você passou do estágio de fazer operações algébricas com números e agora pode usar a máquina de calcular gnuplot para *dilatar, transladar para cima ou para baixo* gráficos de funções. Melhor, sem precisar de fazer plágio com I.A. . .

Na figura (fig 5.22), página 138, se encontram os “valores inicial e final” do experimento, mas eu

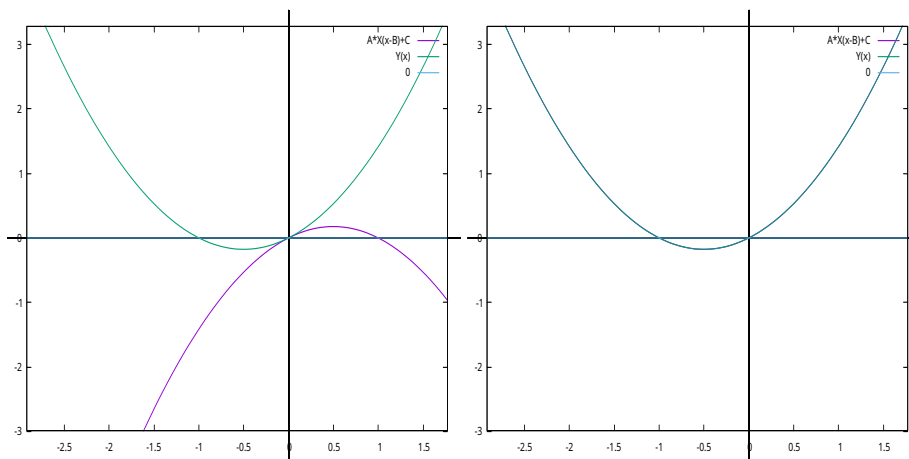


Figura 5.22: duas parábolas

estou omitindo as 10 tentativas que eu fiz para obter um resultado decente, e você ganha experiência começando do “início” até descobrir o “final”.

Foi um *experimento*, agora eu vou lhe provar que posso conseguir que $AX(x + B) + C$ seja igual a Y . Em vez de fazer experimentos com as constantes A, B, C eu vou *calculá-las*. Vou resolver a equação algébrica $AX(x + B) + C = Y(x)$, agora A, B, C é que são as variáveis, como, aliás, ocorreu no *experimento*. Vou aplicar *identidade entre polinômios*.

Acompanhe a lista de equações seguinte depois da qual eu faço comentários sobre seus itens. Depois vou deixar-lhe a lista de comandos do `gnuplot` para que você mesmo faça as suas experiências.

$$\theta = \frac{\pi}{4}; a = \cos(\theta); b = \sin(\theta); y = x^2; \quad (5.161)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bx^2 \\ bx + ax^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{pmatrix}; \quad (5.162)$$

$$A, B, C \text{ são as constantes, agora variáveis}; \quad (5.163)$$

$$AX(x - B) + C = Y(x); \text{ igualdade entre polinômios}; \quad (5.164)$$

$$A(a(x - B) - b(x - B)^2) + C = Y(x) = bx + ax^2; \quad (5.165)$$

$$aAx - aAB - Abx^2 + 2AbBx - AbB^2 + C = bx + ax^2; \quad (5.166)$$

$$-Abx^2 + (2AbB + aA)x - aAB - AbB^2 + C = ax^2 + bx; \quad (5.167)$$

$$\begin{cases} -Abx^2 = ax^2 \Rightarrow -Ab = a \Rightarrow A = -\frac{a}{b}; \\ (2AbB + aA)x = bx \Rightarrow (2bB + a)A = b \Rightarrow -(2bB + a)\frac{a}{b} = b; \\ -2abB - a^2 = b^2 \Rightarrow -2abB = a^2 + b^2 \Rightarrow B = -\frac{a^2 + b^2}{2ab}; \\ -aAB - AbB^2 + C = 0 \Rightarrow C = aAB + AbB^2 = (a + bB)AB; \end{cases} \quad (5.168)$$

$$A = -a/b; B = -(a * 2 + b * 2)/(2 * a * b); C = (a + b * B) * A * B; \quad (5.169)$$

Na última equação eu traduzi os valores de A, B, C para o dialeto das linguagens de computação, as expressões estão prontas para serem testadas com uma linguagem de programação. Esta é uma técnica de que faço uso com frequência quando faço transformações nas equações, deixo que o computador verifique se as constas estão corretas. Para isto dou valores arbitrários as “*variáveis*” e verifico, linha por linha, se as transformações produzem o mesmo valor depois de feita uma *transformação algébrica*. Deixo-lhe esta dica de uso duma linguagem de computação para verificação das contas.

Observe também que deixei o valor de C em função de a, b, A, B . Quando eu tentei calcular C a expressão ficou tão complicada que me dei contas de que ficava mais bonita e simples em função de a, b, A, B . E como objetivo principal destas transformações é para aplicar num programa esta expressão para C é perfeita. Apenas *aparentemente encriptada* para nós humanos ...

Experimente com $\theta = \frac{\pi}{2}$ e você vai ver o gráfico de $x = -y^2$, que corresponde a uma rotação $\frac{\pi}{2}$ aplicada à *parábola padrão* e neste caso eu consigo escrever facilmente a equação cartesiana. Observe que basta-lhe alterar o comando que define `theta` na sequência de comandos do `gnuplot`, selecionar o valor desejado para obter parábolas com rotação de ângulo θ . E se usar $|a + bi| \neq 1$ você irá obter parábolas modificadas com modulo de $a + bi$.

Tenha cuidado, $a + bi \neq 0$...

O `script` do `gnuplot` deixa de funcionar quando $\sin(\theta) = b = 0$ porque

$$A = -\frac{a}{b}; B = -\frac{a^2 + b^2}{2ab}; \quad (5.170)$$

evite $b = 0$ para θ ao rodar o `script` do `gnuplot`.

Use a linha de comando

```
gnuplot -persist GeometriaAnalitica4001.gnuplot
```

o parâmetro “-persist” faz com que o motor do `gnuplot` deixe o gráfico persistindo de modo que ao fazer vários experimentos você tenha na tela os *casos anteriores* do processo para compará-los. “Queime” as telas, para se livrar das mesmas, quando não lhe interessar mais ver os resultados anteriores.

A importância do exemplo 4 é que ele lhe mostra que, a partir da *parábola padrão*, eu posso obter qualquer que seja a parábola, e como a matriz M é inversível, o seu determinante é $|a + bi|$, então o processo é reversível.

5.8.5 Os testes com `gnuplot`

```
#!/usr/bin/gnuplot
### passe este arquivo para o gnuplot executar
pi = 3.14159265358979323848 ## defini ''valor'' da constante. de Arquimedes
theta = 5*pi/3.0; ## escolha aqui um valor para o ângulo
a = cos(theta); b = sin(theta); ## escolhi a+bi, matriz Cauchy-Riemann
print "Apliquei a matriz de Cauchy-Riemann que representa a+bi "
print "à equação da parábola padrão (x, power(x,2))"
print "Resultado: vou produzir uma rotação \
na parábola padrão (x,power(x,2))"
print "Obtive equações paramétricas "
print "      X(t)=a*t-b*t**2;      Y(t) = b*t + a*t**2; "
print "Gráfico das equações paramétricas, uma parábola."
print "Liguei o modo paramérico do gnuplot \n \
set param; liga o modo paramétrico '
pause -2 "aperte enter para continuar"
set param; ### liga o modo paramétrico
X(t)=a*t-b*t**2; Y(t) = b*t + a*t**2; ## equações paramétricas
set arrow from -5,0 to 2,0 head; ## desenha OX
set arrow from 0,-5 to 0,6 head; ## desenha OY
XX(t)=0; YY(t)=t; XXX(t)=t;YYY(t)=0; ## pares de eq. param dos eixos
set trange[-2:2] ## aparece um gráfico razoável
print 'gráfico razoável da parábola padrão sob rotação theta ' ;
print 'O valor de theta foi escolhido no início deste script.';
pause -2 "aperte enter para continuar, visualizar o gráfico"
## ----- isto é um comentário -----
plot X(t),Y(t), XX(t),YY(t), XXX(t),YYY(t); ## parábola padrão, rotação theta
pause -2 "aperte enter para continuar" ## senão a imagem desaparece!
print "Retornando ao modo normal do gnuplot: unset param;"
pause -2 "aperte enter para continuar" ## senão a imagem desaparece!
unset param;
print "Retornei ao modo normal do gnuplot: unset param;"
print 'Iniciando os experimentos com os gráficos das duas'
print 'parábolas: objetivo fazer com que os gráficos fiquem'
print 'coincidentes. '
print 'Vou resolver a equação polinomial AX(x-B)+C= Y(x)
pause -2 "aperte enter para continuar"
X(x)=a*x-b*x**2; Y(x) = b*x + a*x**2;
A =-1.0; B=-2.0; C = 0.0; ##
print "valores iniciais, início do experimento"
print 'A= ', A, 'B = ', B, 'C = ', C;
```

```

pause -2 "aperte enter para continuar"
plot A*X(x-B)+C, Y(x), 0
pause -2 "aperte enter para continuar"
A =-1.0; B=-1.5; C = 0.0; ##
print "Segundo teste, continuando o experimento"
print 'A= ', A, 'B = ', B, 'C = ', C;
pause -2 "aperte enter para continuar"
plot A*X(x-B)+C, Y(x), 0
pause -2 "aperte enter para continuar"
## ----- isto é um comentário -----
print "Terceiro teste, continuando o experimento"
A = -1; B=-1;C=0;
print 'A= ', A, 'B = ', B, 'C = ', C;
pause -2 "aperte enter para continuar"
plot A*X(x-B)+C, Y(x), 0
pause -2 "aperte enter para continuar"
## ----- isto é um comentário -----
print 'Valores calculados a partir da igualdade de polinômios'
print 'Confira GeometriaAnalitica40.tex'
print "valores finais, fim do experimento"
pause -2 "Fim do experimento. Aperte enter para continuar"
theta = 3*pi/4; a=cos(theta); b=sin(theta);
print 'a= ', a, 'b = ', b; pause -2 "Valores de a,b verificar!"
A =-a/b; B=-(a**2+b**2)/(2*a*b); C = a*A*B + b*A*B**2; ## fim do experimento
print 'A= ', A, 'B = ', B, 'C = ', C; pause -2 "Valores finais"
pause -2 "aperte enter para continuar"
plot A*X(x-B)+C, Y(x), 0
pause -2 "aperte enter para terminar"

```

5.9 Modelando as cônicas como polinômio do segundo grau

As cônicas, com exceção das retas, são polinômios do segundo grau

$$z = P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \quad (5.171)$$

é uma função de duas variáveis e por isso eu escrevi $z = P(x, y)$ conseqüentemente para cada valor dado às variáveis x, y corresponde a uma altura z portanto a equação (eq. 171) representa um *variedade* do espaço $\mathbf{R}^3$. Nesta modelagem, o caso das retas corresponde $A = B = C = 0$ e no Cálculo você vai encontrar que

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2A = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}; & 2C = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}; \\ B = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}; & 2C = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}; \\ 2Ax + By + D = \frac{\partial P}{\partial x}; & Bx + 2Cy + E = \frac{\partial P}{\partial y}; \\ dz = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy; & \\ dz = (2Ax + By + D)dx + (Bx + 2Cy + E)dy; & \end{array} \right. \quad (5.172)$$

em que a última equação lhe vai permitir de escrever facilmente a equação do plano tangente a uma cônica o que justifica que eu esteja lhe abrindo os olhos para a importância do Cálculo que vai tornar muitos do

“problemas da Geometria Analítica” triviais e vou terminar este exemplo lhe mostrando que num “*passo de mágica*” eu escrevo a equação do plano tangente a $z = P(x, y)$ no ponto $(a, b, c) \in \text{graf}(P)$

Sem Cálculo é
mágica ou macete ...
prefiro macete!

$$\begin{cases} x := a; dx := (x - a); \\ y := b; dy := (y - b); \\ z := c; dz := (z - c); \\ (z - c) = (2Aa + Bb + D)(x - a) + (Ba + 2Cb + E)(y - b); \end{cases} \quad (5.173)$$

Neste último sistema de equações eu ultrapassei um tópico polêmico do Cálculo, o *infinitesimal*, que nunca encontrou uma explicação, e usei um método de derivar considerado complicado, a *derivada implícita*, na última linha da primeira equação, para produzir um modelo que me permitiu escrever a última equação que é a equação do *plano tangente* ao $\text{graf}(P)$ no ponto (a, b, c) . dx, dy, dz são simplesmente novas variáveis que adquirem uma expressão quando você encontra $(x, y, z) = (a, b, c) \in \text{graf}(P)$.

Você vai encontrar esta sequência no Cálculo e a Geometria Analítica não tem meios simples para conduzi-lo à equação do plano tangente ou da reta tangente. Dentro do curso de Geometria Analítica eu usaria esta sequência como um “*macete*”, antecipando o Cálculo, e ganhando agilidade dentro da Geometria Analítica. Vou usar este método em alguns exercícios. Aqui, os métodos do Cálculo são *macetes*, e no Cálculo você vai encontrar o fundamento deles.

5.10 Dimensão

Dimensão é um conceito da Álgebra Linear que vou usar aqui de *maneira informal*, inclusive vou lhe apresentar uma “*fórmula prática*” para calcular a dimensão.

O conceito “*variedade*” veio nos livrar da prisão em que Geometria Euclidiana nos manteve por mais de um milênio, quase dois milênios, este conceito precisa dum qualificativo, “a dimensão”. O gráfico de $z = P(x, y)$ é uma *variedade de dimensão 2*, uma superfície.

É muito difícil discutir a dimensão dum objeto como este. Dependendo dos valores dos coeficientes o gráfico de P pode ser um plano, por exemplo se $A = B = C = D = E = 0; F = 1$ seria o plano paralelo ao plano coordenado XOY com altura $F = 1$. Se $F = 0$ é o próprio plano coordenado XOY .

Se eu escrever

$$P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5.174)$$

esta equação equivale ao sistema de equações

$$\begin{cases} z = P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F; \\ z = 0; \end{cases} \quad (5.175)$$

Isto no mostra que uma simples igualdade, $P(x, y) = 0$ implica na queda da dimensão de dois para um. $z = P(x, y)$ é um objeto do $\mathbf{R}^3$ e $P(x, y) = 0$ é uma *variedade* contida no plano XOY e pode ser uma curva do plano XOY . Pode ser também um único ponto ou o vazio!

E observe que eu tive o cuidado de dizer “é uma *variedade* do $\mathbf{R}^3$ ” sem especificar a sua dimensão. É uma superfície $\mathbf{R}^3$ que são os objetos bidimensionais deste espaço e uma *regra prática*, que nem sempre funciona, pode ser usada: “*conte o número de variáveis e subtraia um, para obter a dimensão do objeto*”. Nem sempre funciona porque

$$x^2 + y^2 = -4 \quad (5.176)$$

tem duas variáveis então sua dimensão seria 1 o que não é verdade porque este objeto é vazio e a dimensão do vazio é -1 . A dimensão dos pontos é zero, e $x^2 + y^2 = 0$ é um ponto! A regra prática deixou de funcionar.

A dimensão do vazio é -1 , por convenção, e também por convenção, o seu diâmetro é $-\infty$.

Mas, tirando os casos críticos, a *regra prática* nos dá uma sugestão de dimensão para começar a pensar.

Vou partir deste caso. Se $D, E \neq 0$, os coeficientes de x e de y , respectivamente, forem diferentes de zero, posso expressar qualquer das variáveis como função da outra:

$$P(x, y) = Dx + Ey + F = 0;$$

(5.177)

$$y = -\frac{Dx}{E} - \frac{F}{E}; \qquad y = mx + b; m = -\frac{D}{E}; b = -\frac{F}{E};$$

(5.178)

é a equação duma reta. E continua sendo a equação duma reta se D ou E for diferente de zero separadamente. Uma reta é uma curva, é um objeto de dimensão 1.

Observação 7 Variedades

Evitei de usar a palavra “objeto”, usei a palavra “variedade” que significa “um objeto da geometria”.

Uma reta é uma variedade de dimensão 1, tais variedades são habitualmente chamadas de curvas que é a denominação típica da geometria. A palavra variedade surgiu para estender a geometria a dimensão maior do que 3.

Como estou, neste momento no plano, tenho apenas variedades de dimensão

- dois, o próprio plano, que é o universo neste momento;
- um, as curvas;
- zero, os pontos;
- -1 o vazio.

Há várias teorias sobre dimensão o que inclui dimensão fracionária dos fractais. É um assunto que merece um desenvolvimento próprio que não cabe aqui na discussão das cónicas.

Se ambos os coeficientes forem nulos não representa coisa alguma, talvez o vazio.

Se os coeficientes $C, D, E, F \neq 0$ mas $A = B = 0$ então posso expressar x ou y como função da outra variável, por exemplo:

$$y(Cx + E) = -Dx - F; y = -\frac{Dx + F}{Cx + E}; Cx + E \neq 0;$$

(5.179)

Quer dizer que tenho que excluir do plano a reta $x = -\frac{E}{C}$. Como $Cx + E$ troca de sinal no ponto $x = -\frac{E}{C}$ então esta expressão produz uma curva que se encontra no semiplano positivo no segundo quadrante ou no primeiro, dependendo dos valores de D, C .

Deixe-me ver um exemplo antes de apresentar caso geral. O quadro abaixo se chama uma *tabela de sinais* da expressão $y = \frac{Dx + F}{Cx + E}$ que, como num produto, tem um sinal que varia de acordo com o sinal do numerador e o denominador.

D=1;C=-1;F=1;E=1;					
x	< -1	-1	0	1	> 1
$Cx + E = -x + 1$	$+$	2	1	0	$-$
$Dx + F = x + 1$	$-$	0	1	$+$	$+$
$y = \frac{Dx + F}{Cx + E}$	$-$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$

Então eu identifiquei onde cada termo da fração troca de sinal, onde se anula especificando estes valores para x com o correspondente valor para $Cx + E, Dx + F, \frac{Dx + F}{Cx + E}$. O símbolo $\pm\infty$ identifica a presença dum polo em cuja vizinhança os valores de $y = \frac{Dx + F}{Cx + E}$ são muito grandes ou muito pequenos. A presença do polo indica que esta expressão representa uma hipérbole, confira a equação da hipérbole onde tais expressões são estudadas mais a fundo.

A imagem na figura (fig 5.16), página 131, foi um bom exemplo, posso aplicar rotações numa parábola sem perder sua propriedades geométricas e até ganhar com isto, porque encontrei, de forma relativamente

fácil, a *equação da parábola*. Vou usar esta metodologia ao revés aplicando uma rotação na equação (eq. 135). . Esta maneira de falar é imprópria, ninguém aplica rotação em equações, porque rotação é uma operação geométrica. Mas, se eu lhe exibir uma operação algébrica que represente uma rotação, então *eu vou poder aplicar uma rotação na equação* ...

Confira *matriz de rotação no plano*, e você vai encontrar uma matriz na forma:

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \quad (5.180)$$

As *matrizes de Cauchy-Riemann* representam os números complexos unitários.

Selecione um valor para o ângulo, vou usar $\theta = \pi/2$ e observe o resultado sobre os vértices dum quadrado que se encontra no primeiro quadrante: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. Aplicar $A(\pi/2)$ as imagens dos vértices se encontram no segundo quadrante e o quadrado sofreu uma rotação de $\pi/2$:

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; A(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.181)$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (5.182)$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O; A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = P'; \quad (5.183)$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = Q'; A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R'; \quad (5.184)$$

Isto não é uma demonstração, é um exemplo. Para demonstrar que $A(\theta)\vec{u}$ produz uma rotação de ângulo θ sobre $\vec{u}$ vou aplicar $A(\theta)$ num vetor qualquer e depois calcular o *produto escalar* do vetor original com o vetor imagem,

$$\langle A(\theta)\vec{u}, \vec{u} \rangle = |A(\theta)\vec{u}| |\vec{u}| \cos(\gamma) \quad (5.185)$$

em que γ é o ângulo entre os dois vetores $A(\theta)\vec{u}$, $\vec{u}$.

Simplifica muito o resultado se impuser a condição

$$|\vec{u}| = x^2 + y^2 = 1; \quad (5.186)$$

porque o módulo do vetor $\vec{u}$ vai ficar “transparente” no resultado, e “transparência” é coisa que está bem em moda!

Acompanhe os cálculos

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; x^2 + y^2 = 1; \quad (5.187)$$

$$A(\theta)\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \\ -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix}; \quad (5.188)$$

$$|A(\theta)\vec{u}|^2 = (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y)^2 + (-\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)^2 = \quad (5.189)$$

$$= \cos^2(\theta)x^2 + \sin^2(\theta)y^2 + 2xy\cos(\theta)\sin(\theta) + \quad (5.190)$$

$$+ \sin^2(\theta)x^2 + \cos^2(\theta)y^2 - 2xy\sin(\theta)\cos(\theta) = \quad (5.191)$$

$$= (x^2 + y^2)(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = 1; \quad (5.192)$$

$$|A(\theta)\vec{u}|^2 = 1 \Rightarrow |A(\theta)\vec{u}| = 1; \quad (5.193)$$

$$\langle A(\theta)\vec{u}, \vec{u} \rangle = |A(\theta)\vec{u}||\vec{u}|\cos(\gamma) \quad (5.194)$$

$$\langle A(\theta)\vec{u}, \vec{u} \rangle = (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y)x + (-\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)y = \quad (5.195)$$

$$= x^2\cos(\theta) + xy\sin(\theta) - xy\sin(\theta) + y^2\cos(\theta); \quad (5.196)$$

$$\langle A(\theta)\vec{u}, \vec{u} \rangle = (x^2 + y^2)\cos(\theta) = |A(\theta)\vec{u}||\vec{u}|\cos(\gamma) = \cos(\gamma); \quad (5.197)$$

consequentemente o ângulo entre $A(\theta)\vec{u}$ e $\vec{u}$ é $\gamma = \theta$ portanto o efeito de aplicar $A(\theta)$ no vetor $\vec{u}$ foi de produzir uma rotação de θ e o exemplo nas equações (eq. 182)- (eq.184) não aconteceu por acaso!

Isto significa que, ao transformar $(x, f(x))$ usando a matriz $A(\theta)$, o resultado será uma parábola em que a diretriz e o eixo estarão afetados da rotação do ângulo θ , e se, reciprocamente, aplicar $A(-\theta)$ a uma parábola qualquer cuja diretriz seja uma reta que faça ângulo θ com o eixo OX o resultado será uma parábola do tipo que aparece na equação (eq. 135), com foco no semiplano positivo. Ao fazer a rotação com

$$A(\gamma); \gamma = 2\pi - \theta \quad (5.198)$$

vou encontrar uma parábola da equação (eq. 143) com foco no semiplano negativo. Como a parábola da equação (eq. 143) é a parábola da equação (eq. 135) sob uma rotação de π , basta selecionar uma das duas opções. Mais claramente, as parábolas tendo OX como diretriz e com o foco em OY^+ descrevem todas as possíveis parábolas do plano. Esta é a razão pela qual escolhi uma parábola para ser o padrão, $y = x^2$.

Como descrevi todas as possíveis parábolas que podem ser construídas no plano, vou agora descrever um algoritmo para obter uma parábola qualquer a partir da equação (eq. 135).

Aplicando $A(\theta)$ na equação parábola que aparece na equação (eq. 135), temos

$$A(\theta)(x, f(x)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \quad (5.199)$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos(\theta) + f(x)\sin(\theta) \\ -x\sin(\theta) + f(x)\cos(\theta) \end{pmatrix} = \quad (5.200)$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos(\theta) + (\frac{x^2}{2c} + \frac{c^2}{2c})\sin(\theta) \\ -x\sin(\theta) + (\frac{x^2}{2c} + \frac{c^2}{2c})\cos(\theta) \end{pmatrix}; \quad (5.201)$$

Esta é uma equação que depende da única variável x e permite descrever a parábola que foi obtida da equação (eq. 135), aplicando-lhe uma rotação de θ . Este tipo de equação se chama equação paramétrica. As equações paramétricas resolvem melhor a questão da dimensão, se uma variedade for descrita por um n variáveis com uma equação paramétrica, então ela é de dimensão n .

Mas, além de rotação se pode também aplicar outro movimento rígido, a translação por um vetor (h, k) . Basta somar este vetor à equação (eq.201) para obter a equação

$$\begin{pmatrix} x \cos(\theta) + \left(\frac{x^2}{2c_2} + \frac{c^2}{2c_2}\right) \sin(\theta) + h \\ -x \sin(\theta) + \left(\frac{x}{2c} + \frac{c}{2c}\right) \cos(\theta) + k \end{pmatrix}; \quad (5.202)$$

que é a equação paramétrica da parábola desejada.

Observação 8 Algoritmo para obter uma parábola qualquer

Quero obter a parábola que tem por diretriz, d , e o foco F que se encontra no eixo r . Os dados são a diretriz d e o eixo, que é perpendicular à diretriz determinado pelo foco F . Como estamos na geometria euclidiana, a diretriz e o foco determinam de forma única o eixo da parábola. O eixo, r é a única reta perpendicular a d passando por F .

Para aplicar a equação (eq. 202) preciso das constantes: θ, c, h, k .

Os dados são a diretriz d e o foco F . O eixo r , a única reta perpendicular à d , passando por F , estou na geometria euclidiana!

- Calculo o ângulo $\theta \in [-\pi, \pi)$ entre d e o eixo OX ;
- Calculo a interseção, $P = (h, k)$, entre d e r ;
- Calculo a distância $d(P, F) = c$;
- Obtive, θ, c, h, k , substituo na equação (eq. 202).

Exercícios 3 (A parábola) Parábola, reta, círculo e elipse

1. Matriz de Cauchy-Riemann

Considere

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \quad (5.203)$$

(2) (V) [] (F) [] Se $x + iy$ for um número complexo, quer dizer $x, y \in \mathbf{R}$ então

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} \approx (a + bi)(x + iy); \quad (5.204)$$

(3) (V) [] (F) [] Se $a = 1, b = 0$ então M é a matriz identidade, uma matriz de Cauchy-Riemann.

(5) (V) [] (F) [] Se $a = 0, b = 0$ então M é a matriz nula, uma matriz de Cauchy-Riemann.

(7) (V) [] (F) [] Se $z = a + bi \neq 0$ for um número complexo diferente de zero, então existe o seu inverso que é $\frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{zz}$ e $\bar{z}$ é o conjugado de z .

(11) (V) [] (F) [] Dados os números complexos $z = x+yi, w = a+bi$ a matriz de Cauchy-Riemann que representa o produto zw é

$$\begin{pmatrix} ax - by & -(ay + bx) \\ ay + bx & ax - by \end{pmatrix} \quad (5.205)$$

gabarito:

2. equação de variedades lineares O sistema de equações

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + E = 0 \\ Px + Qy + Rz + S = 0 \end{cases} \quad (5.206)$$

é a representação algébrica da interseção das variedades lineares que cada uma das equações representa no $\mathbf{R}^3$. Verifique quais são as afirmações verdadeiras que se podem deduzir desta interseção.

(2) (V)[](F)[] A interseção pode ser uma reta, mas também pode ser um plano ou o vazio.

(3) (V)[](F)[] Dividir uma equação por um número diferente de zero não a altera, então o sistema inicial é equivalente a

$$\begin{cases} x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z + \frac{E}{A} = 0 \\ x + \frac{Q}{P}y + \frac{R}{P}z + \frac{S}{P} = 0 \end{cases} \quad (5.207)$$

se $AP \neq -$;

(5) (V)[](F)[] Se o sistema tiver uma solução (não for impossível que é caso de planos paralelos diferentes) então

$$z = 4 \Rightarrow (x, y) = (-16, 0); \quad (5.208)$$

(7) (V)[](F)[] Considere a substituição

$$A = 1; B = 2; C = 3; E = 4; P = -1; Q = -20; R = -3; S = -4; \quad (5.209)$$

no sistema de equações inicial. Se o sistema tiver uma solução (não for impossível que é caso de planos paralelos diferentes) então

$$z = 4 \Rightarrow (x, y) = (-16, 0); \quad (5.210)$$

(11) (V)[](F)[] Se

$$(AB, BC, CD) \neq (0, 0, 0) \quad (5.211)$$

então

$$Ax + By + Cz + E = 0 \quad (5.212)$$

representa um plano no $\mathbf{R}^3$.

gabarito:

3. reta na geometria euclidiana

Na geometria euclidiana dois pontos determinam uma única reta e esta condição, dados dois pontos, permite a determinação da equação desta reta.

(2) (V)[](F)[] Dados dois pontos $P = (a, b, c)$, $Q = (m, n, o)$, diferentes, eles determinam uma única reta r na geometria euclidiana. então

$$X = (x, y, z) \in r \Rightarrow \begin{cases} x = t(a - m); \\ y = t(b - n); \\ z = t(c - o); \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}; \quad (5.213)$$

(3) (V)[](F)[] Dados dois pontos $P = (a, b, c), Q = (m, n, o)$, diferentes, eles determinam uma única reta r e se $X = (x, y, z) \in r$ então estes três pontos determinam um triângulo no espaço de dimensão maior ou igual a dois, na geometria euclidiana.

(5) (V)[](F)[] Dados dois pontos $P = (a, b, c), Q = (m, n, o)$, diferentes, eles determinam uma única reta r e se $X = (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in r$ então

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x - x_2); \\ y - y_1 = t(y - y_2); \\ z - z_1 = t(z - z_2); \end{cases} \quad (5.214)$$

porque dados dois triângulos semelhantes, os seus lados homólogos são proporcionais, na geometria euclidiana.

(7) (V)[](F)[] Dados dois pontos $P = (a, b, c), Q = (m, n, o)$, diferentes, eles determinam uma única reta r na geometria euclidiana.

Se $X = (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in r$ então

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2}; \quad (5.215)$$

porque dados dois triângulos semelhantes, os seus lados homólogos são proporcionais, na geometria euclidiana.

(11) (V)[](F)[] Dados dois pontos $P = (a, b, c), Q = (m, n, o)$, diferentes, eles determinam uma única reta r na geometria euclidiana. e a condição

$$\frac{x - a}{x - m} = \frac{y - b}{y - n} = \frac{z - c}{z - o}; \quad (5.216)$$

vale para qualquer $(x, y, z) \in r$ é a equação da reta num espaço de dimensão maior ou igual a três.

gabarito:

4. reta na geometria euclidiana $P = (2, 3, 4), Q = (-1, -3, 2)$.

(2) (V)[](F)[] A equação da reta $\overline{PQ}$ é

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{6} = \frac{z - 4}{2}; \quad (5.217)$$

(3) (V)[](F)[] Se

$$M = (x, y, z) \in \overline{PQ}$$

então

$$(x, y, z) = t(3, 6, 2) + P; \quad (5.218)$$

(5) (V)[](F)[] Se

$$M = (x, y, z) \in \overline{PQ}$$

então

$$(x, y, z) = t(3, 6, 2) + Q; \quad (5.219)$$

(7) (V)[](F)[] Se

$$M = (x, y, z) \in \overline{PQ}$$

então se $P = (a, b, c), Q = (m, n, o),$

$$(x, y, z) = t(a - m, b - n, c - o) + P; \quad (5.220)$$

(11) (V)[](F)[] Se

$$M = (x, y, z) \in \overline{PQ}$$

então se $P = (a, b, c), Q = (m, n, o),$

$$(x, y, z) = t(a - m, b - n, c - o) + Q; \quad (5.221)$$

gabarito:5. Fatoração de polinômio do segundo grau Considere a expressão

$$P(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \quad (5.222)$$

(2) (V)[](F)[]

$$P(x, y) = (Ax + By)x + (Bx + Cy)y = 0 \quad (5.223)$$

(3) (V)[](F)[]

$$P(x, y) = 0 \Rightarrow Ax + By = 0 \Rightarrow (Bx + Cy) = 0 \text{ ou } y = 0; \quad (5.224)$$

Então se a reta de equação $Ax + By = 0$ estiver contida no gráfico de $P(x, y) = 0$ então a união do eixo OX com a reta $Bx + Cy = 0$ estará também contida no $\text{graf}(P(x, y) = 0)$.

(5) (V)[](F)[]

$$P(x, y) = 0 \Rightarrow Bx + Cy = 0 \Rightarrow Ax + By = 0 \text{ ou } x = 0; \quad (5.225)$$

Então se a reta de equação $Bx + Cy = 0$ estiver contida no gráfico de $P(x, y) = 0$ então a união do eixo OY com a reta $Ax + By = 0$ estará também contida no $\text{graf}(P(x, y) = 0)$.

(7) (V)[](F)[]

$$P(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{Ax + By}{y} + \frac{Bx + Cy}{x} = 0 \quad (5.226)$$

O gráfico de $P(x, y) = 0$ é formado pelas duas retas de equação $Ax + By = 0$ e $Bx + Cy = 0$.

(11) (V)[](F)[] Se a reta $Ax + By = 0$ estiver contida no gráfico de $P(x, y) = 0$ então a reta $Bx + Cy = 0$ não estará contida no gráfico de $P(x, y) = 0$.

gabarito:

6. Parábola, razão $\frac{|PF|}{|Pd|}$

Numa parábola a razão entre o comprimento dos segmentos que unem um ponto genérico P à diretriz d , perpendicularmente, e a ligação de $P = (x, y)$ ao foco F é igual a 1.

(2) (V)[](F)[] Se o foco é $F = (1, 2)$ e a diretriz é $x + y - 2 = 0$ então a equação da parábola é

$$x^2 + y^2 - 4y + 6 - 2xy = 0 \quad (5.227)$$

(3) (V)[](F)[] Se o foco for $F = (-1, 1)$ e a diretriz for $x - y = 0$ então a equação da parábola foi obtida por uma rotação de $-\frac{\pi}{4}$ da parábola com foco $F' = (0, \sqrt{2})$ e tendo por diretriz o eixo OX tendo por vértice o ponto $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(5) (V)[](F)[] Se o foco for $F = (0, \sqrt{2})$ e a diretriz sendo o eixo OX então o eixo desta parábola é o eixo OY , o seu gráfico se encontra no semiplano que contém a parte positiva do eixo OY então sua equação é da forma

$$y = \alpha x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \alpha > 0; \quad (5.228)$$

para algum valor de $\alpha > 0$.

(7) (V)[](F)[] Se o foco for $F = (0, \sqrt{2})$ e a diretriz sendo o eixo OX então o eixo desta parábola é o eixo OY , sabendo que o ponto $(2, 3)$ pertence ao gráfico então sua equação é

$$y = \alpha x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \alpha = \frac{6 - \sqrt{2}}{8}; \quad (5.229)$$

(11) (V)[](F)[] Se o foco for $F = (0, \sqrt{2})$ e a diretriz sendo o eixo OX então o eixo desta parábola é o eixo OY , sabendo que o ponto $(2, 5)$ pertence ao gráfico então sua equação é

$$y = x^2 + 1; \quad (5.230)$$

gabarito:

7. Equação da parábola

(2) (V)[](F)[] A equação da parábola é

$$y^2 + 4x - 2y + 3 = 0; \quad (5.231)$$

então o seu foco é $F = (0, 1)$.

(3) (V)[](F)[] A equação da parábola é

$$y^2 + 4x - 2y + 3 = 0; \quad (5.232)$$

então o seu foco é $F = (-\frac{3}{2}, 1)$.

(5) (V)[](F)[] A equação da parábola é

$$y^2 + 4x - 2y + 3 = 0; \quad (5.233)$$

então a diretriz é a reta $x = \frac{3}{2}$.

(7) (V)[](F)[] A equação da parábola é

$$y^2 + 4x - 2y + 3 = 0; \quad (5.234)$$

então o seu vértice é $V = (-\frac{3}{2}, 1)$.

(11) (V)[](F)[] A equação da parábola é

$$y^2 + 4x - 2y + 3 = 0; \quad (5.235)$$

então o seu vértice é $V = (-\frac{1}{2}, 1)$.

gabarito:

8. Equação da parábola Considere a expressão

$$y^2 - 4x + 2y - 3 = 0 \quad (5.236)$$

que possivelmente representa uma parábola.

(2) (V)[](F)[] As coordenadas do vértice, do foco e a equação da diretriz são

$$V = (0, 1); F = (0, -1); \text{ diretriz } x = a = 2; \quad (5.237)$$

(3) (V)[](F)[] As coordenadas do vértice, do foco e a equação da diretriz são

$$V = (0, 1); F = (-1, -1); \text{ diretriz } x = a = 2; \quad (5.238)$$

(5) (V)[](F)[] As coordenadas do vértice, do foco e a equação da diretriz são

$$V = (1, 1); F = (-1, -1); \text{ diretriz } x = a = -2; \quad (5.239)$$

(7) (V)[](F)[] As coordenadas do vértice, do foco e a equação da diretriz são

$$V = (1, 1); F = (b, -1) = (0, -1); \text{ diretriz } x = a = -2; \quad (5.240)$$

(11) (V)[](F)[] As coordenadas do vértice, do foco e a equação da diretriz são

$$V = (-1, -1); F = (b, -1) = (0, -1); \text{ diretriz } x = a = -2; \quad (5.241)$$

gabarito:

9. Equação da parábola

$$y^2 - 8x - 9 = 0 \quad (5.242)$$

é a equação da parábola γ . Confira o que é verdade sobre γ .

(2) (V)[](F)[] $(0, -3), (0, 3) \in \gamma$

(3) (V)[](F)[] O vértice de γ é $V = (-\frac{9}{8}, 0)$.

(5) (V)[](F)[] O vértice de γ é $V = (\frac{9}{8}, 0)$.

(7) (V)[](F)[] O foco da parábola γ é $F = (\frac{7}{8}, 0)$; Os pontos $(0, -3), (0, 3) \in \gamma$.

(11) (V)[](F)[] O eixo de γ é a reta $x = -\frac{25}{8}$.

A figura (fig 5.23), página 152, mostra um esboço da parábola feito à mão com *xfig*

gabarito:

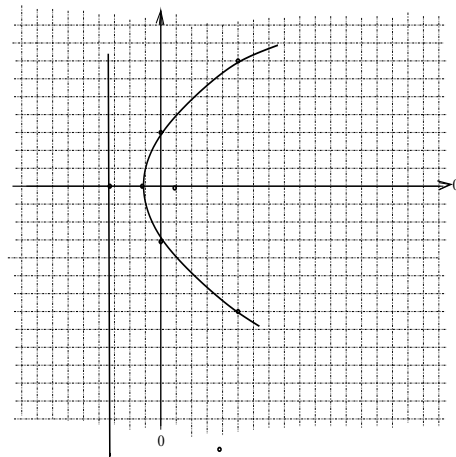


Figura 5.23:

10. Equação da parábola A curva γ tem por equação

$$-7y^2 + 61x - 42y = -49 \quad (5.243)$$

(2) (V)[J(F)[] γ é uma parábola.

(3) (V)[J(F)[] O foco da parábola γ é $V = (-3, -3)$.

(5) (V)[J(F)[] O foco da parábola γ é $V = (-3, 3)$.

(7) (V)[J(F)[] A diretriz da parábola γ é $x = -\frac{6857}{1708}$

(11) (V)[J(F)[] O foco da parábola γ é $V = (\frac{585}{1708}, -3)$.

A figura (fig 5.24), página 152, mostra o gráfico da parábola γ feito à mão com uso do `xfig` a

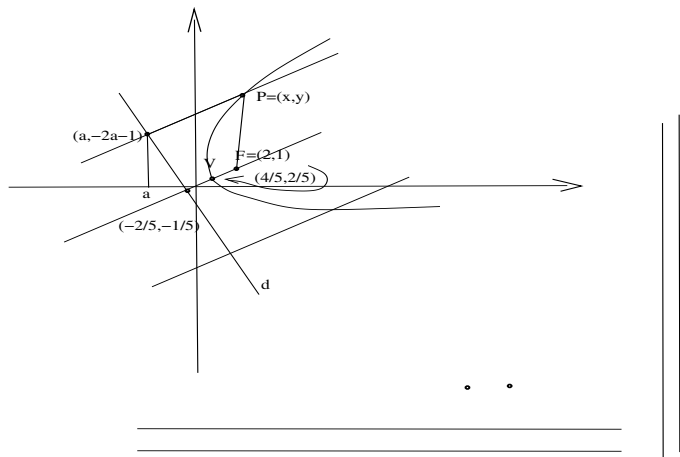


Figura 5.24:

partir dos dados deduzidos da equação.

gabarito: _____

11. equações paramétricas

A curva gamma tem por equações paramétricas

$$\begin{cases} a \cos(\theta); \\ b \cos(\theta); \end{cases} \quad (5.244)$$

(2) (V)[](F)[] Se $a = b$ a curva gamma é um círculo.

(3) (V)[](F)[] Se $a > b > 0$ a curva gamma é um círculo.

(5) (V)[](F)[] Se $a > b > 0$ a curva gamma é uma elipse.

(7) (V)[](F)[] Se $a = b = 1$ a curva gamma é o círculo trigonométrico.

(11) (V)[](F)[] Se $a = b = -1$ a curva gamma é o círculo trigonométrico.

gabarito: _____

12. círculo, parábola, plano e reta Dadas as equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0; \\ x^2 + y^2 - 9x - 14y + 63 = 0; \end{cases} \quad (5.245)$$

verifique o que pode ser verdadeiro.

(2) (V)[](F)[] Uma das equações é do círculo de centro $(3, 5)$ e raio 5.

(3) (V)[](F)[] Uma das equações é do círculo de centro $(4.5, 7)$ e raio 2.5

(5) (V)[](F)[] Ambas as equações são de círculos e um deles passa no ponto $(3, 5)$

(7) (V)[](F)[] Se o círculo de menor raio passar no centro do círculo de raio maior então eles tangentes.

(11) (V)[](F)[] Os círculos são tangentes no ponto $(6, 9)$ porque um dos diâmetros se encontra sobre a reta suporte do outro diâmetro.

gabarito: _____

13. parábola

Identifique as afirmações verdadeiras sobre a equação da parábola.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Equação da parábola é } P = (q(x, y), p(x, y)); \\ \text{A diretriz } d \text{ é } 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1 \Rightarrow (x, -2x - 1); \\ \text{eixo } X \left(x, \frac{x}{2}\right) \text{ foco } F = (2, 1); V = (4/5, 2/5); X \cap d = \{(-2/5, -1/5)\}; \\ d(P, d)^2 = (q(x, y) - x)^2 + (p(x, y) + 2x + 1)^2 = d(P, F)^2 = \\ = (q(x, y) - 2)^2 + (p(x, y) - 1)^2; \\ q(x, y)^2 - 2xq(x, y) + x^2 + p(x, y)^2 + 2(2x + 1)p(x, y) + (2x + 1)^2 = \\ q(x, y)^2 - 4q(x, y) + 4 + p(x, y)^2 - 2p(x, y) + 1; \\ -2xq(x, y) + x^2 + 2(2x + 1)p(x, y) + (2x + 1)^2 = -4q(x, y) + 4 - 2p(x, y) + 1; \\ -2xq(x, y) + x^2 + 2(2x + 1)p(x, y) + (2x + 1)^2 + 4q(x, y) - 4 + 2p(x, y) - 1 = 0; \\ (-2x + 4)q(x, y) + (4x + 4)p(x, y) + x^2 + (2x + 1)^2 - 5 = 0; \\ (-2x + 4)q(x, y) + (4x + 4)p(x, y) + 5x^2 + 4x - 4 = 0; \\ q(x, y) = \frac{(4x+4)p(x,y)-5x^2-4x+4}{-2x+4}; \\ V = (4/5, 2/5) \mapsto 2q(x, y) + 4(x + 1)p(x, y) + 5x^2 + 4x - 4 = 0; \\ 2q(4/5, 2/5) + 36/5p(4/5, 2/5) + 80/25 + 16/5 - 4 = 0; \\ 2q(4/5, 2/5) + 36/5p(4/5, 2/5) + 160/25 - 100/25 = 0; \\ 2q(4/5, 2/5) + 36/5p(4/5, 2/5) + 60/25 = 0; \\ d(V, d)^2 = (4/5 + 2/5)^2 + (2/5 + 1/5)^2 = 36/25 + 9/25 = 45/25; \\ d(V, F)^2 = (4/5 - 2)^2 + (2/5 - 1)^2 = 36/25 + 9/25 = 45/25; \end{array} \right. \quad (5.246)$$

(2) (V) [] (F) [] Dada a equação da diretriz e o foco fica determinada a equação da parábola.

(3) (V) [] (F) []

(5) (V) [] (F) []

(7) (V) [] (F) []

(11) (V) [] (F) []

gabarito:

5.11 Um padrão para hipérboles

Vou começar definindo a hipérbole padrão a curva definida pela equação

$$y = \frac{1}{x} \quad (5.247)$$

e esta minha escolha se deve a importância que a função

$$y = f(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0; \quad (5.248)$$

tem no Cálculo Diferencial e Integral e várias aplicações de Matemática às Ciências Biológicas, à Química, ao decaimento radiativo etc. . .

Vou demonstrar que esta curva satisfaz à definição geométrica da hipérbole.

Definição 12 (hipérbole) *equação da hipérbole* As hipérboles são formadas por dois ramos que são curvas infinitas espelhadas em torno duma reta chamada diretriz que corta ao meio o eixo que liga os focos. A definição geométrica da hipérbole é

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2r \leq d(F_1, F_2) = 2c \quad (5.249)$$

no caso das elipses a soma das distâncias do ponto P aos focos é constante.

As hipérbolas se assemelham muito às elipses e delas *diferem profundamente* ... Como as elipses, elas têm dois focos F_1, F_2 e dado um ponto genérico $P = (x, y)$ sobre uma hipérbole a *diferença entre as distâncias de P a cada um dos focos é constante*. Nas elipses o que é constante é a soma das distâncias de P a cada um dos focos e isto muda tudo!

Confira na figura (fig. 5.25), página 155, a imagem da hipérbole padrão desenhada à mão livre, usando xfig, um editor de gráficos. a partir da qual é possível obter qualquer outra e *inclusive*

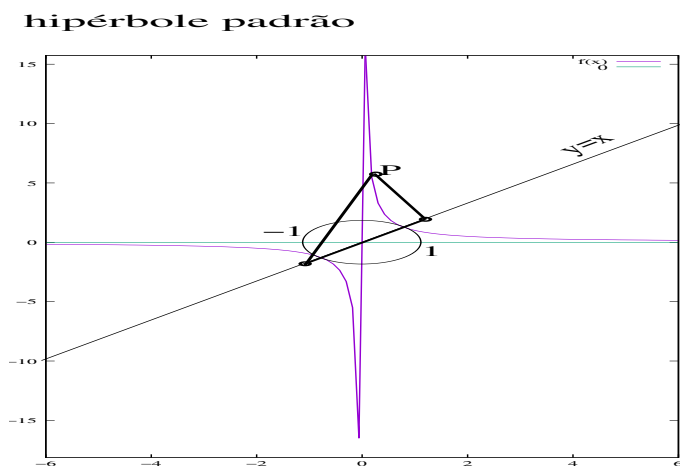


Figura 5.25: A hipérbole padrão

retornar de qualquer outra para esta *hipérbole padrão* com uma transformação linear. Logo vou lhe dar um exemplo duma tal transformação. Esta denominação “não é padrão” e você vai encontrar autores que preferem expressão diferente para a ser o *padrão* para hipérbolas. Minha razão é muito forte para fazer esta denominação pela importância da função na equação (eq.248) em Cálculo.

5.11.1 hipérbole padrão

Vou provar que a expressão na equação (eq.248) satisfaz à definição da hipérbole. Eu sei que $y = \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ tem como gráfico uma hipérbole, e isto eu vou ter que demonstrar para você que teve a paciência de ler o texto até aqui. Ainda não sei quais são os seus focos, mas eu sei que eles se encontram sobre a primeira bissetriz dos eixos porque a curva $y = \frac{1}{x}$ é simétrica em torno de $y = x$ e antissimétrica relativamente ao eixo $y = -x$. Isto é fácil de provar, use a propriedade da função $y = f(x) = \frac{1}{x}$, ela é uma *função ímpar*.

1. Tome um segmento de reta perpendicular à $y = x$, ele vai cortar o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ nos pontos $(x, \frac{1}{x})$ e em $(\frac{1}{x}, x)$, por exemplo, $(3, \frac{1}{3})$ e $(\frac{1}{3}, 3)$, ou $(-4, -\frac{1}{4})$ e $(-\frac{1}{4}, -4)$.
2. Também $y = \frac{1}{x}$ é antissimétrica em torno da reta $y = -x$ porque $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função ímpar, sempre para $x \neq 0$.

Então os focos são $F_1 = (m, m)$ e $F_2 = (-m, -m)$ e vou ter que calcular m aplicando a definição de hipérbole. Acompanhe as contas sobre as quais farei comentários em seguida.

$$m > 0; F_1 = (m, m); F_2 = (-m, -m); \quad (5.250)$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \text{ ponto genérico da hipérbole: } (x, P(x)) = (x, \frac{1}{x}); x \neq 0; \quad (5.251)$$

$$d(P, F_1) = d((x, \frac{1}{x}), (m, m)) = \sqrt{(x - m)^2 + (\frac{1}{x} - m)^2}; \quad (5.252)$$

$$d(P, F_2) = d((x, \frac{1}{x}), (-m, -m)) = \sqrt{(x + m)^2 + (\frac{1}{x} + m)^2}; \quad (5.253)$$

$$(\forall P) (|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2r \leq d(F_1, F_2) = 2c); \quad (5.254)$$

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2r \Rightarrow d(P, F_1) = \pm 2r + d(P, F_2); \quad (5.255)$$

$$d(P, F_1)^2 = 4r^2 \pm 4rd(P, F_2) + d(P, F_2)^2; \quad (5.256)$$

$$d(P, F_1)^2 - d(P, F_2)^2 - 4r^2 = \pm 4rd(P, F_2); \quad (5.257)$$

$$(d(P, F_1)^2 - d(P, F_2)^2 - 4r^2)^2 = 16r^2 d(P, F_2)^2; \quad (5.258)$$

$$(-4mx - \frac{4m}{x} - 4r^2)^2 = 16r^2 d(P, F_2)^2; \quad (5.259)$$

$$16m^2x^2 + \frac{16m^2}{x^2} + 16r^4 + 32m^2 + 32mr^2x + \frac{32mr^2}{x} = 16r^2 d(P, F_2)^2; \quad (5.260)$$

$$P_{m,r}(x) = 16m^2x^2 + \frac{16m^2}{x^2} + 16r^4 + 32m^2 + 32mr^2x + \frac{32mr^2}{x} - 16r^2 d(P, F_2)^2; \quad (5.261)$$

$$P_{m,r}(x) = (m^2 - r^2)x^2 + \frac{m^2 - r^2}{x^2} + r^4 + 2m^2(1 - r^2) = 0; \quad (5.262)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{m,r}(1) &\Rightarrow (m^2 - r^2) + (m^2 - r^2) + r^4 + 2m^2(1 - r^2) = 0; \\ P_{m,r}(1) &\Rightarrow 4m^2 - 2r^2 + r^4 - 2m^2r^2 = 0; \\ P_{m,r}(1) &\Rightarrow 4m^2 - 2m^2r^2 = 2m^2(2 - r^2) = 2r^2 - r^4 = r^2(2 - r^2); \\ P_{m,r}(1) &\Rightarrow r^2 = 2 \text{ ou } 2m^2 = r^2; m^2 = \frac{r^2}{2}; \\ P_{m,r}(2) &\Rightarrow 4(m^2 - r^2) + \frac{m^2 - r^2}{4} + r^4 + 2m^2(1 - r^2) = 0; \\ P_{m,r}(2) &\Rightarrow (m^2 - r^2)(17 - 4r^2) + m^2(8 - 4r^2) = 0; \\ P_{m,r}(2) &\Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow 9(m^2 - r^2) = 0 \Rightarrow m = \pm r; \\ m^2 = \frac{r^2}{2} &\Rightarrow -\frac{r^2}{2}(17 - 4r^2) + \frac{r^2}{2}(8 - 4r^2) = 0; \\ &\quad -r^2(17 - 4r^2) + r^2(8 - 4r^2) = 0; \\ r \neq 0 &\Rightarrow -(17 - 4r^2) + (8 - 4r^2) = 0; \\ -17 + 4r^2 + 8 - 4r^2 &= 0 \Rightarrow 17 + 8 = 0; \\ r^2 &= 2 \text{ e } m = \pm r; \end{aligned} \right\}; \quad (5.263)$$

$$r^2 = 2 \text{ e } m = \pm r; \quad (5.264)$$

5.11.2 Abrindo as contas

Na equação (eq. 254) eu apliquei a definição da hipérbole. Da (eq. 255) até a equação (eq. 262) eu fiz transformações algébricas que me permitiram simplificar na expressão polinomial $P_{m,r}(x) = 0$, um polinômio que depende dos dois parâmetro m, r . Nas equações seguintes eu escrevi

$$\begin{cases} P_{m,r}(1) = 0; \\ P_{m,r}(2) = 0; \end{cases} \quad (5.265)$$

estabelecendo um sistema de 2 equações, tem mais de duas equações mas somente importam as duas últimas para cada um dos valores de x , Elas me permitiram determinar o valor dos parâmetros m, r .

A solução única possível deste sistema é $r = \sqrt{2}, m = \pm\sqrt{2}$ e como não tem sentido que $m = -\sqrt{2}$ então a única solução do sistema é $r = \sqrt{2}, m = r = \sqrt{2}$. É a identidade, na equação (eq. 262), que prova que $y = \frac{1}{x}$ satisfaz à definição da hipérbole. Baseado nela eu escrevi o sistema de equações (eq. 265), que me permitiu encontrar os valores m, r .

Na figura (fig. 5.26), página 157, eu estou salientando o triângulo formado pelos focos e um ponto P genérico sobre a hipérbole. Vou voltar a me referir a este triângulo.

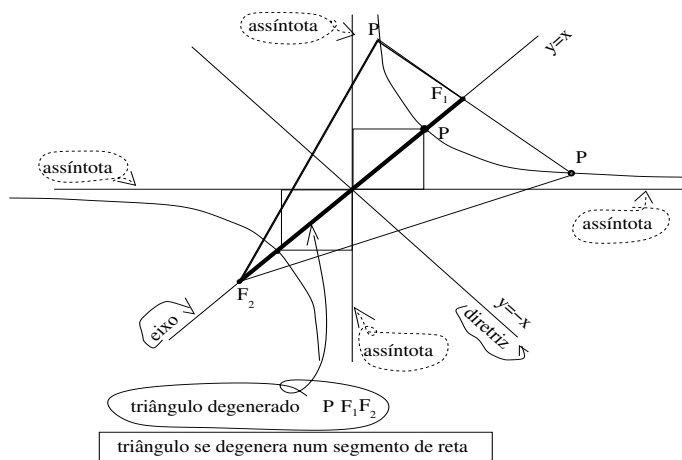


Figura 5.26: A hipérbole padrão

Confira a figura (fig. 5.26), página 157, nela há a informação sobre as imagens da diretriz do cone, são as assíntotas, que neste caso são os eixos coordenados do plano XOY . A diretriz do cone é uma reta que roda em volta do eixo do cone fixa a um ponto V que se chama de vértice do cone e a figura “captou” dois momentos desta rotação quando a imagem coincide com os eixos OX e OY . Não se esqueça de que o cone é gerado pela diretriz que está rodando em volta do eixo do cone e no plano XOY eu somente percebo o que aparece na figura (fig. 5.26), as assíntotas são duas imagens da diretriz.

Na próxima seção vou obter uma nova equação para a hipérbole usando uma transformação geométrica.

5.11.3 Obtendo nova hipérbole por transformação

Eu mostrei, na seção anterior, que um tipo de equação, a da curva $y = \frac{1}{x}; x \neq 0$, que vai ser de grande importância no Cálculo, satisfaz à definição duma hipérbole. Vou usar uma transformação geométrica para obter uma outra equação para a hipérbole, que aparece na figura (fig. 5.27), página 158.

A figura (fig. 5.27), página 158 lhe mostra uma hipérbole cujo eixo é o eixo OX , ela foi obtida por uma rotação de $-\frac{\pi}{4}$, ângulo negativo, no sentido da rotação dos ponteiros dos relógios antigos, aplicada na hipérbole padrão.

Eu vou obter a equação desta hipérbole aplicando uma rotação com o ângulo, $-\frac{\pi}{4}$, na equação da hipérbole padrão, o que significa que vou aplicar a matriz de rotação que corresponde ao ângulo $-\frac{\pi}{4}$ no vetor,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; y = \frac{1}{x}; x \neq 0; \quad (5.266)$$

Vou aplicar a mesma transformação linear no eixo da hipérbole padrão e assim obter os focos na nova hipérbole que vão ser obtidos pela mesma transformação linear junto com o eixo.

Não confunda a o eixo da hipérbole com o eixo do cone. O eixo da hipérbole é a reta determinada pelos dois focos F_1, F_2 . Infelizmente a notação é confusa, mas agora a hipérbole é um objeto separado que foi produzido pela interseção dum plano, no espaço $\mathbf{R}^3$ com um cone e foi projetada

A frase está incorreta! Não se aplicam rotações em equações, se aplicam rotações em objetos geométricos porque uma rotação é uma operação geométrica. Estou usando uma *metonímia*, uma figura de linguagem em que se substitui o fato pelo efeito, e a linguagem fica mais simples e reduzida.

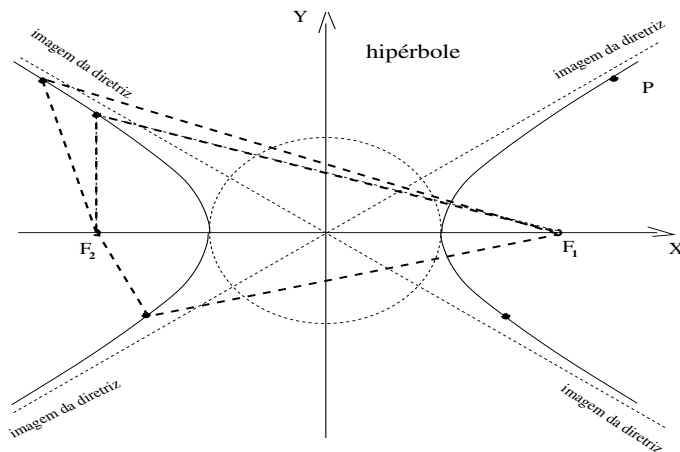


Figura 5.27: hipérbole com suas assíntotas

no plano XOY e é deste objeto que estou tratando. Esqueça o cone que foi usado apenas para produzir hipérboles! Mas quando me referir aos elementos do cone, vou manter o *genitivo*, “do cone” para alertá-lo da diferença dos conceitos.

As matrizes quadradas 2×2 são transformações do plano no plano, e se tiverem determinante diferente de zero são transformações inversíveis, e é o caso das matrizes de rotação:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \approx e^{i\theta}; \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1; \quad (5.267)$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \approx e^{-i\frac{\pi}{4}}; \cos^2(-\frac{\pi}{4}) + \sin^2(-\frac{\pi}{4}) = 1; \quad (5.268)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \quad (5.269)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \approx a + bi; a^2 + b^2 \neq 0; \quad (5.270)$$

Apenas para comparar, e se você quiser aprofundar um pouco usando *números complexos*, a primeira matriz é equivalente ao número complexo $e^{i\theta}$, porque multiplicar qualquer número complexo z por este número produz uma rotação de θ em z . Fazer esta conta com números complexos é uma forma de provar que as matrizes nas equações (eq. 267) e (eq. 268) são matrizes de rotação que transformam qualquer objeto do plano, $\mathbf{R}^2$, noutro objeto obtido por uma rotação de ângulo θ no primitivo.

A última matriz (eq. 270) é “equivalente” ao número complexo $a + bi$ e eu costumo chamá-la de *matriz de Cauchy-Riemann*, guarde o nome para quando você avançar mais em Matemática quando verá que tenho razão em chamá-la assim. Ficou curiosa, faça uma busca com a palavra-chave *Cauchy-Riemann*, mas não fique assustada, por enquanto é apenas uma denominação!

Do ponto de vista geométrico $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$, do ponto de vista algébrico são dois conjuntos bastante diferentes, $\mathbf{C}$ é uma *super álgebra* de $\mathbf{R}$ no sentido de que é uma álgebra que contém $\mathbf{R}$ como subálgebra e você verá mais a frente que há diversas distinções entre $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{C}$. Mas por enquanto eu me contento em pensar que $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{C}$ são duas formas diferentes de ver o mesmo conjunto, mas estou errado!

Faça as contas, verifique as matrizes do tipo da matriz que aparece na equação (eq. 267) têm determinante 1 e todo número complexo da forma $e^{i\theta}$ têm módulo 1, são pontos do círculo trigonométrico como subconjunto de $\mathbf{C}$, pela fórmula de Euler-Abraham de Moivre.

A matriz equivalente ao número complexo $w = a + bi$ generaliza o caso dos números complexos unitários, se $|w| = 1$ tem-se uma simples rotação, se $0 < |w| < 1$ ou $|w| > 1$ haverá também uma distorção em grandeza que não vai alterar a natureza do objeto geométrico, desde que $|w| \neq 0$ o que para as matrizes de Cauchy-Riemann é equivalente a dizer que o determinante é diferente de zero devido à equivalência delas com o número complexo $a + bi$.

Esta afirmação é muito forte, ela está lhe dizendo que há um subconjunto próprio das matrizes 2×2 que são equivalentes ao conjunto dos números complexos, as matrizes de Cauchy-Riemann. Estudando Álgebra vai você vai encontrar isto sob o título de isomorfismo de $\mathbf{C}$ com este subconjunto próprio de matrizes. Como você pode somar e multiplicar matrizes, e há diversas linguagens de programação que sabem fazer estas operações com matrizes, você tem nas matrizes de Cauchy-Riemann uma forma de representar $\mathbf{C}$ dentro de programas de computação.

As matrizes nas equações (eq. 267) (eq. 268), tem a forma duma matriz de Cauchy-Riemann porque eu posso a qualquer momento, nas contas, substituir a, b por $\cos(\theta), \sin(\theta)$ e estarei de volta numa matriz de rotação.

Como quero obter uma hipérbole específica obtida por rotação de $\theta = \frac{-\pi}{4}$ de modo que o eixo da hipérbole seja o eixo OX então eu vou usar a matriz de rotação com $\theta = \frac{-\pi}{4}$. Já sei que o objeto que vou obter é uma hipérbole, porque é um novo objeto obtido por rotação da hipérbole padrão, e quero chegar à equação desta nova hipérbole.

Eu vou passar da minha hipérbole padrão para o padrão de hipérbole dos demais autores fazendo uma rotação de $-\frac{\pi}{4}$, agora como um exercício de Álgebra Linear usando a matriz de Cauchy-Riemann

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \alpha = -\frac{\pi}{4}; \quad (5.271)$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \theta = \frac{-\pi}{4} \quad (5.272)$$

Vou aplicar a matriz da equação (eq. 272) ao conjunto dos pontos do plano, vetores, da forma $P = (x, \frac{1}{x})$, escritos como vetor coluna para que o produto entre matrizes seja legal. Observe que $P = (x, \frac{1}{x})$; $x \neq 0$ são os pontos que pertencem à hipérbole padrão.

$$MP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x} \end{pmatrix} =: P; \quad (5.273)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}m + \frac{\sqrt{2}}{2}m \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}m + \frac{\sqrt{2}}{2}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} =: F_1; \quad (5.274)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m \\ -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}m - \frac{\sqrt{2}}{2}m \\ \frac{\sqrt{2}}{2}m - \frac{\sqrt{2}}{2}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} =: F_2; \quad (5.275)$$

O símbolo “:=” foi uma invenção do professor suíço Niklaus Wirth dentro da sua construção da linguagem de programação Pascal em que ele substituiu a confusa igualdade, em programação, pelo conceito matemático “recebe”, que é como se deve ler este símbolo em programação. Algumas linguagens de programação aderiram à invenção de Niklaus Wirth. Eu estou generalizando o uso colocando os dois pontos do lado da variável que recebe o valor, mas a invenção é do Wirth.

Apliquei a mesma rotação ao eixo da hipérbole que carrega consigo os focos portanto tenho novos focos, $F_1 = (2, 0), F_2 = (-2, 0)$, porque quero obter uma hipérbole cujo eixo seja OX então, nas

python adere à
sintaxe do C e não usa a invenção de Wirth.

equações (eq. 274) (eq. 275) eu calculei as coordenadas dos novos focos. Observe que os focos “antigos” eram $F_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $F_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e a distância entre eles é 4, a mesma distância entre os “novos focos”, nenhuma coincidência, eu apliquei a rotação de $-\frac{\pi}{4}$ ao segmento de reta que eles determinam obtendo outro segmento de reta com mesmo comprimento. Nada extraordinário, apenas chamo sua atenção para que se dê contas de que estou trabalhando com uma nova hipérbole que é idêntica à anterior apenas transformada por uma rotação. Todas as propriedades geométricas são preservadas na transformação.

A diferença entre as distâncias vai ser, como no caso da *hipérbole padrão*,

$$2r = 2\sqrt{2} \leq 4 = d(F_1, F_2); \quad (5.276)$$

os valores são os mesmo porque esta hipérbole foi obtida pela rotação de $-\frac{\pi}{4}$ aplicada na *hipérbole padrão* e conseqüentemente as constantes geométricas são mantidas. Continuo lembrando o teorema da desigualdade elementar da geometria já citada anteriormente, $d(F_1, F_2)$ é maior do que o comprimento do *terceiro lado do triângulo degenerado* que é igual a diferença entre os outros dois lados, a distância entre os focos. Sei quais são os focos, agora vou calcular os pontos (x, y) que satisfazem à definição da hipérbole para os focos dados.

$$\{(x, y) = P; d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2r = 2\sqrt{2};\}; \quad (5.277)$$

$$d(P, F_1) = d((x, y), (2, 0)) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}; \quad (5.278)$$

$$d(P, F_2) = d((x, y), (-2, 0)) = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}; \quad (5.279)$$

$$(\forall P) (|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2\sqrt{2}); \quad (5.280)$$

$$d(P, F_1) = \pm 2\sqrt{2} + d(P, F_2); \quad (5.281)$$

$$d(P, F_1)^2 = 8 \pm 4\sqrt{2}d(P, F_2) + d(P, F_2)^2; \quad (5.282)$$

$$(x-2)^2 + y^2 - d(P, F_2)^2 - 8 = \pm 4\sqrt{2}d(P, F_2); \quad (5.283)$$

$$(x-2)^2 + y^2 - ((x+2)^2 + y^2) - 8 = \pm 4\sqrt{2}d(P, F_2); \quad (5.284)$$

$$-8x - 8 = \pm 4\sqrt{2}d(P, F_2) \Rightarrow 64x^2 + 128x + 64 = 32((x+2)^2 + y^2); \quad (5.285)$$

$$64x^2 + 128x + 64 = 32x^2 + 128x + 128 + 32y^2; \quad (5.286)$$

$$2x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 \Rightarrow x^2 - 2 - y^2 = 0; \quad (5.287)$$

$$x^2 - 2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 2 - x^2; \quad (5.288)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } x \geq \sqrt{2}; \\ f(x) = \sqrt{2 - x^2} \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2}; \\ f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}; \\ g(x) = -f(x); \end{array} \right\}; \quad (5.289)$$

5.11.4 As contas

Na última equação eu defini uma função a partir da equação da hipérbole para usá-la no *gnuplot* e agora dentro do *gnuplot* eu traduzi

```
f(x)= (x < -sqrt(2)) ? sqrt(x**2 - 2) : (x < sqrt(2)) ? 0 : sqrt(x**2 - 2);
g(x) = -f(x);
plot f(x), g(x), 0, x, -x
pause -2 'aperte enter para terminar' ;
```

e você pode raspar e colar num terminal do *gnuplot* para ver a imagem na figura (fig. 5.28), página 161,

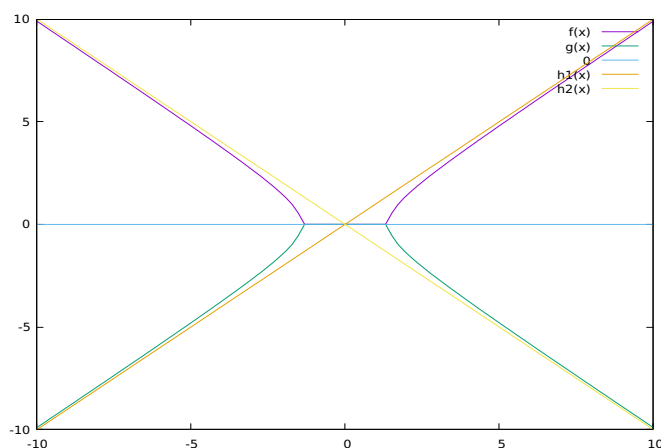


Figura 5.28: Hipérbole equilátera

Para obter a equação de qualquer hipérbole basta usar os focos que forem dados e a diferença entre as distâncias dum ponto genérico $P(x, y)$ aos focos, foi o que fiz da equação (eq. 277) até a equação (eq. 288). Na última equação (eq. 289), eu defini uma função obter o gráfico da hipérbole equilátera com gnuplot. O radical tem que ser positivo o que implica que $|x| > \sqrt{2}$ então no intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ não tem gráfico, para evitar que gnuplot se confundisse, eu defini como zero os valores neste intervalo fazendo com gnuplot desse à função o valor zero, confundindo com o eixo OX , produzindo um gráfico bonito.

Eu usei um if/else compacto do gnuplot que é importado da linguagem de programação C em que “?” corresponde a uma pergunta sobre uma variável lógica, no caso uma desigualdade, que sendo verdadeira corresponde a expressão que lhe segue, “:” é alternativa, “else”, e você pode escrever sentenças imensas com este if/else compacto. Aqui estou usando apenas dois elses para definir como 0 o valor da função no intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. A função $-g(x)$ vai me dar a simétrica desta função em relação ao eixo OX foi o que eu obtive com gnuplot. Além disto eu tracei as retas $y = \pm x$ que são as assíntotas desta hipérbole. O comando `pause -2` faz com que gnuplot fique aguardando uma entrada de dados, basta acionar o “enter” e o gráfico sai do ar. É melhor usar o comando

```
pause -2 'aperte enter para terminar' ;
```

para que gnuplot emita esta mensagem afim de que o usuário saiba o que fazer para terminar trabalho!

5.11.5 Outras equações para hipérbole

Por simetria a equação

$$y^2 - x^2 = 2; \quad (5.290)$$

é a equação da hipérbole equilátera com focos $F_1 = (0, 2)$, $F_2 = (0, -2)$ e vértices $v_1 = (0, \sqrt{2})$, $V_2 = (0, -\sqrt{2})$. As contas são absolutamente semelhantes às que eu fiz na equação (eq. 277) até equação (eq. 288). apenas trocando x por y .

O nome usual para esta hipérbole é hipérbole equilátera, como muitos nomes em Matemática este tem um sentido difuso, possivelmente está associado às assíntotas que são as duas bissetrizes dos eixos. Com frequência nos textos esta hipérbole equilátera é apresentada como um padrão.

As curvas, as cônicas, porque se originam pela interseção dum plano com um cone, são *curvas planas*, porque “pertencem” ao plano que corta o cone, mas foram obtidas no espaço $\mathbb{R}^3$ e projetadas no plano XOY . São estas projeções, *círculo, elipse, hipérbole e parábola*, os objetos da Geometria Analítica.

- A *diretriz do cone* é a reta que gira em torno do *eixo do cone* gerando o cone. Esta reta está “fixa” no ponto O , o vértice do cone e o cone é uma *superfície de revolução* com duas folhas simétricas que se opõem pelo vértice O . A *diretriz* é uma reta que circula em torno do *eixo do cone*, “fixa” no ponto O , gerando o cone, e ao cortar este por um plano eu estarei *captando* duas imagens da *diretriz* em sua passagem pelo plano.
- As imagens da *diretriz do cone*, em dois momentos de sua rotação, projetadas no plano XOY são as duas retas concorrentes num ponto do plano no ponto O' que é a projeção do vértice do cone.
- Eu introduzi uma particularização que não irá prejudicar o desenvolvimento geral da teoria, mas que simplificou as contas. Eu escolhi a origem dos eixos no plano XOY como o ponto de concorrência das imagens da diretriz e do eixo do cone, é o *vértice* do cone.

As imagens da *diretriz do cone*, as projeções no plano XOY , esta projeção se confunde com a própria projeção do cone no plano XOY , são as assíntotas ao gráfico da hipérbole: quer dizer, o gráfico da hipérbole se aproxima indefinidamente das assíntotas, ou ainda as assíntotas são a “*posição limite*” para a qual tendem os ramos da hipérbole, coisa que Cálculo explica com perfeição com o conceito, “*limite*”.

Observe que as duas imagens da diretriz são também uma *hipérbole degenerada*, um conceito nato do Cálculo ou das equações diferenciais. A Matemática é formada de teorias que dependem uma das outras e trabalhar num departamento como a Geometria Analítica nos força a indicar que os objetos deste departamento aparecem melhor explicados em outros departamentos, aqui, na Geometria Analítica, me falta o conceito “*limite*”, que corresponde aos “*objetos degenerados*”. Estou fazendo referência a estes conceitos apenas para aguçar a sua curiosidade, eles não serão necessários na sequência da leitura.

As hipérbolas têm uma definição da geometria, *é o lugar geométrico dos pontos P tal que, o valor absoluto da diferença entre as distâncias do ponto P a dois pontos chamados focos, é constante*. Compare com a definição da elipse.

Foi escrevendo esta definição sob forma de equações que eu pude obter as equações da *hipérbole padrão* e, agora, da nova hipérbole obtida com a rotação que eu dei à *hipérbole padrão* de $-\frac{\pi}{4}$.

Eu usei uma propriedade da geometria, a *invariância das propriedades das figuras geométricas sob os movimentos rígidos: rotação, translação* para obter uma nova hipérbole a partir da *hipérbole padrão*. Na verdade eu já usei esta propriedade de invariância quando selecionei a origem como ponto de concorrência das imagens da diretriz. Como a Matemática se caracteriza por sua *generalidade*, quer dizer, *os teoremas da Matemática não podem depender de escolhas particulares*, você deve manter uma atitude crítica frente às minhas escolhas e eu tenho o compromisso de mostrar-lhe mais a frente que elas não destroem as equações que vou obter no sentido que elas percam a confiabilidade.

Nas *hipérbolas* de que tratei aqui, tudo se passa como se o *eixo do cone* fosse coincidente com o eixo OZ , a primeira bissetriz dos eixos, a reta de equação $y = x$, é o eixo da *hipérbole padrão*.

Na segunda hipérbole, obtida por rotação da *hipérbole padrão* obtive os focos calculando a rotação sobre o eixo da *hipérbole padrão* e assim obter o eixo da nova hipérbole onde se encontram seus focos. Eu produzi uma rotação de $-\frac{\pi}{4}$ levando a reta $y = x$ a coincidir com o eixo OX que é o eixo da nova hipérbole e onde ficam situados os focos da nova hipérbole. Na *hipérbole padrão* os focos tem coordenadas

$$(m, m), (-m, m); m = \sqrt{2};$$

determinando um segmento de reta com vértice cujo comprimento é 4 e as coordenadas dos focos da nova hipérbole tem este valor como *abscissa*.

Isto me permitiu escolher a posição dos referenciais para construir a equação da hipérbole de forma mais simples. No caso da rotação de $-\frac{\pi}{4}$ dada na *hipérbole padrão* eu encontrei a imagem do eixo da nova hipérbole quando apliquei a matriz de rotação sobre os focos da *hipérbole padrão* transformando-lhe o eixo $y = x$ no eixo OX “encontrando”, logo m como coordenadas dos focos obtidos dos antigos focos com a rotação do eixo da *hipérbole padrão*. os dois pontos, os focos, $F_1 = (-m, 0) = (-\sqrt{2}, 0)$; $F_2 = (m, 0) = (\sqrt{2}, 0)$, que são pontos sobre o eixo OX , depois apliquei a definição geométrica para encontrar a equação cartesiana da nova hipérbole.

Quando a hipérbole ficar simétrica em volta da origem dos eixos XOY e seu eixo for OX ou OY , a sua equação equação terá uma das duas formas

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1; \frac{y^2}{A^2} - \frac{x^2}{B^2} = 1; \quad (5.291)$$

ao escrever o denominador ao quadrado eu apenas estou indicando que se tratam de dois números positivos que aparecem no denominador.

Variantes da equação da *hipérbole padrão* são as expressões

$$x = \frac{K}{y}; y = \frac{K}{x}; K \neq 0; \quad (5.292)$$

a segunda equação terá grande importância no Cálculo, muito em particular quando $K = 1$.

A maioria dos autores definem como *hipérbole padrão* aquela cuja equação é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.293)$$

para dois números positivos a, b e eles têm uma forte razão, trocando o sinal no primeiro membro você obtém a equação da elipse que eles também consideram como o padrão porque elas tem como eixo de simetria o eixo OY e os focos se encontram sobre o eixo OX . Eu a obtive aplicando uma rotação com ângulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ na minha *hipérbole padrão*.

Exercícios 4 A hipérbole

1. propriedades da hipérbole Partindo da equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; a, b > 0; \quad (5.294)$$

como equação duma hipérbole então

$$(2) \quad \underline{(V) [](F) []}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (5.295)$$

é também a equação duma hipérbole.

(3) (V) [](F) [] Se (x, y) for um ponto da hipérbole então $(x, -y)$ e $(-x, y)$ também são ponto da hipérbole.

(5) (V) [](F) [] é possível definir y como quatro funções de x , duas delas com domínio definido pela desigualdade $x \geq a$.

(7) (V) [](F) [] é possível definir y como quatro funções de x , duas delas com domínio definido pela desigualdade $x \leq -a$.

- (11) (V) [] (F) [] Para cada valor de x tal que $x \geq a$ há dois valores de y tais que os pontos (x, y) e $(x, -y)$ pertencem à hipérbole.

gabarito:

2. propriedades da hipérbole Partindo da equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1; a > 0; \quad (5.296)$$

como equação duma hipérbole então

(2) (V) [] (F) []

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1; a > 0; \quad (5.297)$$

é uma outra hipérbole obtida da anterior por uma rotação de $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(3) (V) [] (F) [] A expressão

$$x^2 - y^2 = a^2; a > 0; \quad (5.298)$$

também define a mesma hipérbole.

(5) (V) [] (F) [] Posso deduzir duas funções f, g definidas no domínio $x \geq a$ tal que $f(x) = -g(x)$.

(7) (V) [] (F) [] Posso definir a função f no domínio $|x| \geq a$ tal que $f(x) = f(-x)$ para todo x no domínio de f .

(11) (V) [] (F) [] Posso definir duas funções f, g no domínio $|x| \geq a$ tal que $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$ para todo x no domínio de f .

gabarito:

3. derivada implícita

Considere a hipérbole definida pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1; a > 0; \quad (5.299)$$

Verifique quais das afirmações são verdadeiras.

(2) (V) [] (F) [] Calculando a derivada implícita da expressão na equação (eq. 299) se obtém

$$\frac{2x}{a^2}dx - \frac{2y}{a^2}dy = 0; a > 0; \quad (5.300)$$

(3) (V) [] (F) [] Calculando a derivada implícita da expressão na equação (eq. 299) se obtém

$$\frac{2x}{a^2}dx - \frac{2y}{a^2}dy = 0; a > 0; \quad (5.301)$$

e com as substituições:

$$\begin{cases} dx := x - p; \\ dy := y - q; \\ x := p; \\ y := q; \end{cases} \quad (5.302)$$

sob a suposição de que o ponto (p, q) satisfaça a (eq. 299), obtenho a expressão a variedade linear tangente ao gráfico da hipérbole no ponto (p, q)

$$\frac{2a}{a^2}(x-p) - \frac{2y_0}{a^2}(y-q) = 0; a > 0; \quad (5.303)$$

(5) (V)[J(F)[]] Se $|x| \geq |a|$ posso definir as funções $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ e $g(x) = -\sqrt{x^2 - a^2}$ tal que $f(x) = -g(x)$ cujos gráficos formam um dos ramos da hipérbole definida na equação (eq.299).

(7) (V)[J(F)[]] Se $|x| \geq |a|$ posso definir as funções $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ e $g(x) = -\sqrt{x^2 - a^2}$ tal que o gráfico destas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ reproduz o gráfico da hipérbole da equação (eq.299) e definindo para o ponto (p, q) previamente selecionado satisfazendo a equação da hipérbole definida pela equação (eq.299)

$$|p| > |a|, q = f(p); m = p/q; h(x) = q + m * (x - p); \quad (5.304)$$

a sequência de comandos do `gnuplot`

```
a=3; p = -5;
if (abs(p) > abs(a)) f(x)=sqrt(x**2 - a**2);
if (abs(p) > abs(a)) g(x)=-sqrt(x**2 - a**2);
q = f(p); m = -p/q;
h(x) = q + m*(x-p)
plot f(x), g(x), 0, h(x);
```

exibe o gráfico da hipérbole definida na (eq.299) com a reta tangente no ponto (p, q) previamente selecionado satisfazendo a equação da hipérbole na (eq.299).

(11) (V)[J(F)[]] Se $|x| \geq |a|$ posso definir as funções $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ e $g(x) = -\sqrt{x^2 - a^2}$ tal que o gráfico destas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ reproduz o gráfico da hipérbole da equação (eq.299) e definindo para o ponto (p, q) previamente selecionado satisfazendo a equação da hipérbole definida pela equação (eq.299)

$$|p| > |a|, q = f(p); m = -p/q; h(x) = q + m * (x - p); \quad (5.305)$$

a sequência de comandos do `gnuplot`

```
a=3; p = -5;
if (abs(p) > abs(a)) f(x)=sqrt(x**2 - a**2);
if (abs(p) > abs(a)) g(x)=-sqrt(x**2 - a**2);
q = f(p); m = p/q;
h(x) = q + m*(x-p)
plot f(x), g(x), 0, h(x);
```

exibe o gráfico da hipérbole definida na (eq.299) com a reta tangente no ponto (p, q) previamente selecionado satisfazendo a equação da hipérbole na (eq.299).

gabarito:

4. derivada implícita Considere a hipérbole padrão

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}; \quad (5.306)$$

(2) (V) [](F) [] Derivando implicitamente a equação (eq.306) obtenho

$$dy = \frac{dx}{x^2} = -x^{-2} dx; \quad (5.307)$$

seguindo, exatamente, a regra da derivação implícita de polinômios com a potência $n = -1$.

(3) (V) [](F) [] Considerando agora um ponto $(a, b) = (a, \frac{1}{a})$ sobre a curva $y = \frac{1}{x}$ e fazendo as substituições

$$\begin{cases} dx := x - a; \\ dy := y - b = y - \frac{1}{a}; \\ x := a; \\ y := b; \end{cases} \quad (5.308)$$

a equação da reta tangente à curva $y = \frac{1}{x}$ no ponto (a, b) é

$$m = \frac{1.0}{a^2}; y - b = y - \frac{1}{a} = m(x - a); \quad (5.309)$$

traduzindo para gnuplot

```
f(x) = 1.0/x;
a = -1/5.0; b = 1/a; m = 1.0/a**2; ## selecionei a= -1/5.0 caculei m
h(x) = b + m*(x-a); ## equação da reta tangente
plot f(x), h(x), 0
```

vai aparecer na janela gráfica o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ com a reta tangente no ponto (a, b) .

(5) (V) [](F) [] Considerando agora um ponto $(a, b) = (a, \frac{1}{a})$ sobre a curva $y = \frac{1}{x}$ e fazendo as substituições

$$\begin{cases} dx := x - a; \\ dy := y - b = y - \frac{1}{a}; \\ x := a; \\ y := b; \end{cases} \quad (5.310)$$

a equação da reta tangente à curva $y = \frac{1}{x}$ no ponto (a, b) é

$$m = -\frac{1.0}{a^2}; y - b = y - \frac{1}{a} = m(x - a); \quad (5.311)$$

traduzindo para gnuplot

```
f(x) = 1.0/x;
a = -1/5.0; b = 1/a; m = -1.0/a**2; ## selecionei a= -1/5.0 caculei m;
h(x) = b + m*(x-a); ## equação da reta tangente
plot f(x), h(x), 0
```

vai aparecer na janela gráfica o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ com a reta tangente no ponto (a, b) .

(7) (V) [](F) [] A reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $(1, 1)$ é uma translação da primeira bisetriz dos eixos.

(11) (V) [](F) [] A reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $(1, 1)$ é uma translação da segunda bisetriz dos eixos e gnuplot comprova isto com a sequência de comandos

```
f(x) = 1.0/x;
m = -1.0/a**2; a = -1/5.0; b = 1/a; ## selecionei a= -1/5.0 caculei m;
h(x) = b + m*(x-a); ## equação da reta tangente
plot f(x), h(x), 0
```

gabarito:

q

5. derivada implícita

Considere para decidir quais opções são verdadeiras a parábola padrão $y = \frac{1}{x}$.

(2) (V)[](F)[] Calculando a derivadas implícita da equação $y = \frac{1}{x}$ se obtém

$$dy = -\frac{1}{x^2}dx \quad (5.312)$$

aplicando a regra de derivação polinomial a x^{-1} .

(3) (V)[](F)[] A reta tangente ao seu gráfico da hipérbole no ponto $(1, 1)$ é obtida com a seguinte sucessão operações

$$y = \frac{1}{x}; x \neq 0; (1, 1) = (a, b); \quad (5.313)$$

$$dy = -\frac{dx}{x^2}; x \neq 0; \quad (5.314)$$

$$\begin{cases} dx := x - a; \\ dy := y - b; \\ x := a; \\ y := \frac{1}{a}; \end{cases} \quad (5.315)$$

$$b = \frac{1}{a}; a \neq 0; \quad (5.316)$$

$$y - b = -\frac{x-a}{a^2} \Rightarrow y = b - \frac{1}{a^2}(x - a); \quad (5.317)$$

$$y = b + m(x - a); m = -\frac{1}{a^2}; \quad (5.318)$$

$$(a, b) = (1, 1) \Rightarrow y = 1 - (x - 1) = 2 - x; \quad (5.319)$$

A reta tangente ao gráfico da hipérbole no ponto $(1, 1)$ é uma reta paralela à segunda bissetriz dos eixos.

(5) (V)[](F)[] A reta tangente ao seu gráfico da hipérbole no ponto $(1, 1)$ é obtida com a seguinte sucessão operações

$$y = \frac{1}{x}; x \neq 0; (1, 1) = (a, b); \quad (5.320)$$

$$dy = \frac{dx}{x^2}; x \neq 0; \quad (5.321)$$

$$\begin{cases} dx := x - a; \\ dy := y - b; \\ x := a; \\ y := \frac{1}{a}; \end{cases} \quad (5.322)$$

$$b = \frac{1}{a}; a \neq 0; \quad (5.323)$$

$$y - b = \frac{x-a}{a^2} \Rightarrow y = b + \frac{1}{a^2}(x - a); \quad (5.324)$$

$$y = b + m(x - a); m = \frac{1}{a^2}; \quad (5.325)$$

$$(a, b) = (1, 1) \Rightarrow y = 1 + (x - 1) = x; \quad (5.326)$$

A reta tangente ao gráfico da hipérbole no ponto $(1, 1)$ é uma reta paralela à primeira bissetriz dos eixos.

- (7) (V) [] (F) [] Aplicando ao gráfico da equação (eq.306) junto com a reta tangente no ponto $(1, 1)$, uma rotação com ângulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ resulta numa parábola cuja tangente ao gráfico no ponto $(1, -1)$ é paralela à segunda bissetriz dos eixos.
- (11) (V) [] (F) [] Aplicando ao gráfico da equação (eq.306) junto com a reta tangente no ponto $(1, 1)$, uma rotação com ângulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ resulta numa parábola cuja tangente ao gráfico no ponto $(-1, 1)$ é paralela à primeira bissetriz dos eixos.

gabarito:

Parte III

Exercicios

Capítulo 6

Lista de exercícios final

6.1 A lista de exercícios final

Exercícios 5 A hipérbole

1. propriedades da hipérbole Partindo da equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; a, b > 0; \quad (6.1)$$

como equação duma hipérbole então

(2) (V) [] (F) []

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (6.2)$$

é também a equação duma hipérbole.

(3) (V) [] (F) [] Se (x, y) for um ponto da hipérbole então $(x, -y)$ e $(-x, y)$ também são ponto da hipérbole.

(5) (V) [] (F) [] é possível definir y como quatro funções de x , duas delas com domínio definido pela desigualdade $x \geq a$.

(7) (V) [] (F) [] é possível definir y como quatro funções de x , duas delas com domínio definido pela desigualdade $x \leq -a$.

(11) (V) [] (F) [] Para cada valor de x tal que $x \geq a$ há dois valores de y tais que os pontos (x, y) e $(x, -y)$ pertencem à hipérbole.

gabarito:

2. propriedades da hipérbole Partindo da equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1; a > 0; \quad (6.3)$$

como equação duma hipérbole então

(2) (V)[](F)[]

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1; a > 0; \quad (6.4)$$

é uma outra hipérbole obtida da anterior por uma rotação de $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(3) (V)[](F)[] A expressão

$$x^2 - y^2 = a^2; a > 0; \quad (6.5)$$

também define a mesma hipérbole.

(5) (V)[](F)[] Posso deduzir duas funções f, g definidas no domínio $x \geq a$ tal que $f(x) = -g(x)$.(7) (V)[](F)[] Posso definir a função f no domínio $|x| \geq a$ tal que $f(x) = f(-x)$ para todo x no domínio de f .(11) (V)[](F)[] Posso definir duas funções f, g no domínio $|x| \geq a$ tal que $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$ para todo x no domínio de f .

gabarito:

3. derivada implícita

Considere a hipérbole definida pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1; a > 0; \quad (6.6)$$

Verifique quais das afirmações são verdadeiras.

(2) (V)[](F)[] Calculando a derivada implícita da expressão na equação (eq. 6) se obtém

$$\frac{2x}{a^2} dx - \frac{2y}{a^2} dy = 0; a > 0; \quad (6.7)$$

(3) (V)[](F)[] Calculando a derivada implícita da expressão na equação (eq. 6) se obtém

$$\frac{2x}{a^2} dx - \frac{2y}{a^2} dy = 0; a > 0; \quad (6.8)$$

e com as substituições:

$$\begin{cases} dx := x - p; \\ dy := y - q; \\ x := p; \\ y := q; \end{cases} \quad (6.9)$$

sob a suposição de que o ponto (p, q) satisfaça a (eq. 6), obtenho a expressão a variedade linear tangente ao gráfico da hipérbole no ponto (p, q)

$$\frac{2a}{a^2}(x - p) - \frac{2y_0}{a^2}(y - q) = 0; a > 0; \quad (6.10)$$

(5) (V)[](F)[] Se $|x| \geq |a|$ posso definir as funções $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ e $g(x) = -\sqrt{x^2 - a^2}$ tal que $f(x) = -g(x)$ cujos gráficos formam um dos ramos da hipérbole definida na equação (eq.6).

(7) (V)[J(F)[] Se $|x| \geq |a|$ posso definir as funções $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ e $g(x) = -\sqrt{x^2 - a^2}$ tal que o gráfico destas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ reproduz o gráfico da hipérbole da equação (eq.6) e definindo para o ponto (p, q) previamente selecionado satisfazendo a equação da hipérbole definida pela equação (eq.6)

$$|p| > |a|, q = f(p); m = p/q; h(x) = q + m * (x - p); \quad (6.11)$$

a sequência de comandos do gnuplot

```
a=3; p = -5;
if (abs(p) > abs(a)) f(x)=sqrt(x**2 - a**2);
if (abs(p) > abs(a)) g(x)=-sqrt(x**2 - a**2);
q = f(p); m = -p/q;
h(x) = q + m*(x-p)
plot f(x), g(x), 0, h(x);
```

exibe o gráfico da hipérbole definida na (eq.6) com a reta tangente no ponto (p, q) previamente selecionado satisfazendo a equação da hipérbole na (eq.6).

(11) (V)[J(F)[] Se $|x| \geq |a|$ posso definir as funções $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ e $g(x) = -\sqrt{x^2 - a^2}$ tal que o gráfico destas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ reproduz o gráfico da hipérbole da equação (eq.6) e definindo para o ponto (p, q) previamente selecionado satisfazendo a equação da hipérbole definida pela equação (eq.6)

$$|p| > |a|, q = f(p); m = -p/q; h(x) = q + m * (x - p); \quad (6.12)$$

a sequência de comandos do gnuplot

```
a=3; p = -5;
if (abs(p) > abs(a)) f(x)=sqrt(x**2 - a**2);
if (abs(p) > abs(a)) g(x)=-sqrt(x**2 - a**2);
q = f(p); m = p/q;
h(x) = q + m*(x-p)
plot f(x), g(x), 0, h(x);
```

exibe o gráfico da hipérbole definida na (eq.6) com a reta tangente no ponto (p, q) previamente selecionado satisfazendo a equação da hipérbole na (eq.6).

gabarito:

4. derivada implícita Considere a hipérbole padrão

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}; \quad (6.13)$$

(2) (V)[J(F)[] Derivando implicitamente a equação (eq.13) obtenho

$$dy = \frac{dx}{x^2} = -x^{-2}dx; \quad (6.14)$$

seguindo, exatamente, a regra da derivação implícita de polinômios com a potência $n = -1$.

- (3) (V)[](F)[] Considerando agora um ponto $(a, b) = (a, \frac{1}{a})$ sobre a curva $y = \frac{1}{x}$ e fazendo as substituições

$$\begin{cases} dx =: x - a; \\ dy := y - b = y - \frac{1}{a}; \\ x := a; \\ y := b; \end{cases} \quad (6.15)$$

a equação da reta tangente à curva $y = \frac{1}{x}$ no ponto (a, b) é

$$m = \frac{1.0}{a^2}; y - b = y - \frac{1}{a} = m(x - a); \quad (6.16)$$

traduzindo para gnuplot

```
f(x) = 1.0/x;
a = -1/5.0; b = 1/a; m = 1.0/a**2; ## selecionei a= -1/5.0 caculei m
h(x) = b + m*(x-a); ## equação da reta tangente
plot f(x), h(x), 0
```

vai aparecer na janela gráfica o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ com a reta tangente no ponto (a, b) .

- (5) (V)[](F)[] Considerando agora um ponto $(a, b) = (a, \frac{1}{a})$ sobre a curva $y = \frac{1}{x}$ e fazendo as substituições

$$\begin{cases} dx =: x - a; \\ dy := y - b = y - \frac{1}{a}; \\ x := a; \\ y := b; \end{cases} \quad (6.17)$$

a equação da reta tangente à curva $y = \frac{1}{x}$ no ponto (a, b) é

$$m = -\frac{1.0}{a^2}; y - b = y - \frac{1}{a} = m(x - a); \quad (6.18)$$

traduzindo para gnuplot

```
f(x) = 1.0/x;
a = -1/5.0; b = 1/a; m = -1.0/a**2; ## selecionei a= -1/5.0 caculei m;
h(x) = b + m*(x-a); ## equação da reta tangente
plot f(x), h(x), 0
```

vai aparecer na janela gráfica o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ com a reta tangente no ponto (a, b) .

- (7) (V)[](F)[] A reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $(1, 1)$ é uma translação da primeira bissetriz dos eixos.

- (11) (V)[](F)[] A reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $(1, 1)$ é uma translação da segunda bissetriz dos eixos e gnuplot comprova isto com a sequência de comandos

```
f(x) = 1.0/x;
m = -1.0/a**2; a = -1/5.0; b = 1/a; ## selecionei a= -1/5.0 caculei m;
h(x) = b + m*(x-a); ## equação da reta tangente
plot f(x), h(x), 0
```

gabarito:

5. derivada implícita

Considere para decidir quais opções são verdadeiras a parábola padrão $y = \frac{1}{x}$.

(2) (V)[](F)[] Calculando a derivadas implícita da equação $y = \frac{1}{x}$ se obtém

$$dy = -\frac{1}{x^2}dx \quad (6.19)$$

aplicando a regra de derivação polinomial a x^{-1} .

(3) (V)[](F)[] A reta tangente ao seu gráfico da hipérbole no ponto $(1, 1)$ é obtida com a seguinte sucessão operações

$$y = \frac{1}{x}; x \neq 0; (1, 1) = (a, b); \quad (6.20)$$

$$dy = -\frac{dx}{x^2}; x \neq 0; \quad (6.21)$$

$$\begin{cases} dx := x - a; \\ dy := y - b; \\ x := a; \\ y := \frac{1}{a}; \end{cases} \quad (6.22)$$

$$b = \frac{1}{a}; a \neq 0; \quad (6.23)$$

$$y - b = -\frac{x-a}{a^2} \Rightarrow y = b - \frac{1}{a^2}(x - a); \quad (6.24)$$

$$y = b + m(x - a); m = -\frac{1}{a^2}; \quad (6.25)$$

$$(a, b) = (1, 1) \Rightarrow y = 1 - (x - 1) = 2 - x; \quad (6.26)$$

A reta tangente ao gráfico da hipérbole no ponto $(1, 1)$ é uma reta paralela à segunda bissetriz dos eixos.

(5) (V)[](F)[] A reta tangente ao seu gráfico da hipérbole no ponto $(1, 1)$ é obtida com a seguinte sucessão operações

$$y = \frac{1}{x}; x \neq 0; (1, 1) = (a, b); \quad (6.27)$$

$$dy = \frac{dx}{x^2}; x \neq 0; \quad (6.28)$$

$$\begin{cases} dx := x - a; \\ dy := y - b; \\ x := a; \\ y := \frac{1}{a}; \end{cases} \quad (6.29)$$

$$b = \frac{1}{a}; a \neq 0; \quad (6.30)$$

$$y - b = \frac{x-a}{a^2} \Rightarrow y = b + \frac{1}{a^2}(x - a); \quad (6.31)$$

$$y = b + m(x - a); m = \frac{1}{a^2}; \quad (6.32)$$

$$(a, b) = (1, 1) \Rightarrow y = 1 + (x - 1) = x; \quad (6.33)$$

A reta tangente ao gráfico da hipérbole no ponto $(1, 1)$ é uma reta paralela à primeira bissetriz dos eixos.

(7) (V)[](F)[] Aplicando ao gráfico da equação (eq.13) junto com a reta tangente no ponto $(1, 1)$, uma rotação com ângulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ resulta numa parábola cuja tangente ao gráfico no ponto $(1, -1)$ é paralela à segunda bissetriz dos eixos.

(11) (V)[](F)[] Aplicando ao gráfico da equação (eq.13) junto com a reta tangente no ponto $(1, 1)$, uma rotação com ângulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ resulta numa parábola cuja tangente ao gráfico no ponto $(-1, 1)$ é paralela à primeira bissetriz dos eixos.

gabarito:

Índice Remissivo

- C**
 - complexos, 5
- N**
 - naturais, 5
- Q**, 17
 - rationais, 5
 - representação geométrica, 19
- R**
 - números reais, 22
 - reais, 5
- S**¹
 - transferidor, 98
- Z**
 - inteiros, 5
- abrir
 - as contas, 31
- abstração, 6, 7
- adição
 - associatividade, 9
 - comutatividade, 9
 - elemento neutro, 9
 - inverso, 9
- adição em **Z**, 12
- álgebra, 5
- algébrico
 - número, 23
- anel
 - dos inteiros, 12
- área
 - produto vetorial, 70
- Arquimedes
 - constante de, 21
- arquimediana
 - propriedade, 22, 38
- assíntota, 157
- assintótico
 - comportamento, 27
- assunto da
 - Álgebra, 31
- axioma
 - da escolha, 32
- axiomas de
 - Peano, 7
- axiomas de Peano, 12
- base
 - hexadecimal, 5
- cálculo da dimensão
 - regra prática, 142
- Cantor
 - salto da cardinalidade, 37
- cardinalidade
 - complexidade, 37
 - de **R**, 37
 - do contínuo, 37
 - c*, 37
 - salto
 - é um axioma, 37
 - salto de, 26, 37
- Cauchy
 - critério de, 33
 - método prático
 - limite, 36
 - sucessão de, 36
 - teste de, 36
 - método prático, 36
- Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz
 - desigualdade, 54
- Cauchy-Riemann
 - matriz, 137
 - matriz de, 158
 - matrizes de, 144
- Charles
 - lei, 117
- círculo

- condição necessária, 121
- equação do, 93, 94, 97
- trigonométrico, 98
- unitário
 - S^1 , 40
- classe das
 - sucessões convergentes, 33
 - sucessões divergentes, 33
- classes
 - de equivalência, 19
- codificação, 108
 - binária, 5
- coeficiente
 - angular, 63
 - derivada, 63
- coeficiente angular, 62
 - instantâneo, 87
 - instantâneo, 89
 - reta, 50, 51
- coeficiente linear
 - reta, 52
- Cohen
 - Paul, 37
- Combinatória
 - Análise, 7
- compasso
 - eletrônico, 128
- completação
 - de quadrados, 95–97
- complexidade
 - cardinalidade, 37
- complexo
 - número, 16
- computador
 - teste
 - de expressões algébricas, 139
- cone
 - eixo, 112
 - geratriz, 112
- cônica
 - parábola, 127
- conjugado
 - u , 40
- conjunto
 - quociente, 45
- Conjunto
 - quociente, 45
- contabilidade
 - dívida, 9
- contas
 - abrir, 31
- Copérnico, 102
- corpo, 18, 36
 - comutativo, 18
- critério
 - de Cauchy, 33
- crivo de Eratóstenes, 15
- curva
 - fechada, 93
- Debian
 - distribuição
 - Gnu Linux, 15
- Debian/gnu/Linux
 - factor, 16
- Debian/Gnu/Linux, 21
- decodificação, 108
- Decomposição
 - canônica, 45
- Dedekind
 - cortes, 21
- definição
 - geométrica
 - das operações, 20
- derivada, 63, 100, 101
 - coeficiente angular, 63
 - implícita, 90, 101, 142
 - esfera, 100
 - parcial, 63
 - variedades tangentes, 65
- Derivada dos polinômios, 87
- derivada implícita, 142
- derivada parcial
 - gradiente, 62
- derivadas parciais, 63
- desigualdade
 - triangular, 117
- diâmetro
 - do vazio, 142
- difração
 - luz, 101
- dimensão, 48
 - do vazio, 142
 - regra prática, 97
 - vazio, 142
- dinâmico
 - sistema, 104
- diretriz

- da parábola, 136
- hipérbole, 154
- distância, 93
 - desigualdade triangular, 53
 - desigualdade triangular, 65
 - ponto a reta, 55
 - produto escalar, 53
 - reflexividade, 53, 65
 - simetria, 53, 65
- distribuição
 - Linux
 - Debian, 15
- divisão euclidiana
 - quociente
 - resto, 14
- divisor
 - de zero, 36
- dízima
 - não periódica, 5, 23
 - periódica, 5, 23
 - geratriz, 23
- dízimas
 - limite, 26
 - têm limite, 24
- editor de gráficos
 - xfig, 155
- elipse
 - equação, 111
 - equação padrão, 111
 - excentricidade, 102, 112
 - linha
 - duas taxas, 129
- equação
 - da elipse, 101
 - da reta, 148
 - determinante, 39
 - em $\mathbf{Z}$, 9
 - paramétrica
 - da reta, 148
- equação paramétrica
 - da reta, 122, 123, 148
- Equação vetorial da reta, 61
- equações
 - paramétricas, 137
- equivalência
 - classe, 19
 - classe de, 18
 - critério
 - de Cauchy, 34
 - relação de, 18
- erro
 - Foi corrigido, 16, 34
- escolha
 - axioma da, 32
- espaço
 - com produto escalar, 53
 - é infinito, 38
- espaço métrico, 53, 65
- estabilidade, 127
- euclidiana
 - geometria, 16, 147, 148
- Euler-De-Moivre
 - fórmula, 98
- excentricidade
 - elipse, 112
- existência
 - condição, 33
- experimento
 - fração de Leibniz, 91
- factor
 - Debian/gnu/Linux, 16
 - programa
 - fatora números, 15
- fatorial
 - de zero, 7
- figura
 - π , 35
 - $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, 23
 - ângulo, 54
 - ângulo de incidência, 99
 - ângulo de reflexão, 99
 - círculo
 - reta tangente, 92
 - círculo, 94
 - tangente, 119
 - tangente e raio, 101
 - círculo, reta, 120
 - Cone
 - duas folhas, 105
 - cônicas, 106
 - converge
 - para zero, 27
 - coordenadas, 38
 - cortes do cone, 109
 - derivada, 88
 - distância

- entre dois pontos, 52, 64
- ponto reta, 56
- ponto-reta, 60
- divisão inteira, 14
- elipse, 103, 112
- elipse no cone, 110
- Equação
 - da reta, 74
- exercícios
 - Círculos, 114
- fonte duma imagem, 6
- frações equivalentes, 19
- função, 44, 45
 - contradomínio, 44
 - diagrama de Venn, 44
 - domínio, 44
 - equação, 47
 - gráfico, 46
- hipérbole equilátera, 161
- hipérbole padrão, 155, 157
- hipérbole plana, 158
- integral, 81
- medidas da elipse, 110
- multiplicação geométrica, 20
- ótica geométrica, 99
- paquímetro
 - sucessão nula, 29
- parábola, 128, 131, 134, 135, 152
- parábolas, 132
- parábolas diferentes, 138
- parábolas quase idênticas, 138
- parâmetro
 - manipular, 138
- plano cartesiano, 72, 73
- produto
 - vetorial, 70
- racionais e a reta, 19
- reta
 - lugar geométrico, 49
 - vetor perpendicular, 50
- reta numérica, 24
- reta perpendicular, 133
- reta tangente, 87, 133
- rotação
 - parábola padrão, 137
- soma de frações, 18
- Soma de Riemann, 83
- tangente e raio
 - no círculo, 101
- triângulo, 78
- finita
 - indução, 8
- Física
 - vetores da, 69
- Física Geométrica, 132
- forma
 - polar, 68
- formalismo
 - praticidade, 30
- fórmula
 - de Baskhara, 39
 - de Euler-de Moivre, 159
 - Euler-De-Moivre, 98
- Fórmula
 - de Taylor, 133
- fração, 16
 - de Leibniz, 89
 - denominador, 16
 - imprópria, 16
 - irredutível, 17
 - numerador, 16
 - própria, 16
- frações
 - equivalentes, 19
- função, 43
 - álgebra, 48
 - bijetiva, 44
 - complexa, 40
 - conjunto de chegada, 43
 - conjunto de saída, 43
 - conjuntos dos valores, 44
 - constante, 44
 - contradomínio, 43, 48
 - domínio, 43, 48
 - injetiva, 44
 - um gráfico, 46
- função impar, 155
- função integrável, 81
- Gauss
 - plano de, 19
- geogebra, 60
- geometria
 - algébrica, 94
- geometria euclidiana, 16
- geratriz, 23
- gnuplot, 48
- Gödel, 37

- gradiente
 - derivada parcial, 62
- grupo
 - aditivo, 18
 - $\mathbf{Z}$, 10
 - multiplicativo, 18
- grupo aditivo, 11
- grupo comutativo, 18
- hipérbole, 154
 - degenerada, 108, 162
 - padrão, 154, 155
 - focos, 155
 - função impar, 155
- hiperplano, 64
- homotetia, 138
 - rotação, 136
- ideal
 - maximal, 36
- imagem
 - código fonte, 5
- indução
 - finita, 8
- indução finita, 8
- ínfimo
 - supremo, 40
- infinitesimal, 142
 - Cálculo, 90
- inteiros
 - adição, 9
 - um anel, 12
- Inteligência
 - Humana, 16
- interpretação geométrica
 - dos racionais, 19
- intervalos
 - encaixados, 21
- invariância, 131, 162
- isomorfismo, 159
- Kepler, 102
- Kronecker
 - Leopold, 1
- lei
 - do cancelamento, 7
- Leibniz
 - fração de, 89, 91
 - experimento, 91
- limite, 21, 25, 27
 - assíntota, 162
 - dízimas, 26
 - propriedades, 36
 - valor
 - no ∞ , 36
- linear
 - variedade, 126
- linguagem
 - defeitos, 46
 - do império, 29
- lógica, 37
- lógica matemática, 5
- losango
 - área
 - produto vetorial, 70
- luz
 - difração, 101
 - raio de, 99
- macetes
 - métodos do Cálculo, 142
- matriz
 - de Cauchy-Riemann, 136, 137, 144, 158
 - expandida, 125
- média, 22
- mercado
 - videogame, 34
- método
 - de Dedekind, 24
- métodos do Cálculo
 - macetes, 142
- metonímia
 - rotação, 157
- métrico
 - espaço, 53, 65
- módulo
 - dum inteiro, 13
- módulo máximo, 40
- morfismos, 45
- movimentos rígidos
 - rotação, 162
 - translação, 162
- multiplicação
 - $\mathbf{Z}$, 11
- múltiplo, 7
- número, 5

- algébrico, 23
- complexo, 9
- fracionário, 9
- real, 9
 - irracional, 21
 - racional, 21
- número complexo, 39
- número primo, 7
- número real, 21
- números
 - naturais, 5
- números complexos, 5
- números inteiros, 5, 9
- números naturais, 5
- números racionais, 5, 16
- números reais, 5
- ondas, 135
- ordem
 - relação de, 38
- paquímetro
 - matemático, 27
 - virtual, 27
- parábola, 127
 - antena, 129
 - espelho, 134
 - foco, 129
 - forno, 130
 - gráfico, 151
 - ótica, 129
 - raio incidente, 132
 - raio refletido, 132
 - vértice, 129
- paramétricas
 - equações, 137
- Pascal
 - Niklaus Wirth, 159
 - triângulo de, 37
- Pascal, Blaise, 16
- Peano
 - axiomas de, 7, 12
- Peano-Dedekind
 - axiomas de, 1
- plano
 - cartesiano, 71
 - coordenado, 38
 - digitalizar, 38
 - feixe de planos, 107
 - numerizar, 38
- polar
 - forma
 - número complexo, 40
- polinômios
 - diferença, 85
- primo com
 - outro número, 15
- princípio
 - indução finita, 8
- produto
 - exterior, 71
 - externo, 67
 - vetorial, 67, 68
 - anticomutativo, 70
- produto escalar
 - espaço com, 53
- produto externo
 - módulo, 69
- produto multilinear
 - alternado, 68
- produto vetorial
 - anticomutativo, 68
 - área, 70
 - Regra BAC_CAB, 71
- programa
 - pernicioso, 61
- progressão aritmética
 - salto
 - número primo, 15
 - soma
 - potências, 85
- proporção, 18
- propriedades
 - do limite, 37
- Python
 - comunidade, 16
 - Guido Rossi, 16
- Python3, 30
- quadrados
 - completação, 95
- quatérnions, 16
- quociente
 - $\text{mod}(f)$, 45
- racionais
 - interpretação geométrica, 19
- racional

- número, 16
- raio
 - incidente, 129
 - refletido, 129
- real
 - número, 38
- regra
 - do parafuso, 54
 - do saca-rolha, 54
- regra prática
 - cálculo da dimensão, 142
- relação
 - de equivalência, 18
- relação de ordem, 22
- relação fundamental
 - trigonometria, 98
- representação
 - de $\mathbb{C}$, 159
- reta
 - coeficiente angular, 50–52
 - coeficiente linear, 52
 - é infinita, 38
 - geométrica, 38
 - numérica, 38
 - numerizada, 38
- reta numérica, 22, 24
 - $\mathbb{R}$, 38
- Riemann
 - soma de, 83
- Rosetta, 104
- rotação, 162
 - sentido positivo, 157
- saca-rolha
 - regra, 54
- salto
 - de cardinalidade, 36, 37
- salto da
 - cardinalidade
 - Cantor, 37
- semiplano, 130
- semirreta
 - negativa, 20
 - positiva, 20
- singularidade
 - ponto de, 136
- solar
 - fogão, 130
 - forno, 130
- soma
 - potências
 - progressão aritmética, 85
- soma de Riemann, 83
- somas de Riemann
 - uniformes, 83
- sucessão
 - converge para zero, 28, 32
- sucessões
 - de Cauchy, 22
- sucessor, 14
- supremo
 - ínfimo, 40
- teorema
 - fundamental
 - da Aritmética, 15
- teoria dos conjuntos
 - de ZFC, 37
- teste
 - de expressões algébricas
 - computador, 139
- transferidor
 - S^1 , 98
- transformação
 - matricial, 136
- translação, 162
 - vertical, 138
- triângulo
 - de Pascal, 7, 16
- triedro
 - positivo, 54
- trigonometria
 - relação fundamental, 98
- troca de sinal, 10
- Tycho Brae, 102
- variantes
 - hipérbole equilátera, 163
 - hipérbole padrão, 163
- variedade, 143
 - não linear, 93
- vazio
 - diâmetro, 142
 - dimensão, 142
- vértice
 - da parábola, 128
- vetores
 - da Física, 69

orientação, 54

wikipedia, 127

Wirth, Niklaus

Pascal, 159

xfig

editor de gráficos, 155

Yitang Zhang

salto

números primos, 15

Zermelo-Fraenkel, 37

zero

um número natural, 7

referências

- [Cou61] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus I*. Ed. por Blackie e Son Limited. Blackie e Son Limited - London, 1961.
- [Pra07] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Ed. por Tarcisio Praciano-Pereira. Sobral Matematica, 2007.
- [WKo10] Thomas Williams, Colin Kelley e many others. *gnuplot, software to make graphics*. Rel. técn. <http://www.gnuplot.info>, 2010.