Modelagem com campos de vetores tangentes

Praciano-Pereira, T.

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
11 de agosto de 2007
tarcisio@member.ams.org
pré-prints do Curso de Matemática de Sobral
no. 2007.2
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Se

$$\mathbf{R}^3 \supset \Omega :\xrightarrow{F} \mathbf{R} \tag{1}$$

$$\mathbf{R}^3 \supset \Omega :\xrightarrow{G} \mathbf{R} \tag{2}$$

os gráficos $graf(F), graf(G)$ são variedades de dimensão 3, estão contidos no $\mathbf{R}^4$, se considerarmos as variedades de nivel 0

$$F(x,y,z) = 0 \ ; \ G(x,y,z) = 0 \tag{3}$$

temos duas variedades dimensão dois, dois exemplos de *superfície* que podemos considerar como sendo o caso mais geral. Uma parametrização destas superfícies conduz aos *atlas* da Geometria Diferencial que desejamos evitar, aqui estamos trabalhando com um modelo intrínseco de superficies que acreditamos sejam mais adaptáveis à modelagem computacional.

Neste trabalho vamos discutir a interseção destas variedades que é, em princípio uma curva, variedade de dimensão 1, mas, ver [2, página 480-481], é fácil construir exemplos de situações bem complicadas como uma família de pontos discretos (isolados) no plano.

Pode ser extremamente difícil obter o gráfico desta *curva* mas é possível visualizar um campo vetorial de vetores tangentes a este gráfico. O objetivo deste artigo é mostrar como se pode fazer esta construção.

palavras chave: campo de vetores tangentes, modelagem computacional, derivada implícita, gnuplot.

1 Introdução

Considere as duas funções diferenciaveis, de classe $\mathcal{C}^1$

$$\mathbf{R}^3 \supset \Omega : \xrightarrow{F} \mathbf{R} \tag{4}$$

$$\mathbf{R}^3 \supset \Omega : \xrightarrow{G} \mathbf{R} \tag{5}$$

os gráficos $graf(F), graf(G)$ são variedades de dimensão 3, estão contidos no $\mathbf{R}^4$, se considerarmos as variedades de nivel 0

$$F(x, y, z) = 0 \ ; \ G(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

temos duas variedades dimensão dois, dois exemplos de *superfície* que podemos considerar como sendo o caso mais geral. Uma tentativa de parametrização destas superfícies explicitando os parâmetros livres, conduz aos *atlas* da Geometria Diferencial que vamos aqui evitar trabalhando com um modelo intrínseco de superfícies que acreditamos sejam mais adaptáveis à modelagem computacional.

Neste trabalho vamos discutir a interseção destas variedades que pode ser uma curva, variedade de dimensão 1, mas em [**?**, página XXX], se mostra que é fácil construir exemplos de situações bem complicadas como uma famía de pontos discretos (isolados) no plano. Em [**?**] apresentamos um teste que separa razoávelmente estas situações, digamos, patológicas.

Pode ser extremamente difícil obter o gráfico desta *curva* mas é possível visualizar um campo vetorial de vetores tangentes a este gráfico. O objetivo deste artigo é mostrar como se pode fazer esta construção.

A metodologia é muito simples, vamos usar *derivada implícita* para construir rapidamente uma notação clássica porém adaptada aos métodos computacionais-gráficos que temos como objetivo: modelar com um campo de vetores a interseção de duas variedades de dimensão 2.

Vamos partir da expressão intrínseca de uma superfície, uma variedade de dimensão dois, como variedade de nivel 0

$$F(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

em que F é uma função diferenciável

$$\mathbf{R}^3 \supset \Omega : \xrightarrow{F} \mathbf{R} \tag{8}$$

Vamos desenvolver todos passos necessários, embora de forma resumida de modo que este artigo possa ser lido por quem tenha terminado os Cálculos da graduação embora seja preciso completar detalhes que não seria razoável esperar em literatura deste tipo.

Começaremos pela equação da reta no $\mathbf{R}^n$ mostrando como podemos escrever suas equações paramêtricas para em seguida discutir a equação da reta definida pela interseção de duas variedades lineares de dimensão dois que vai produzir a linguagem adequada para o caso das curvas obtidas como interseção de variedades de dimensão dois.

O tipo de aplicação que este material pode encontrar é em simulação de soluções equações diferenciais do tipo

$$grad(u) = f \tag{9}$$

Na primeira seção do trabalho vamos desenvolver as questões de geometria necessárias a apresentação da terminologia, na segunda seção vamos apresentar a forma computacional. O leitor interessado poderá baixar um programa em `C` que é auto-instrutivo e que vai gerar toda a modelagem computacional aqui descrita para um determinado exemplo.

2 Variedades e suas equações diferenciais

2.1 A reta no $\mathbf{R}^n$

Um método empírico para o cálculo da dimensão de uma variedade consiste em considerar o número de variáveis subtraido de uma unidade, que é o número real de variáveis livres em uma expressão "algébrica". Funciona mesmo no caso de equações paramétricas, neste caso já se tem evidenciado o número efetivo de variáveis livres, é o número de parâmetros.

Se considerarmos a expressão da variedade algébrica linear

$$A_1(x - a_1) = A_2(x - a_2) = \ldots = A_{n-1}(x - a_{n-1}) = A_n(x - a_n) \tag{10}$$

que por ser um sistema de $n - 1$ equações com n variáveis deixa livre uma variável definindo, pela *regra prática*, uma variedade de dimensão 1, portanto é a equação de uma reta no $\mathbf{R}^n$.

Um caso particular da equação (10) é

$$A(x - a) = B(y - b) = C(z - c) \tag{11}$$

Se algum dos coeficientes A, B, C for zero caimos numa equação plana. Supondo todos diferentes de zero podemos deduzir as equações paramêtricas da reta:

$$y - b = \tfrac{A}{B}(x - a) \ ; (z - c) = \tfrac{A}{C}(x - a) \tag{12}$$

$$(x - a, \tfrac{A}{B}(x - a), \tfrac{A}{C}(x - a)) \tag{13}$$

da equação (13) concluimos que a reta é paralela ao vetor

$$(1, \frac{A}{B}, \frac{A}{C}) \parallel (BC, AC, AB) \tag{14}$$

passando pelo ponto $P = (a, b, c)$.

Observando que na expressão do vetor paralelo à reta, na coordenada de ordem i falta o iésimo fator, considerando os coeficientes A, B, C na ordem natural, a demonstração do teorema seguinte é uma adaptação direta destes cálculos

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1** *Equação da reta*

Considere os números reais diferentes de zero

$$A_1, \dots, A_i, \dots, A_n \ ; \ M_i = \Pi_{k=1, k\neq i}^{n} A_k \tag{15}$$

A equação da reta paralela ao vetor

$$(M_1, \dots, M_n) \tag{16}$$

passando pelo ponto

$$P = (a_1, \dots, a_n) \tag{17}$$

é

$$(A_1(x_1 - a_1) = \dots = A_n(x_n - a_n) \tag{18}$$

Se algum dos números A_i for zero, a expressão do problema cai de um nível de dimensão, por número zeros, de formas que só interessa apresentar o teorema no caso em que os números todos sejam diferentes de zero.

2.2 Interseção de planos

Em particular nos interessa descrever a equação da reta determinada pela interseção de dois planos, mais a frente serão os planos tangentes a duas variedades que se interceptam. Vamos redigir o problema para $\mathbf{R}^3$. A generalização para dimensão n é segue o mesmo padrão da redação que apresentamos acima.

Considere os planos

$$A_1(x-a) + B_1(y-b) + C_1(z-c) = 0 \tag{19}$$
$$A_2(x-a) + B_2(y-b) + C_2(z-c) = 0 \tag{20}$$

que por construção passam no ponto $P = (a, b, c)$. Eles vão determinar uma reta se não forem coincidentes, se e somente se um dos determinantes menores de ordem 2 da matriz

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}; D_2 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{bmatrix}; D_3 = \begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

for diferente de zero. Esta condição é visível das contas que faremos a seguir.

Suponha que o determinante menor, D_3, seja diferente de zero, então podemos explicitar y, z na equações (19), (20)

$$A_1(x-a) + B_1(y-b) + C_1(z-c) = 0 \tag{23}$$
$$A_2(x-a) + B_2(y-b) + C_2(z-c) = 0 \tag{24}$$
$$C_2A_1(x-a) + C_2B_1(y-b) + C_2C_1(z-c) = 0 \tag{25}$$
$$C_1A_2(x-a) + C_1B_2(y-b) + C_1C_2(z-c) = 0 \tag{26}$$

$$(A_1C_2 - A_2C_1)(x-a) + (B_1C_2 - B_2C_1)(y-b) = 0 \quad (27)$$

$$D_2(x-a) + D_3(y-b) = 0 \ ; \ D_2 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$(y-b) = -\tfrac{D_2}{D_3}(x-a) \quad (29)$$

$$B_2A_1(x-a) + B_2B_1(y-b) + B_2C_1(z-c) = 0 \quad (30)$$

$$B_1A_2(x-a) + B_2B_1(y-b) + B_1C_2(z-c) = 0 \quad (31)$$

$$(A_1B_2 - A_2B_1)(x-a) + (B_2C_1 - B_1C_2)(z-c) = 0 \quad (32)$$

$$D_1(x-a) - D_3(z-c) = 0 \ ; \ D_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$(z-c) = \tfrac{D_1}{D_3}(x-a) \quad (34)$$

Deste conjunto de equações deduzimos y, z como função de x, (14), (34), definindo uma variedade com *uma única variável livre*, uma variedade linear de dimensão 1, uma reta, cujas equações paramétricas são

$$(x-a, \frac{D_2}{D_3}(x-a), \frac{D_1}{D_3}(x-a)) \quad (35)$$

Se os determinantes D_1, D_2 forem diferentes de zero podemos escrever a equação na forma mais elegante

$$x - a = \frac{D_3}{D_2}(y-b) = \frac{D_3}{D_1}(z-c) \quad (36)$$

da qual podemos deduzir

$$D_1D_2(x-a) = D_3D_1(y-b) = D_3D_2(z-c) \quad (37)$$

problema: *Se algum dos determinantes menores for zero o problema cai de dimensão no sentido de que podemos eliminar uma variável que é dependente da outra. Qual será a interpretação quando $D_1 = 0$ ou $D_2 = 0$? em termos das superfícies, porque em princípio o sistema de equações se reduz a um ponto. A resposta parece ser que as duas superfícies são tangentes determinando um único ponto e tendo um único plano tangente. A curva interseção colapsa para um ponto.*

2.3 Interseção de planos tangentes

Vamos aplicar as contas que fizemos ao caso de planos tangentes a duas variedades no ponto comum $P = (a, b, c)$. Então as nossas hipóteses agora serão

Hipótese 1 (interseção de variedades) *Variedades que se interceptam*

- *que as duas variedades $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ que tem um ponto comum*[1]*;*

[1] será mais do que um ponto comum, uma curva será a interseção destas variedadeis, em geral, exceto nos casos patológicos. . .

- $F(a,b,c) = G(a,b,c) = 0$

A jacobiana[2] deste sistema é a matriz

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{38}$$

Se aplicarmos esta expressão ao ponto $P = (a,b,c)$ vamos escrever as equações dos planos tangentes a cada uma das variedades neste ponto

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{a,b,c)}(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b,c)}(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}|_{(a,b,c)}(z-c) = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}|_{(a,b,c)}(x-a) + \frac{\partial G}{\partial y}|_{(a,b,c)}(y-b) + \frac{\partial G}{\partial z}|_{(a,b,c)}(z-c) = 0 \tag{40}$$

e, se algum dos determinantes menores, de ordem 2, deste sistema for diferente de zero então os planos tangentes são diferentes determinando uma reta tangente à interseção das variedades[3] $F(x,y,z) = 0, G(x,y,z) = 0$, supondo que o determinante diferente de zero seja[4]

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{41}$$

podemos explicitar y, z por semelhança com os cálculos feitos com a equação da reta na seção anterior

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(x-a) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}(y-b) = 0 \tag{42}$$

$$y - b = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}}(x-a) \tag{43}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}(x-a) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(z-c) = 0 \tag{44}$$

$$z - c = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}(x-a) \tag{45}$$

3 O modelo computacional

Referências

[1] Buck, R. C. and Buck E. F. *Advanced Calculus* McGraw-Hill - 1965

[2] M H Protter & C B Morrey Jr *Modern Mathematical Analysis* Addison-Wesley Publishing Company, Inc 1964

[2] a notação que estamos usando para jacobiana em geral é usada para os determinantes, vamos adotar esta prática

[3] a análise feita na seção anterior se aplica aqui com restrições, os determinantes podem se anular em um ponto o que significa que a curva-interseção seria osculante a um plano, discutiremos esta questão posteriormente

[4] deixaremos de indicar que as derivadas parciais estão sendo calculadas no ponto $P = (a,b,c)$, para simplificar a notação