Otimização com Perturbações de caminhos

T. Praciano-Pereira

Sobral Matemática
5 de março de 2009
tarcisio@member.ams.org
pré-prints da Sobral Matemática
no.2009.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

In this paper I am making simulations of pertubations of a path and presenting some scripts written in gnuplot which realize graphically the perturbation. The result of this paper is the algorithm to produce the paths to use with variational method for otimization of functionals. I have produced the algorithm to produce the paths around a given (suspected) otimal path using gnuplot. But the implementation of the variational method is to be developped in forth coming paper. Keywords: algorithm do produce paths, variational calculus, otimization along paths.

Neste artigo estou fazendo algumas simulações de perturbação de um caminho e apresentando alguns scripts escritos em gnuplot que mostram o resultado da simulação graficamente. O artigo apresenta ao final um script em gnuplot que produz uma família de caminhos em torno de um caminho conhecido como é necessário para aplicar o método variacional. Dois gráficos foram produzidos mostrando a aplicabilidade do método, um usando uma segmento de reta e outro um segmento de parábola. Porém a aplicação do método fica para um trabalho que se encontra em preparação. Palavras chave: algoritmo para produzir caminhos, cálculo variacional, otimização ao longo de caminhos.

1 O método variacional

Nesta seção vou dar exemplo de funcional em que é bem conhecido na aplicação do método variacional e apontado como histórico, a equação diferencial da braquitocrona obtida por Bernouilli. Vou seguir de perto, embora resumidamente, as descrições feitas em [11, pag 25-30], [15, Brachistocrone] como exemplo do método variacional onde se sugere Johann Bernouilli como inaugurador do método ao resolver o problema da *curva de tempo mínimo, braquistócrona*. Este problema é usado aqui como motivação para a construção de um algoritmo computacional a ser aplicado com o método variacional, portanto a única novidade que pode haver neste artigo está na segunda parte, o algorithmo computacional para construção de caminhos num entorno, uma vizinhança tubular, de um caminho conhecido e suspeito como o sendo o que otimiza o funcional, na segunda seção do artigo.

A idéia, no método variacional, é a de que a solução de um problema, em vez de ser procurada diretamente, venha através da minimização, ou maximização de um funcional (integral) sobre uma região. A *braquistócrona, curva do tempo mínimo* representa a solução para descrever o caminho da luz trafegando-se dentro em um determinado meio. É interessante que que este caso coincide, como solução, na determinação da curva de um cabo suspenso.

Os ingredientes do método estão associados

- a um operador, uma integral, ou mais geralmente uma transformação linear, aqui representados por uma equação diferencial;
- uma classe de variedades (curvas, superfícies) admissíveis;

Para motivar a construção do algoritmo, que é o objetivo deste artigo, vou rapidamente mostrar como o método variacional funciona usando a *braquistócrona*, como motivação, entretanto a aplicação do método vai ser desenvolvido em outro artigo.

2 Altoritmo para construção de caminhos

Nesta seção vou rapidamente deduzir a equação diferencial da braquistócrona em seguida construir um algoritmo que produz caminhos entre dois pontos dados em torno de um caminho existente suspeito como sendo o melhor.

Em [7] há uma descrição da lei de Snell e como chegar experimentalmente na *braquistócrona*, e na bibliografia você pode encontrar textos com notas históricas do problema "encontrar a curva de tempo mínimo" associado a lei de Snell. Snell foi um Matemático e Físico do século 16, ele descobriu a relação entre os ângulos de incidência e refração da luz ao atravessar a interface entre duas regiões, em [15, Snell][1] você pode encontrar uma discussão sobre a prioridade de Snell sobre esta descoberta.

Esta questão está intimamente associada ao problema da conexão de um cabo flexível ligando o ponto A ao ponto mais abaixo, B, de modo que uma capsula deslize sem atrito ao longo da curva em tempo mínimo. Galileu pensava ser um arco de círculo e anos depois, em 1696 Johann Bernouilli inaugurou o *método*

[1] Indevidamente usada por Descartes, há quem chame a lei de Snell-Descartes.

variacional descobrindo que curva seria, em [7] se pode ver como se comprova a lei de Snell que está associada a braquistócrona.

O *princípio da conservação da energia* nos diz que a velocidade da capsula ao atingir um ponto da curva é determinado apenas pela perda de energia potencial[2], se desprezarmos o atrito.

Usando, por um momento, a notação tradicional, s, v, a para as equações da *posição, da velocidade e da aceleração*, temos

$$v(t) = \sqrt{2gs(t)} \equiv v^2(t) = 2gs(t) \tag{1}$$
$$f'(x) = \sqrt{2gf(x)} \equiv f'(x)^2 = 2gf(x) \tag{2}$$
$$sin(\beta) = cos(\alpha) \tag{3}$$
$$cos(\alpha) = \frac{1}{sec(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{1+tan^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \tag{4}$$
$$\frac{sin(\beta)}{f(x)} = c = \frac{1}{f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}} \tag{5}$$
$$y^2(1+y'^2) = C \tag{6}$$

A equação (1) e uma reformulação da equação (2). A equação (2) nos diz que a o quadrado da velocidade é proporcional à posição percorrida, sendo o coeficiente de proporcionalidade $2g$, quando em queda livre, [11, página 20]. Na equação (3) considero os dois ângulos $\alpha, -\beta$, num ponto $\underline{x}$, genérico da curva, figura (1) página 4, eles são complementares, logo

$$cos(\alpha) = sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$$

porque a tangente é o coeficiente angular da reta tangente no ponto, portanto a derivada da curva-posição, $f(x)$, que está expresso na equação (4). Na equação (5), no primeiro membro, está expressa a lei de *Snell*[3] e no segundo membro aparece a equação diferencial da braquistócrona que foi re-escrita na equação (6), como uma equação diferencial de primeira ordem e do segundo grau.

É a expressão que aparece na equação (6) que vou transformar num problema de Cálculo Variacional, nela tenho uma função

$$f(x, y, y_x) = y^2(1 + y_x)$$

[2]Por exemplo, o pêndulo perde energia potêncial que se transforma em energia cinética (mensurável como quantidade de movimento) mais calor devido ao atrito, consequentemente ao recuperar a energia potêncial, perdendo energia cinética e produzindo calor não pode retornar à mesma altura inicial, mas em qualquer ponto da trajetória a posição é diretamente proporcional à energia potencial que o objeto tiver.

[3]A equação (1) em [11, página 27] é confusa, o autor usa v no denominador quando deveria usar s de acordo com a notação s, v, a para as equações do *movimento*, da *velocidade* e da *aceleraçao*.

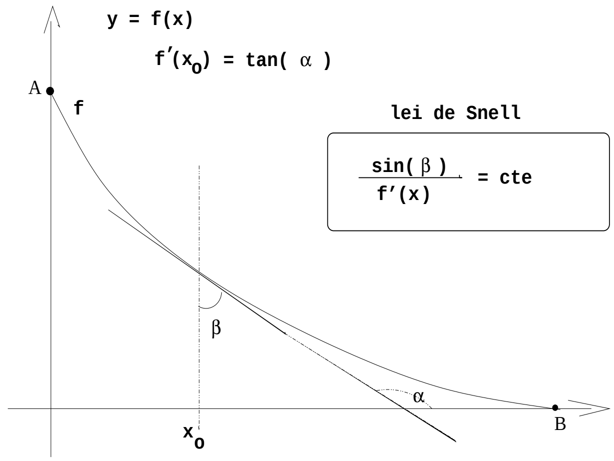

Figura 1: A reta tangente à braquistócrona

e a metodologia consiste em maximar (minimizar) a integral

$$F(y, y_x) = \int_{x_1}^{x^2} f(t, y, y_t)dt = \int_{x_1}^{x^2} y^2(1 + y_x)dx \ ; \ x \in [x_1, x_2] \tag{7}$$

$$\int_{x_1}^{x^2} f(t, \omega, \omega_t)dt \ ; \ \omega = y + \zeta \tag{8}$$

e para isto preciso uma família de curvas que liguem dois pontos dados, sobre as quais vou poder otimizar a integral. Na próxima seção vou construir o algoritmo computacional que permite a construção desta família de curvas.

3 A construção do algoritmo

A soma $y + \zeta$ é formada de uma curva fechada, ζ, que sai da origem e volta para a origem parametrizada no mesmo intervalo que o gráfico de y e que se encontra toda dentro de uma bola $\mathcal{B}(0, \delta)$, na métrica do espaço que contém o $graf(f)$, no presente caso o $\mathbf{R}^2$.

A figura (2) página 5, ilustra a ideia. A curva fechada ζ, representa uma perturbação da curva $graf(y)$, e na mesma figura você pode ver duas "perturbadas", α, β assim obtidas: se ζ_1, ζ_2 for duas "pertubações", então

$$\alpha = graf(y) + \zeta_1 \ ; \ \beta = graf(y) + \zeta_2 \tag{9}$$

e vou usar uma perturbação menos geral usando o que construí na seção **??**, então, se p for uma probabilidade[4] como discuti na seção **??**, com suporte no

[4]Eu não preciso de probabilidades, mas assim a nomenclatura fica mais simples.

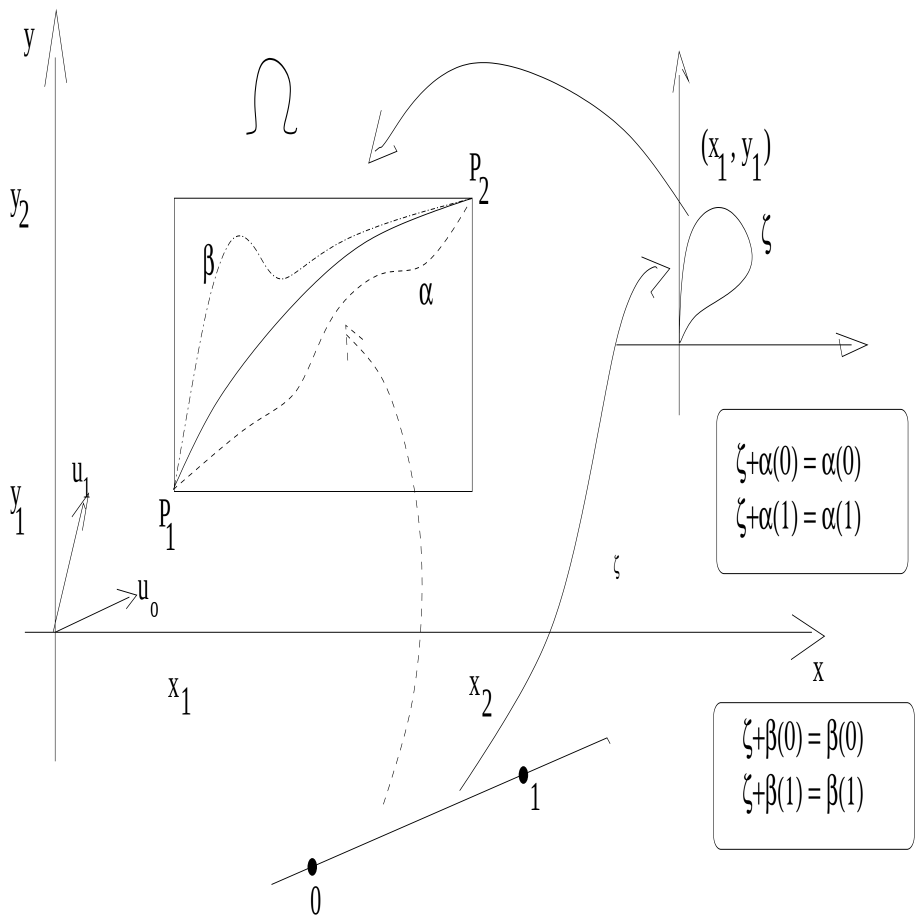

Figura 2: Simulando caminhos entre dois pontos.

intervalo $[0, 1]$ e ρ for "pequeno", a seguinte sucessão de operações produz a perturbação ρy

$$p \text{ é uma probabilidade com suporte } [0,1] \tag{10}$$

$$\lambda = |x_2 - x_1| \text{ a medida de } [x_1, x_2] \tag{11}$$

$$\zeta(x) = p(\tfrac{x}{\lambda}) \text{ ajusta à medida de } [x_1, x_2] \tag{12}$$

$$\zeta(x) = p(\tfrac{(x-x_1)}{\lambda}) \text{ translata o suporte para } [x_1, x_2] \tag{13}$$

$$\zeta(x) = \rho p(\tfrac{(x-x_1)}{\lambda}) \text{ ajusta à bola } \mathcal{B}(0, \rho) \tag{14}$$

$$\rho y = y + \zeta \tag{15}$$

Esta é a sucessão de operações pode ser facilmente implementada num programa de computador e naturalmente as integrais que precisamos calcular também podem ser calculadas aproximadamente.

A figura (3) página 6, mostra o resultado da sequência de comandos do

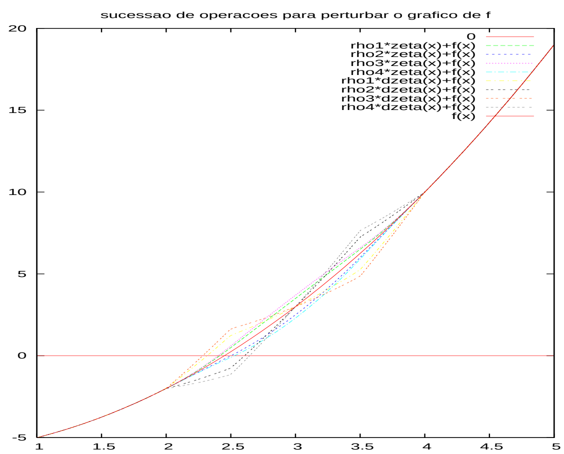

Figura 3: Perturbação de um gráfico

`gnuplot` em que acrescentei, na simulação, as derivadas das probabilidades de modo que alguns dos caminhos cortam o gráfico num ponto interediário e também usei valores positivos e negativos para $\rho \in \{0.5, 0.7\}$.

O script utilizado é o seguinte (sem incluir as definições de `n1, dn1`.

```
## variacional02.tex -  perturbando
print '  f(x) = x**2 - 6  '
f(x) = x**2 - 6
set title 'sucessao de operacoes para perturbar o grafico de f';
print 'probabilidade com suporte [0,1] '
p(x) = n1(2*x-1); ##  translatei o suporte da prob para [0,1]
dp(x) = dn1(2*x-1);  ## usando a derivada
print '  rho = 0.5  ';
rho1 = 0.5; rho2 = -0.5; rho3=0.7; rho4=-0.7
print 'intervalo de parametrizacao [2,4] = [x1, x2] '
x1 = 2; x2 = 4;
set xrange [x1-3:x2+2];
print 'lambda = x2 - x1 ';
lambda = x2 - x1;
print 'perturbação  zeta(x) = rho*p((x-x1)/lambda)  ';
## zeta(x) = rho*p((x - x1)/lambda)
zeta(x) = p((x - x1)/lambda);
dzeta(x) = dp((x-x1)/lambda);
##rho_y(x) = f(x) + zeta(x)
plot n1(x), p(x),  zeta(x), 0;
pause -2
set xrange [x1-1:x2+1]
```

```
set terminal postscript portrait enhanced color
set output "variacional02_021.eps"
##plot p(x),    rho_y(x) , f(x), 0
plot 0, rho1*zeta(x)+f(x), rho2*zeta(x)+f(x),\
 rho3*zeta(x)+f(x), rho4*zeta(x)+f(x),rho1*dzeta(x)+f(x),\
 rho2*dzeta(x)+f(x), rho3*dzeta(x)+f(x), rho4*dzeta(x)+f(x),  f(x)
```

Uma alteração deste script me permitiu conseguir o gráfico seguinte em que estou perturbando um segmento de reta usando os coeficiente

$$\rho \in \{-0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5, -0.6\}$$

o resultado pode ser visto na figura (4).

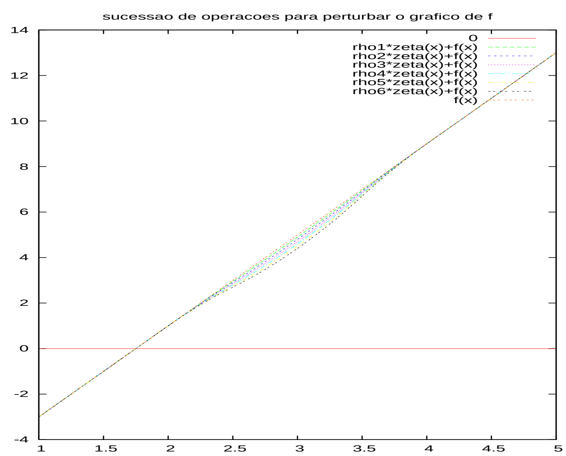

Figura 4: Perturbando um segmento de reta

Referências

[1] Arfken, G. *Mathematical Methods for Physicists*
Academic Press, INC. 1985

[2] Buck, R. C. and Buck E. F. *Advanced Calculus* McGraw-Hill - 1965

[3] Bo Thidé *A course in Electro Magnetism*
http://www.plasma.uu.se/CED/Book

[4] Praciano-Pereira, T. Cálculo numérico computacional

http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/textos

[5] Praciano-Pereira, T. *Splines por convolução*
http://www.sobralmatematica.org/preprints

[6] Praciano-Pereira, T. *Splines por convolução bivariados* expansão de *Splines por convolução* a ser escrito em breve - caso multivarido.
http://www.sobralmatematica.org/preprints

[7] Praciano-Pereira, T e Diego de Araujo Frota
A lei de Snell
Submetido para publicação

[8] Rudin, W. *Real and Complex Variables*
McGraw-Hill Series in Higher Mathematics -1974

[9] Rudin, W. *Functional Analysis*
McGraw-Hill Series in Higher Mathematics -1974

[10] Educar - São Carlos - USP
lei de Snell
http://educar.sc.usp.br/otica/

[11] Simmons, G.F.
Differential Equations with App. and Hist. Notes.
McGraw-Hill - Book Company - 1978

[12] Hirsch, e Smale S. *Linear Algebra, differential equations and dynamical systems* - Academic Press

[13] Boyce, William E e Diprima, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno* Editora: LTC ISBN-13: 9788521614999 8a Edição - 2006 - 450 pág.

[14] Claus I. Doering e Artur O. Lopes *Equações Diferenciais Ordinárias* Primeira Edição Coleção Matemática Universitária - IMPA

[15] *Wikipedia, the free enciclopedia in the Internet*
http://en.wikipedia.org