Integral indefinida ou integral imprópria

Praciano-Pereira, Tarcisio *

13 de julho de 2017
preprints da Sobral Matemática
no. 2017.04
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Neste artigo defendo a ideia que o símbolo $\int f(x)dx$, comumente chamado de *integral indefinida*, não tem sentido e é conflitante dentro do conceito de integral estudado no Cálculo e assim deve ser evitado. Apresento, também, saídas para esta substituição

palavras chave: Cálculo integral, integral indefinida, integral como área

In this paper I am fighting against the use of the term *indefinite integral* associated with the symbol

$$\int f(x)dx$$

is in a poignant conflict with integral understood as area and should be dropped out. I am giving some ways out of this problem.

keywords: Integral Calculus, indefinite integral, integral as area.

* tarcisio@member.ams.org

1 Introdução

O símbolo

$$\int x^2 dx \tag{1}$$

é uma "*integral indefinida*" na verdade quer dizer, "*procure* $F(x)$ *tal que* $F'(x) = x^2$" e então F é uma primitiva de f.

A expressão "*integral indefinida*" contra a qual estou me levantando neste artigo, tem uma história e merece ser dicutida em detalhe o que farei em uma seção mais a frente, mas de imediato o meu objetivo é mostrar que ela é insconsistente com o ensino do Cálculo e porisso deve ser evitada, e estou mostrando o porque: *você não a pode colocar uma soma de Riemann para descobrir qual é esta primitiva* - porque não existe ponto inicial e nem final. As somas de Riemann são o algoritmo universal para o cálculo de integrais, embora não sejam o melhor algoritmo do ponto da eficiência computacional, elas representam praticamente a única forma que temos para descobrir formalmente a expressão das primitivas. Obviamente, depois que se adquirir um estoque considerável de funções cujas primitivas sejam conhecidas é então possível desenvolver outras técnicas para descobrir novas primmitivas com alguma eficiencia. Mas isto é uma outra história e o ponto de partida é mesmo *soma de Riemann*.

O Cálculo inicia a apresentação da integral usando uma das suas interpretação, como área algébrica delimitada entre o gráfico duma função e o eixo OX e mostra que esta interpretação corresponde a alguns conceitos importantes, como trabalho, distância. Em todos estes casos, e em particular como área, é preciso háver dois pontos, duas condições, uma condição inicial e outra condição final, entre os quais a área seja calculada então o símbolo na equação (eq.1) está, no mínimo, em contradição com a definição que foi dada inicialmente. É isto que desejo que seja evitado sendo o propósito deste artigo.

2 Defesa da tese

Como preâmbulo para defender um ponto de vista vou calcular explicitamente uma integral o que deve deixar claro que preciso escrever sempre $\int\limits_a^b f(t)dt$ para nos referirmos a integral e que o símbolo $\int f(t)dt$ é impreciso. As integrais que são fáceis de se calcular são as integrais das funções polinomiais, e vai ser uma delas o exemplo básico deste artigo.

$$\int\limits_0^x t^2dt = \int\limits_0^x f(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t)\Delta t; \tag{2}$$

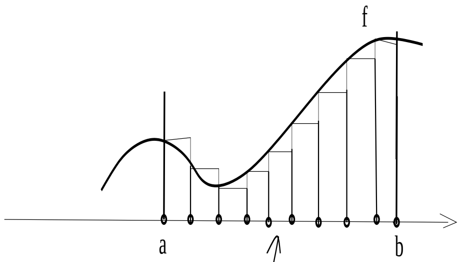
$$\int\limits_0^x f(t)dt \approx \Delta t \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t) = \Delta t \sum_{k=0}^{n} (k\Delta t)^2; \tag{3}$$

Na equação (eq.2) escrevi f(t) para substituir t^2 o que vai me permitir na equação (eq.3) expressar a soma de Riemann. Também, na equação (eq.3) estou usando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à soma - colocando Δt em evidência, porque estou usando um tipo particular de soma de Riemann, a uniforme, quando todos os subintervalos tem mesma medida Δt. Em lugar da igualdade escrevo o símbolo de aproximação porque as somas de Riemann são somas de retângulos então produzem uma área maior ou menor do que a efetiva área da função, confira o gráfico na figura (fig 1), página 3.

No caso das funções polinomiais é fácil descobrir uma primitiva porque a soma de Riemann se transforma numa soma de potências, confira a continuação na próxima equação

$$\int\limits_0^x t^2dt = \int\limits_0^x f(t)dt \approx (\Delta t)^3 \sum_{k=0}^{n} k^2; \tag{4}$$

Como estou calculando a integral duma função do segundo grau, mais exatamente da função x^2, a soma de Riemann vira uma soma de quadrados. Aqui uso subdivisão do intervalo $[a, b]$ em subintervalos todos com a mesma medida, $\Delta t = \frac{b-a}{n}$, em que n é o número de subdivisões. Esta forma de fazer é legal quando se sabe que a integral existe, do contrário temos que trabalhar com subdivisões aleatórias e provar que o algoritmo, soma de Riemann, converge. No caso das funções polinomiais posso provar indiretamente que a soma de Riemann converge então estou usando *partição uniforme*, legalmente, quando a medida de todos os subintervalos é igual a $\Delta t = \frac{b-a}{n}$.



$$\int_a^b f(t)\,dt \equiv \Delta t \sum f(a+k\Delta t)$$

Figura 1:

E olhe que ainda compliquei muito a história, poderia e deveria ter calculado a integral no intervalo $[0, x]$ produzindo uma expressão mais simples, porque o que nos interessa é descobrir uma primitiva, um caso particular, é o que farei a seguir com $\Delta t = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n}$.

Mas continuando, a soma de Riemann depende do valor da soma dos cubos. Posso provar que as *somas de quadrados dos termos duma progressão aritmética*, são dadas por um polinômio do grau 3, somas de cubos dos *termos duma progressão aritmética* por um polinômio do grau 4, etc... somas das potências n dos *termos duma progressão aritmética* são dadas por um polinômio do grau n+1 e você pode ver por ai a razão de que a primitiva duma função do grau n vai ser uma função do grau n+1. Estes resultados são todos consequência dum resultado que interessante introduzir aqui até mesmo porque ele está conectado com a relação entre primitiva e derivada. Vou omitir sua demonstração porque ela um simples cálculo algébrico:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1 (relação)** *entre graus de polinômios*
Se P for um polinômio do grau $n+1; n > 0$ então

$$Q(x) = P(x+a) - P(x)$$

é um polinômio do grau n. Vale a recíproca.

Vou descobrir qual é o polinômio do terceiro grau que calcula a soma dos quadrados. O método é semelhante para qualquer potência, apenas aumenta a dimensão da matriz. Agora tenho que descobrir os quatro coeficientes dum polinômio do grau três. No caso da integral duma função do terceiro grau eu precisaria descobrir um polinômio do grau quatro, logo cinco coeficientes e portanto teria que resolver um sistema com cinco equações.

Analise os passos na seguinte sucessão de equações, depois das quais farei os comentários.

$$\int\limits_0^x t^2 dt = \int\limits_0^x f(t)dt \approx (\Delta t)^3 \sum_{k=0}^{n} k^2; \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = P(n);\ \text{grau}(\ P)\ \text{é}\ 3; \tag{6}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{1} k^2 = P(1); \tag{7}$$

$$1+4 = 5 = \sum_{k=0}^{2} k^2 = P(2); \tag{8}$$

$$1+4+9 = 14 = \sum_{k=0}^{3} k^2 = P(3); \tag{9}$$

$$1+4+9+16 = 30 = \sum_{k=0}^{4} k^2 = P(4); \tag{10}$$

Para encontrar um polinômio do grau 3 preciso de 4 valores, como para determinar um polinômio do primeiro grau, uma reta, preciso de dois valores, ou para encontrar a equação duma parábola preciso de três valores.

Então escrevi quatro equações, da equação (eq.7) até a equação (eq.10). Tenho assim os valores de $P(1), P(2), P(3), P(4)$ e posso montar um sistema de equações usando a expressão geral dum polinômio do terceiro grau;

Escrevendo o sistema de equações e resolvendo-o, vem:

$$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3; \tag{11}$$

$$1 = P(1) = a + b + c + d = 1; \tag{12}$$

$$1 + 4 = 5 = P(2) = a + 2b + 4c + 8d = 5; \tag{13}$$

$$1 + 4 + 9 = 14 = P(3) = a + 3b + 9c + 27d = 14; \tag{14}$$

$$1 + 4 + 9 + 16 = 30 = P(4) = a + 4b + 16c + 64d = 30; \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}; \tag{16}$$

$$det(A) = 12; \tag{17}$$

Colocando esta matriz numa *folha de cálculos* do `calc` tenho

```
A = mat[4,4] = { 1 , 1 , 1  , 1 ,
        1 , 2 , 4  , 8 ,
        1 , 3 , 9  , 27 ,
        1 , 4 , 16 , 64 }
det(A) = 12
A = mat[4,4] = { 1 , 1 , 1  , 1    ,
          1 , 2 , 4  , 8    ,
          1 , 3 , 9  , 27   ,
          1 , 4 , 16 , 64  };
print det(A); 12;

Aa =  mat[4,4] =  {1  , 1 , 1  , 1    ,
```

```
            5  , 2 , 4  , 8   ,
            14 , 3 , 9  , 27  ,
            30 , 4 , 16 , 64  };

print det(Aa); 0;


Ab =  mat[4,4] =  { 1 , 1  , 1  , 1   ,
             1 , 5  , 4  , 8   ,
             1 , 14 , 9  , 27  ,
             1 , 30 , 16 , 64  };

print det(Ab);2;

Ac =  mat[4,4] =  { 1 , 1 , 1   , 1   ,
                    1 , 2 , 5   , 8   ,
                    1 , 3 , 14  , 27  ,
                    1 , 4 , 30  , 64  };

print det(Ac);6;


Ad = mat[4,4] =  { 1 , 1 , 1  , 1    ,
                   1 , 2 , 4  , 5    ,
                   1 , 3 , 9  , 14   ,
                   1 , 4 , 16 , 30    };

print det(Ad) ; 4;
```

Você pode encontrar programas, semelhantes a este `script` do `calc`, na página [3, programas].

Usando a regra de Cramer posso calcular os valores dos coeficientes do polinômio P

$$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3; \tag{18}$$

$$a = \frac{\det(Aa)}{\det(A)} = \frac{0}{12} = 0; \tag{19}$$

$$b = \frac{\det(Ab)}{\det(A)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}; \tag{20}$$

$$c = \frac{\det(Ac)}{\det(A)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}; \tag{21}$$

$$d = \frac{\det(Ad)}{\det(A)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}; \tag{22}$$

$$P(x) = \frac{x+3x^2+2x^3}{6}; \sum_{k=0}^{n} k^2 = P(n) = \frac{n+3n^2+2n^3}{6}; \tag{23}$$

$$\begin{cases} P(1) = 1 & 1; \\ P(2) = 5 & 1+4; \\ P(3) = 14 & 1+4+9; \\ P(4) = 30 & 1+4+9+16; \end{cases} \tag{24}$$

Na última equação, (eq.24), testei os valores de P contra a equação, então é este o polinômio que soma as segundas potências duma progressão aritmética. Posso voltar para a expressão da soma de Riemann e calcular o limite:

$$\int_0^x t^2 dt = \int_0^x f(t)dt \approx (\Delta t)^3 \sum_{k=0}^{n} k^2 = (\Delta t)^3 P(n) = \tag{25}$$

$$= (\Delta t)^3 \frac{n+3n^2+2n^3}{6}; \Delta t = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n} \tag{26}$$

$$\int_0^x t^2 dt = \lim_{n=\infty} \frac{(nx)^3}{6n^3} + \frac{3n^2x^3}{6n^3} + \frac{2n^3x^3}{6n^3} = \frac{x^3}{3} + 0 + 0; \tag{27}$$

Vou escrever a expressão do Teorema Fundamental do Cálculo, confira a figura (fig 2), página 8, apresentando intuitivamente a diferença que ele contém. Aqui arremato a tese uma vez que este teorema não pode ser escrito usando o símbolo que estou contestando, da “integral imprópria”.

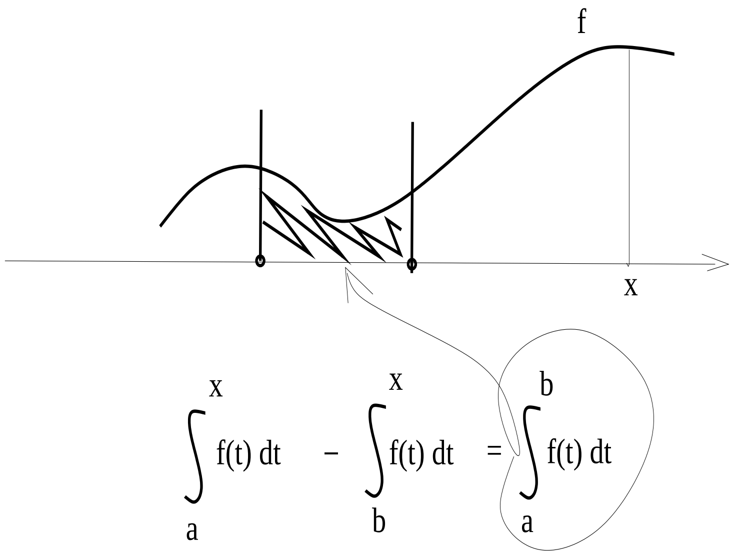


Figura 2: Teorema Fundamental do Cálculo

A *interpretação algébrica* da figura (fig 2), página 8 é

$$\int_a^b t^2 dt = \int_0^b t^2 dt - \int_0^a t^2 dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}; \tag{28}$$

A função $x \mapsto \frac{x^3}{3} = F(x)$ é uma primitiva de $x \mapsto x^2 = f(x)$ sendo a expressão do Teorema Fundamental do Cálculo

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2 (Fundamenteal)** *do Cálculo*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\|_a^b = F(b) - F(a)$$

3 Considerações finais

As figuras foram produzidas com `xfig` e `gnuplot`, [4], os cálculos computacionais foram feitos com `calc`, [2]. Depois do famoso livro de Cálculo do Courant, possivelmente apenas o livro de Apostol adotou o ponto de vista de apresentar primeiro a integral e somente posteriormente a derivada, [1], mas sem priorizar as *somas de Riemann*.

Em momentos mais avançados do estudo do Cálculo encontramos integrais em que pelo menos um dos limites é inatingível, como um belo exemplo de integral que existe é uma das integrais chamadas de $\phi(p)$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \tag{29}$$

que dá exemplo justo e correto para o conceito de *integral imprópria* uma vez que ela não pode ser calculada diretamente com o Teorema Fundamental do Cálculo a não ser que se decida escrever

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = F(\infty) - F(1) \tag{30}$$

então tem sentido o conceito, talvez tanto sentido quanto possa haver sentido em se mencionar a existência de *frações impróprias* ...

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus vol II*. Blaisdell Publishing Company, 1962.

[2] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[4] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.