

Integral de Riemann

Praciano-Pereira, T

Departamento de Matemática

Universidade Estadual Vale do Acaraú

11/07/2007

tarcisio@member.ams.org

pré-prints do Curso de Matemática de Sobral

no. 2007-01

Editor Tarcisio Praciano-Pereira

tarcisio@member.ams.org

Resumo

Neste trabalho estou mostrando como podemos definir a integral no sentido de Riemann como uma classe de equivalência de sucessões de Cauchy. Para isto mostro um isomorfismo de ordem entre uma classe de partições de um intervalo $[a, b]$ e a classe de todas as somas de Riemann de uma função real definida em $[a, b]$.

$$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

As funções integráveis no sentido de Riemann produzem sucessões com suas somas de Riemann que se encontram todas numa única classe de equivalência de sucessões de Cauchy, um único número real que recebe a designação $\int_a^b f(x)dx$

1 Que é integral

Para que se tenha uma idéia clara de que esta seção é um resumo, a resposta do que é integral se encontra em [3] no capítulo 1 ou ao longo de vários capítulos de [2].

Seguindo as idéias inovadoras do começo do século 20 que desembocaram no trabalho de Schwartz, artigo publicado por volta de 1945 ou a versão expandida, [4], uma integral (no sentido de Daniel) é uma forma linear. Quer dizer que se f estiver definida no intervalo $[a, b]$, para cada $a \in [a, b]$

$$f \mapsto f(a) \in \mathbf{R} \quad (1)$$

é um tipo de integral da função f porque satisfaz às propriedades de linearidade.

Se forem escolhidos n pontos $a_1, \dots, a_k \in [a, b]$ a expressão

$$f \mapsto \sum_{k=1}^n f(a_k) \quad (2)$$

generaliza (1) sendo também uma integral.

Se o leitor estiver dando os seus primeiros passos em Análise Matemática ou terminando um curso de Cálculo, pode ficar chocado com estes exemplos e de alguma forma é o meu objetivo. O que vou discutir aqui é um método de integração produzido por matemáticos do século 18, atribuído a Riemann, Newton, Leibniz com a contribuição de inúmeros outros cujos nomes se associam com menos intensidade ao método que é usualmente dito de Riemann. Uma das características da *integral de Riemann* é

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (3)$$

a linearidade que também valem para o exemplos de *integrals* que dei acima.

No início do século 20 Lebesgue descobriu que o método de Riemann era incompleto produzindo uma classe mais ampla de conjunto mensuráveis aos quais aplicava uma função *medida* que generalizava a integral de Riemann construindo o que se chamou de *integral de Lebesgue*. Para deixar esta comparação mais completa, a *integral de Riemann* se baseia em intervalos, no caso univariado, ou no produto de intervalos, no caso multivariado.

Embora haja autores que afirmem, sem rodeios, que a integral de Riemann é inútil e que deveríamos diretamente usar no Cálculo a integral de Lebesgue, do ponto de vista pedagógico esta forma de pensar nunca pegou e você tem aqui um artigo discutindo, novamente, a integral de Riemann, mas com um método diferente do habitual, usando seqüências de Cauchy e classes de equivalência de seqüências de Cauchy para definir a integral.

2 Funções integráveis a Riemann

Nesta seção vou descrever o plano do trabalho que vai conduzir ao conceito e ao teste que determina se uma função é integrável a Riemann

- Partição de um intervalo $[a, b]$ como um método de aproximação de uma área.
- A estrutura de ordem do conjunto de todas as partições de um intervalo relativamente ao refinamento de partições e as cadeias relativas a este refinamento.
- A sub-estrutura de ordem do subconjunto de todas as partições do um intervalo $[a, b]$ formada pelas partições cujas normas das partições tendem a zero como $\frac{1}{n}$ em que n é o número de sub-intervalos da partição, que vou designar aqui como $\Pi_0([a, b])$, a classe das partições de $[a, b]$ cuja norma é menor ou igual a $\frac{b-a}{n}$.
- Associadas à qualquer cadeia de partições existem duas classes de sucessões chamadas S_n e \underline{S}_n das somas superiores e inferiores de Riemann associadas a qualquer cadeia de $\Pi_0([a, b])$ em que n é o número de sub-intervalos considerado. Um número finito de elementos de cada uma dessas sucessões tem que substituído por zero porque ao fazer um refinamento há um inevitável salto entre inteiros. Neste caso re-enumeramos os elementos da sucessão para que possamos ter convergência, este é um detalhe trabalhoso. Mostraremos que basta garantir a convergência destas sucessões para definir a integral.
- A definição de função integrável a Riemann relativamente ao intervalo $[a, b]$ vai ser consequência da ordem numa classe de partições e será estabelecida definindo um número real, isto é uma classe de equivalência de sucessões de Cauchy.
- O cálculo da integral: sabendo que integral existe, usamos um tipo particular de partição, as uniformes, para obter sucessões convergentes e encontrar o limite.

3 Partições e somas de Riemann associadas

Dada uma função

$$[a, b] \ni x \mapsto f(x) \in \mathbf{R} \quad (4)$$

intuitivamente desejo que o $graf(f)$ determine, como o eixo OX uma área, como está sugerido na figura (1) página 3, e neste momento não vou me interessar em discutir quais são os tipos de função que servem, isto será consequência da definição final, e o que vamos fazer aqui é contruir o método para calcular esta área que, se existir, é a *integral no sentido de Riemann* de f .

Algumas vezes a intuição pode falhar, por exemplo

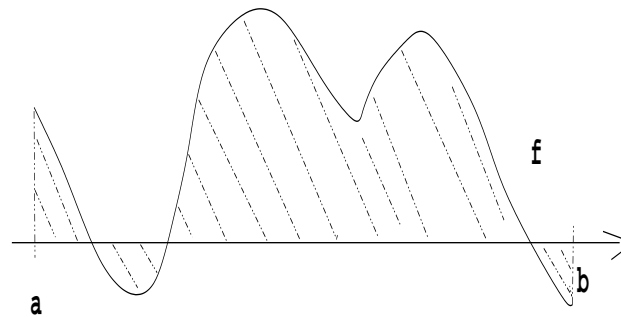


Figura 1: Área entre $graf(f)$ e o eixo OX

- a função

$$[-1, 1]^* \ni x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}; f(0) = 0 \quad (5)$$

não determina com o eixo OX uma região que possua área e assim

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \quad (6)$$

não existe;

- a função

$$[1, \infty) \ni x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2} \in \mathbf{R} \quad (7)$$

determina com o eixo OX uma região que possui área e assim

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \quad (8)$$

existe.

As *palavras chave* deste método são *aproximação* e *limite*, e o método consiste em produzir sucessões refinando a quantidade de retângulos de formas que, em alguns casos¹, podemos descobrir uma expressão cujo limite é possível calcular.

Para conseguir isto posso aproximar inferiormente a área determinada pelo $graf(f)$ e o eixo OX colocando dentro desta figuras geométricas cujas área eu

¹certo, talvez desconcertante, em alguns casos não é possível calcular o limite mas apenas mostrar que ele existe, mas o que é certo é poderemos sempre calcular uma estimativa do seu valor

saiba calcular, como retângulos, suficientemente pequenos e em grande quantidade para obter melhor e melhor aproximação como está ilustrado na figura (2) página 4,

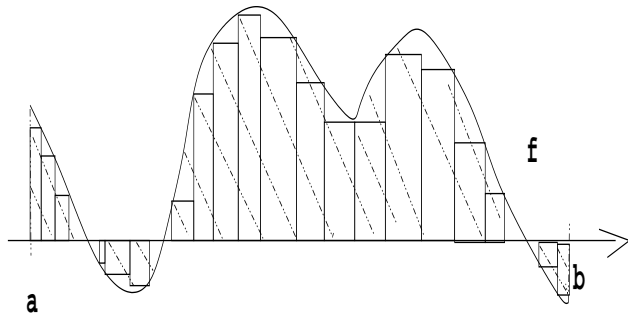


Figura 2: Retângulos aproximando a área

A figura (2) não é um exemplo feliz, porque ela é composta de áreas positivas e negativas e quando a área for negativa os retângulos incluídos dentro da área representam uma aproximação por excesso, portanto esta figura (2) não representa uma aproximação por falta.

Para evitar esta dificuldade separamos uma função em suas partes positiva e negativa, observe, duas funções positivas,

$$f = f^+ - f^- ; f^+(x) \geq 0 ; f^-(x) \geq 0 \quad (9)$$

e assim podemos fazer uma teoria pensando apenas em funções positivas posteriormente definindo

$$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \quad (10)$$

que obedece a um axioma de áreas da geometria, *área da união de figuras disjuntas é a soma das áreas das figuras*. Aqui o termo “disjunto” é impróprio uma vez que as figuras têm uma parte da fronteira em comum, o que evidencia uma dificuldade na construção da teoria que pode ser resolvida com a observação: *a retirada desta interseção não altera as áreas das duas figuras envolvidas porque estamos retirando uma “região” com área² nula*.

A partir de agora vamos considerar f uma função positiva, como na figura (3) página 5,

²isto se encontra ligado aos problemas do dia-a-dia, ninguém se preocupa na medição de terrenos com a cerca que separa dois terrenos, e neste caso é uma região com área não nula....

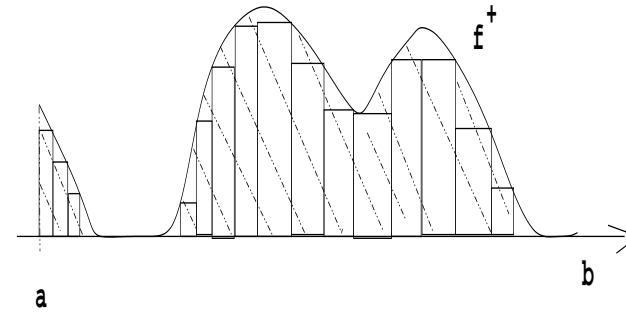


Figura 3: A parte positiva de f

A ferramenta para associar uma sucessão à f consiste em subdivisões sucessivas do intervalo $[a, b]$ em um certo número de subintervalos que correspondem às bases de cada um dos retângulos que aparecem na figura (3).

A soma das áreas destes retângulos é da forma

$$\begin{aligned} f(x_0)(x_1 - x_0) + \dots + f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) &= (11) \\ = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k &= (12) \end{aligned}$$

na equação (12) estou usando a notação Δx_k para representar $(x_{k+1} - x_k)$, ou ainda $\Delta x_k = (x_{k+1} - x_k)$, a medida do subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$.

Este tipo de soma, (12), se chama *soma de Riemann*.

A soma que aparece na equação (11) ou na posterior, (12), vai até o último subintervalo, mas a o índice da soma termina com $k = n - 1$ porque a soma começou com índice $k = 0$.

Seria equivalente se eu tivesse começado com $k = 1$ e então o índice na soma iria até $k = n$.

Em qualquer caso estou somando \underline{n} retângulos que correspondem a \underline{n} subintervalos. Olhe novamente o gráfico na figura (3) e veja que nela há retângulos com altura zero, e conseqüentemente, eles não aparecem na figura, mas estão lá, e suas áreas zero aparecem nas equações (11), (12).

Vou agora discutir o método usado para produzir a soma em (12).

Podemos fazer uma comparação que se encontra presente nos modernos meios de comunicação que se mostram assim apenas uma reformulação de antigas idéias o que justifica que continuemos a estudar o que antigo como um método para entender o atual.

Podemos dizer que escolhemos \underline{n} pontos para fazer um levantamento dos valores de f

$$a = x_0, \dots, x_k, \dots, x_n = b \quad (13)$$

$$f(x_0), \dots, f(x_k), \dots, f(x_{n-1}) \quad (14)$$

$$f(x_1), \dots, f(x_k), \dots, f(x_n) \quad (15)$$

em que, naturalmente, escolhemos uma das alternativas, (14), ou (15), começando com o valor de f no primeiro ponto de cada sub-intervalo, que corresponde à alternativa (14) ou no ponto final de cada sub-intervalo, que corresponde à alternativa (15).

Se você estiver se perguntando se os resultados são iguais, a resposta é certamente aquilo que você está pensando: não. Mas você verá na continuação que isto é um detalhe sem interesse, vamos obter duas sucessões de Cauchy equivalentes. Ainda comparando, ao fazermos um levantamento, podemos perder alguns dados desde que a história dos dados seja mantida. Voltaremos mais adiante a esta questão.

Se você tiver alguma experiência³ com linguagens de programação, pode experimentar o programa `riemann.c`, ver [5]. Altere a função dentro do programa para fazer outras experiências, o programa usa a biblioteca `ambiente.h` que se encontra no mesmo local, você deve baixar os dois arquivos quando for compilar, e dentro do programa estão instruções para a compilação.

A ferramenta para construir a *soma de Riemann* é uma divisão do intervalo $[a, b]$ em intervalos disjuntos (exceto pelo fato de que eles têm um extremo em comum) cuja união é intervalo $[a, b]$. Chamamos isto de *partição do intervalo*. Poderíamos considerar intervalos semi-abertos:

$$[x_0, x_1) \cup [x_1, x_2) \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] \quad (16)$$

e aí teríamos uma *autêntica partição* do intervalo $[a, b]$, *uma classe de subconjuntos disjuntos cuja união é o universo* $[a, b]$.

A soma de Riemann então será denotada por

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k \quad (17)$$

e estamos indicando na equação (17) que a soma de Riemann foi obtida com uma partição que tem \underline{n} subintervalos.

Se acrescentarmos um novo nó diferente dos anteriores

$$a = x_0, x_1, \dots, x_n = b \quad (18)$$

e então o novo nó tem que ser maior do que \underline{a} e menor do que \underline{b} , para ser um novo ponto de coleta de dados dentro do intervalo $[a, b]$, estaremos fazendo um refinamento da partição anterior e calculando S_{n+1} .

³e se não tiver *experiência* com programação, pode adquirir agora contornando os preconceitos que eventualmente tenha contra experiências computacionais, comece com este exemplo e algum esforço.

Uma dificuldade para produzir uma notação adequada aparece aqui. O novo ponto acrescentado pode alterar a denominação de todos os anteriores com exceção de $a = x_0$. Por exemplo, o último ponto agora será $x_{n+1} = b$ assim como todos os outros que ficarem à direita do novo ponto terão seus índices trocados. Uma alternativa para isto é esquecer os pontos anteriores e pensar apenas na partição, por exemplo se eu chamar P a partição

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (19)$$

então posso usar a notação para a soma de Riemann

$$S(P) = \sum_{x_k \in P} f(x_k) \Delta x_k \quad (20)$$

eliminando o inconveniente com os índices. Vou sar esta notação mais a frente.

Diremos que S_n é uma soma de Riemann associada a uma partição $[a, b]$ com n subintervalos, e ao acrescentar um novo ponto fazendo um refinamento, diremos que S_{n+1} é uma soma de Riemann associada a uma partição $[a, b]$ com $n + 1$ subintervalos.

Entretanto existe uma quantidade não enumerável de novas partições possíveis com $\underline{n+1}$ nós, nova complicação.

A saída é simplesmente dizer que calculamos S_n com uma partição de $[a, b]$ que tem \underline{n} nós. Ou seja, S_n pode ser obtida de muitas maneiras diferentes, por exemplo, poderíamos subdividir o intervalo em partes iguais:

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \dots = \Delta x_{n-1} = \frac{b-a}{n} \quad (21)$$

e assim obteríamos uma *soma de Riemann uniforme* que é o método usado no programa `riemann.c`, [5].

Vamos na próxima seção encontrar uma lógica neste tumulto que acabamos de produzir e o método vai se consistir de descobrir uma *estrutura algébrica*⁴ no conjunto de todas as partições do intervalo $[a, b]$.

4 A família das partições do intervalo $[a, b]$

Vou identificar uma *soma de Riemann* com a partição que lhe dá origem, ao construir uma estrutura de ordem para o conjunto das partições, estarei, com este *isomorfismo*, construindo uma estrutura de ordem para o conjunto de todas as *somas de Riemann*.

Vimos na seção anterior que apenas escolhendo um número natural \underline{n} temos uma quantidade não enumerável de somas de Riemann associados com este número, a “quantidade” de posições⁵, que um novo ponto pode assumir entre os “velhos” pontos da antiga partição.

Temos duas formas equivalentes de nos referirmos a uma partição:

⁴admitindo a Lógica como um capítulo da Álgebra...

⁵não é uma quantidade, nem sequer podemos contar

- a família dos nós, um conjunto crescente de pontos do intervalo $[a, b]$ em que o primeiro ponto é \underline{a} e o último ponto é \underline{b} ;
- a família dos sub-intervalos que estes pontos determinam.

Vamos preferir a família dos nós, quer dizer que quando nos referirmos a uma partição de $[a, b]$, estaremos pensando num conjunto de nós, uma sucessão finita, crescente, cujo primeiro termo é \underline{a} e último termo é \underline{b} . Mas como dissemos, os métodos dos nós ou dos subintervalos são equivalentes, e com freqüência estaremos fazendo referência aos subintervalos determinados pelos nós para justificar os conceitos de que vamos precisar.

4.1 Uma ordem em $\Pi([a, b])$

A família de todas as partições do intervalo $[a, b]$, será designada por $\Pi([a, b])$, tem uma relação de ordem que não é total, no sentido de que há duas⁶ partições que não podem ser comparadas.

Vamos começar com $\{a, b\}$, a *menor* partição possível porque será comparável com qualquer outra⁷ partição. Depois vamos ver que não há nenhum máximo.

Se acrescentarmos um ponto (e podemos fazê-lo de muitas maneiras) estaremos fazendo um refinamento de $\{a, b\}$. Podemos escolher exatamente o ponto médio e teremos (com $\{a, b\}$) outra partição uniforme:

$$\left\{a, \frac{a+b}{2}, b\right\} = \left\{a, a + \frac{b-a}{2}, b\right\} \quad (22)$$

Na segunda forma, na equação (22), aparece o $\Delta x = \frac{b-a}{2}$, o salto entre os nós.

Qualquer outra partição que fizermos com três nós será mais fina (é o nome da ordem) que $\{a, b\}$, mas não será comparável com $\left\{a, a + \frac{b-a}{2}, b\right\}$.

- Ao escolhermos um novo nó refinamos uma partição existente. Podemos fazer isto de várias maneiras criando distintos refinamentos da partição de onde partimos e ao mesmo tempo criando diversas partições incompatíveis entre si (incomparáveis).
- Ou podemos seguir criando uma cadeia de partições comparáveis, a próxima mais fina que a anterior. Teremos, desta forma, uma infinidade de cadeias de partições.

Esta idéia está ilustrada na figura (4) página 9, ela contém uma *árvore* que é um *grafo* para representar relações de ordem. Quem estiver abaixo e ligado por uma linha é *menor do* quem estiver acima e ligado por uma linha.

Quem não estiver ligado por poligonal ascendente (ou descendente) não é comparável.

⁶inúmeras, mas pelo menos duas de cada vez

⁷*menor* ou *maior* é uma questão subjetiva, estamos construindo uma relação de ordem e fazemos uso de um destes adjetivos como abuso linguístico

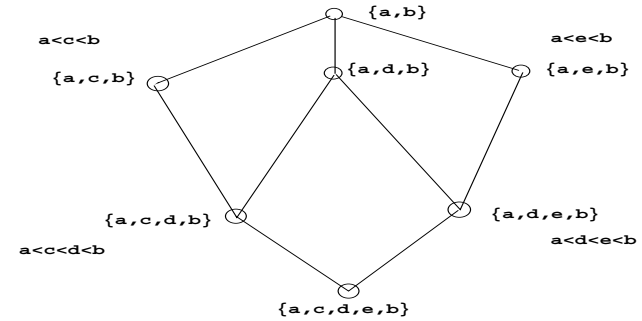


Figura 4: Árvore de partições

- As partições $\{a, c, b\}, \{a, d, b\}, \{a, e, b\}$ (23)

são tres refinamentos de $\{a, b\}$ incomparáveis entre si,

- As partições $\{a, b\}, \{a, c, b\}, \{a, c, d, b\}, \{a, c, d, e, b\}$ (24)

formam uma cadeia em que uma refina a anterior, usando a linguagem de desigualdades:

$$\{a, b\} \leq \{a, c, b\} \leq \{a, c, d, b\} \leq \{a, c, d, e, b\} \quad (25)$$

e você pode ler “ \leq ” como “*menos fina do que*”.

Mas a cada momento, num certo nível n , formado por todas as possíveis partições obtidas com \underline{n} elementos, podemos fazer a união dos nós de duas dessas partições⁸, produzindo assim um refinamento das duas, uma partição comparável com as outras, um ponto comum de duas cadeias a que estas duas partições pertencem.

Na figura (4) você pode ver

- $\{a, c, d, b\}$ é mais fina que $\{a, c, b\}$;
- $\{a, d, e, b\}$ e é mais fina que $\{a, d, b\}$;
- $\{a, c, b\}$ e $\{a, d, b\}$ são incomparáveis;
- $\{a, c, d, e, b\}$ é mais fina que todas que aparecem.

⁸ou de um número finito delas

Isto nos mostra que a qualquer momento podemos encontrar (construir) um ponto de encontro entre as cadeias produzindo uma nova subcadeia cujos termos são refinamentos de todos os termos anteriores das duas outras cadeias, simplesmente fazendo a reunião dos nós.

$\{a, c, d, e, b\}$ é a mais fina de todas as partições que aparecem na figura (4), mas observe que podemos continuar refinando indefinidamente: não há nenhuma partição que seja a mais fina de todas, tem apenas a partição que é a *menos fina de todas*: $\{a, b\}$. Assim $\Pi([a, b])$ tem um *menor* elemento, ma não tem um *maior* elemento: não há nenhum conjunto finito que contenha todos os conjuntos finitos que podemos tirar de $[a, b]$.

O método que escolhi para designar partições mostra que o conjunto de todas as partições é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de $[a, b]$ contendo os elementos \underline{a} e \underline{b} . E a relação de ordem “mais fina” coincide com a relação de ordem “contém” entre os subconjuntos finitos de $[a, b]$:

Teorema 1 (Caracterização das partições) *Caracterização das partições*

O conjunto de todas as partições de $[a, b]$ é isomorfo, como estrutura de ordem, ao conjunto de todos os subconjuntos finitos de $[a, b]$ que contenham os elementos $\underline{a}, \underline{b}$.

As partições uniformes sendo as progressões aritméticas cujo primeiro termo é \underline{a} , a razão é $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Como não existe um conjunto finito que contenha todos os conjuntos finitos (não seria um conjunto finito) então não um *maior* elemento no conjunto de todas as partições.

Estamos discutindo *ordem*, assunto para um livro inteirinho, e um livro bem alentado, o autor de [1] menciona na introdução que precisaria de dois ou três volumes para descrever a teoria adequadamente. Mas não preciso de muita coisa sobre ordem para entender o que acontece com as somas de Riemann, e vou apresentar tudo aqui. A caracterização que acabei de fazer simplifica muito a teoria.

A estrutura que existe então é a formada pelas cadeias. Ao longo de uma cadeia, uma lista de partições que são sucessivamente uma mais fina que as anteriores, temos *somas de Riemann* que representam aproximações melhores para a área que desejamos calcular. O programa `riemann.c`, [5], lhe pede o número \underline{n} de nós da partição e calcula o valor de

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

para construir uma soma de Riemann com partição uniforme.

As partições uniformes são um método viciado para calcular integrais. Uma função pode não ser integrável e uma sucessão de somas de Riemann obtidas com partições uniformes pode conduzi-lo a um falso limite, um exemplo simples disto pode ser visto calculando a integral da função que eu defini na equação (5).

Comparando com o levantamento estatístico, precisamos que as partições produzam uma amostra significativa dos valores da função, em $[a, b]$ e vamos selecionar, dentro do conjunto de todas as partições uma família que atende a este objetivo.

4.2 Distribuição uniforme dos nós

Para motivar a construção que vou fazer agora, posso escolher uma partição (um conjunto finito), considerar o último subintervalo, e seguir apenas escolhendo novos pontos neste último intervalo. Do ponto de vista estatístico seriam *amostras viciadas*, e é isto que desejamos evitar.

Para tal vou definir um método que elimina o vício:

Definição 1 (Norma de partição) *A norma de uma partição Seja*

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

uma partição de $[a, b]$. Vou chamar norma de P e designar por $|P|$ ao máximo dos números $x_k - x_{k-1}$

$$\text{Max}(\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}\})$$

é a medida do maior subintervalo desta partição.

Agora vou selecionar o subconjunto de todas as partições de $[a, b]$ formado de todas as cadeias em que a norma tende a zero.

Definição 2 ($\Pi_0([a, b])$) *Classe das partições com norma tendendo a zero*

A classe $\Pi_0([a, b])$ é a classe de todas as partições em cujas cadeias as normas das partições são sucessões que convergem para zero.

O nome, $\Pi_0([a, b])$, é sugestivo porque lembra c_0 o conjunto de todas as sucessões de números racionais que convergem para zero que é o centro na construção dos números reais usando sucessões de Cauchy de números racionais.

Esta condição elimina as *partições viciadas* que poderiam se concentrar numa região do intervalo $[a, b]$, porque fazendo isto a norma das partições se manteria constante a partir de um certo índice.

São as sucessões de somas de Riemann associadas aos elementos de $\Pi_0([a, b])$ com que vou trabalhar.

Posso agora definir *função integrável a Riemann*.

Definição 3 (integrabilidade no sentido de Riemann) *Função integrável a Riemann*

Uma função $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ é integrável a Riemann se todas as sucessões de somas de Riemann associadas às cadeias de $\Pi_0([a, b])$ se encontrarem numa única classe de equivalência de sucessões de Cauchy, definindo um único número real designado por

$$\int_a^b f(x)dx$$

Na próxima seção vou descrever um método para testar se as somas de Riemann associadas às cadeias de $\Pi_0([a, b])$ formam uma única classe de equivalência de sucessões de Cauchy e portanto se uma função é *integrável a Riemann*.

5 Sucessões de somas de Riemann conduzindo a um limite

Eu disse que iria apresentar um método para verificar se as somas de Riemann associadas a $\Pi_0([a, b])$ definam uma única classe de equivalência mas deveria ter dito que vou apresentar o único método que conheço.

Ao longo de cada uma das cadeias de $\Pi([a, b])$ podemos definir somas de Riemann associadas com as partições da cadeia e duas coisas podem acontecer:

- Todas as sucessões assim criadas tenha um mesmo limite. Este limite comum é a integral de f sobre o intervalo $[a, b]$ e recebe a notação que conhecemos

$$\int_a^b f(x)dx \quad (26)$$

- Haja pelo menos duas sucessões que tenham limites diferentes, neste caso a integral não existe.

Em princípio isto é tudo. O que faremos nesta parte final do artigo é montar o algoritmo para selecionar qual das duas situações ocorrem e portanto provar que uma determinada integral existe.

Se provarmos que a integral existe, e nem sempre isto será possível, uma das formas de descobrir o limite é usar as somas de Riemann uniformes, agora que sabemos que elas conduzem a um limite. Este método é particularmente útil para determinarmos uma fórmula para a integral de funções polinomiais. O programa `riemann.c` não é entretanto a forma mais adequada para fazer o cálculo aproximado de integrais, para isto se usa aproximação polinomial, splines ou quase-splines, ou elementos finitos.

5.1 Demonstração de que f é integrável a Riemann

A estratégia que vou usar é bem comum no estudo de sucessões, em vez de estudar uma determinada sucessão cujo estudo se revela particularmente difícil, comparamos a sucessão complicada com outras conhecidas e substituímos o objetivo difícil por outro mais simples: *encerrar a sucessão entre limites superiores e inferiores*.

Vou incluir um tipo de *soma que não é de Riemann*, na árvore de somas de Riemann que podemos fazer associadas a uma qualquer cadeia de partições de $\Pi_0([a, b])$, que vai me fornecer elementos para verificar a convergência.

5.1.1 Somas superiores de Riemann

Em vez de usar $f(x_k)$, um dos valores de f calculado em um dos nós da partição, o primeiro ou o segundo ponto de cada subintervalo, vou agora usar o supremo que f tem dentro do intervalo onde está x_k e usar para isto a notação

$$\overline{f}(x_k) = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) ; k \in \{1, \dots, n\} \quad (27)$$

e o que chamamos de *soma superior de Riemann* é então

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f}(x_k) \Delta x_k \quad (28)$$

$$P = \{a = x_0 \dots x_n = b\} \quad (29)$$

$$P = \{[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]\} \quad (30)$$

$$\overline{S}_P = \sum_{x_k \in P} \overline{f}(x_k) \Delta x_k \quad (31)$$

e aqui inclui a notação P para me referir ao conjunto dos nós que determina uma partição e também que a soma de Riemann (superior ou inferior) foi feita usando a partição P .

Mas o conjunto dos nós é uma forma equivalente de se referir ao conjunto dos subintervalos que agora preciso para me referir ao supremo de f em cada subintervalo.

Estas somas, que são uma aproximação por excesso da área procurada, tem duas propriedades cruciais:

Teorema 2 (Propriedade das somas superiores) *Propriedade das somas superiores de Riemann*

$$P \ll Q \Rightarrow \overline{S}_P > \overline{S}_Q \quad (32)$$

quer dizer que ao refinar uma partição vou obter uma soma de Riemann superior menor, ou ainda, o algoritmo para cálculo de somas de Riemann superior é contra-variante: se P for menor do que Q , a soma de Riemann \overline{S}_P será maior do que a soma de Riemann \overline{S}_Q .

- *A soma de Riemann associada à partição P é menor do que \overline{S}_P .*

Ao longo de uma cadeia tenho agora duas sucessões,

- a formada pelas *somas superiores*
- e a forma pela *somas de Riemann*

e obtive uma desigualdade entre ambas.

A primeira propriedade do teorema (2) diz que a sucessão de somas de Riemann superiores associada a uma cadeia é decrescente, tenho uma sucessão

decrecente que é maior do que a sucessão de somas de Riemann relativa a uma mesma cadeia.

Temos assim sucessões decrescentes. Para mostrar que tais sucessões são convergentes basta apresentarmos uma cota inferior, e o limite delas é a maior das cotas inferiores que é também chamado de *ínfimo*.

Logo veremos que é fácil encontrar uma cota inferior para qualquer sucessão de somas de Riemann superiores ao longo de uma cadeia.

Vejamos logo o outro tipo de sucessões que vou agregar ao conjunto das sucessões geradas por somas de Riemann.

5.1.2 Somas inferiores de Riemann

De forma semelhante posso definir as somas inferiores de Riemann, agora substituindo o supremo em cada sub-intervalo pelo ínfimo. As propriedades são simétricas: as sucessões de somas de Riemann inferiores, ao longo de uma cadeia crescem. Temos agora uma sucessão crescente, e para mostrar que é convergente basta apresentarmos uma cota superior e o limite das sucessões de somas de Riemann inferiores, ao longo de uma cadeia de partições é o supremo da sucessão.

E posso enunciar o teorema simétrico ao teorema (2) para somas inferiores de Riemann:

Teorema 3 (Propriedade das somas superiores) *Propriedade das somas superiores de Riemann*

•

$$P \ll Q \Rightarrow \underline{S}_P < \underline{S}_Q \quad (33)$$

quer dizer que ao refinar uma partição vou obter uma soma de Riemann superior menor, ou ainda, o algoritmo para cálculo de somas de Riemann superior é variante: se P for menor do que Q , a soma de Riemann \underline{S}_P será menor do que a soma de Riemann \underline{S}_Q .

• A soma de Riemann associada à partição P é menor do que \underline{S}_P .

A primeira propriedade do teorema (3) diz que a sucessão de somas de Riemann inferiores associada a uma cadeia é crescente, tenho uma sucessão crescente que é menor do que a sucessão de somas de Riemann relativa a uma mesma cadeia.

Para fechar a questão vamos agora mostrar que para uma determinada cadeia de partições, toda soma de Riemann inferior é uma cota inferior da sucessão de somas de Riemann superiores obtidas com a mesma cadeia, provando que as somas de Riemann superiores são convergentes.

5.1.3 Somas superiores e suas cotas inferiores

Considere uma cadeia de partições

$$\mathcal{P} = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}; P_n \in \Pi_0([a, b]) \quad (34)$$

$$s = (\overline{S}_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k \in P_n} \overline{f(x_k)} \Delta x_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (35)$$

$$t = (\underline{S}_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k \in P_n} \underline{f(x_k)} \Delta x_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (36)$$

Na equação (34) estamos nos referindo a uma cadeia como uma sucessão, e veja da construção que de fato é assim uma vez que todas as partições se originam de $\{a, b\}$ que é sucessivamente refinada pelo acrescimento de um ponto criando uma nova partição à qual *indutivamente* aplicamos o mesmo processo, o resultado é uma sucessão de partições formando uma das cadeias de $\Pi_0([a, b])$.

Nas equações (35), (36) estou fazendo referência, respectivamente, à sucessão das somas superiores, \underline{s} , e inferiores \underline{t} , calculadas em cada um dos nós⁹ da cadeia \mathcal{P} .

Como as sucessões s, t são monótonas, se provarmos que todo termo de s , a decrescente, é maior do que qualquer termos de t estaremos provando que elas têm limite (são convergentes).

Vou me fixar no que se passa em uma cadeia porque o que eu disser para uma delas é o mesmo que irá acontecer com qualquer outra.

Basta considerarmos o que acontece com um subintervalo que tenha sido subdividido. Considere um subintervalo I_k de um nó P_n (uma partição)

$$I_k \in P_n \quad (37)$$

$$I_k = J_k \cup J_{k+1}; J_k, J_{k+1} \in P_{n+1} \quad (38)$$

$$(39)$$

Estou usando a sucessão natural das letras do alfabeto, designando por I_k um subintervalo de P_n e por J_k um subintervalo de P_{n+1} que foi obtida pelo acrescimento de um nó ao conjunto dos nós de P_n .

A soma superior decresce de P_n para P_{n+1} , a soma inferior cresce de P_n para P_{n+1} , entretanto a soma superior, calculada com os supremos de f sobre J_k, J_{k+1} é maior do que a soma inferior, calculada com os ínfimos de f sobre J_k, J_{k+1} .

Congelando agora a soma inferior e analisando o que acontece com a sucessão das somas superiores, relativas a mesma cadeia (que considere fixa acima), relativamente a qualquer subintervalos dos sucessivos nós (partições) da cadeia, a soma dos os supremos serão maiores que os ínfimos que agora ficam todos congelados, o que nos leva ao teorema

Uma soma inferior qualquer é uma cota inferior para a sucessão das somas Superiores, decrescentes, relativamente a uma cadeia o que prova elas são convergentes. O raciocínio simétrico leva ao teorema

⁹aqui nó faz referência aos vértices do subgrafo que é cada uma das cadeias do grafo de todas as partições de $[a, b]$

Teorema 4 (Sucessão das somas inferiores) *Qualquer soma inferior relativamente a uma cadeia é menor do que uma soma superior relativamente a uma determinada partição da cadeia.*

O que prova que as somas inferiores, relativamente a qualquer cadeia é convergente.

Uma caracterização do que é uma *função integrável a Riemann* em termos simples e de forma algorítmica é desconhecida e possivelmente muito difícil de ser estabelecida. É fácil mostrar que toda função contínua terá um único limite relativamente a família de somas inferiores e superiores. Mas a continuidade não é uma condição sequer necessária para que uma função seja *integrável a Riemann*.

Referências

- [1] Grätzer, George *General Lattice Theory* Academic Press, 1978
- [2] Lang, S. *Analysis II*.
- Addison-Wesley-Reading Ma - 1970
- [3] Rudin, W. *Real and Complex Variables*
McGraw-Hill Series in Higher Mathematics -1974
- [4] Schwartz, L. *Théorie des distributions* Hermann & Cie, Paris, 1966
- [5] Praciano-Pereira, T. *Programas para Cálculo Numérico*
<http://www.4shared.com/dir/2041165/e14cc331/programas.html>