Quatro segredos

Praciano-Pereira, Tarcisio *

2 de agosto de 2017
preprints da Sobral Matemática
no. 2017.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Este artigo não trás novidades senão de natureza pedagógica e talvez neste sentido sim. Vou tomar quatro grandes pinos de suporte do Cálculo e mostrar um caminho agradável para atingi-los, são as palavras chave do artigo. Também apresento-lhe um *Trabalho Dirigido* que pretende induzir a estudante na compreensão dos números complexos e das funções variável complexa, com objetivo de calcular a derivada do *seno* e do *cosseno*

palavras chave: derivada de funções trigonométricas, Fórmula de Taylor, independência do caminho, Teorema de Green.

There is no new result in this paper but a pedagogical way to go through some of the *pivots* of Calculus which are the keywords, plainly. You are presented to a *directed work* whose aim is to lead the students to understand complex numbers and functions of complex variables with the immediate goal of calculating the derivatives of *sine* and *cosine*.

keywords: derivatives of trigonometric functions, Green's theorem, path independent integrals, Taylor's formula.

*tarcisio@member.ams.org

1 Polinômios tangentes

- **Taylor, polinômio** É um polinômio cujo gráfico é tangente ao gráfico duma função diferenciável. O caso mais simples é a *reta tangente* que é um polinômio do primeiro grau cujo gráfico é o da reta tangente ao gráfico duma função num ponto dado, confira o gráfico na figura (fig. 1), página 1.

Observe esta forma de escrever a equação da reta que vou transformar sucessivamente até obter a equação que me interessa:

$$y = b + m(x - a); \tag{1}$$
$$y = f(a) + m(x - a); \tag{2}$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a); \tag{3}$$

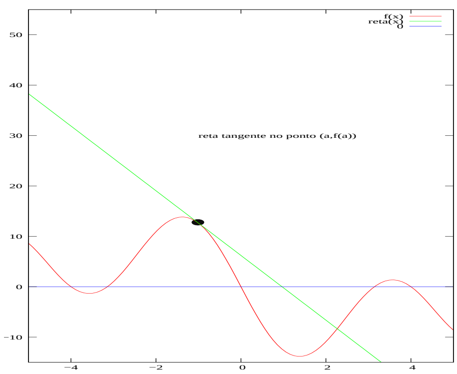


Figura 1:

A equação (eq.1) é a da reta que passa no ponto (a, b) com coeficiente angular m, e cheguei, na equação (eq.3) à equação que passa no ponto $(a, f(a))$ com coeficiente angular $f'(a)$.

Então você pode se perguntar: não seria possível obter-se a equação da parábola tangente? e seria uma equação mais realista, porque se um corpo se desliga de outro que o carrega ao se desligar parte pela tangente que será uma parábola porque corpo ejectado agora entra no domínio da gravidade da Terra se transformando num *corpo que cai em queda "livre"*, quer dizer: segue pela parábola tangente. Vou fazer as mesmas transformações, apenas vou deixar um erro que vou corrigir em seguida, mas você terá tempo para pescar o erro antes de ler a resposta:

uma pedra presa a um cor

$$y = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{4}$$
$$y = b + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{5}$$
$$y = b + m(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{6}$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{7}$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2; \tag{8}$$

e na equação (eq.8) estou lhe dizendo que tenho a equação da parábola tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. E qual é o erro?

Os cálculos nas equações (eq.4) (eq.8) pecaram por excesso de ingenuidade! Vou refazê-las, agora, da forma correta, usando a equação dum polinômio do segundo grau ao qual vou impor à condição de tangência e cópia da aceleração no ponto de separação dos dois corpos que estavam viajando juntos:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{9}$$
$$P(a) = a_0; a_0 = f(a); \tag{10}$$
$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - a); a_1 = P'(a); a_1 = f'(a); \tag{11}$$
$$P''(x) = 2a_2; P''(a) = 2a_2 = f''(a) \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2}; \tag{12}$$
$$y = P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2; \tag{13}$$

e você tem na equação (eq.13) a equação correta da parábola que descreveria o movimento em queda livre depois que o objeto se tenha desprendido do seu carregador no ponto $(a, f(a))$, partindo do ponto $(a, f(a))$, copiando a velocidade $f'(a)$ e a aceleração que agora é a da gravidade somada a eventual força acionadora $f''(a)$ que lhe tenha sido dada no momento do lançamento.

E como seria a equação dum polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$? Novamente, vou responder com uma resposta *ingenuamente errada*:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3}(x-a)^3 \quad (14)$$

deduzindo direto da equação (eq.13).

Se você repetir o método que usei para encontrar a equação da parábola tangente, agora para o caso do polinômio do terceiro grau tangente, você vai encontrar::

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3; \quad (15)$$

e estou de acordo com você que parece que ficou feio! Aparentemente não tem lógica, e o *correto* em Matemática é determinado pela *beleza*. Se estiver feio, está errado! ou deve estar errado!

Não está errado, apenas tem algo escondido:

$$P(x) = \tfrac{f(a)}{1} + \tfrac{f'(a)}{1}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \tfrac{f'''(a)}{6}(x-a)^3; \quad (16)$$

$$P(x) = \tfrac{f(a)}{0!} + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \tfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3; \quad (17)$$

Você pode encontrar na página [6, programas] uma cópia do programa para fazer alguns gráficos de polinômios de Taylor com gnuplot. Divirta-se.

O polinômio de Taylor de uma função univariada e que tenha derivadas até a ordem n, conhecidas, num ponto $x = a$ é a expressão polinomial

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots a_n(x-a)^n \quad (18)$$

com $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Os coeficientes são determinados pelo conjunto de equações

$$\left\{\begin{array}{lll} P(a) = & f(a) & \Rightarrow\ a_0 = f(a); \\ P'(a) = & f'(a) & \Rightarrow\ a_1 = f'(a); \\ P^{(k)}(a) = & f^{(k)}(a) & \Rightarrow\ a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}; \end{array}\right. \quad (19)$$

Como $0! = 1!$ e $2! = 2$ então esta fórmula pode ser escrita de forma concisa como

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k; \quad (20)$$

Dois exemplos importantes da fórmula de Taylor, chamadas de McLaurin é quando aplicamos a Fórmula de Taylor ao *seno* ou ao *cosseno*. Nós conhecemos as derivadas de qualquer ordem destas funções em alguns pontos, na origem por exemplo.

As derivadas do *seno* na origem são

$$0, 1, 0, -1, \dots, 0, 1, 0, -1, \dots, \quad (21)$$

$$dsen(n)(n\%4 == 0)?0 : (n\%4 == 1)?1 : (n\%4 == 2)?0 : -1; \quad (22)$$

em que foi usado `if-else`-compacto, com a sintaxe da linguagem `C`, e o símbolo %, em `C`, é a função congruência módulo-2 resto dos inteiros na divisão por dois. Na equação (eq. 22), você tem uma função inteira de período 4, então o polinômio de Taylor (ou de McLaurin) do seno é

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{dsen(k)(0)}{k!} x^k; \quad (23)$$

$$P(x) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; n \geq 0; \quad (24)$$

em que as derivadas são todas calculadas na origem, $a = 0$. O desenvolvimento de McLaurin é a fórmula de Taylor no ponto zero.

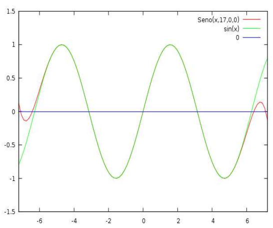


Figura 2:

Usando a linguagem `calc`, usualmente distribuída com os sistemas Debian/Gnu/Linux, você pode implementar este algoritmo para obter o seno com alta precisão, porque `calc` é de precisão infinita (inteira) como também o são `Python` e em geral os dialetos da linguagem `LISP`. Não é necessário usar polinômios de grau muito alto, basta definir o *seno* ou o *cosseno*, usando a formula de Taylor módulo π. Por exemplo, com um polinômio de grau 17, a aproximação rivaliza com a que você pode obter numa calculadora científica.

Na figura (2) página 3, você pode ver o gráfico da função seno, definida algoritmicamente dentro do `gnuplot` e de um polinômio de Taylor de grau 17, do seno, no intervalo $[-6, 6]$. e na figura (3) página 3,

também usando a expressão algorítmica do cosseno de `gnuplot` e do polinômio de Taylor de grau 17, cosseno, no intervalo $[-6, 6]$.

Observe que isto é o suficiente para definir *seno, cosseno* para qualquer número real, algoritmicamente, usando a periodicidade.

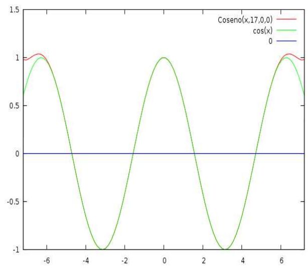


Figura 3:

2 Exponencial e Fórmula de Euler

2.1 O plano do trabalho

Os cursos de Cálculo começam, disfarçadamente, a construção dos números reais porque este é o cenário para o Cálculo Diferencial e Integral. Eu vou usar os números complexos para obter um resultado difícil do Cálculo que é a derivada das funções trigonométricas. Antes vou calcular uma integral que define o logaritmo e depois vou chegar na exponencial para finalmente usar a fórmula de Euler no plano complexo e mostrar que ela é um uso corriqueiro da exponencial, a exponencial complexa. Os números complexos eram e deveriam voltar a ser parte do *ensino médio*, e a fórmula de Euler nada mais é que uma interpretação, usando números complexos, do círculo trigonométrico, portanto assunto, também, do *ensino médio*. Aliás, a fórmula de Euler pode ser entendida como autêntica exponencial como um exercício simples de números complexos restrito ao círculo trigonométrico, $\mathbf{S}^1$, onde podemos mostrar facilmente que

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

ele transforma somas em produtos.

2.2 Logaritmo e exponencial

- **função logaritmo** Confira também *logaritmo*.

A função

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{25}$$

não está definida na origem e se o intervalo $[a,b]$ tiver extremos com sinais iguais, ambos estritamente positivos ou ambos estritamente negativos, a função $y = f(x)$ será contínua, derivável e integrável, a integral

$$\int_a^b f(x)dx \tag{26}$$

existe se $\forall(a,b); ab > 0$.

Vou me restringir na continuação ao caso $a, b > 0$ porque o meu objetivo é a construção do *logaritmo real* que está definido para os números reais positivos. Mas grande parte do que eu fizer aqui, também vale quando $a, b < 0$, o que deixo para você, leitora, confira.

Quando uma função for contínua, e é o caso de $f(x) = \frac{1}{x}$ quando $ab > 0$, posso calcular suas integrais usando somas de Riemann uniformes, porque qualquer cadeia de somas de Riemann converge para o mesmo número, então os resultados obtidos a partir das somas de Riemann uniformes se estendem para todas as outras somas de Riemann, a integral de Riemann existe.

Se uma função for integrável, e toda função contínua o é,as somas de Riemann associadas às cadeias de partições do intervalo $[a,b]$ cujas normas sejam equivalentes à sucessão $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ formam uma classe de sucessões de Cauchy equivalentes definindo assim o número

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \tag{27}$$

o que me permite especializar-me no uso de somas de Riemann uniformes:

Esta função tem uma propriedade fundamental que é fácil de demonstrar usando somas de Riemann uniformes: posso aplicar a *lei do cancelamento* a qualquer um dos limites de integração.

Teorema **1** *Propriedade fundamental de* $f(t) = \frac{1}{t}$

$$a, b > 0 \ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_1^{b/a} f(x)dx = \int_{a/b}^1 f(x)dx \tag{28}$$

Dem *:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \lim_{k=\infty} \sum_{i=0}^{k-1} f(a+i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{k}; \tag{29}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(a+i\Delta x)\Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} f(a+i\tfrac{b-a}{k})\tfrac{b-a}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} f(a+ia\tfrac{\frac{b}{a}-1}{k})a\tfrac{\frac{b}{a}-1}{k} = a\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{a+ia\frac{\frac{b}{a}-1}{k}} \frac{\frac{b}{a}-1}{k} = \tag{30}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1+i\frac{\frac{b}{a}-1}{k}} \frac{\frac{b}{a}-1}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1+i\Delta' x}\Delta' x; \Delta' x = \frac{\frac{b}{a}-1}{k}; \tag{31}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(1+i\Delta' x)\Delta' x \approx \int_1^{\frac{b}{a}} f(t)dt; \tag{32}$$

Na última equação posso identificar uma soma de Riemann uniforme em que $\Delta' x = \frac{\frac{b}{a}-1}{k}$ *cujo módulo é a medida de um qualquer dos subintervalos de* $[1, \frac{b}{a}]$ *o que justifica a aproximação da integral que aparece ao final.*

As contas são semelhantes no caso

$$\int_{\frac{a}{b}}^1 f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \tag{33}$$

q.e.d .

Quer dizer que posso cancelar qualquer um dos limites de integração **no caso particular da função** $f(t) = \frac{1}{t}$. Esta propriedade vale para qualquer função que seja múltiplo desta função, e somente para elas. É uma **propriedade privada** desta classe de funções.

Mais exatamente, qualquer função *cuja integral* tenha esta *propriedade* é um múltiplo, por um número real, da função $y = f(x) = \frac{1}{x}$. Esta propriedade pode ser posta em termos mais interessantes, deixe-me colocá-la como um teorema:

Teorema 2 (Propriedade) *duma classe de funções*

Considere um intervalo $[a, b]; a > 0$. *As funções* $f_K(x) = \frac{K}{x}$ *têm a propriedade integral*

$$\int_a^b f_K(t)dt = \int_{\frac{a}{b}}^1 f_K(t)dt = \int_1^{\frac{b}{a}} f_K(t)dt; \quad (34)$$

e chame o número $K = \frac{1}{ln(p)}; p > 0$.

A demonstração é exatamente a mesma, para qualquer valor de K, do caso particular $K = 1$ e a tradução $K = \frac{1}{ln(p)}$ é apenas uma forma particular de escrever K que logo você verá que tem sentido. Vou mostrar-lhe que este número K tem uma propriedade muito especial, ele é a *mudança de base do logaritmo.*

Como consequência da *propriedade fundamental* posso facilmente calcular a integral

$$\int_1^{a^n} \frac{dt}{t} = n \int_1^a \frac{dt}{t}; \quad (35)$$

para qualquer potência de número positivo. Observe o exemplo

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_1^{10^3} \frac{dt}{t} = \int_1^{10} \frac{dt}{t} + \int_{10}^{10^3} \frac{dt}{t} = \\ = \int_1^{10} \frac{dt}{t} + \int_{10}^{10^2} \frac{dt}{t} + \int_{10^2}^{10^3} \frac{dt}{t} = \\ \int_1^{10} \frac{dt}{t} + \int_1^{10} \frac{dt}{t} + \int_1^{10} \frac{dt}{t} = \\ 3\int_1^{10} \frac{dt}{t} \end{array} \right. = \quad (36)$$

em que usei duas propriedades:

1. A propriedade geométrica das áreas que nos permite subdividir uma região em um determinado número de regiões contíguas sendo a área total a soma das áreas dos pedaços;
2. a propriedade fundamental da integral de $\frac{1}{t}$.

Com algum trabalho, essencialmente o uso das duas propriedades listadas acima, posso mostrar que

Teorema 3 *Propriedade dos logaritmos*

$$\int_1^{a^n} \frac{dt}{t} = n \int_1^a \frac{dt}{t} = nlog(a) = n \int_1^a \frac{dt}{t}; \quad (37)$$

Dem :

Não vou propriamente fazer uma demonstração, apenas alguns comentários para o caso de que a leitura tenha alguma dúvida. Se $a > a$ a sucessão $a, a^2, \dots, a^n$ é crescente e se $a < 1$ a sucessão é decrescente que é o que interessa para aplicar soma de áreas.

q.e.d .

Implicitamente estou fazendo uma definição:

Definição 1 *Logaritmo natural*

$$log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \tag{38}$$

A notação usual para o "logaritmo natural"é "ln", entretanto em geral as linguagens de programação usam o símbolo "log"para o logaritmo natural.

Também posso provar:

Teorema 4 *Propriedade fundamental dos logaritmos*

$log(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_1^{b} \frac{dt}{t} = log(a) + log(b)$

Dem :

Suponha que $a, b > 1$ então $1 < a < ab$ e

$$log(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} =] \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_1^{b} \frac{dt}{t} = log(a) + log(b); \tag{39}$$

Se $0 < a \leq 1 \leq b$ valem as mesma contas descrita na equação anterior, apenas $log(a) < 0$ e o caso $0 < b \leq 1 \leq a$ é o simétrico deste anterior. **q.e.d .**

E como, usando a convenção inicial,

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x f(t)dt = log(x) \tag{40}$$

posso dizer que $F(x) = log(x)$ é a primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ com a condição inicial 1. Este é o exemplo mais simples de função *cuja primitiva não conhecemos*, no sentido de que não a podemos expressar em termos de outras funções conhecidas e assim tive inventar um nome para ela, $F(x) = \log(x)$. A única forma que temos para encontrar os valores de F é calculando aproximadamente a integral que a define. No século 16 esta função foi intensamente estudada e lhe foram construídas tabelas de valores, a chamadas tabelas de logaritmo que foram usadas nas escolas até a década de 70 do século passado. Ela perdeu sua função de máquina de calcular mas permanece com sua importância inalterada para descrever fenômenos das ciências naturais.

O nome é apropriado porque tenho aqui uma função goza das propriedades do *logaritmo* sendo portanto um *tipo de logaritmo* porque você pode repetir tudo que fiz acima com a função

$$f(x) = \frac{K}{x}; K > 0$$

e posso, finalmente, associar K a uma das conhecidas bases de logaritmo. $K = 1$ é apenas um *tipo de logaritmo* de forma *muito natural* chamado de *logaritmo natural* ... em particular $K = \frac{1}{log(10)} = \frac{1}{ln(p)}$ produz o chamado *logaritmo decimal*.

Aqui está a famosa "equação de mudança de base":

$$\log_b(x) = Kln(x); K = \frac{1}{log(b)}; \tag{41}$$

Como $F(x) = ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ então $F'(x) = \frac{1}{x} > 0$ F é uma função estritamente crescente, injetiva, tem inversa, E, e sua inversa tem as propriedades:

Lembrando q
$(0, \infty)$.

Teorema **5 (Propriedas)** *da inversa do logaritmo natural*

$$E : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{++}; \tag{42}$$
$$E(a+b) = E(a)E(b); E(0) = 1; \tag{43}$$
$$\textit{existe um número } e; E(1) = e; ln(e) = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1; \tag{44}$$
$$E(x) = e^x; \tag{45}$$

Dem *:*

Basta reverter as propriedades do logaritmo. **q.e.d .**

O número e é o "*número de Néper*" e a demonstração deste teorema é simples revisão das propriedades do logaritmo, sem nenhum exagero, uma lista de exercícios de Cálculo.

2.3 Fórmula de Euler e números complexos

Eu vou aqui usar a fórmula de Euler mas eu também a vou apresentar. Ela é uma fórmula envolvendo *números complexos* e aqui começa logo o primeiro problema: complexos, os números, o nome assusta e quando um professor de Cálculo começar usando *números complexos* no seu curso de Cálculo vai enfrentar até dos próprios colegas a crítica de que está subvertendo o programa.

Eu vou começar mostrando que não é assim, e você vai ver logo adiante a dedução da derivada do *seno* e do *cosseno* saindo de graça pelo uso dos números complexos. Somente isto já seria uma razão para juntar os números complexos ao programa. Apesar deste acréscimo, ao contrário de fazer o programa ficar mais pesado, vai ficar mais leve e divertido.

Então, o que é um número complexo: $a + bi$. Ora eles aparecem no *ensino fundamental*, mas não fosse o nome, *complexos* simplesmente continuariam na programação. Se o *Delta* for negativo na fórmula de Baskhara da equação segundo grau, aparece um número complexo:

$$x^2 + 1 = 0; A = 1; B = 0; C = 1; Ax^2 + Bx + C = 0; \tag{46}$$
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; Delta = B^2 - 4AC = -4 \tag{47}$$
$$x = \frac{\sqrt{-4}}{2} = \pm 2i; \tag{48}$$
$$i = \sqrt{-1}; \tag{49}$$

e aparece um número complexo bem *descomplicado e simples.* Bem melhor seria com

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{1 + 2i, 1 - 2i\} \tag{50}$$

com um "autêntico" $a + bi$. Mas o *ensino fundamental* lida com expressões muito mais complicadas, os tais *produtos notáveis*, porque não poderia lidar com $a + bi$?

Então, decididamente o problema é de puro preconceito que gera atraso mais para frente, isto numa escola que ainda ensina *logaritmo* como máquina de calcular!

Com isto me sinto liberado para sugerir o uso tranquilo de $\mathbf{C}$ dentro do Cálculo como uma forma alternativa de ver o plano $\mathbf{R}^2$:

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \equiv x + iy \in \mathbf{C} \tag{51}$$

são duas formas equivalentes de ver a mesma coisa. Esta afirmação é falsa, $\mathbf{C}$ é um corpo, um conjunto de números, e neste sentido ele é diferente de $\mathbf{R}^2$ e vou explorar esta diferença num outro segredo, mais a frente quando calcular as derivadas. Mas neste exato ponto posso seguir com a *mentira*, como benévola, afinal, mentiram derrubando uma presidenta eleita, um crime, e minha mentira aqui é apenas uma meia verdade sem grandes prejuizos para você leitora. Mas é preciso fazer esta resssalva, a bem da verdade. *Verdade* é coisa que não interessa a muitos inclusive juizes empolados em suas vestes mediévais, talvez até poristo!

sabemos que
simples, mas r
samos dizê-lo.

Vendo o $\mathbf{R}^2$ desta forma, o círculo unitário é o conjunto dos números complexos de módulo 1 e ainda do Ensino Médio suas coordenadas são

- $\cos(\alpha), \sin(\alpha)$, ou então
- $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$

e na segunda equação, no segundo membro, se tem apenas uma *notação*, por enquanto!

Mas agora considere dois pontos distintos no círculo trigonométrico

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}; \tag{52}$$
$$\cos(\beta) + i\sin(\beta) = e^{i\beta}; \tag{53}$$
$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\left(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\right); \tag{54}$$
$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)}; \tag{55}$$

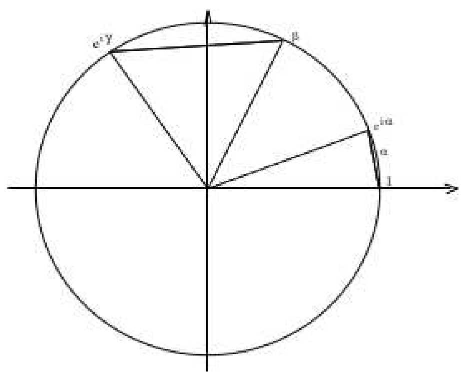


Figura 4:

tirado do conteúdo do Ensino Médio, matéria obrigatório do ENEM, é a soma de arcos da trigonometria! A conclusão é que $e^{i\alpha}$ é mais do que simples notação, se trata mesmo duma exponencial, pelo menos no círculo trigonométrico.

Neste ponto uma polêmica pode ser estabelecida, e eu gosto de polêmicas. Facilmente se pode levantar a questão de que eu usei a fórmula da soma de arcos e que ela não foi demonstrada, e nem mesmo é demonstrada no Ensino Médio. A propriedade descrita e usada nas equações (eq.52) (eq.55) pode ser demonstrada usando-a distância entre dois pontos, $d(e^{i\gamma}, e^{i\beta})$ que é a mesma distância entre os pontos $d(e^{i\alpha}, e^{i0})$.

A figura (fig 4), página 8, oferece o caminho para demonstrar a fórmula do $\sin(\beta - \alpha)$ que lhe mostro como, omitindo algumas contas:

- O círculo centrada na origem que se vê na figura (fig 4) é o círculo trigonométrico.

- O produto de dois números complexos unitários é ainda um número complexo unitário, quer dizer que o círculo unitário, como conjunto de números complexos é fechado para multiplicação. Então o número complexo

$$e^{i\gamma} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

está em algum ponto do círculo unitário $\mathbf{S}^1$. Vou chamá-lo de $e^{i\gamma}$. Esta é uma propriedade dos números reais que vale nos complexos, precisa ser demonstrada, não é difícil mas envolve vários cálculos. Deixo-a como exercício.

- O inverso do número complexo $e^{i\alpha}$ é o seu conjugado, $e^{-i\alpha} \in \mathbf{S}^1$, verifique! Multiplique, o resultado é 1. É uma propriedade exclusiva de $\mathbf{S}^1$ onde todos os elementos são da forma $e^{i\theta}$. Esta propriedade e a anterior tornam $(\mathbf{S}^1, \cdot)$ um *grupo comutativo*.

- $e^{i\gamma} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$

$$e^{i\gamma} = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\left(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\right); \tag{56}$$

- Calculando a distância, $d(e^{i\gamma}, e^{i\beta})$ se verifica que é a mesma distância $d(e^{i\alpha}), 1)$, então a diferença de *arcos*, $\gamma - \beta$, é igual ao arco α ou seja

$$\gamma - \beta = \alpha \quad \Rightarrow \quad \gamma = \alpha + \beta$$

e portanto

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i\gamma}; \tag{57}$$

Voce pode encontrar os cálculos feitos, detalhadamente, na página

https://tarcisio.wordpress.com/2017/08/ Procure o artigo intitulado "Círculo trigonométrico é um grupo multiplicativo e a fórmula da soma de arcos".

Provei assim que no círculo unitário $\mathbf{S}^1$ a fórmula de Euler é uma autêntica exponencial, transforma *adição* de potências em *produto*.

Embora as contas que omiti sejam muito trabalhosas, elas se encontram ao nível dos cálculos algébricos do Ensino Médio. Era apenas necessário que se fizessem menos "jogos educativos" no Ensino Médio, e em lugar deles, se conduzisse a estudantada a dominar melhor os cálculos, afinal, outro tipo de jogo ...

Este é outro segredo, dos quatro que eu queria contar-lhe agora sobre a fórmula de Euler.

Euler, fórmula de Considere o círculo de raio 1 parametrizado pela equação

$$t \mapsto exp(it); t \in [0, 2\pi); e^{it} = (\ cos(t) + i\sin(t)); \tag{58}$$

a equação (58) é conhecida como fórmula de Euler. O detalhe que a faz muito conhecida ocorre quando escolhermos $t = \pi$

$$e^{i\pi} = -1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

reunindo, *no dizer de alguns*, os cinco números mais importantes da Matemática...

$$\{0, 1, e, \pi, i\} \ \mapsto \ e^{i\pi} + 1 = 0;$$

Realmente estes números são importantes, culturalmente... Usando uma linguagem de programação em que os números complexos estejam implementados, é possível reproduzir esta expressão com um pequeno erro. Experimente `calc`, [4], e você pode repetir os comandos que você na figura (fig. 2.3). Na primeira linha foi atribuída à variável `pi` um valor aproximado para o número π e na linha seguinte foi atribuída à variável `i` o valor $\sqrt{-1}$. Finalmente foi calculada a potência $e^{i\pi}$. O resultado:

-1-0.00000000000000000002i

você precisa *interpretar*... está escrito no formato

$$\begin{cases} a + bi; \\ a = -1; \\ b = -0.00000000000000000002 \approx 0; \end{cases} \tag{59}$$

$$a + bi = -1 - 0.00000000000000000002i; \tag{60}$$

$$a + bi \approx -1; \tag{61}$$

É uma *aproximação* porque você terá que usar também *aproximação* para os números e, π uma vez que as linguagens de computação apenas conseguem usar uma parte dos números racionais.

Usando `calc`, que é uma linguagem livremente distribuída na Internet, [4], você pode executar o conteúdo que aparece na figura (2.3), página 10.

Mas é preciso justificar que a esta expressão não é um simples arranjo engenhoso, ou ainda que, *elevando-se* o número e à potência $i\pi$ se tem como resultado -1. Experimente usando o `calc`:

$$e^{i\pi} = -1; e^{i\pi/2} = i; e^{-i\pi/2} = -i; e^{2i\pi} = 1;$$

```
C-style arbitrary precision calculator (version 2.12.3.3)
Calc is open software. For license details type:  help copyright
[Type "exit" to exit, or "help" for help.]


; pi = 4*atan(1);
; pi
    3.14159265358979323848
; i = sqrt(-1);
; exp(i*pi);
    -1-0.00000000000000000002i
```

E eu lhe estou mostrando que uma linguagem de programação, executada num computador, produz este resultado: *é uma conta como outra qualquer*! E você repetir os cálculos em qualquer computador que esteja rodando *Linux* e no qual se tenha instalado *calc*.

Use *Linux* e se torne um ser *liberto*!

Se você multiplicar e^{ia}, e^{ib}, usando a expressão do segundo membro da equação (58), vai obter

$$e^{ia}e^{ib} = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a) \tag{62}$$

$$e^{ia}e^{ib} = \cos(a + b) + isin(a + b) = e^{i(a+b)} \tag{63}$$

como consequência da *soma de arcos da trigonometria*, e não é por acaso, logo você verá que a trigonometria faz parte integrante dos números complexos. Se no *Ensino Médio* fossem ensinados os números complexos, e depois a trigonometria como consequência destes,

- boa parte do lixo trigonométrico poderia desaparecer,
- grande parte do lixo trigonométrico poderia se tornar simples exercício,
- uma visão mais ampla se poderia adquirir incluindo o conceito de grupo e mostrando que $(\mathbf{S}^1, \cdot)$ é um grupo multiplicativo comutativo.

Mas o que esperar do *MEC-golpe* que nos quer empurrar pela goela uma *escola medieval*?

Justifica-se assim a fórmula na equação (58) como uma exponencial apenas seria necessário mostrar que ela está associada com o número e o que pode ser facilmente verificado quando se passa ao contexto das *variáveis complexas* porque

$$F(z) = log(z); F^{-1}(z) = e^z; z \in \mathbf{C}; \tag{64}$$

$$\log(e^{it}) = it; F(F^{-1}(z)) = z; \tag{65}$$

$$\text{usando } \texttt{calc} \ ; \tag{66}$$

$$z = 2 + 3i; ln(exp(z)) - - > 2 + 3i; \tag{67}$$

eu apliquei uma função à sua inversa. Na última equação, primeiro eu defini $z = 2+3i$ para `calc`, caso contrário ele reclamaria que z não estava definido. Depois executei, em `calc`, `ln(exp(z))` tendo como resultado

$$2 + 3i;$$

porque `calc` entende de números complexos.

A ligação entre o número e e o número complexo no segundo membro da equação (58) tem o que ver com o logaritmo natural que tem por base este número. Observe que o logaritmo *natural* de um número complexo é o seu argumento ou ainda a sua imagem sobre o círculo unitário. Desta forma se chega também às *coordenadas polares*, como mostra a figura (5), página 11, um número complexo qualquer $z = a + bi; |z| = r$ pode ser expresso em termos do argumento, t e do módulo $r = |z|$

$$z = re^{it} = a + bi; r = \sqrt{a^2 + b^2}; t = Arg(z); \tag{68}$$

em que vemos envolvido também o teorema de Pitágoras para calcular o módulo do número complexo z. Como $\mathbf{C}$ é *geometricamente* equivalente ao plano $\mathbf{R}^2$, e aqui não há nenhuma *mentira*, então as coordenadas polares da geometria plana se deduzem da expressão de um número complexo usando *módulo* e *argumento*.

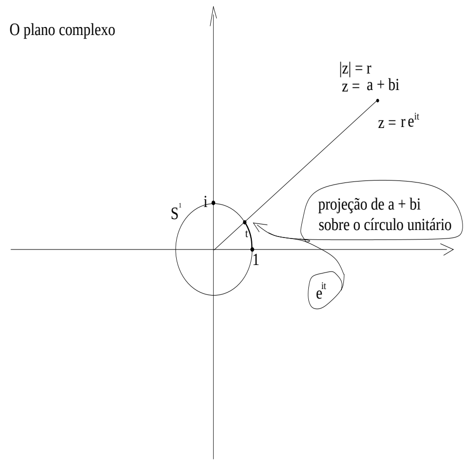


Figura 5:

As "*coordenadas polares*" nada mais são do que um outro nome para *fórmula de Euler*:

$$\rho e^{it} = \rho(\cos(t) + i\sin(t)) \tag{69}$$

$$\rho e^{it} = e^r e^{it} = z; r = \log(\rho); t = Arg(z); \tag{70}$$

$$z = e^r e^{it} = e^{(r+it)}; r + it = \log(z); \tag{71}$$

e a função log é periódica no argumento, o seu período é uma faixa do plano complexo de largura 2π sendo necessário retirar uma das fronteiras da faixa para que exista a função inversa que é a exponencial. Se uma das fronteiras não for retirada, há duplicação de valores, a função deixa de ser injetiva deixando de ter uma inversa: a cada salto de $2pi$ o logaritmo se repete.

É interessante ver a *fórmula de Euler* num contexto ampliado. Não é verdade, estritamente, que $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$. Estes dois objetos coincidem em muitos aspectos mas se tem objetivos diferentes quando se considera um, ou o outro. $\mathbf{C}$ é um conjunto de números que tem *álgebra* bem parecida com a *álgebra dos números* reais. Parecida, mas é uma extensão. Em $\mathbf{C}$ vale

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \tag{72}$$

que não vale em $\mathbf{R}$ a não ser quando $a, b > 0$, porque em $\mathbf{C}$ se define $i = \sqrt{-1}$. Mas para alguns aspectos os dois conjuntos são idênticos. Por exemplo, como espaço vetorial em que os escalares

mudando na
escalar é co
muda tudo!

são os reais, os dois conjuntos são idênticos, dois espaços vetoriais de dimensão dois. Isto quer dizer que se pode olhar a *fórmula de Euler* de duas maneiras idênticas:

$$t \mapsto e^{it} = f(t) = \cos(t) + i\sin(t); \tag{73}$$
$$t \mapsto e^{it} = F(t) = (\cos(t), \sin(t))\,; \tag{74}$$

e na equação (eq.73) eu estou *vendo* um número complexo enquanto que na equação (eq.74) *eu estou vendo* um vetor do $\mathbf{R}^2$. Corrigindo,

- e na equação (eq.73) eu estou *vendo* uma função que transforma o número real t num número complexo, portanto uma função $\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$,
- enquanto que na equação (eq.74) *eu estou vendo* uma função que transforma o número real t num vetor do $\mathbf{R}^2$, portanto uma função $\mathbf{R} \xrightarrow{F} \mathbf{R}^2$.

É a mesma função apenas muda a minha maneira de ver, pura questão psicológica, é uma visão pessoal... mas na equação (eq.74) o símbolo "e^{it}" é apenas uma *etiqueta* na qual o símbolo i não tem nenhum efeito. Deixe-me agora expandir a visão escrevendo:

$$f(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t); \tag{75}$$
$$f'(t) = ie^{it} = i(\cos(t) + i\sin(t)) = (-\sin(t) + i\cos(t)); \tag{76}$$
$$F(t) = (\cos(t), \sin(t))\,; \tag{77}$$
$$F'(t) = (\cos(t), \sin(t))' = \big(\cos'(t), \sin'(t)\big)\,; \tag{78}$$
$$F'(t) = (-\sin(t), \cos(t))\,; \tag{79}$$

Compare as equações (eq.78) e (eq.80), e agora posso concluir que

$$\cos'(t) = -\sin(t)); \sin'(t) = \cos(t); \tag{80}$$

descobri quais são as derivadas das funções $\sin, \cos$.

Confira qualquer livro de Cálculo,

- é necessário usar uma complicada desigualdade geométrica,
- usar o limite notável $\frac{\sin(x)}{x}$ quando $x = 0$,
- pelo menos uma página de cálculos para provar apenas uma destas duas fórmula de derivação.

Precisei aqui de apenas quatro linhas e a identificação entre $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{C}$ como espaço vetorial real.

Nas próximas páginas você encontra uma lista de exercícios mostrando-lhe como é simples desenvolver estas ideias, inclusive deixando que a estudante, ela mesma tenha o prazer de descobrir o teorema

Teorema 6 (derivada) *do seno*
A derivada da função $f(x) = sen(x)$ é

$$f'(x) = cos(x)$$

A demonstração é uma *simples* comparação entre duas formas de ver a derivada duma função vetorial e a derivada de sua correspondente *função complexa*.

2.4 Um exemplo de lista de exercícios

Nesta seção estou lhe trazendo um exemplo de lista de exercícios, uma espécie de *trabalho dirigido, TD*, em que pretendo dar-lhe um exemplo de como conduzir a estudante ao uso dos números complexos para ao final descobrir que $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Também, nesta lista, eu estou desenvolvendo uma técnica de correção em que estou alterando a forma como se pode encontrar em alguns exames. Como observei, os exames atribuem valores às questões e a estudante deve colocar no gabarito a soma dos pontos que correspondem às *questões verdadeiras*. Estou alterando esta metodologia com as seguintes características e vantagens:

- Numerando as questões com os números primos $2, 3, 5, 7, 11$. É a mesma numeração em todas as questões.
- A estudante deve registrar, ao final de cada questão o produto dos números primos que correspondam às questões que tiver selecionado como verdadeiras.
- Se não houver questões verdadeiras, se tem então uma lista vazia a que corresponde o produto 1, o produto duma lista vazia de números é 1, exatamente pela mesma razão porque $0! = 1$.
- Rapidamente, como aqui se pode ver, posso montar o gabarito da lista de exercícios, simplesmente copiando o arquivo com a lista de itens, `arquivo_XX.tex` para outro com o nome `arquivo_solução_XX.tex` este último contendo apenas a última linha: `gabarito: a*b*c*d*e` em que
$$a = 2, b = 3, c = 5, d = 7, e = 11$$
e, naturalmente, eliminando desta lista a seleção correspondente às questões falsas. Com o uso duma calculadora, também, rapidamente, você calcula o valor que deve ficar ao lado de "*gabarito*".

Mas ainda preciso melhorar esta lista que fiz apenas com o intuito de mostrar como podia ser feito.

Cálculo 1	**Lista numero 1**
números complexos	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**
alun@:	
2 de agosto de 2017	**Universidade**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.calculo.sobralmatematica.org/`

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Em cada questão da lista, os itens são numerados usando-se, sequencialmente, os números primos $2, 3, 5, 7, 11$.

Ao final da lista de itens, você encontra a palavra "*gabarito*", ao lado qual você deve escrever o produto dos números primos que identificarem os que você tiver selecionado, [V], como *verdadeiros*. Por exemplo

- Se todas as opções forem verdadeiras, registre gabarito: 2310

  que é o produto $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$
- Se forem verdadeiros os itens 3 e 7, registre gabarito: 21
- Se todas forem falsas registre gabarito: 1, que é o *produto duma lista vazia de números*, exatamente a mesma razão pela qual $0! = 1$, o produto duma lista vazia de números naturais em ordem descrescente.

Exercícios 1 *números complexos*
objetivo: *Esta lista vai conduzí-la às derivadas das funções trigonométricas* seno, cosseno.
palavras chave: *fórmula de Euler, número complexo, derivada das funções trigonométricas.*

1. *número complexo*

   Considere a equaçao

$$x^2 + 3x + \frac{25}{4} = 0 \tag{81}$$

(2) *(V)[ ](F)[ ] O radical é um número positivo e duas raízes reais existem.*

(3) *(V)[ ](F)[ ] as raízes existem mas não são reais, são os dois números complexos*

$$z_1 = \frac{-3+4i}{2}; z_2 = \frac{-3-4i}{2}; \tag{82}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ] Um número complexo é apenas* um número real mais "complexo".

(7) *(V)[ ](F)[ ] Um número complexo é um novo tipo de número, um elemento dum novo conjunto,* **C**, *e com eles podemos fazer as mesmas operações habituais, soma e multiplicação.*

(11) *(V)[ ](F)[ ] Não podemos fazer as contas habituais, soma e multiplicação com números complexos.*

gabarito:

2. *álgebra dos números complexos* *Um número complexo é um par de números reais,* $(a, (3)$*, entretanto fica mais fácil pensar neles como a expressão algébrica* $a + bi$ *em que* $i = \sqrt{-1}$.

   Este novo conjunto formados dos pares $(a, (3); a, b, \in \mathbf{R}$ *é o conjunto* $\mathbf{C}$ *dos números complexos.*

   A primeira coordenado do par $(a, (3)$*, se chama* parte real*,* a*, e a segunda se chama* parte imaginária*,* b*.*

   ==

   (2) *(V)[ ](F)[ ]* $3, 4, 5, 5 + 2i$ *são quatro números complexos sendo que os três primeiros são números reais.*

   (3) *(V)[ ](F)[ ] Um número real não é um número complexo.*

   (5) *(V)[ ](F)[ ] Todo número real é um número complexo em que* parte imaginária *é nula, em outras palavras* $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

   (7) *(V)[ ](F)[ ]* i *é um número complexo cuja parte imaginária é zero.*

   (11) *(V)[ ](F)[ ]* i *é um número complexo cuja parte imaginária é* 1 *e a parte real é zero.*

   gabarito:

3. *álgebra dos números complexos*

   As operações com os números complexos se fazem como na álgebra da quarta série do Ensino Fundamental, como se você tivesse

   $$a + bx = a + bi; \tag{83}$$

   então

   $$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2; \tag{84}$$
   $$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + b(5)i; \tag{85}$$
   $$(a + bi) + (c + di) = (a + (5) + (b + (7)i \tag{86}$$

   valem as regras da aritmética, mas, com a extensão $i = \sqrt{-1}$;

   Consequentemente a equação (eq. 84) pode ser simplificada, ficando:

   $$ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = ac - bd + adi + bci = ac - bd + i(ad + b(5) \tag{87}$$

   ==

   (2) *(V)[ ](F)[ ]*

   $$(3 + 4i)(4 + 2i) = 12 - 8 + 6i + 16i = 4 + 22i; \tag{88}$$

   (3) *(V)[ ](F)[ ]*

   $$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 - 8 + -6i + 16i = 4 + 10i; \tag{89}$$

   (5) *(V)[ ](F)[ ]*

   $$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 + 8 - 6i + 16i = 20 + 10i = 2(10 + 5i); \tag{90}$$

   (7) *(V)[ ](F)[ ]* $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$ *é impossível de ser calculado.*

   (11) *(V)[ ](F)[ ]* $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$*, e o zero tanto é um número real como complexo.*

   gabarito:

4. *fórmula de Bashara*

   A fórmula de Baskhara agora vale mesmo quando o discriminante *da equação do segundo grau for negativo, neste caso resulta num número complexo não real.*

   ==

   (2) *(V)[ ](F)[ ] Nem toda equação do segundo grau tem uma solução, no conjunto dos números complexos, não vale mais a fórmula de Baskhara.*

   (3) *(V)[ ](F)[ ] No conjunto dos números complexos toda equação do segundo grau tem uma solução, sempre vale a fórmula de Baskhara.*

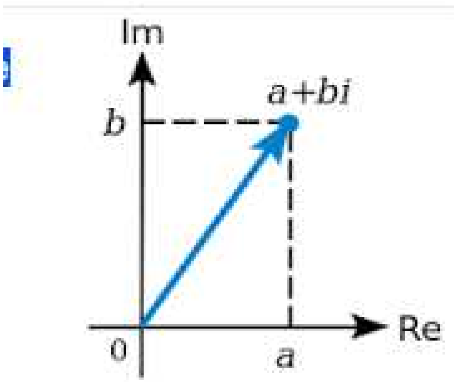
   (5) *(V)[ ](F)[ ] Não é mais possível fazermos uma interpretação geomética simples, como as raízes duma parábola, no plano, para uma solução duma equação do segundo grau.*

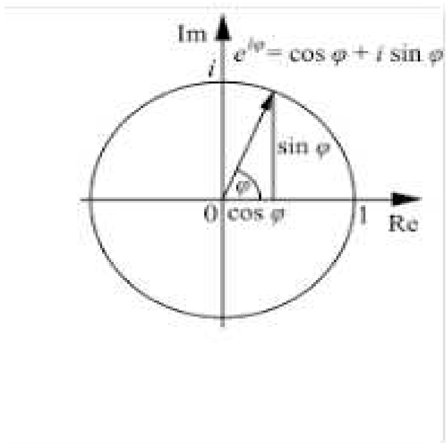
   (7) *(V)[ ](F)[ ] A solução duma equação do segundo grau é um ponto no plano complexo.*

   (11) *(V)[ ](F)[ ] A equação $x^2 + 1 = 0$ tem como solução $\pm i$.*

   gabarito:

5. *número complexo, interpretação geométrica Como um número complexo é uma expressão da forma $a + bi$, em que a e b são números reais, então podemos vê-los, de forma equivalente a que a Física usa, agora $j = 1, i = \sqrt{-1}$. Então um numero complexo é um vetor do plano complexo. Confira a figura (fig 5), página 16,*





   As figuras que aparecem nesta questão foram copiadas da Wikipedia, [3, números complexos] onde você pode encontrar mais informações sobre os números complexos.

   *O número complexo 1 = (1,0) = 1 + 0*i é chamado de* origem do círculo trigonométrico. *Observe porque, ele é o elemento neutro da multiplicação.*

   Todo arco do círculo trigonométrico *é determinado pela* origem *junto com outro ponto do círculo.*

   ==

   (2) *(V)[ ](F)[ ] Se $a^2 + b^2 = 1$ então não é possível representar o número complexo $a + bi$.*

   (3) *(V)[ ](F)[ ] Se $a^2 + b^2 = 1$ então o número complexo $a + bi$ é um ponto do círculo trigonométrico no plano complexo.*

   (5) *(V)[ ](F)[ ] A figura (fig 5), página 16, mostra o círculo trigonométrico que é o conjunto dos números reais de módulo 1.*

(7) *(V)[ ](F)[ ]* *A figura (fig 5), página 16, mostra o círculo trigonométrico, um subconjunto dos números complexos, daqueles que têm módulo 1.*

(11) *(V)[ ](F)[ ]* *A figura (fig 5), página 16, mostra o círculo trigonométrico onde o número complexo*

$$(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

determina, com a origem do círculo, $(1, 0)$, o arco de tamanho ϕ. O maior arco que pode assim ser determinado mede 2π e esta figura sugere que $\phi < 2\pi$.

gabarito:

6. *Fórmula de Euler*

Dado um número complexo $z = a + bi$ se chama de conjugado *ao número complexo $\overline{z} = a - bi$. Alguns autores usam a notação $z^* = \overline{z} = a - bi$. Eu vou usar exclusivamente a notação $\overline{z} = a - bi$.*

==

(2) *(V)[ ](F)[ ]* *Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas* $(\sin(\theta), \cos(\theta))$ *em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.*

(3) *(V)[ ](F)[ ]* *Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas* $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ *em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.*

(5) *(V)[ ](F)[ ]* *A* identidade fundamental da trigonometria

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \tag{91}$$

é a própria definição do círculo trigonométrico.

(7) *(V)[ ](F)[ ]* *A* identidade fundamental da trigonometria

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \tag{92}$$

identifica o conjunto dos números complexos de módulo 1.

(11) *(V)[ ](F)[ ]* *O número complexo $a - bi$ é chamado de* conjugado *do número complexo $a + bi$ e o produto deles é o número real positivo $a^2 + b^2$.*

gabarito:

7. *conjugado dum número complexo*

O número complexo $a - bi$ é chamado de conjugado *do número complexo $a + bi$ e o produto deles é o número real positivo $a^2 + b^2$.*

==

(2) *(V)[ ](F)[ ]* *$a + bi$ é simétrico com $a - bi$ relativamente ao eixo OX.*

(3) *(V)[ ](F)[ ]* *$a + bi$ é simétrico com $a - bi$ relativamente ao eixo OY.*

(5) *(V)[ ](F)[ ]* *Os números complexos não possuem inverso multiplicativo.*

(7) *(V)[ ](F)[ ]* *Se $a^2 + b^2 \neq 0$ então o número complexo $z = a + bi$ tem inverso multiplicativo que é*

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}z} \tag{93}$$

(11) *(V)[ ](F)[ ] Com exceção do número complexo* $0+0i=0$ *todo número complexo* $a+bi$ *tem inverso multiplicativo dado pela fórmula*

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}z} \tag{94}$$

gabarito:

8. *fórmula de Euler* *Considere a identidade como uma definição*

$$e^{it} = (\cos(t) + i\sin(t)) \tag{95}$$

Por enquanto aceite que o símbolo e^{it} *seja apenas uma* etiqueta *designado um ponto no círculo trigonométrico que determina o arco de medida* t. *Lembre-se que a origem do círculo é o ponto* $(1,0) = e^{i0} = 1 \in \mathbf{R}$.

==================================

(2) *(V)[ ](F)[ ]* e^{it} *designa um único ponto sobre o círculo trigonométrico para cada número real* $t \in [0, 2\pi)$.

(3) *(V)[ ](F)[ ]* $e^{it}e^{-it} = 0$

(5) *(V)[ ](F)[ ]* $e^{it}e^{-it} = 1$ *e como* $\overline{z} = e^{-it}$ *é o conjugado de* $z = e^{it}$ *então, no círculo trigonométrico, o conjugado de* z *é o seu inverso multiplicativo:* $z\overline{z} = 1$.

(7) *(V)[ ](F)[ ] Considere um número complexo* z *qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto* z *e a origem determinam uma reta passando por*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = e^{i\theta}; \tag{96}$$
$$(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = e^{-i\theta}; \tag{97}$$

(11) *(V)[ ](F)[ ] Dado um número complexo* z *qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto* z *e a origem determinam uma reta passando por*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = e^{i\theta}; \tag{98}$$
$$-(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = -e^{i\theta}; \tag{99}$$

que é um par números que são inversos, *aditivamente.*

gabarito:

9. *função complexa*

Considere a função

$$f(z) = z^2 - 1; \tag{100}$$

Uma forma equivalente de escrever a equação da função f *é*

$$z = x + iy; \tag{101}$$
$$f(z) = z^2 - 1 = x^2 - y^2 + 2xyi - 1; \tag{102}$$
$$f(x,y) = (x^2 - y^2 - 1, 2xy); \tag{103}$$

Na equação (eq.103) a função f *foi escrita* interpretando *um número complexo como um par de pontos do plano, ou um vetor do plano.*

==

(*2*) *(V)[ ](F)[ ]* $f(0) = 1$

(*3*) *(V)[ ](F)[ ]* $f(0) = -1$

(*5*) *(V)[ ](F)[ ]* $f'(z) = 2z$;

(*7*) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* $F(z) = \frac{z^3}{3} - z + 1$ *então* $F'(z) = f(z)$;

(*11*) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* $F(z) = \frac{z^3}{3} - z$ *então* $F'(z) = f(z)$;

gabarito:

10. *números complexos*

Considere as funções f, g *definidas pelas equações:*

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t))\,; \tag{104}$$
$$g(t) = (\cos(t) + i\sin(t)) = e^{it}; \tag{105}$$
$$t \in [0, 2\pi); \tag{106}$$

As duas funções associam um número real t *com um ponto do círculo trigonométrico. São duas funções idênticas apenas escritas com formatos diferentes:* f *é uma* função vetorial *enquanto que* g *é uma* função complexa.

===

(*2*) *(V)[ ](F)[ ]* $f(t)$ *é um vetor qualquer do plano* $\mathbf{R}^2$.

(*3*) *(V)[ ](F)[ ]* $g(t)$ *é um vetor unitário do plano complexo* $\mathbf{C}$.

(*5*) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f'(t) = (\cos(t), \sin(t))' = \big(\cos'(t), \sin'(t)\big) \tag{107}$$

(*7*) *(V)[ ](F)[ ]* *Como* i *é uma constante então a derivada de* $t \mapsto e^{it}$ *é* $t \mapsto ie^{it}$ *então*

$$g'(t) = i\,(\cos(t) + i\sin(t)) = (-\sin(t) + i\cos(t))\,;$$

(*11*) *(V)[ ](F)[ ]* *Como as imagens das duas funções,* $f(t), g(t)$, *coincidem então suas derivadas também são iguais portanto*

$$\begin{cases} \cos'(t) = & -\sin(t); \\ \sin'(t) = & \cos(t); \end{cases} \tag{108}$$

gabarito:

O gabarito da lista.

3 Integral independente do caminho

O salto da dimensão 1 para dimensão dois é surpreendente, um novo mundo se abre, claro tem mais espaço pela frente e a Matemática nos oferece alguns segredos interessantes a cada vez que saltamos para uma nova dimensão! Mas este salto, da *dimensão um* para a *dimensão dois*, eu considero que é o fundamental. É também o mais simples e como oferece alguns resultados interessantes então fica mais fácil entender o que pode acontecer em dimensão ainda maior.

Por exemplo, no Cálculo univariado, a maioria das funções com que lidamos tem *primitiva*, qualquer "*função decente*" tem integral e podemos definir-lhe uma primitiva pelo menos em algum intervalo, mas $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ pode não ter meio de se lhe definir uma *primitiva* ou, com mais enfase, uma função $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, mesmo decente, pode não ter primitiva!

E há funções que nos ajudam a descobrir as veredas e não é atoa que elas se encontram no centro de muitos teoremas. Uma delas é

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{-y}{x^2+y^2}\right); \tag{109}$$

$$u(x, y) = \tfrac{x}{x^2+y^2}; v(x, y) = \tfrac{-y}{x^2+y^2}; \tag{110}$$

$$z = x + iy; \overline{z} = x - iy; \tfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = u(x, y) + iv(x, y) = \tfrac{1}{z} = f(z) \tag{111}$$

e eu já escolhi a notação que vou usar posteriormente em outras situações e na equação (eq.111) eu estou lhe mostrando o monte de informações que se encontra escondido dentro da função f. Aqui eu estou novamente misturando $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{C}$ ao olhar f como definida num ou no outro conjunto conforme seja a minha *conveniência*...

É uma função $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$ que não está definida em $(0, 0)$, nós dizemos que têm duas componentes e algumas vezes é prático dar nome a cada uma das componentes como eu fiz aqui chamando-as de u, v.

O segredo que tenho em mente neste momento é o teorema de Green, mas ele depende duma extensão da integral do Cálculo Univariado que pode ser feita em espaço de qualquer dimensão, a *integral de linha* e vou começar por ela embora no meio do caminho eu esteja fazendo referência ao teorema de Green. Que a leitora fique advertida deste tropeço lógico.

- **integral de linha** É uma generalização da integral *a uma variável* em que o integrando é uma função vetorial (com valores num espaço vetorial de dimensão maior ou igual que 2) e pelo menos duas variáveis reais.

A ideia consiste em selecionar um *caminho* dentro dum espaço vetorial de dimensão maior do que dois para nele definir uma função univariada e depois aplicar a integração do Cálculo univariado: *integral sobre uma linha.* Confira o gráfico na figura (fig. 6), página 22, e logo em seguida eu vou explicar-lhe, detalhadamente, o que foi feito. Entretanto a ideia consiste em definir uma linha, um caminho, num espaço de dimensão alta e calcular a integral relativamente a este caminho: uma integral univariada! Uma das funções desta técnica é a construção de primitivas e vou me concentrar neste objetivo. Confira também o teorema de Green que usa esta técnica.

Um caso típico é o comprimento de arco de uma curva (embora nem sempre caracterizado como integral de linha).

Deixe-me partir do significado da derivada para voltar para a *primitiva* como se faz no Cálculo univariado, como motivação para discutir a *integral de linha.* Acompanhe a ideia.

Considere uma função bivariada

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2; f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}; \tag{112}$$

a sua derivada vai ser do *tipo*

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2; Df : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2; \tag{113}$$

$$Df(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right); \tag{114}$$

$$u(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}; v(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}; \tag{115}$$

e você pode ver que a derivada de funções bivariadas *expande* o conjunto dos valores que agora, *na derivada*, é de dimensão dois. Observe outros exemplos

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2; f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2; Df : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^4; \tag{116}$$

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2; f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^4; Df : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^8; \tag{117}$$

$$\Omega \subset \mathbf{R}^m; f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n; Df : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^{nm}; \tag{118}$$

em que $Df = J(f)$ é a derivada de f.

Então vem a pergunta, como ficam as primitivas? Uma resposta rápida apenas analisando os resultados contidos nas equações (eq.116) (eq.118)

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2; f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \tag{119}$$

não pode ser uma derivada e portanto não tem uma primitiva. Para que seja uma derivada e portanto possa ser uma primitiva, a imagem tem que ter dimensão $nm \in \{1, 2, 4, \dots$.

Este é um dos *segredos* do Cálculo. Quando saltamos do *Cálculo univariado* para o *Cálculo multivariado* surge a primeira diferença: nem toda função multivariada tem primitiva. No Cálculo univariado toda "*função decente*" tem primitiva! Praticamente todas as funções que aparecem como exemplos nos livros de Cálculo univariado tem primitivas, pelo menos nalgum intervalo.

No Cálculo multivariado já não é mais assim e você vai entender aqui o que acontece, mas é com o *Teorema de Green* que vai se fechar a informação de forma muito precisa.

Eu vou tratar aqui do caso

$$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \tag{120}$$

e depois facilmente se generaliza a ideia para para o caso

$$\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m; \tag{121}$$

Deixe-me retornar à *integral de linha*.

Para definir a primitiva duma função de várias variáveis, forçamos um retorno ao Cálculo univariado, e é aqui entra a *integral de linha*, e usamos a metodologia ali desenvolvida para definir primitivas. Depois é possível criar uma formulação independente, mas inicialmente é este o caminho mais fácil e mais intuitivo.

Vou descrever o caso de funções de duas variáveis porque será mais fácil fazer representações geométricas, mas a ideia se generaliza para qualquer dimensão.

Deixe-me escolher um ponto no plano, uma condição inicial, P, e vou traçar uma curva deste ponto até outro ponto qualquer, confira o gráfico na figura (fig 6), página 22.

Na figura (fig 6) você pode ver o ponto P conectado ao ponto X pelo caminho γ.

A palavra "caminho" usualmente significa nos textos de Geometria Diferencial uma curva diferenciável e é este o sentido que estou tomando aqui. Então eu posso "parametrizar" o caminho γ num intervalo $[a, b]$ como você pode ver na figura (fig 6), e tenho

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \subset \mathbf{R}^2; \tag{122}$$

$$[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Omega; \tag{123}$$

Eu estou fazendo a confusão que habitual, usando o símbolo γ para representar tanto a curva como a função, a parametrização desta curva. Então $\gamma(t)$ é uma função real à qual se pode aplicar a integração do Cálculo 1 para obter uma primitiva

corretamente, se separa, γ^*, a curva, e γ a parametrizaç

$$F(t) = \int_a^t f(\gamma(s))\gamma'(s)ds; s \in [a, b]; \tag{124}$$

$$\gamma(a) = P; \gamma(t) = X; f(\gamma(t)) = f(X); \tag{125}$$

Na equação (eq.124) eu defini a primitiva F com a condição inicial P e *relativamente ao caminho* γ, esta observação é importante! Também na equação (eq.124) estou usando um produto, $f(\gamma(s))\gamma'(s)$ que eu ainda preciso explicar. É outra riqueza que existe quando estivermos em dimensão maior, há várias formas de fazer produto dos vetores e posso escolher a que melhor se adaptar aos meus objetivos. Agora vou fazer uma escolha que que fique coerente com a interpretação dúbia que estou fazendo:

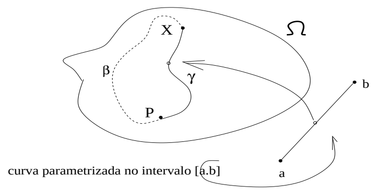


Figura 6:

- ora um vetor do plano,
- outra um número complexo,
- mas sempre significando a mesma coisa.

O produto na equação (eq.124) deve ser compatível com o produto de números complexos.

O problema é que há funções que são *sensíveis* à escolha do caminho. Confira a figura (fig 6), eu posso ir da condição inicial P para o ponto X por muitos caminhos. Se a função f for *sensível* à escolha do caminho, ela, simplesmente, não tem primitiva, porque $F(X)$ fica indefinido, eu posso seguir pelo caminho β^* ou pelo caminho γ^*, confira a figura (fig 6) e ter resultados diferentes o que significa que eu não tenho uma definição de $F(X)$.

Um método para verificar isto consiste em construir um caminho fechado e calcular a integral sobre este caminho fechado. Se o resultado for diferente de zero estou na frente duma função cuja integral depende do caminho, porque estarei saindo de P e voltando para P. Quando a integral duma função for independente de caminhos a integral sobre curvas fechadas é sempre nula. Tais funções terão primitivas no domínio considerado.

Na figura (fig 6) o caminho β foi *projetado* partindo de P para chegar em X. Os caminhos são orientados, este um outro segredo em espaços de dimensão maior do que 1. Deixe-me chamar $-\beta$ o caminho que vai de X para P, e considere o caminho $\gamma^* \cup -\beta^*$. É um caminho fechado: sai de P e volta para P.

A orientação existe em dir apenas fica d bida!

Se a função f for *sensível* à escolha do caminho, a integral sobre $\gamma * \cup -\beta *$ *pode* ser diferente de zero.

As funções *sensíveis* à escolha do caminho de caminho se chamam *dependentes do caminho* e não têm primitivas. A integral de linha destas funções, sobre um caminho fechado *pode* ser diferente de zero.

Vou usar um exemplo clássico que também costumo usar em outros contextos:

na última equação está a justificativa da escolha do exemplo!

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right); \tag{126}$$

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}; v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}; \tag{127}$$

$$z = x + iy; u(z) + iv(z) = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z} = f(z); \tag{128}$$

$$z \in \mathbf{S}^1 \frac{1}{z} = \overline{z}; \tag{129}$$

Esta função não está definida em $(x, y) = (0, 0)$ então vou escolher uma curva fechada contendo a origem, o círculo unitário, por exemplo e calcular a *integral de linha* desta função sobre o círculo. Além disto, e observe como é *revolucionário* trabalhar com números complexos, sobre $\mathbf{S}^1$, o disco unitário, $z = e^{it} \in \mathbf{S}^1$ e consequentemente $dz = ie^{it} = iz \in \mathbf{S}^1$. Esta propriedade vale apenas em $\mathbf{S}^1$, o disco unitário, que é o vai me interessar em seguida.

$\mathbf{S}^1$ é o o círculo trigonométrico

Acompanhe as contas, depois delas farei os comentários, dando-lhe oportunidade de que *você as verifique, você mesmo.*

$$z(t) = \gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbf{S}^1; \tag{130}$$

$$\begin{cases} \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2; \\ f(\gamma(t)) = \frac{1}{\gamma(t)}; I = \oint\limits_{\gamma^*} f(\gamma)d\gamma = \int\limits_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt; \\ \gamma'(t) = i\gamma(t); \\ I = \int\limits_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} i\gamma(t)dt = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2i\pi \neq 0 \end{cases} \tag{131}$$

A integral de f sobre a curva fechada $\mathbf{S}^1$ é diferente de zero, então f não tem primitiva numa região do plano contendo a origem, e observe que a afirmação é absoluta.

O que aconteceria numa região $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ que não tenha o zero? Seria preciso mostrar que *qualquer integral sobre uma curva fechada é zero.* Isto é uma aplicação do teorema de Green, porque ele oferece hipóteses para serem testadas e confirmar se uma função é uma derivada.

Observe que eu havia prometido que daria uma *interpretação* ao produto dentro da integral, mas como os fatores são números complexos ficou vazia a promessa à qual vou voltar em seguida.

Se você fizer este cálculo sobre qualquer curva fechada no plano que não contenha a origem o resultado será zero, e a primitiva de f é a mesma do Cálculo I, mas a demonstração não se encontra aqui, ela é feita via teorema de Green.

A "conclusão" é que $f(z) = \frac{1}{z}$ não tem primitiva num domínio contendo o zero! Mas num domínio que não contenha o zero, tem primitiva que é, como no caso real, o logaritmo. Isto explica, inclusive, porque na definição do logaritmo se escolhe como domínio os reais estritamente positivos, mas a demonstração não se encontra aqui e é via teorema de Green. Confira também a definição do *logaritmo complexo* que é uma extensão do logaritmo real.

Para terminar, eu vou repetir os cálculos das equações (eq.130) e (eq.131) usando apenas as técnicas do Cálculo I *tradicional* porque lhe servirá de apoio no caso de que você deseje enfrentar as contas para uma curva qualquer, fechada, que deixe o zero de fora. Servirá como um exemplo do cálculo de integral de linha e vai forçar-me retornar à prometida *interpretação* do produto dentro da integral.

sem usar números complexos!

Refazendo as contas das equações (eq.130) e (eq.131) como prometido:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2; \gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbf{S}^1; \tag{132}$$

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\sin(t), \cos(t)) \in \mathbf{S}^1; \tag{133}$$

$$f(z) = \tfrac{1}{z}; f(x, y) = \tfrac{1}{x+iy} = \tfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = \tfrac{(x,-y)}{x^2+y^2}; \tag{134}$$

$$P(x, y) = \tfrac{x}{x^2+y^2}; Q(x, y) = \tfrac{-y}{x^2+y^2}; \tag{135}$$

$$\tfrac{\partial P}{\partial y} = -\tfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \tfrac{\partial Q}{\partial x} = \tfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \tag{136}$$

$$\int\limits_{\gamma^*} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\int\limits_{\Omega} \tfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2} dxdy; \tag{137}$$

Terminei a última equação com uma tentativa de aplicar o teorema de Green. Ocorre que a integral dupla na equação (eq.137) não existe, o denominador é de grau 4 e o numerador é de grau dois então o limite não existe (não é restaurável) quando $(x, y) = (0, 0)$, ao passo que a integral de linha existe e pode ser calculada. Vou seguir a partir da primeiro membro da equação (eq.137) e tenho

$$\int_{\gamma^*} P(x,y)dx = \int_{\gamma^*} \frac{x}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\|_{\gamma^*}; \tag{138}$$

$$\int_{\gamma^*} Q(x,y)dx = -\int_{\gamma^*} \frac{y}{x^2+y^2}dx = -\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\|_{\gamma^*}; \tag{139}$$

Nas equações (eq.138) e (eq.139) estou expressando a primitiva da função $\frac{x}{x^2+y^2}$ a ser calculada relativamente a x ou a y que existe sobre a curva γ^* e você pode verificar calculando as derivadas parciais para encontrar P, Q respectivamente. Ao final de cada expressão estou indicando em conjunto é que se deve aplicar a *variação total do teorema fundamental do Cálculo*, γ^* a diferença entre dois pontos extremos desta curva. Como uma curva fechada, será de qualquer ponto até ele mesmo.

Posso agora retormar os cálculos a partir do primeiro membro da equação (eq.137),

$$\int_{\gamma^*} P(x,y)dx + \int_{\gamma^*} Q(x,y)dy = \int_{\gamma^*} P(t,y)dt + \int_{\gamma^*} Q(x,t)dt; \tag{140}$$

$$\int_{\gamma^*} P(x,y)dx + \int_{\gamma^*} Q(x,y)dy = \int_{\gamma^*} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}dx = \int_{\gamma^*} dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi; \tag{141}$$

Na ultima expressão da equação (eq.141) eu escrevi a integral sobre um intervalo de parametrização que tem a mesma medida da curva γ^* então o fator de correção na "mudança de variável" é 1.

E há uma discrepância entre este resultado e o que obtive na equação (eq.131) , agora obtive 2π e anteriormente obtive $2i\pi$. É preciso interpretar o resultado quando trabalharmos com a semelhança $\mathbf{R}^2, \mathbf{C}$. Em ambos os casos se trata do logaritmo, que não está definido em $\mathbf{R}^2$, mas a transformação de $\mathbf{R}^2$ definida pelo *logartimo complexo* existe e vale e ela dá um salto duma faixa logarítimica *em volta da origem*. O logaritmo, como função complexa é periódica na parte imaginária com período $2i\pi$.

Calcular integrais, aleatoriamente sobre curvas fechadas não é conclusivo!

Na expressão do teorema de Green, eu vou usar a notação $(u, v) = (P, Q)$ para me adaptar a linguagem habitual dos livros de Cálculo.

- **Green, teorema de** Este teorema é um dos resultados mais importantes do *Cálculo multivariado* junto com outros teoremas que podem ser considerados extensões ou complementações dele, como, por exemplo o *teorema de Stokes* e o *teorema da divergência de Gauss*. Não tenha dúvida que esta lista está longe de ser exaustiva.

Se (P, Q) for um campo vetorial diferenciável definido num domínio Ω do plano, então

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{142}$$

Na equação (eq.142), à esquerda, está uma *integral de linha* calculada sobre a fronteira, $\partial\Omega$ da região Ω, e segunda integral, à direita, é uma integral dupla, calculada sobre a região Ω, portanto entre as duas integrais há um salto de dimensão 1 como no teorema Fundamental do Cálculo sendo esta a razão que me leva sempre a dizer que o teorema de Green é uma extensão do *teorema Fundamental do Cálculo*.

O teorema de Green tem uma versão trivial pela qual vou começar e que serve para classificar os campos vetoriais que vou usar ao final na expressão do teorema. Vou apresentar esta redação no caso de campos vetoriais bivariados, $(x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbf{R}$ com o objetivo de manter a linguagem simples. Para obter o caso com mais variáveis, basta acrescentar mais "*coordenadas*" às derivadas mas com algum cuidado! Esta generalização pode ser obtida com uma *mudança de variável* via uma parametrização duma superfície no espaço de dimensão maior do que três.

Se F for um campo escalar, *uma função real de duas variáveis reais*, por exemplo, continuamente diferenciável, então, pelo teorema de *Schwarz-Clairaut* , as derivadas mistas serão iguais

$$J(F) = f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))\,; \tag{143}$$
$$\tfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y); \tfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y); \tag{144}$$
$$\begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}; \tag{145}$$
$$\tfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F_{xy} = Q_x = P_y = F_{yx} = \tfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \tag{146}$$

o que torna a integral

$$\int\int_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = \int\int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy = 0; \tag{147}$$

nula. Como posso calcular as primitivas de Q_x, P_y é possível deduzir, desta integral dupla, que a integral de linha, também nula,

$$\oint_{\partial\Omega} P_x dx + Q_y dy = 0 \tag{148}$$

em que agora o símbolo $\partial\Omega$ representa a fronteira do domínio Ω, e esta integral é também nula. Suponha que tem uma poligonal de lados paralelos aos eixos e use-a para passar da integral dupla para integral de linha, é um exercício relativamente simples.

Mas a razão pela qual a integral de linha na equação (eq.148) é nula se pode deduzir de forma independente da integração feita na equação (eq.147). Ela é a *integral de linha* sobre um caminho fechado, a fronteira do domínio Ω quer dizer, uma integral que sai do ponto P e retorna ao ponto P ao longo do caminho $\partial\Omega$. Como nesta construção inicial o integrando foi construído como derivada dum campo vetorial F então a integral de linha começando numa condição inicial $P \in \Omega$ define uma primitiva F associada à esta condição inicial P e então as integrais do tipo da equação (eq.148), sobre circuítos fechados, têm que ser nulas.

Esta é a formulação trivial do teorema de Green. Se eu alterar um pouquinho a notação vou obter a expressão comum nos livros de Cálculo.

$$P(x,y) = F_x(x,y);\ Q(x,y) = F_y(x,y); \tag{149}$$
$$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 = \int\int_{\Omega} (\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}) dx dy \tag{150}$$

que é a expressão (trivial) do *teorema de Green* quando partimos de uma função diferenciável F, porque todas as integrais envolvidas são nulas:

- A *integral de linha* é nula porque o integrando é uma derivada e a curva $\partial\Omega$ liga um ponto P a si mesmo, uma curva fechada,

- A *integral dupla* é nula porque pelo teorema de *Schwarz-Clairaut* da igualdade entre derivadas mistas.

Se (P, Q) for um campo vetorial diferenciável continuamente, sobre um domínio Ω qualquer, ainda vale o teorema de Green mas as integrais não precisam ser nulas. A integral de linha, por exemplo, separa os campos vetoriais em duas classes:

- *Campos conservativos*, é o caso trivial, quando o campo vetorial é a derivada de um campo escalar. Então a integral de linha sobre qualquer curva fechada é zero, é uma aplicação direta do *teorema fundamental do Cálculo.*
- *Campos não conservativos*, quando houver uma curva fechada, fronteira de um domínio Ω sobre a qual a integral de linha na equação (150) é diferente de zero.

o valor da integral de linha é então a perda (ou ganho) de energia que o campo escalar sofre ao longo da curva $\partial\Omega$. Neste caso o campo vetorial (P, Q) não tem primitiva. Esta formulação permite ainda explicar dois tipos de integrais,

- *integrais independentes do caminho* aquelas, da forma

$$\oint_{\partial\Omega} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

  que são nulas sobre qualquer curva fechada. O campo escalar é conservativo, tem primitiva (vem da derivada de um campo escalar diferenciável).

- *integrais que dependem do caminho* aquelas, da forma

$$\oint_{\partial\Omega} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

  que podem ser "*não nulas*" sobre alguma curva fechada. O campo escalar é não conservativo e não tem primitiva (não vem da derivada de um campo escalar diferenciável). Dizemos que integral depende do caminho porque, escolhidos dois caminhos entre dois pontos dados P_1, P_2, como se pode ver na figura (7) página 35, se o valor da integral sobre um dos caminhos, de P_1 até P_2 for diferente do valor da integral sobre o outro caminho, também de P_1 até P_2, podemos definir uma curva fechada, indo de P_1 até P_1, então a integral será diferente zero sobre esta curva fechada. Isto equivale a dizer-se que o campo vetorial (P, Q) não tem primitiva, não é a derivada de um campo escalar.

Como um exemplo, considere a integral da expressão do teorema de Green quando Ω for uma região do plano, confira a figura (fig 8), página 27.

Nesta figura a união das curvas γ e $r\mathbf{S}^1$ isolam o $(0, 0)$ no exterior da região $\Omega_r = \Omega - rU$, em rU é uma contração do disco unitário cuja fronteira é $r\mathbf{S}^1$. Chame de $\beta_r = -r\mathbf{S}^1 \cup \gamma$, a união destas duas curvas fechadas, devidamente orientadas para que $(0, 0)$ esteja no exterior da região Ω_r.

Para orientar uma curva, considere um vetor tangente e um vetor perpendicular à curva no mesmo ponto com um ângulo positivo, $\frac{\pi}{2}$ entre eles. É a orientação positiva da curva. Oriente as duas fronteiras de modo que o vetor perpendicular aponte para a região limitada pelas curvas, como mostra a figura (fig 8).

Observe que não mencionei na descrição uma curva que aparece na figura (fig 8), ligando a curva γ e a curva $r\mathbf{S}^1$. Esta curva é um truque usado nas demonstrações, ela foi seguida duas vezes e em sentidos contrários, como indicam as setas apontando em direções opostas, portanto a integral de linha sobre esta curva é zero e não conta nos cálculos: *somei e subtrai*!

$$f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right); \tag{151}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}; \tag{152}$$

$$\int\int_{\Omega_r} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = 0 = \oint_{\beta_r} Pdx + Qdy; \tag{153}$$

$$(P,Q) \text{ não é uma derivada} \quad \Rightarrow \quad (\exists \gamma)\ (\oint_{\gamma} Pdx + Qdy \neq 0); \tag{154}$$

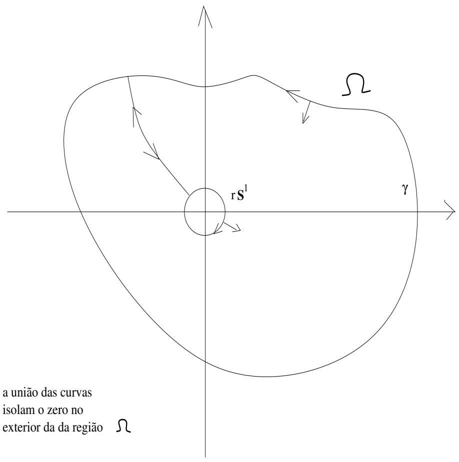


Figura 8:

A curva γ mencionada na equação (eq.154) tanto pode ser $\gamma = \partial\Omega$ como $r\mathbf{S}^1$ sobre as quais o valor da integral de linha coincide em módulo. Eu teria que demonstrar que pelo menos uma destas integrais é diferente de zero (porque as duas poderiam ser zero...):

$$I_r = \oint_{r\mathbf{S}^1} Pdx + Qdy = \tag{155}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi} r\sin(t)d(r\cos(t))dt + r\cos(t)d(r\sin(t))dt \tag{156}$$

$$I_r = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi; \tag{157}$$

Na equação (eq.156) tirei para fora da integral r^2 do denominador e lhe atribui sinal negativo porque ela está sendo calculada no sentido "dos ponteiros do relógio" que é o sentido negativo de percurso. O resultado obtido, 2π merece um comentário especial, é um salto de uma "*espira*" na superfície de Riemann que é o gráfico da função f como função de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}$.

Eras, ainda existem relógio com ponteiros

Calcular integrais de linha sobre curvas arbitrárias pode ser uma experiência nada fácil, nem sempre encontramos meios de calcular uma integral "*exatamente*", mas o cálculo aproximado com um programa de computador é simples. Experimente [7, programas/Green.calc] que está editado para o cálculo da integral na equação (eq.155), leia os comentários. O programa irá calcular várias vezes, aproximadamente, a integral de linha atualizando o valor do passo `delta`. A curva se chama `gamma` e tem três parâmetros `a,b,r` para definir uma translação para um ponto do plano (a,b) e um fator de escala r de modo que você pode calcular a integral de linha sobre $r\mathbf{S}^1 + (a,b)$, a translação do círculo de raio r para o ponto (a,b). Se a origem estiver no interior de γ o valor da integral é o calculado na (eq.157).

Por exemplo, usando `Green.calc` com

$$(a,b) = (0.1, -0.2), r = 0.5$$

o valor da integral de linha será 2π e com

$$(a,b) = (2, -3), r = 0.5$$

o valor da integral de linha será 0, como era de esperar.

4 Número de voltas duma curva

Sem sair do espirito deste artigo, eu agora vou retornar à visão do $\mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{C}$ para descobrir mais um segredo relativo às funções bivariadas e cuja imagem é também bivariada. Na seção anterior eu lhe mostrei que as funções

$$f : \Omega \to \mathbf{R}^2 \tag{158}$$

ficam divididas em duas classes:

- as que tem primitiva, e consequentemente, suas integrais não dependem de caminhos,
- as que não têm primitivas e cujas integrais sobre circuítos fechados podem ser diferentes de zero, e consequentemente suas integrais dependem do caminho.

Agora o centro da questão vai ser uma nova forma de ver a derivação, a *derivada complexa*, e o qualificativo "*nova*" apenas diz respeito ao fato de que vou trabalhar dentro do conjunto dos números complexos. Embora a definição seja a mesma um novo resultado vai se produzir pelo cenário em que vou trabalhar, **C**.

- **derivada complexa** O conjunto dos números complexos tem as mesmas propriedades que o conjunto dos números reais (exceto a ordem) e é, assim, um *corpo*. Desta forma posso aplicar a definição de derivada usual das *funções reais de variável real* às *funções complexas de variável complexa* que é o que se costuma chamar de *derivada complexa*, e neste momento surge um dos resultados mais intrigantes da análise: *se uma função complexa de variável complexa tiver derivada complexa ela será infinitamente diferenciável.* São as *funções analíticas*, as *funções complexas que têm derivada complexa.* O resultado é intrigante, mas é simples de demonstrar-se como você vai ver aqui uma forma simplificada do método que eu tomei emprestado do livro de Henry Cartan intitulado *Calcul Différentiel*,[2]. É simples hoje, mas foi construído ao longo de mais de um século e representa a solução de uma única equação diferencial, as *equações de Cauchy-Riemann*, um sistema linear de equações diferenciais parciais.

Existe uma notação clássica, usada por praticamente todos os autores que escrevem sobre funções complexas, deixe-me introduzi-la aqui. Se $z = x + iy$ então a função complexa $w = f(z)$ tem duas funções componentes, u, v e posso escrever

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y); \tag{159}$$

$$f(x, y) =)u(x, y), v(x, y)); \tag{160}$$

u, v são funções reais da variável complexa $z = x + iy$ e algumas vezes são compreendidas como funções reais de duas variáveis reais (x, y), como está expresso na equação (eq.160). São formas idênticas de interpretar f, u, v. E vou estar usando uma *interpretação* ou a outra conforme me for conveniente!

As funções complexas que tiverem derivada complexa, também tem uma primitiva que é única a menos duma constante, como no caso real. A forma de calcular esta primitiva é muito semelhante àquela que usamos no caso real, apenas que agora temos que caminhar entre dois pontos ao longo dum curva no plano, confira a figura (fig. 9), página 29.

Na figura você pode ver dois caminhos, um caminho poligonal, β e outro não poligonal, γ, partindo da condição inicial a até o ponto z. Se a função tiver uma primitiva, então o cálculo desta integral não pode depender da escolha do caminho e isto é muito prático, podemos escolher um melhor caminho para fazer o cálculo e eu vou com frequência escolher um caminho poligonal. Observe que o caminho escolhido tem que estar inteiramente contido no domínio de definição da função. Como as funções complexas são, de fato, transformações do plano, o Teorema de Green se lhes aplica e divide estas funções como *independentes do caminho* ou *dependentes do caminho* relativamente às integrais sobre curvas. As que tiverem *derivada complexa* são *independentes do caminho*, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann.

Uma forma simples de se chegar ao resultados acima mencionados pode ser esquematizada na seguinte sequência em que estou usando derivação implícita para fazer aparecer as equações de *Cauchy-Riemann*, também estou usando a dualidade de interpretação $\mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$, $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$, conforme for conveniente:

ou a *dubie-d* você preferir. . .

$$f \text{ uma função complexa de variável complexa;} \tag{161}$$

$$f = u + iv; u, v \text{ funções reais de variável complexa;} \tag{162}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \alpha + i\beta = f'(z) \in \mathbf{C}; \tag{163}$$

$$df = J(f)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (\alpha + \beta i)(dx + idy) = (\alpha dx - \beta dy) + i(\alpha dy + \beta dx) \tag{164}$$

$$df = f'(z)dz = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{165}$$

$$u_x = v_y; u_y = -v_x; \text{ Cauchy-Riemann} \tag{166}$$

$$f'(a + ib) = \alpha + i\beta = u_x + iv_x = v_y - iu_y; \tag{167}$$

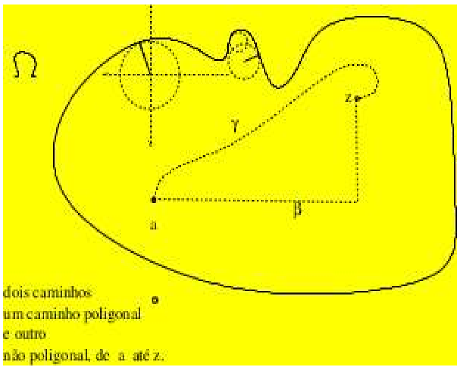


Figura 9:

A igualdade na equação (eq. 163) vem da afirmação inicial, $\mathbf{C}$ *é um corpo, como* $\mathbf{R}$*, a derivação das funções reais de variável real, se aplica* verbatim *ao caso complexo*, portanto, como no caso real, $f'(z) \in \mathbf{C}$, a *derivada complexa* é o número complexo $\alpha + i\beta$.

Este fato, que a derivada é um *número complexo*, volta a ser usado na equação (eq. 165) para identificar um tipo particular de matriz jacobiana, a derivada de f, agora vista como função de $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, na equação (eq. 165).

O que está em jogo aqui e que faz surgir este sistema de equações de diferenciais chamado de equações de Cauchy-Riemann é um pequeno e importante detalhe. Qualquer matriz 2×2 representa uma transformação linear do plano no plano, mas um subconjunto delas é que representa uma transformação linear de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}$, são aquelas da forma que se encontra na equação (eq. 165). Observe a seguinte sequência de cálculos e a observação que farei ao final dela:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix}; \tag{168}$$

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y); \tag{169}$$

Os cálculos acima poderiam ter sido feitos, faça você mesmo, de forma mais geral, usando uma matriz qualquer, em lugar daquela usada na equação (eq.168) e depois forçando uma igualdade entre ela e o resultado do produto de números complexos que aparece na equação (eq.169). Quer dizer que as *equações de Cauchy-Riemann* apenas caracterizam quando uma função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ é uma função que tem derivada complexa.

Vou poder assim destacar, entre as funções $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, uma classe particular de funções cuja matriz jacobiana tem o formato apresentado na equação (eq. 165), as funções analíticas.

A equação (ou sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem), equação (eq. 166), obtida quando se igualar as matrizes nas equações (eq. 163) e (eq. 165), é conhecida como *equações de Cauchy-Riemann*, e elas caracterizam quando uma função $f = u + iv$ é analítica e são usadas com frequência como definição de função analítica.

A derivada complexa de f, se existir, é uma nova função complexa de variável complexa e ao calcular-se sua derivada vão novamente aparecer as *equações de Cauchy-Riemann.* Por indução se conclui que se f for uma função complexa, de variável complexa, então será infinitamente diferenciável se for derivável no sentido complexo.

Quer dizer que voltando a olhar para as funções vetoriais de variável vetorial de dimensão dois haverá duas classes disjuntas de funções:

- aquelas que satisfazem às *equações de Cauchy-Riemann*, as funções analíticas, que são de classe $\mathcal{C}^\infty$,
- e as outras, que podem ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ mas que não são analíticas.

Por exemplo

$$g(x, y) = (x, -y) = (u(x, y), v(x, y)); g(z) = \overline{z}; \tag{170}$$

$$u_x = 1 \neq v_y = -1; g'(x, y) = J(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{171}$$

$$g''(x, y) \equiv 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{172}$$

$$(\forall n) g^{(n)} \equiv 0 \cdots \tag{173}$$

Então a derivada de $g(x, y) = (x, -y)$ não se pode identificar com um número complexo e assim g não tem uma *derivada complexa*, mas tem derivadas de todas as ordens que são matrizes nulas. g não é uma função analítica mas é de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Obviamente que ainda existe uma infinidade de outras funções que nem mesmo precisam ser contínuas: a "*maioria*"!

maioria, impre
confira a hipót
de Cantor!

Uma das implicações mais fortes da analiticidade é que se f for analítica irá transformar *abertos do plano complexo* em *abertos do plano complexo* mas não é uma propriedade fácil de ser demonstrada. Esta propriedade fundamental, ser de classe $\mathcal{C}^\infty$, caracteriza as *funções analíticas* como *aplicações abertas.*

Mas a recíproca não é verdadeira porque a função g, definida na equação (eq. 170), é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$, é uma aplicação aberta, mas não é analítica.

A derivada complexa de f pode ser escrita numa das formas alternativas seguintes, usando as *equações de Cauchy-Riemann*:

$$u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y = \alpha + i\beta; \tag{174}$$

$$f'(a + ib) = \alpha + i\beta; \tag{175}$$

O número $f'(a + ib) = \alpha + i\beta$ pode ser obtido com uma qualquer das expressões da equação (eq. 174).

Usando a equação (eq. 174) e a equação (eq. 175) posso criar a expressão de dois *operadores diferenciais* que vão permitir-me a síntese destes dois conceitos centrais, a *derivada complexa* e as *equações de Cauchy-Riemann*. Deixe-me seguir usando a notação $f'(a+ib) = \alpha + i\beta$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = 2(\alpha + i\beta) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) + (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv); \tag{176}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u + iv) = 2(\alpha + i\beta) \tag{177}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})f = 2(\alpha + i\beta) \tag{178}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})f = (\alpha + i\beta) = f'(a + ib); \tag{179}$$

$$\partial = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \tag{180}$$

$$\partial f = f'; \tag{181}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})u - (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) = 0 \tag{182}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u - iv) = 0 = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})\overline{(u + iv)} = \overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})}(u + iv) = 0 \tag{183}$$

$$\frac{1}{2}\overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial})}(f) = 0; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(f) = 0; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y})(f) = 0; \tag{184}$$

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}); \tag{185}$$

$$\overline{\partial}(f) = 0; \tag{186}$$

- Na equação (eq. 176) escrevi de forma repetida a expressão da derivada, à direita é o resultado da aplicação do operador $(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ a cada uma das componentes de f e à esquerda é a expansão do mesmo operador. A razão pela qual o valor é $2(\alpha + i\beta)$ vem da equação (eq. 167) que expressa a derivada $(\alpha + i\beta)$ usando as derivadas parciais de u, v.
- A equação (eq. 177) resume a anterior assim como também (eq. 178) agora usando f.
- Na equação (eq. 179) defini o operador ∂, como resumo da equação anterior.
- Na equação (eq. 180) defini o operador ∂ em dois formatos equivalentes.
- A equação (eq. 181) é a expressão da derivada usando o operador ∂, e vale quando f tiver uma *derivada complexa*.
- Na equação (eq. 182) estão sendo aplicadas as equações de Cauchy-Riemann resumidas na equação (eq. 183) em três formatos equivalentes fazendo uma definição prévia do operador $\overline{\partial}$ que será corrigida na próxima equação uniformizando a notação porque a multiplicação por $\frac{1}{2}$ não vai alterar o resultado quando a função f for analítica (e nem quando não for ...). Observe que a igualdade central, na equação (eq. 183), vale independentemente de que f seja ou não analítica, mas, ser zero, é consequência da hipótese de que seja analítica.
- A equação (eq. 184) define o operador $\overline{\partial}$, que representa as equações de Cauchy-Riemann, em três formatos equivalentes.
- Na equação (eq. 185) encontra=se uma definição do operador $\overline{\partial}$.
- A equação (eq. 185) é a expressão das equações de Cauchy-Riemann usando o operador $\overline{\partial}$.

Destes cálculos posso deduzir duas expressões mais simples de dois *operadores diferenciais* clássicos permitindo uma forma concisa de expressar tanto as *equações de Cauchy-Riemann* como a definição da derivada de uma função analítica:

$$\partial = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \quad (187)$$
$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \quad (188)$$
$$\partial(f) = \alpha + i\beta = f'(a+ib) \quad (189)$$
$$\overline{\partial}(f) = 0 \iff f \text{ satisfaz às equações de Cauchy-Riemann} \quad (190)$$

Embora a formulação à direita, nas equações (eq. 187) e (eq. 188) sejam mais didáticas (ligadas à definição de conjugado), a expressão que parece ser a mais comum são as que ficam à esquerda, para definir os operadores $\partial, \overline{\partial}$.

Neste ponto, de posse da expressão simples, como número complexo para a derivada, posso demonstrar o teorema fundamental mencionado anteriormente sobre a infinidade de derivadas que tem uma função analítica como uma aplicação do operador $\overline{\partial}$.

Teorema 7 (funções analíticas) *infinitamente deriváveis*
A derivada complexa de f, se existir, é uma nova função complexa de variável complexa e ao calcular-se sua derivada vão novamente aparecer as equações de Cauchy-Riemann. *Por indução se conclui que se f for uma função complexa, de variável complexa, então será infinitamente diferenciável se for derivável no sentido complexo:*

Dem :

$$f = u + iv; f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y \quad (191)$$
$$2\overline{\partial}(f') = 2\overline{\partial}(u_x + iv_x) = 2\overline{\partial}(u_x) + 2i\overline{\partial}(v_x); \quad (192)$$
$$2\overline{\partial}(f') = u_{xx} + iu_{yx} + i(v_{xx} + iv_{yx}); \quad (193)$$
$$2\overline{\partial}(f') = u_{xx} + iu_{yx} + iv_{xx} - v_{yx}; \quad (194)$$
$$2\overline{\partial}(f') = v_{yx} + iu_{yx} - iu_{yx} - v_{yx} = 0 \quad (195)$$

1. *Na equação (eq. 191) estou escrevendo f e a expressão de sua derivada usando a equação (eq. 167).*
2. *Nas equação (eq. 192)- (eq. 194), estou aplicando a definição do operador $\overline{\partial}$. Como $\overline{\partial}$ é um operador linear porque é combinação linear de derivadas que são operadores lineares então posso expandir a aplicação para cada uma das parcelas de f.*
3. *Na equação (eq. 195) reescrevi todas as derivadas para se tornassem derivadas mistas, para então concluir que a soma é nula e portanto f' satisfaz às equações de Cauchy-Riemann porque f é analítica e então f' também é analítica.*

Termina-se a demonstração do teorema aplicando indução finita. **q.e.d .**

As equações de Cauchy-Riemann são um exemplo de equação diferencial parcial que foi resolvida ao longo de mais de um século, resultando na construção do que se chamava de *teoria das funções* que se pode dizer, com alguma dose de exagero, que foi o processo de construção da *solução das equações de Cauchy-Riemann*, ou, a solução destas equações é uma função analítica e vice-versa.

As funções analíticas são também chamadas de *funções holomorfas*.

Como subproduto da solução das *Cauchy-Riemann* se obteve a solução da equação homogênea de Laplace. Se $f = u + iv$ for analítica, então as duas funções reais u, v são harmônicas, quer dizer, satisfazem à equação homogênea de Laplace $\Delta(u) = \Delta(v) = 0$, isto é consequência direta das equações de Cauchy-Riemann e do teorema de Schwarz-Clairaut das derivadas mistas.

As funções u, v chamam-se *conjugados harmônicos*. A recíproca é verdadeira e passa pela solução da equação diferencial de Cauchy-Riemann (as equações de Cauchy-Riemann) em que uma das duas funções, u ou v, é um dado do problema. A solução é única a menos de uma constante.

Para resolver a *equação diferencial parcial* $\Delta(F) = 0$ foi preciso montar toda a teoria das funções analíticas.

- **integral de Cauchy** Confira também

- *Cauchy, teorema de,*
- *analítica, função,*
- *holomorfa, função.*

Se identifica como *integral de Cauchy* a expressão, *integral de linha complexa*,

$$f(a)Ind_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-a}; a \notin \gamma* \tag{196}$$

em que podemos identificar um *produto por convolução* de f pelo núcleo de Cauchy.

Na convolução, a regularidade do resultado aumenta mesmo quando os fatores são *irregulares* e neste caso um dos fatores, o núcleo de Cauchy é uma função analítica o que torna a função f definida poor esta convolução uma função analítica, também.

Devido à regularização por convolução esta expressão define uma função altamente regular, uma função analítica que, entre outras propriedades, tem um desenvolvimento em série de potências.

Observe que equação (eq. 196), o número complexo $\underline{a}$ não pertence à curva $\gamma*$. Se $\underline{a}$ estiver no interior de $\gamma*$ então esta integral mede o número de voltas que $\gamma*$ der em volta de $\underline{a}$ que está indicado na expressão $Ind_{\gamma}(a)$ o justifica que a equação (eq. 196) também seja denominada de *winding number*, número de voltas, quando $f(z) = 1$, a integral de Cauchy, neste caso, conta o número de voltas que γ der em torno de a.

$$Ind_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-a}; a \notin \gamma* \tag{197}$$

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus vol II*. Blaisdell Publishing Company, 1962.

[2] Henri Cartan. *Calcul Différentiel*. Herman - Paris, 1967.

[3] Wikimedia Foundation. Wikipedia, enciclopédia livre na internet. http://www.wikipedia.org.

[4] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[5] Harold J. Larson. *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*. John Wiley & Sons, Inc - Wiley International Edition, 1969.

[6] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[7] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[8] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.

um domínio não convexo no plano

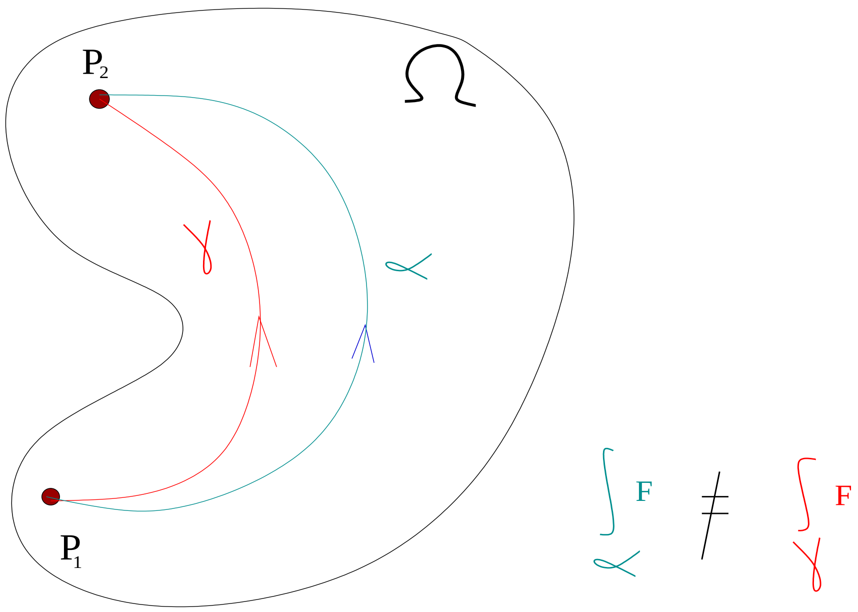


Figura 7: