

# A derivada

Praciano-Pereira, Tarcisio \*

Sobral Matemática

7 de agosto de 2017

tarcisio@member.ams.org

préprints da Sobral Matemática

no. 2017.06

Editor Tarcisio Praciano-Pereira

tarcisio@member.ams.org

---

\*tarcisio@member.ams.org

## Resumo

A derivada cria um modelo de função linear afim tangente ao gráfico de uma dada função  $f$ . Se isto for possível, diremos que  $f$  é diferenciável. É interessante observar que derivada implícita fornece uma visão ampliada da derivada tornando sua interpretação geométrica mais clara. Vou usar a derivada implícita nesta monografia mostrando o seu efeito didático. Termino com um caso particular e essencial para compreender o significado de primitivas de funções multivariadas com aplicação de dois teoremas fundamentais, o de Green e o de Cauchy.

palavras chave: derivada, derivada implícita, função linear afim tangente, teorema de Cauchy, teorema de Green.

The derivative produces a model of an affine linear function tangent to the graphic of a given function  $f$  if this is possible we say that  $f$  is a differentiable function. The implicit differentiation is a kind of method to produce the derivative and it is interesting to observe that it helps to create the intuition about the linear object which is tangent. To finish I will consider two particular cases which describe what are the possible primitives of functions of several variables as an application of two fundamental theorems, Green's theorem and Cauchy's theorem.

keywords: Cauchy's theorem, derivative, Green's theorem. implicit derivative, tangent linear manifold

Para construir uma monografia pequena objetivando o conceito de derivada, eu pensei que seria mais interessante colocar-me na situação de um segundo curso de Cálculo portanto considerando o público senhor dos assuntos *limite, derivada de uma função univariada*.

O projeto do trabalho é então o seguinte:

1. A derivada implícita de uma função multivariada;
2. O plano tangente, gradiente, curva de nível e extremo;
3. A fórmula de Taylor;
4. A intrigante situação das primitivas dos campos vetoriais, quem responde a esta questão são dois teoremas fundamentais, o teorema de Green que decide quando uma equação diferencial é exata, e o teorema de Cauchy que resolve as *equações de Cauchy-Riemann*.

Desta forma vou definir derivada, mas num contexto mais avançado o que vai me permitir construir um texto mais divertido para a leitora, e desta forma também posso ter um horizonte mais amplo para as aplicações.

Para me restringir ao contexto do Cálculo vou tratar de derivada de funções reais de variável vetorial deixando de fora as funções vetoriais.

Certamente a leitora entendida do assunto vai encontrar alguns conceitos que lhe são caros e que eu terei deixado de lado, mas seria um grave risco tentar colocar toda a riqueza de conceitos e aplicações da derivada num texto necessariamente limitado como este. Tenho que otimizar dentro dos limites impostos.

## 1 Derivada implícita de $w = F(x, y, z)$

A expressão  $w = F(x, y, z)$  representa um objeto de dimensão três, uma regra prática para calcular a dimensão é contar o número de variáveis envolvidas na expressão e subtrair uma unidade. É um objeto de dimensão três imerso dentro de um espaço de dimensão 4. A partir da dimensão 3, inclusive, a nossa linguagem geométrica reflete a nossa prisão tridimensional e já não temos vocabulário apropriado para nos referirmos aos objetos. O conceito de variedade veio aos poucos solucionar este problema linguístico.

$w = F(x, y, z)$  é uma variedade de dimensão três imersa numa variedade linear (espaço vetorial) de dimensão quatro.

Calcular a derivada implícita de  $w = F(x, y, z)$  significa escrever uma combinação linear de quatro variáveis cujas notações tradicionais são  $dx, dy, dz, dw$  usando como coeficientes as novas funções

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, 1$$

todas funções das três variáveis  $(x, y, z)$ :

$$dw = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{array} \right] \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$w - d = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{array} \right] \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix} \quad (2)$$

em que na equação (1.2) as “derivadas parciais” estão calculadas no ponto  $(a, b, c)$ , portanto representam agora números e substitui as variáveis  $dw, dz, dy, dx$  por diferenças envolvendo as coordenadas do ponto  $(a, b, c, d)$ .

Isto é uma definição! O que posso agora fazer é mostrar que esta definição generaliza, dando continuidade para dimensões maiores do que 1, aquilo que foi feito no Cálculo a uma variável e que ela é o modelo que produz uma variedade linear tangente ao gráfico de uma função derivável. Vou passar a fazer isto.

No caso univariado, consideremos a equação de uma função linear afim

$$y - b = m(x - a)$$

e como desejo que ela seja tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $(a, f(a)) = (a, b)$ , supondo que  $f$  seja derivável, tenho que impor as duas condições,  $b = f(a)$ ;  $m = f'(a)$ ; a esta equação resultando na equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a); b = f(a); m = f'(a);$$

Se derivarmos implicitamente  $y = f(x)$  vamos obter

$$dy = f'(x)dx$$

e se substituirmos as variáveis  $dx, dy$  por diferenças chegamos a equação da reta tangente acima descrita e então vemos como o modelo funciona:

1. derivamos todas as subexpressões, relativamente a todas as variáveis;
2. substituímos as variáveis  $dy, dx$  pelas diferenças  $y-b, x-a$ , respectivamente;
3. substituímos a variável  $x$  pelo valor no ponto em que desejamos a variedade linear tangente.

O resultado é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Funciona exatamente assim para qualquer número de variáveis e se as variáveis forem em número maior do que 1 aparecem as derivadas parciais, que é uma denominação que mostra que houve um tempo em que os nossos antepassados entendiam mal a derivada porque na verdade a derivada é a jacobiana e não as “derivadas parciais”, estas são as entradas da matriz jacobiana, a derivada.

Obviamente que ninguém pensa em alterar as denominações caso contrário criaríamos uma linguagem incompatível com a Matemática escrita nos últimos quatro séculos o que seria no mínimo uma ruptura cultural.

Mas temos que compreender que há um linguajar desencontrado sendo preciso ser leal com as alunas para que elas consigam entender os desencontros linguísticos de uma disciplina “sem erros” que é a Matemática, este produto do cérebro humano.

O produto de uma matriz por um vetor é uma combinação linear e eis a razão de ser a derivada implícita uma combinação linear.

Os tópicos a desenvolver nesta seção:

- O plano e suas derivadas parciais
- A variedade linear tangente, e o conceito de aproximação linear.
- O plano tangente, um vetor perpendicular

## 2 Variedade de nível e gradiente, extremos

Na equação da reta  $A(x-a) + B(y-b) = 0$  identificamos um produto escalar de  $(A,B)$  por  $(x-a, y-b)$  então o vetor  $(A,B)$  é perpendicular a esta reta.

De forma análoga  $A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$  é um plano que passa no ponto  $(a,b,c)$  e é perpendicular ao vetor  $(A,B,C)$ .

Se  $F$  for derivável a equação da variedade linear tangente, como vimos anteriormente, é

$$w - d = \frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - c) \quad (3)$$

onde identificamos o vetor formal

$$\text{grad}(F) = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \quad (4)$$

calculado no ponto  $(a, b, c)$  que é perpendicular à variedade linear tangente ao gráfico de  $F$  no ponto  $(a,b,c,d)$ , e por definição, então perpendicular ao gráfico de  $F$  no referido ponto.

É interessante perguntar-se o que acontece quando fizermos a interseção da variedade  $w = F(x, y, z)$  com o gráfico da função constante  $w = k$ . Claro, primeiro que tudo temos que admitir a hipótese de que isto é possível, e mais do que isto de que podemos encontrar uma solução:

$$k = F(a, b, c)$$

Se a solução existir, uma varredura de um retângulo conveniente pode encontrar uma solução aproximada para esta equação portanto podemos prosseguir sob a hipótese de que é possível encontrar uma solução e soluções aproximadas são em geral as únicas que é possível encontrar.

Se calcularmos a derivada implícita de  $k = F(x, y, z)$ , como  $k$  é uma constante, o resultado será

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (5)$$

que podemos usar como o modelo para produzir a variedade linear tangente no ponto  $(a, b, c)$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - c) \quad (6)$$

e novamente vemos o gradiente que é perpendicular a uma variedade de dimensão imediatamente menor: dimensão 2. É uma variedade que surge associada à altura  $k$  que os engenheiros introduziram na Matemática como “curvas de nível” no caso bivariado, e que vou chamar de variedade de nível  $k$ . Neste contexto temos uma linguagem geométrica que interessantes associar: superfícies de nível. E o gradiente é perpendicular às superfícies de nível. Como elas representam as regiões do espaço onde não há crescimento vemos que o gradiente, que é perpendicular a elas aponta nas direções onde há crescimento (ou decréscimo) otimizado. São as direções em busca dos extremos das funções.

Em otimização isto é usado para construir um algoritmo para determinação de máximos ou mínimos de funções, é o chamado método do gradiente.

### 3 A fórmula de Taylor

Vou construir um polinômio que aproxima o gráfico de uma função num determinado ponto.

A figura (1) página 4, mostra um satélite em órbita e a trajetória de um

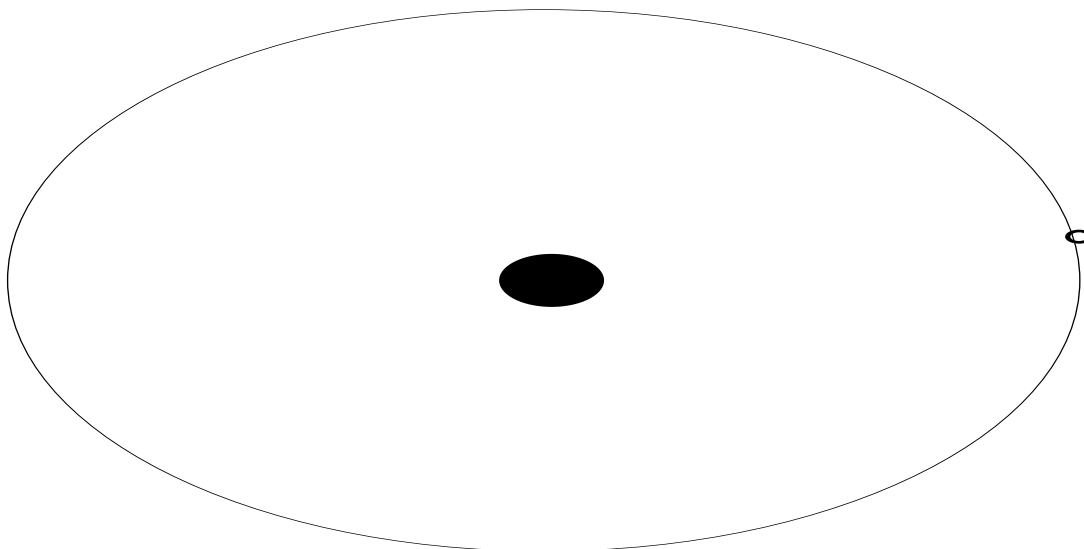


Figura 1: Estação Espacial Internacional

foguete cujo objetivo é fazer uma acoplagem com o satélite, por exemplo a Estação Espacial Internacional. Vou usar este exemplo como motivação para uma construção teórica que da nome a esta seção.

Primeiro que tudo a observação de que a solução deste problema foge ao contexto do Cálculo sendo necessário deixar isto claro para não criar falsas expectativas. É um problema de equações diferenciais envolvendo algoritmos computacionais para sua solução, entretanto a questão não pode ser resolvida mais a frente se não pudermos contar com as ferramentas do Cálculo e a experiência ganha neste disciplina para aplicar mais além. Isto justifica que o exemplo possa ser considerado.

A equação da reta tangente já foi um primeiro exemplo desta questão, um polinômio do primeiro grau cujo gráfico é tangente ao gráfico de  $f$ . Agora queremos obter um polinômio do grau  $n$  que seja tangente ao gráfico de  $f$  e vamos construir as hipótese para que isto possa ser feito.

Retomando o problema espacial as condições necessárias para o acoplamento do foguete à estação são:

- Que o foguete no momento  $t_0$  se encontre no mesmo local em que também esteja a estação espacial no momento  $t_0$ . É o que vou estipular sob forma de equação como:  $f(a) = P(a)$  em que  $P$  é o polinômio procurado, e  $f$  representa nesta história a trajetória da estação espacial;
- que o foguete chegue momento  $t_0$  com a mesma velocidade, derivada do movimento, que a estação, que vou estipular sob forma de equação como:  $f'(a) = P'(a)$ ;
- que o foguete chegue momento  $t_0$  com a mesma aceleração, segunda derivada do movimento, que a estação, que vou estipular sob forma de equação como:  $f''(a) = P''(a)$ ;

### 3.1 A equação corrigida

---

- **Taylor, polinômio** É um polinômio cujo gráfico é tangente ao gráfico duma função diferenciável. O caso mais simples é a *reta tangente* que é um polinômio do primeiro grau cujo gráfico é o da reta tangente ao gráfico duma função num ponto dado, confira o gráfico na figura (fig. 2), página 6.

Observe esta forma de escrever a equação da reta que vou transformar sucessivamente até obter a equação que me interessa:

$$y = b + m(x - a); \quad (7)$$

$$y = f(a) + m(x - a); \quad (8)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a); \quad (9)$$

A equação (eq.7) é a da reta que passa no ponto  $(a, b)$  com coeficiente angular  $m$ , e cheguei, na equação (eq.9) à equação que passa no ponto  $(a, f(a))$  com coeficiente angular  $f'(a)$ .

Então você pode se perguntar: não seria possível obter-se a equação da parábola tangente? e seria uma equação mais realista, porque se um corpo se desliga de outro que o carrega ao se desligar parte pela tangente que será uma parábola porque o corpo ejetado agora entra no domínio da gravidade da Terra se transformando num *corpo que cai em queda "livre"*, quer dizer: segue pela parábola tangente. Vou fazer as mesmas transformações, apenas vou deixar um erro que vou corrigir em seguida, mas você terá tempo para pescar o erro antes de ler a resposta:

$$y = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (10)$$

$$y = b + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (11)$$

$$y = b + m(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (12)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (13)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2; \quad (14)$$

e na equação (eq.14) estou lhe dizendo que tenho a equação da parábola tangente ao gráfico da função  $y = f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$ . E qual é o erro?

Os cálculos nas equações (eq.10) (eq.14) pecaram por excesso de ingenuidade! Vou refazê-las, agora, da forma correta, usando a equação dum polinômio do segundo grau ao qual vou impor à condição de tangência e cópia da aceleração no ponto de separação dos dois corpos que estavam viajando juntos:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (15)$$

$$P(a) = a_0; a_0 = f(a); \quad (16)$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - a); a_1 = P'(a); a_1 = f'(a); \quad (17)$$

$$P''(x) = 2a_2; P''(a) = 2a_2 = f''(a) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(a)}{2}; \quad (18)$$

$$y = P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2; \quad (19)$$

e você tem na equação (eq.19) a equação correta da parábola que descreveria o movimento em queda livre depois que o objeto se tenha despreendido do seu carregador no ponto  $(a, f(a))$ , partindo do ponto  $(a, f(a))$ , copiando a velocidade  $f'(a)$  e a aceleração que agora é a da gravidade somada a eventual força acionadora  $f''(a)$  que lhe tenha sido dada no momento do lançamento.

E como seria a equação dum polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico da função  $y = f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$ ? Novamente, vou responder com uma resposta *ingenuamente errada*:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3}(x - a)^3 \quad (20)$$

deduzindo direto da equação (eq.19).

uma pedra rodando  
presa a um cordão

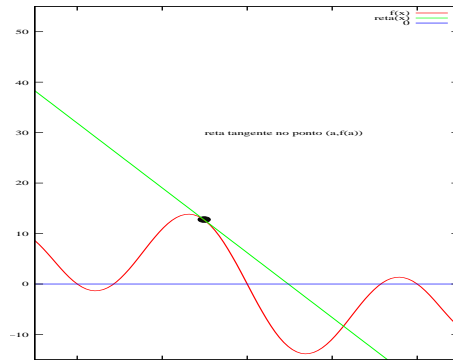


Figura 2:



Se você repetir o método que usei para encontrar a equação da parábola tangente, agora para o caso do polinômio do terceiro grau tangente, você vai encontrar::

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3; \quad (21)$$

e estou de acordo com você que parece que ficou feio! Aparentemente não tem lógica, e o *correto* em Matemática é determinado pela *beleza*. Se estiver feio, está errado! ou deve estar errado!

Não está errado, apenas tem algo escondido:

$$P(x) = \frac{f(a)}{1} + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3; \quad (22)$$

$$P(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3; \quad (23)$$

Você pode encontrar na página [9, programas] uma cópia do programa para fazer alguns gráficos de polinômios de Taylor com gnuplot. Divirta-se.

O polinômio de Taylor de uma função univariada e que tenha derivadas até a ordem  $n$ , conhecidas, num ponto  $x = a$  é a expressão polinomial

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n \quad (24)$$

com  $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ . Os coeficientes são determinados pelo conjunto de equações

$$\begin{cases} P(a) = f(a) & \Rightarrow a_0 = f(a); \\ P'(a) = f'(a) & \Rightarrow a_1 = f'(a); \\ P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) & \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}; \end{cases} \quad (25)$$

Como  $0! = 1!$  e  $2! = 2$  então esta fórmula pode ser escrita de forma concisa como

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k; \quad (26)$$

Dois exemplos importantes da fórmula de Taylor, chamadas de McLaurin é quando aplicamos a Fórmula de Taylor ao *seno* ou ao *coseno*. Nós conhecemos as derivadas de qualquer ordem destas funções em alguns pontos, na origem por exemplo.

As derivadas do *seno* na origem são

$$0, 1, 0, -1, \dots, 0, 1, 0, -1, \dots, \quad (27)$$

$$dsen(n)(n\%4 == 0)?0 : (n\%4 == 1)?1 : (n\%4 == 2)?0 : -1; \quad (28)$$

em que foi usado `if-else-compacto`, com a sintaxe da linguagem `C`, e o símbolo `%`, em `C`, é a função congruência módulo-2 resto dos inteiros na divisão por dois. Na equação (eq. 28), você tem uma função inteira de período 4, então o polinômio de Taylor (ou de McLaurin) do seno é

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{dsen(k)(0)}{k!} x^k; \quad (29)$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; n \geq 0; \quad (30)$$

em que as derivadas são todas calculadas na origem,  $a = 0$ . O desenvolvimento de McLaurin é a fórmula de Taylor no ponto zero.

Usando a linguagem `calc`, usualmente distribuída com os sistemas Debian/Gnu/Linux, você pode implementar este algoritmo para obter o seno com alta precisão, porque `calc` é de precisão infinita (inteira) como também o são Python e em geral os dialetos da linguagem LISP. Não é necessário usar polinômios de grau muito alto, basta definir o *seno* ou o *coseno*, usando a fórmula de Taylor módulo  $\pi$ . Por exemplo, com um polinômio de grau 17, a aproximação rivaliza com a que você pode obter numa calculadora científica.

Na figura (3) página 8, você pode ver o gráfico da função seno, definida algoritmicamente dentro do `gnuplot` e de um polinômio de Taylor de grau 17, do seno, no intervalo  $[-6, 6]$ . e na figura (4) página 8,

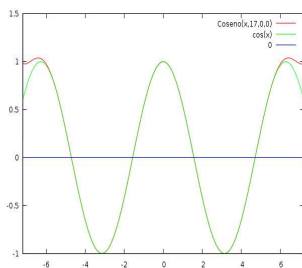


Figura 4:

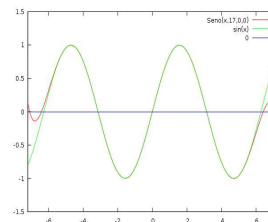


Figura 3:

também usando a expressão algorítmica do cosseno de `gnuplot` e do polinômio de Taylor de grau 17, cosseno, no intervalo  $[-6, 6]$ .

Observe que isto é o suficiente para definir *seno*, *coseno* para qualquer número real, algoritmicamente, usando a periodicidade.

## 4 Quando é que existe a primitiva

### - derivada parcial

Quando uma função,  $F$  for multivariada, há derivadas “parciais” que podem ser calculadas relativamente a cada uma de suas variáveis considerando então as demais variáveis como constantes. Notações:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x \quad (31)$$

indica que a derivada foi calculada relativamente a variável  $x$  considerando as demais variáveis “constantes”. É uma contradição difícil de resolver (a não ser com uma notação mais complicada e pouco usada, de múltíndices), porque  $F_x$  é uma função das mesmas variáveis que  $F$ .

Quando se fala, “considerando as demais variáveis constantes”, isto vale apenas para efeito do cálculo da derivada. Por exemplo, se

$$F(x, y, z) = x^2 + 2xyz + y^2 + z^3 \quad (32)$$

então

$$F_x(x, y, z) = 2x + 2yz; F_y(x, y, z) = 2xz + 2y; F_z(x, y, z) = 2xy + 3z^2; \quad (33)$$

que são, respectivamente as derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z); \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z); \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \quad (34)$$

A jacobiana é a matriz (funcional) das derivadas parciais.

A letra “ $x$ ” que aparece no símbolo do operador derivada, é apenas um índice indicando relativamente a que variável a derivada foi calculada. Se eu quiser calcular o valor da derivada, por exemplo, no ponto  $(-1, 2, 3)$  eu vou escrever:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-1, 2, 3) = 2x + 2yz|_{x=-1, y=2, z=3} \quad (35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-1, 2, 3) = -2 + 12 = 10 \quad (36)$$

$$F_x(-1, 2, 3) = 10 \quad (37)$$

As derivadas parciais surgiram num tempo em que não se compreendia a derivada como aplicação linear, uma nova função, que tem com imagem, em cada ponto um objeto linear tangente. Dada uma função  $F$  a sua derivada é algumas vezes chamada de *jacobiana de  $F$* ,  $J(F)$ , que é a função linear que tem por imagem o *objeto linear tangente*.

Assim,

- se  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ; então

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad (38)$$

uma função  $J(F) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Dado um ponto  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$

$$J(F)(a, b) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)} \quad \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)} \right) \quad (39)$$

uma matriz com duas entradas calculadas no ponto  $(a, b)$ .

- se  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  então

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)); \quad (40)$$

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array} \right) \quad (41)$$

uma função  $J(F) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ . Dado um ponto  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$

$$J(F)(a, b) = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x}|_{(a,b)} & \frac{\partial P}{\partial y}|_{(a,b)} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}|_{(a,b)} & \frac{\partial Q}{\partial y}|_{(a,b)} \end{array} \right) \quad (42)$$

uma matriz com quatro entradas calculadas no ponto  $(a, b)$ .

- de maneira mais genérica, mas tentando manter a notação simples,  $F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$  então

$$F(x_1, \dots, x_n) = (P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_m(x_1, \dots, x_n)); \quad (43)$$

$$J(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial P_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial P_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (44)$$

uma função  $J(F) : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ . Dado um ponto  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$  a jacobina  $J(F)$  associa-lhe uma matriz  $n \times m$  das derivadas parciais calculadas no ponto  $(a_1, \dots, a_n)$ .

- Como uma matriz  $n \times m$  representa uma transformação linear entre os espaços vetoriais  $\mathbf{R}^n$  e  $\mathbf{R}^m$  então posso escrever os três casos acima de forma mais condensada e que serve para sua generalização para espaços de dimensão não finita:

$$F : U \subset E \longrightarrow F; \quad E, F \text{ espaços vetoriais}; \quad (45)$$

$$a \in U; \quad J(F)(a) \in \mathcal{L}(E, F); \quad (46)$$

$$E = \mathbf{R}^n, \quad F = \mathbf{R}^m; \quad \mathcal{L}(E, F) = \mathbf{R}^{nm}; \quad (47)$$

em que  $\mathbf{R}^{nm}$  é o conjunto das matrizes de ordem  $n \times m$ . uma matriz com quatro entradas calculadas no ponto  $(a, b)$ .

Quando os espaços vetoriais não forem de dimensão finita, surgem problemas de convergência a serem considerados que se traduzem na continuidade das transformações lineares a serem consideradas como derivadas. Este assunto passa pela dualidade dos espaços vetoriais.

Vou terminar com um caso particular que mostra bem a riqueza do assunto, vou restringir-me ao caso em que  $F = (P, Q)$  é um campo vetorial

$$P, Q : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad (48)$$

ou seja  $P, Q$  são funções reais de variáveis vetoriais e, portanto,  $F$  é uma função vetorial da variável vetorial  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Neste caso as funções  $P, Q$  são chamadas de funções-coordenadas de  $F$ . Pelo que vimos acima  $J(F) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^4$  e o seu valor num ponto  $(a, b)$  é uma matriz com 4 entradas. Confira a figura (fig. 5), página 13.

Na figura você pode ver dois caminhos, um caminho poligonal,  $\beta$  e outro não poligonal,  $\gamma$ , partindo da condição inicial  $a$  até o ponto  $X = z$ .

É interessante perguntar se  $F$  é uma *derivada* que seria equivalente a perguntar se  $F$  tem uma primitiva e a resposta é *nem sempre* e quem responde a esta pergunta são dois teoremas.

- o teorema de Green, no caso trivial, responde que sim, então neste caso o campo vetorial  $P, Q$  tem suas *integrais de linha* independentes dos caminhos, portanto, dada uma condição inicial  $a$  e qualquer caminho  $\gamma$ , contido em  $\Omega$  ligando esta condição inicial a um ponto  $X \in \Omega$  a integral de linha

$$\phi(X) = \oint_{\gamma^*} \langle (P(\gamma), Q(\gamma)), d\gamma \rangle = \int_a^b \langle P(\gamma(t), Q(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \quad (49)$$

está bem definida e define uma função  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  que usualmente é chamada dum potencial. Confirma o teorema de Green.

Este caso é conhecido como uma *equação diferencial exata*. As equações diferenciais exatas, embora sejam à *derivadas parciais* são consideradas *equações diferenciais ordinárias* porque suas soluções são curvas, as *curvas de nível*  $K$  do potencial  $\mathcal{P}$ ,

$$\mathcal{P}; J(\mathcal{P}) = F = (P, Q) = K; \quad (50)$$

$$Pdx + Qdy = 0; \quad (51)$$

- o teorema de Cauchy, e neste caso na literatura a notação fica um pouco diferente, o hábito é chamar  $P, Q$  de  $u, v$  que se satisfizerem às equações de *Cauchy-Riemann* definem uma função analítica

$$u(x + iy) + v(x + iy) : \Omega \rightarrow \mathbf{C} \quad (52)$$

e que também tem uma primitiva, uma função analítica, no mesmo domínio  $\Omega$  todas infinitamente diferenciáveis e analíticas.

- fora destes dois casos  $F = (P, Q)$  *não tem primitiva*, mas pode ser até de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

## Referências

- [1] Tom M. Apostol. *Calculus vol II*. Blaisdell Publishing Company, 1962.
- [2] Frank Ayres Jr. *Cálculo - Col. Schaum*. Bookman, 2007.
- [3] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 1*. LTC, 2011.
- [4] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 2*. LTC, 2011.
- [5] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 3*. LTC, 2011.
- [6] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 4*. LTC, 2011.
- [7] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, <http://www.isthe.com/chongo/>, 2011.
- [8] Stephen Smale Morris W. Hirsch. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [9] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.
- [10] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matemática, 2007.
- [11] James Stewart. *Cálculo Vol I*. Cengage Learning, 2013.
- [12] James Stewart. *Cálculo Vol II*. Cengage Learning, 2013.
- [13] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, <http://www.gnuplot.info>, 2010.

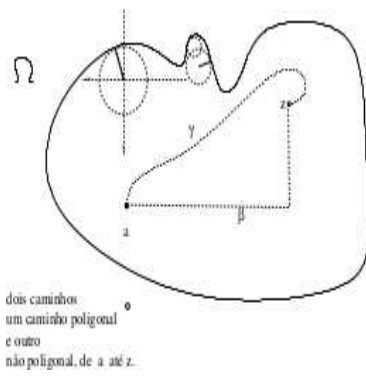


Figura 5: dois caminhos de  $a$  a  $z$  no domínio  $\Omega$