Quatro segredos

Praciano-Pereira, Tarcisio *

23 de abril de 2017
preprints da Sobral Matemática
no. 2017.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Este artigo não trás novidades senão de natureza pedagógica e talvez neste sentido sim. Vou tomar quatro grandes pinos de suporte do Cálculo e mostrar um caminho agradável para atingi-los, são as palavras chave do artigo. Também apresento-lhe um *Trabalho Dirigido* que pretende induzir a estudante na compreensão dos números complexos e das funções variável complexa, com objetivo de calcular a derivada do *seno* e do *cosseno*

palavras chave: derivada de funções trigonométricas, Fórmula de Taylor, independência do caminho, Teorema de Green.

There is no new result in this paper but a pedagogical way to go through some of the *pivots* of Calculus which are the keywords, plainly. You are presented to a *directed work* whose aim is to lead the students to understand complex numbers and functions of complex variables with the immediate goal of calculating the derivatives of *sine* and *cosine*.

keywords: derivatives of trigonometric functions, Green's theorem, path independent integrals, Taylor's formula.

*tarcisio@member.ams.org

1 Polinômios tangentes

- **Taylor, polinômio** É um polinômio cujo gráfico é tangente ao gráfico duma função diferenciável. O caso mais simples é a *reta tangente* que é um polinômio do primeiro grau cujo gráfico é o da reta tangente ao gráfico duma função num ponto dado.

Considere o gráfico na figura (fig. 1), página 1.

Observe esta forma de escrever a equação da reta que vou transforma sucessivamente até obter a equação que me interessa:

$$y = b + m(x - a); \tag{1}$$
$$y = f(a) + m(x - a); \tag{2}$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a); \tag{3}$$

A equação (eq.1) é a da reta que passa no ponto (a, b) com coeficiente angular m, e cheguei, na equação (eq.3) à equação que passa no ponto $(a, f(a))$ com coeficiente angular $f'(a)$.

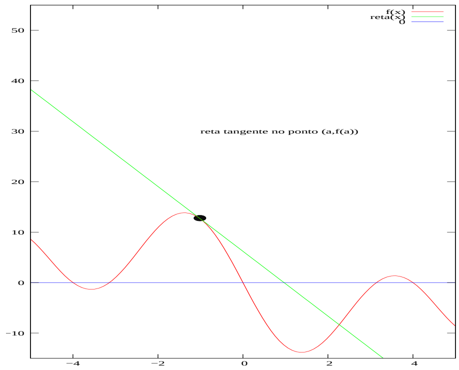


Figura 1:

Então você pode se perguntar: não seria possível obter-se a equação da parábola tangente? e seria uma equação mais realista, porque se um corpo se desliga de outro que o carrega ao se desligar parte pela tangente que será uma parábola porque corpo ejectado agora entra no domínio da gravidade da Terra se transformando num *corpo que cai em queda "livre"*, quer dizer: segue pela parábola tangente. Vou fazer as mesma transformações, apenas vou deixar um erro que vou corrigir em seguida, mas você terá tempo para pescar o erro antes de ler a resposta:

uma pedra presa a um co

$$y = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{4}$$
$$y = b + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{5}$$
$$y = b + m(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{6}$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{7}$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2; \tag{8}$$

e na equação (eq.8) estou lhe dizendo que tenho a equação da parábola tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. E qual é o erro?

Os cálculos nas equações (eq.4) (eq.8) pecaram por excesso de ingenuidade! Vou refazê-las, agora, da forma correta, usando a equação dum polinômio do segundo grau ao qual vou impor à condição de tangência e cópia da aceleração no ponto de separação dos dois corpos que estavam viajando juntos:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{9}$$
$$a_0 = f(a); P(a) = a_0; \tag{10}$$
$$a_1 = f'(a); P'(x) = a_1 + 2a_2(x - a); a_1 = P'(a); \tag{11}$$
$$P''(x) = 2a_2; P''(a) = 2a_2 = f''(a) \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2}; \tag{12}$$
$$y = P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2; \tag{13}$$

e você tem na equação (eq.13) a equação correta da parábola que descreveria o movimento em queda livre depois que o objeto se desprendeu do seu carregador no ponto $(a, f(a))$, partindo do ponto $(a, f(a))$, copiando a velocidade $f'(a)$ e a aceleração que agora é a da gravidade somada a eventual força acionadora $f''(a)$ que lhe tenha sido dada no momento do lançamento.

E como seria a equação dum polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$? Novamente, vou responder com uma resposta *ingenuamente errada*:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3}(x-a)^3 \tag{14}$$

deduzindo direto da equação (eq.13).

Se você repetir o método que usei para encontrar a equação da parábola tangente, agora para o caso do polinômio do terceiro grau tangente, você vai encontrar::

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3; \tag{15}$$

e estou de acordo com você que parece que ficou feio! Aparentemente não tem lógica, e o *correto* em Matemática é determinado pela *beleza*. Se estiver feio, está errado! ou deve estar errado!

Não está errado, apenas tem algo escondido:

$$P(x) = \tfrac{f(a)}{1} + \tfrac{f'(a)}{1}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \tfrac{f'''(a)}{6}(x-a)^3; \tag{16}$$

$$P(x) = \tfrac{f(a)}{0!} + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \tfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3; \tag{17}$$

Você pode encontrar na página [5, programas] uma cópia do programa para fazer alguns gráficos de polinômios de Taylor com gnuplot. Divirta-se.

O polinômio de Taylor de uma função univariada e que tenha derivadas até a ordem n, conhecidas, num ponto $x = a$ é a expressão polinomial

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots a_n(x-a)^n \tag{18}$$

com $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Os coeficientes são determinados pelo conjunto de equações

$$\begin{cases} P(a) = & f(a) & \Rightarrow \;\; a_0 = f(a); \\ P'(a) = & f'(a) & \Rightarrow \;\; a_1 = f'(a); \\ P^{(k)}(a) = & f^{(k)}(a) & \Rightarrow \;\; a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}; \end{cases} \tag{19}$$

Como $0! = 1!$ e $2! = 2$ então esta fórmula pode ser escrita de forma concisa como

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k; \tag{20}$$

Dois exemplos importantes da fórmula de Taylor, chamadas de McLaurin é quando aplicamos a Fórmula de Taylor ao *seno* ou ao *cosseno*. Nós conhecemos as derivadas de qualquer ordem destas funções em alguns pontos, na origem por exemplo.

As derivadas do *seno* na origem são

$$0, 1, 0, -1, \dots, 0, 1, 0, -1, \dots, \tag{21}$$

$$dsen(n)(n\%4 == 0)?0 : (n\%4 == 1)?1 : (n\%4 == 2)?0 : -1; \tag{22}$$

em que foi usado `if-else`-compacto, com a sintaxe da linguagem `C`, e o símbolo %, em `C`, é a função congruência módulo-um resto dos inteiros. Na equação (eq. 22), você tem uma função inteira de período 4, então o polinômio de Taylor (ou de McLaurin) do seno é

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} dsen(k)\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k; \tag{23}$$

em que as derivadas são todas calculadas na origem, $a = 0$. O desenvolvimento de McLaurin é a fórmula de Taylor no ponto zero.

Usando a linguagem `calc`, usualmente distribuída com os sistemas Debian/Gnu/Linux, você pode implementar este algoritmo para obter o seno com alta precisão, porque `calc` é de precisão infinita (inteira) como também o são `Python` e em geral os dialetos da linguagem `LISP`, embora não seja necessário usar polinômios de grau muito alto definindo módulo π, por exemplo, com um polinômio de grau 17.

Na figura (2) página 26, você pode ver o gráfico da função seno, definida algoritmicamente dentro do `gnuplot` e de um polinômio de Taylor de grau 17, do seno, no intervalo $[-6, 6]$. e na figura (3) página 26, também usando a expressão algorítmica do cosseno de `gnuplot` e do polinômio de Taylor de grau 17, cosseno, no intervalo $[-6, 6]$.

Observe que isto é o suficiente para definir *seno, cosseno* para qualquer número real, algoritmicamente, usando a periodicidade.

2 Exponencial e Fórmula de Euler

2.1 O plano do trabalho

Os cursos de Cálculo começam, disfarçadamente, a construção dos números reais porque este é o cenário para o Cálculo Diferencial e Integral. Eu vou aqui usar os números complexos para obter um resultado difícil do Cálculo que é a derivada das funções trigonométricas. Antes vou calcular uma integral que define o logaritmo e depois vou chegar na exponencial para finalmente usar a fórmula de Euler no plano complexo e mostrar que ela é um uso corriqueiro da exponencial, a exponencial complexa.

2.2 Logaritmo e exponencial

- **função logaritmo** Confira também *logaritmo.*

A função

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{24}$$

que não está definida na origem, mas se o $[a, b]$ tiver extremos com sinais iguais, ambos estritamente positivos ou ambos estritamente negativos, a função $y = f(x)$ será contínua, derivável e integrável, a integral

$$\int_a^b f(x)dx \tag{25}$$

existe se $\forall(a, b); ab > 0$.

Vou me restringir na continuação ao caso $a, b > 0$ porque o meu objetivo é a construção do *logaritmo real* que está definido para os números reais positivos. Mas grande parte do que eu fizer aqui, também vale quando $a, b < 0$, o que deixo para você, leitora, confira.

Quando uma função for contínua, e é o caso de $f(x) = \frac{1}{x}$ quando $ab > 0$, posso calcular suas integrais usando somas de Riemann uniformes, porque qualquer cadeia de somas de Riemann converge para o mesmo número, então os resultados obtidos a partir das somas de Riemann uniformes se estendem para todas as outras somas de Riemann, a integral de Riemann existe.

Se uma função for integrável, e toda função contínua o é,as somas de Riemann associadas às cadeias de partições do intervalo $[a, b]$ cujas normas sejam equivalentes à sucessão $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbf{N}^*}$

formam uma classe de sucessões de Cauchy equivalentes definindo assim o número

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \tag{26}$$

o que me permite especializar-me no uso de somas de Riemann uniformes:

Esta função tem uma propriedade fundamental que é fácil de demonstrar usando somas de Riemann uniformes.

Teorema **1** *Propriedade fundamental de* $f(t) = \frac{1}{t}$

$$a, b > 0 \ \Rightarrow \ \int_a^b f(x)dx = \int_1^{b/a} f(x)dx = \int_{a/b}^1 f(x)dx \tag{27}$$

Dem *:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \lim_{k=\infty} \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{k}; \tag{28}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\frac{b-a}{k})\frac{b-a}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + ia\frac{\frac{b}{a}-1}{k})a\frac{\frac{b}{a}-1}{k} = a\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{a+ia\frac{\frac{b}{a}-1}{k}}\frac{\frac{b}{a}-1}{k} = \tag{29}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1+i\frac{\frac{b}{a}-1}{k}}\frac{\frac{b}{a}-1}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1+i\Delta' x}\Delta' x; \Delta' x = \frac{\frac{b}{a}-1}{k}; \tag{30}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(1 + i\Delta' x)\Delta' x \approx \int_1^{\frac{b}{a}} f(t)dt; \tag{31}$$

Na última equação posso identificar uma soma de Riemann uniforme em que $\Delta' x = \frac{\frac{b}{a}-1}{k}$ *cujo módulo é a medida de um qualquer dos subintervalos de* $[1, \frac{b}{a}]$ *o que justifica a aproximação da integral que aparece ao final.*

As contas são semelhantes no caso

$$\int_{\frac{a}{b}}^1 f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \tag{32}$$

q.e.d .

Quer dizer que posso cancelar um dos limites de integração **no caso particular da função** $f(t) = \frac{1}{t}$. Esta propriedade vale para qualquer função que seja múltiplo desta função, e somente para elas. É uma **propriedade privada** desta classe de funções.

Mais exatamente, qualquer função que tenha esta *propriedade integral* é um múltiplo, por um número real, da função $y = f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\frac{a}{b}}^1 f(t)dt = \int_1^{\frac{b}{a}} f(t)dt \ \Rightarrow \ f(t) = \frac{K}{t}; \tag{33}$$

e vou mostrar-lhe que este número K tem uma propriedade muito especial, ele é a mudança de base do logaritmo.

Como consequência da *propriedade fundamental* posso facilmente calcular a integral

$$\int_1^{a^n} \frac{dt}{t} \tag{34}$$

para qualquer potência de número positivo. Observe o exemplo

$$\left\{\begin{array}{c} \int_1^{10^3} \frac{dt}{t} = \int_1^{10} \frac{dt}{t} + \int_{10}^{10^3} \frac{dt}{t} = \\ = \int_1^{10} \frac{dt}{t} + \int_{10}^{10^2} \frac{dt}{t} + \int_{10^2}^{10^3} \frac{dt}{t} = \\ \int_1^{10} \frac{dt}{t} + \int_1^{10} \frac{dt}{t} + \int_1^{10} \frac{dt}{t} = \\ 3\int_1^{10} \frac{dt}{t} \end{array}\right. = \tag{35}$$

em que usei duas propriedades:

1. A propriedade geométrica das áreas que nos permite subdividir uma região em um determinado número de regiões contíguas sendo a área total a soma das áreas dos pedaços;
2. a propriedade fundamental da integral de $\frac{1}{t}$.

Com algum trabalho, essencialmente o uso das duas propriedades listadas acima, posso mostrar que

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2** *Propriedade dos logaritmos*

$$\int_1^{a^n} \frac{dt}{t} = n\int_1^{a} \frac{dt}{t} = nlog(a) = n\int_1^{a} \frac{dt}{t}; \tag{36}$$

Implicitamente estou fazendo uma definição:

Definição 1 *Logaritmo natural*

$$log(x) = \int_1^{x} \frac{dt}{t} \tag{37}$$

A notação usual para o "logaritmo natural"é "ln", entretanto em geral as linguagens de programação usam o símbolo "log"para o logaritmo natural.

Também posso provar:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **3** *Propriedade fundamental dos logaritmos*

$log(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_1^{b} \frac{dt}{t} = log(a) + log(b)$

$\boxed{\textbf{Dem}}$*:*

Suponha que $a, b > 1$ então $1 < a < ab$ então

$$log(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} =] \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_1^{b} \frac{dt}{t} = log(a) + log(b); \tag{38}$$

Se $0 < a \leq 1 \leq b$ valem as mesma contas descrita na equação anterior, apenas $log(a) < 0$ e o caso $0 < b \leq 1 \leq a$ é o simétrico deste anterior. $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

E como, usando a convenção inicial,

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x f(t)dt = log(x) \tag{39}$$

posso dizer que $F(x) = log(x)$ é a primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ com a condição inicial 1. O nome é apropriado porque temos aqui uma função goza das propriedades do *logaritmo* sendo portanto um *tipo de logaritmo* porque você pode repetir tudo que fizemos acima com a função

$$f(x) = \frac{K}{x}; K > 0$$

e posso, finalmente, associar K a uma das conhecidas bases de logaritmo. $K = 1$ é apenas um *tipo de logaritmo* de forma *muito natural* chamado de *logaritmo natural* ...em particular $K = \frac{1}{log(10)}$ produz o chamado *logaritmo decimal*.

Aqui está a famosa "equação de mudança de base":

$$\log_b(x) = Kln(x); K = \frac{1}{log(b)}; \tag{40}$$

Como $F(x) = ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ então $F'(x) = \frac{1}{x} > 0$ F é uma função estritamente crescente, injetiva, tem inversa, E, e sua inversa tem as propriedades:

Lembrando q
$(0, \infty)$.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **4 (Propriedas)** *da inversa do logaritmo natural*

$$E : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{++}; \tag{41}$$

$$E(a + b) = E(a)E(b); E(0) = 1; \tag{42}$$

$$\textit{existe um número } e; E(1) = e; ln(e) = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1; \tag{43}$$

$$E(x) = e^x; \tag{44}$$

$\boxed{\textbf{Dem}}$:

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

O número e é o "*número de Néper*" e a demonstração deste teorema é simples revisão das propriedades do logaritmo, sem nenhum exagero, uma lista de exercícios de Cálculo.

2.3 Fórmula de Euler e números complexos

Eu vou aqui usar a fórmula de Euler mas eu também a vou apresentar. Ela é uma fórmula envolvendo *números complexos* e aqui começa logo o primeiro problema. Complexos, os números, o nome assusta e quando um professor de Cálculo começar usando *números complexos* no seu curso de Cálculo vai enfrentar até dos próprios colegas a crítica de que está subvertendo o programa. Então eu vou começar mostrando que não é assim, e você vai ver logo adiante a dedução da derivada do *seno* e do *cosseno* saindo de graça pelo uso dos números complexos. Somente isto já seria uma razão para juntar os números complexos ao programa. Apesar d'este acréscimo, ao contrário de fazer o programa ficar mais pesado, vai ficar mais leve e divertido.

Então, o que é um número complexo: $a + bi$. Ora eles aparecem no *ensino fundamental*, mas não fosse o nome, *complexos* simplesmente continuariam na programação. Se o *delta* for negativo na equação segundo grau, aparece um número complexo:

$$x^2 + 1 = 0; A = 1; B = 0; C = 1; Ax^2 + Bx + C = 0; \tag{45}$$
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; \tag{46}$$
$$x = \frac{\sqrt{-4}}{2} = \pm 2i; \tag{47}$$
$$i = \sqrt{-1}; \tag{48}$$

e aparece um número complexo bem descomplicado e simples. Bem melhor seria com

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \ \Rightarrow \ x \in \{1 + 2i, 1 - 2i\} \tag{49}$$

com um "autêntico" $a + bi$. Mas o *ensino fundamental* lida com expressões muito mais complicadas, os tais *produtos notáveis*, porque não poderia lidar com $a + bi$?

Então, decididamente o problema é de puro preconceito que gera atrazo mais para frente, isto numa escola que ainda ensina *logaritmo* como máquina de calcular!

Com isto me sinto liberado para sugerir o uso tranquilo de $\mathbf{C}$ dentro do Cálculo como uma forma alternativa de ver o plano $\mathbf{R}^2$:

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \equiv x + iy \in \mathbf{C} \tag{50}$$

são duas formas equivalentes de ver a mesma coisa.

sabemos que
simples, mas
samos dizê-lo

Vendo o $\mathbf{R}^2$ desta forma, o círculo unitário é o conjunto dos números complexos de módulo 1 e ainda do Ensino Médio suas coordenadas são

- $\cos(\alpha), \sin(\alpha)$, ou então
- $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$

e na segunda equação se tem apenas uma *notação*.

Mas agora considere dois pontos distintos no círculo trigonométrico

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}; \tag{51}$$
$$\cos(\beta) + i\sin(\beta) = e^{i\beta}; \tag{52}$$
$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\left(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\right); \tag{53}$$
$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) = e^{i(\alpha+\beta)}; \tag{54}$$

tirado do conteúdo do Ensino Médio, matéria obrigatório do ENEM, e a conclusão é que $e^{i\alpha}$ é mais do que simples notação, se trata mesmo duma exponencial.

Euler, fórmula de Considere o círculo de raio 1 parametrizado pela equação

$$t \mapsto exp(it); t \in [0, 2\pi); e^{it} = (\ cos(t) + i\sin(t)); \tag{55}$$

a equação (55) é conhecida como fórmula de Euler. O detalhe que a faz muito conhecida ocorre quando escolhermos $t = \pi$

$$e^{i\pi} = -1 \ \Rightarrow \ e^{i\pi} + 1 = 0$$

reunindo, *no dizer de alguns*, os cinco números mais importantes da Matemática...

$$\{0, 1, e, \pi, i\} \ \mapsto \ e^{i\pi} + 1 = 0;$$

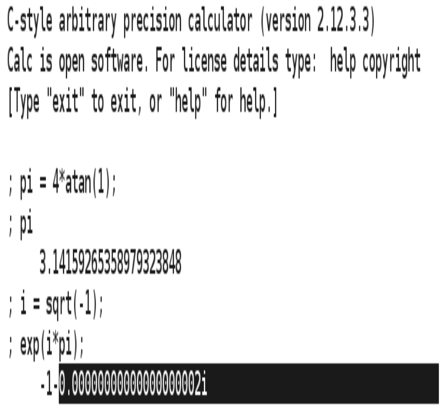
Realmente estes números são importantes, culturalmente... Usando uma linguagem de programação em que os números complexos estejam implementados, é possível reproduzir esta expressão com um pequeno erro. Experimente

`calc`, [3], e você pode repetir os comandos que você na figura (fig. 2.3. Na primeira linha foi atribuida à variável `pi` um valor aproximado para o número π e na linha seguinte foi atribuida à variável `i` o valor $\sqrt{-1}$. Finalmente foi calculada a pottência $e^{i\pi}$. O resultado:

-1-0.00000000000000000002i

você precisa *interpretar*... está escrito no formato

$$a + bi; a = -1; b = -0.00000000000000000002 \approx 0; \quad (56)$$
$$a + bi = -1 - 0.00000000000000000002i; \quad (57)$$
$$a + bi \approx -1; \quad (58)$$



É uma *aproximação* porque você terá que usar também *aproximação* para os números e, π uma vez que as linguagens de computação apenas conseguem usar uma parte dos números racionais.

Usando `calc`, que é uma linguagem livremente distribuída na Internet, você pode executar o conteúdo que aparece na figura (2.3), página 8.

Mas é preciso justificar que a esta expressão não é um simples arranjo engenhoso, ou ainda que, se *elevando* o número e à potência $i\pi$ se tem como resultado -1. E eu lhe estou mostrando que uma linguagem de programação, executada num computador, produz este resultado: *é uma conta como outra qualquer*!

Se você multiplicar e^{ia}, e^{ib}, usando a expressão do segundo membro da equação (55), vai obter

$$e^{ia}e^{ib} = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a) \quad (59)$$
$$e^{ia}e^{ib} = \cos(a+b) + isin(a+b) = e^{i(a+b)} \quad (60)$$

como consequência da *soma de arcos da trigonometria*, e não é por acaso, logo você verá que a trigonometria faz parte integrante dos números complexos. Justifica-se assim a fórmula na equação (55) como uma exponencial apenas seria necessário mostrar que ela está associada com o número $\underline{e}$ o que pode ser facilmente verificado quando se passa ao contexto das *variáveis complexas* porque

$$F(z) = log(z); F^{-1}(z) = e^z; z \in \mathbf{C}; \quad (61)$$
$$\log(e^{it}) = it; F(F^{-1}(z)) = z; \quad (62)$$

eu apliquei uma função à sua inversa. A ligação entre o número $\underline{e}$ e o número complexo no segundo membro da equação (55) tem o que ver com o logaritmo natural que tem por base este número. Observe que o logaritmo *natural* de um número complexo é o seu argumento ou ainda a sua imagem sobre o círculo unitário. Desta forma se chega também às *coordenadas polares*, como mostra a figura (2.3), página 9,

um número complexo qualquer $z = a + bi; |z| = r$ pode ser expresso em termos do argumento, t e do módulo $r = |z|$

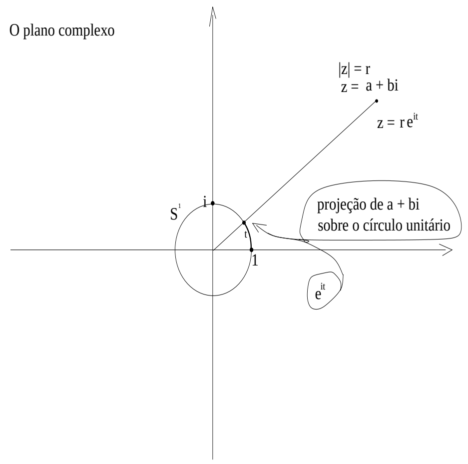
$$z = re^{it} = a + bi; r = \sqrt{a^2 + b^2}; t = Arg(z); \quad (63)$$

em que vemos envolvido também o teorema de Pitágoras para calcular o módulo do número complexo z. Como $\mathbf{C}$ é geometricamente equivalente ao plano $\mathbf{R}^2$ então as coordenadas polares da geometria plana se deduzem da expressão de um número complexo usando *módulo* e *argumento*.

As "*coordenadas polares*" nada mais são do que um outro nome para *fórmula de Euler*:

$$\rho e^{it} = \rho(\cos(t) + i\sin(t)) \tag{64}$$
$$\rho e^{it} = e^r e^{it} = z; r = \log(\rho); t = Arg(z); \tag{65}$$
$$z = e^r e^{it} = e^{(r+it)}; r + it = \log(z); \tag{66}$$

e a função log é periódica no argumento, o seu período é uma faixa do plano complexo de largura 2π sendo necessário retirar uma das fronteiras da faixa para que exista a função inversa que é a exponencial. Se uma das fronteiras não for retirada, há duplicação de valores, a função deixa de ser injetiva deixando de ter uma inversa: a cada salto de $2pi$ o logaritmo se repete.



É interessante ver a *fórmula de Euler* num contexto ampliado. Não é verdade, estritamente, que $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$. Estes dois objetos coincidem em muitos aspectos mas se tem objetivos diferentes quando se considera um, ou o outro. $\mathbf{C}$ é um conjunto de números que tem *álgebra* bem parecida com a *álgebra dos números* reais. Parecida, mas é uma extensão. Em $\mathbf{C}$ vale

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \tag{67}$$

que não vale em $\mathbf{R}$ a não ser quando $a, b > 0$, porque em $\mathbf{C}$ se define $i = \sqrt{-1}$. Mas para alguns aspectos os dois conjuntos são idênticos. Por exemplo, como espaço vetorial em que os escalares são os reais, os dois conjuntos são idênticos, dois espaços vetoriais de dimensão dois. Isto quer dizer que se pode olhar a *fórmula de Euler* de duas maneiras idênticas:

mudando na
escalar é co
muda tudo!

$$t \mapsto e^{it} = f(t) = \cos(t) + i\sin(t); \tag{68}$$
$$t \mapsto e^{it} = F(t) = (\cos(t), \sin(t))\,; \tag{69}$$

e na equação (eq.68) eu estou *vendo* um número complexo enquanto que na equação (eq.69) *eu estou vendo* um vetor do $\mathbf{R}^2$. Corrigindo,

- e na equação (eq.68) eu estou *vendo* uma função que transforma o número real t num número complexo, portanto uma função $\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$,
- enquanto que na equação (eq.69) *eu estou vendo* uma função que transforma o número real t num vetor do $\mathbf{R}^2$, portanto uma função $\mathbf{R} \xrightarrow{F} \mathbf{R}^2$.

É a mesma função apenas muda a minha maneira de ver, pura questão psicológica, é uma visão pessoal... mas na equação (eq.69) o símbolo "e^{it}" é apenas uma *etiqueta* na qual o símbolo i não tem nenhum efeito. Deixe-me agora expandir a visão escrevendo:

$$f(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t); \tag{70}$$
$$f'(t) = ie^{it} = i(\cos(t) + i\sin(t)) = (-\sin(t) + i\cos(t)); \tag{71}$$
$$F(t) = (\cos(t), \sin(t))\,; \tag{72}$$
$$F'(t) = (\cos(t), \sin(t))' = \big(\cos'(t), \sin'(t)\big)\,; \tag{73}$$
$$F'(t) = (-\sin(t), \cos(t))\,; \tag{74}$$

Compare as equações (eq.73) e (eq.75), e agora posso concluir que

$$\cos'(t) = -\sin(t)); \sin'(t) = \cos(t); \tag{75}$$

descobri quais são as derivadas das funções $\sin, \cos$.

Confira qualquer livro de Cálculo, é necessário usar uma complicada desigualdade geométrica, pelo menos uma página de cálculos para provar apenas uma destas duas fórmula de derivação. Precisei aqui de apenas quatro linhas e a idenficação entre $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{C}$ como espaço vetorial real.

Este é outro segredo, dos quatro que eu queria contar-lhe.

Nas próximas páginas você encontra uma lista de exercícios mostrando-lhe como é simples desenvolver estas ideias, inclusive deixando que a estudante, ela mesma tenha o prazer de descobrir o teorema

Teorema 5 (derivada) *do seno*
A derivada da função $f(x) = sen(x)$ é

$$f'(x) = cos(x)$$

2.4 Um exemplo de lista de exercícios

Nesta seção estou lhe trazendo um exemplo de lista de exercícios, uma espécie de *trabalho dirigido, TD*, em que pretendo dar-lhe um exemplo de como conduzir a estudante ao uso dos números complexos para ao final descobrir que $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Também, nesta lista, eu estou desenvolvendo uma técnica de correção em que estou alterando a forma como se pode encontrar em alguns exames. Como observei, os exames atribuem valores às questoes e a estudante deve colocar no gabarito a soma dos pontos que correspondem às *questões verdadeiras.* Estou alterando esta metodologia com as seguintes características e vantagens:

- Numerando as questões com os números primos $2, 3, 5, 7, 11$. É a mesma numeração em todas as questões.
- A estudante deve registrar, ao final de cada questão o produto dos números primos que correspondam às questões que tiver selecionado como verdadeiras.
- Se não houver questões verdadeiras, se tem então uma lista vazia a que corresponde o produto 1, o produto duma lista vazia de números é 1, exatamente pela mesma razão porque $0! = 1$.
- Rapidamente, como aqui se pode ver, posso montar o gabarito da lista de exercícios, simplesmente copiando o arquivo com a lista de itens, `arquivo_XX.tex` para outro com o nome `arquivo_solucao_XX.tex` este último contendo apenas a última linha: `gabarito: a*b*c*d*e` em que
$$a = 2, b = 3, c = 5, d = 7, e = 11$$
e, naturalmente, eliminando desta lista a seleção correspondente às questões falsas. Com o uso duma calculadora, também, rapidamente, você calcula o valor que deve ficar ao lado de "*gabarito*".

Mas ainda preciso melhorar esta lista que fiz apenas com o intuíto de mostrar como podia ser feito.

Cálculo 1	**Lista numero 1**
números complexos	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**
alun@:	
23 de abril de 2017	**Universidade**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.calculo.sobralmatematica.org/`

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Em cada questão da lista, os itens são numerados usando-se, sequencialmente, os números primos $2, 3, 5, 7, 11$.

Ao final da lista de itens, você encontra a palavra "*gabarito*", ao lado qual você deve escrever o produto dos números primos que identificarem os que você tiver selecionado, [V], como *verdadeiros*. Por exemplo

- Se todas as opções forem verdadeiras, registre gabarito: 2310

  que é o produto $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$
- Se todas forem falsas registre gabarito: 1, que é o *produto duma lista vazia de números*, exatamente a mesma razão pela qual $0! = 1$, o produto duma lista vazia de números naturais em ordem descrescente.

Exercícios 1 *números complexos*
objetivo: *Esta lista vai conduzí-la às derivadas das funções trigonométricas* seno, cosseno.
palavras chave: fórmula de Euler, número complexo, derivada das funções trigonométricas.

1. *número complexo*

   Considere a equaçao
$$x^2 + 3x + \frac{25}{4} = 0 \tag{76}$$

(2) *(V)[ ](F)[ ] O radical é um número positivo e as duas raízes reais existem.*

(3) *(V)[ ](F)[ ] as raízes existem mas não são reais, são dois os dois números complexos*
$$z_1 = \frac{-3+4i}{2}; z_2 = \frac{-3-4i}{2}; \tag{77}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ] Um número complexo é apenas um número real mais complexo.*

(7) *(V)[ ](F)[ ] Um número complexo é um novo tipo de número, um elemento dum novo conjunto,* **C** *e com eles podemos fazer as mesmas operações habituais, soma e multiplicação.*

(11) *(V)[ ](F)[ ] Não podemos fazer as contas habituais, soma e multiplicação com números complexos.*

gabarito:

2. *álgebra dos números complexos* *Um número complexo é um par de números reais,* (a, b)*, entretanto fica mais fácil pensar neles como a expressão algébrica* $a + bi$ *em que* $i = \sqrt{-1}$.

   Este novo conjunto formados dos pares $(a, b); a, b, \in \mathbf{R}$ *é o conjunto* $\mathbf{C}$ *dos números complexos.*

   A primeira coordenado do par (a, b)*, se chama* parte real*,* a*, e a segunda se chama* parte imaginária*,* b*.*

   (2) *(V)[ ](F)[ ]* $3, 4, 5, 5 + 2i$ *são quatro números complexos sendo que os três primeiros são números reais.*

   (3) *(V)[ ](F)[ ]* *Um número real não é um número complexo.*

   (5) *(V)[ ](F)[ ]* *Todo número real é um número complexo em que* parte imaginária *é nula, em outras palavras* $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

   (7) *(V)[ ](F)[ ]* i *é um número complexo cuja parte imaginária é zero.*

   (11) *(V)[ ](F)[ ]* i *é um número complexo cuja parte imaginária é* 1 *e a parte real é zero.*

   gabarito:

3. *álgebra dos números complexos*

   As operações com os números complexos se fazem como na álgebra da quarta série do Ensino Fundamental, como se você tivesse

$$a + bx = a + bi; \tag{78}$$

   então

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2; \tag{79}$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i; \tag{80}$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \tag{81}$$

   valem as regras da aritmética apenas com a extensão $i = \sqrt{-1}$*;*

   (2) *(V)[ ](F)[ ]*

$$(3 + 4i)(4 + 2i) = 12 - 8 + 6i + 16i = 4 + 22i; \tag{82}$$

   (3) *(V)[ ](F)[ ]*

$$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 - 8 + -6i + 16i = 4 + 10i; \tag{83}$$

   (5) *(V)[ ](F)[ ]*

$$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 + 8 - 6i + 16i = 20 + 10i = 2(10 + 5i); \tag{84}$$

   (7) *(V)[ ](F)[ ]* $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$ *é impossível de ser calculado.*

   (11) *(V)[ ](F)[ ]* $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$*, e o zero tanto é um número real como complexo.*

   gabarito:

4. *fórmula de Bashara*

   A fórmula de Baskhara agora vale mesmo quando o discriminante da equação do segundo grau for negativo, neste caso resulta num número complexo não real.

(2) (V)[ ](F)[ ] *Nem toda equação do segundo grau tem uma solução, no conjunto dos números complexos, não vale mais a fórmula de Baskhara.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *No conjunto dos números complexos toda equação do segundo grau tem uma solução, sempre vale a fórmula de Baskhara.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Não é mais possível fazermos uma interpretação geomética, simples, no plano, para uma solução duma equação do segundo grau.*

(7) (V)[ ](F)[ ] *A solução duma equação do segundo grau é um ponto no plano complexo.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *A equação $x^2 + 1 = 0$ tem como solução $\pm i$.*

gabarito:

5. *número complexo, interpretação geométrica* Como um número complexo é uma expressão da forma $a+bi$, em que a e b são números reais, então podemos vê-los, de forma equivalente a que a Física usa, agora $j = 1$ então é um vetor do plano complexo. Confira a figura (fig 5), página 27,

   As figuras que aparecem nesta questão foram copiadas da Wikipedia, [2, números complexos] onde você pode encontrar mais informações sobre os números complexos.

(2) (V)[ ](F)[ ] *Se $a^2+b^2 = 1$ então não é possível representar o número complexo $a+bi$.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se $a^2 + b^2 = 1$ então o número complexo $a + bi$ é um ponto do círculo trigonométrico no plano complexo.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *A figura (fig 5), página 27,*
mostra o círculo trigonométrico, dos números reais de módulo 1.

(7) (V)[ ](F)[ ] *A figura (fig 5), página 27, mostra o círculo trigonométrico, um subconjunto dos números complexos, aqueles que têm módulo 1.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *A figura (fig 5), página 27, mostra o círculo trigonométrico onde o número complexo*

$$(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

determina, com a origem do círculo $(1, 0)$, o arco de tamanho ϕ. O maior arco que pode assim ser determinado mede 2π e esta figura sugere que $\phi < 2\pi$.

gabarito:

6. *Fórmula de Euler*

(2) (V)[ ](F)[ ] *Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas $(\sin(\theta), \cos(\theta))$ em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *A* identidade fundamental da trigonometria

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \tag{85}$$

é a própria definição do círculo trigonométrico.

(7) (V)[ ](F)[ ] *A* identidade fundamental da trigonometria

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \tag{86}$$

identifica o conjunto dos números complexos de módulo 1.

(11) (V)[ ](F)[ ] *O número complexo $a - bi$ é o* conjugado *do número complexo $a + bi$ e o produto deles é o número real positivo $a^2 + b^2$.*

gabarito:

7. *conjugado dum número complexo O número complexo $a - bi$ é chamado de* conjugado *do número complexo $a + bi$ e o produto deles é o número real positivo $a^2 + b^2$.*

(2) (V)[ ](F)[ ] *$a + bi$ é simétrico com $a - bi$ relativamente ao eixo OX.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *$a + bi$ é simétrico com $a - bi$ relativamente ao eixo OY.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Os números complexos não possuem inverso multiplicativo.*

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se $a^2 + b^2 \neq 0$ então o número complexo $z = a + bi$ tem inverso multiplicativo que é*

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2} \tag{87}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Com exceção do número complexo $0 + 0i = 0$ todo número complexo $a + bi$ tem inverso multiplicativo.*

gabarito:

8. *fórmula de Euler*

Considere a identidade como uma definição

$$e^{it} = (\cos(t) + i\sin(t)) \tag{88}$$

(2) (V)[ ](F)[ ] e^{it} *designa um ponto sobre o círculo trigonométrico.*

(3) (V)[ ](F)[ ] $e^{it}e^{-it} = 0$

(5) (V)[ ](F)[ ] $e^{it}e^{-it} = 1$ *e como $\overline{z} = e^{-it}$ é o conjugado de $z = e^{it}$ então, no círculo trigonométrico, o conjugado de z é o seu inverso multiplicativo: $z\overline{z} = 1$.*

(7) (V)[ ](F)[ ] *Considere um número complexo z qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto z e a origem determinam uma reta passando por*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = e^{i\theta}; \tag{89}$$
$$(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = e^{-i\theta}; \tag{90}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Dado um número complexo z qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto z e a origem determinam uma reta passando por*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = e^{i\theta}; \tag{91}$$
$$-(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = -e^{i\theta}; \tag{92}$$

que é um par números são inversos, *aditivamente.*

gabarito:

9. *função complexa*

Considere a função

$$f(z) = z^2 - 1; \tag{93}$$

(2) (V)[ ](F)[ ] $f(0) = 1$

(3) (V)[ ](F)[ ] $f(0) = -1$

(5) (V)[ ](F)[ ] $f'(z) = 2z$;

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se* $F(z) = \frac{z^3}{3} - z + 1$ *então* $F'(z) = f(z)$;

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se* $F(z) = \frac{z^3}{3} - z$ *então* $F'(z) = f(z)$;

gabarito:

10. *números complexos*

Considere as funções f, h *definidas pelas equações:*

$$f(t,r) = A\left(\cos(t), \sin(t)\right); \tag{94}$$

$$g(t,r) = A\left(\cos(t) + i\sin(t)\right); \tag{95}$$

$$t \in [0, 2\pi); A \in \mathbf{R}^{++}; \tag{96}$$

A é uma constante dada.

(2) (V)[ ](F)[ ] $f(t,A)$ *é um vetor qualquer do plano* $\mathbf{R}^2$ *sobre o círculo de raio* $|A|$.

(3) (V)[ ](F)[ ] $g(t,A)$ *é um vetor qualquer do plano complexo* $\mathbf{C}$ *sobre o círculo de raio* $|A|$.

(5) (V)[ ](F)[ ]

$$f'(t,A) = A\left(\cos(t), \sin(t)\right)' = A\left(\cos'(t), \sin'(t)\right)$$

porque

$$f(t+h,A) - f(t,A) = A\left(\cos(t+h) - \cos(t), \sin(t+h) - \sin(t)\right); \tag{97}$$

$$\frac{f(t+h,A) - f(t,A)}{h} = A\left(\frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h}, \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h}\right); \tag{98}$$

$$\lim_{h=0} \frac{f(t+h,A) - f(t,A)}{h} = \left(A\lim_{h=0} \frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h}, A\lim_{h=0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h}\right); \tag{99}$$

se estes limites existirem.

(7) (V)[ ](F)[ ] *Como* i *é uma constante então a derivada de* $t \mapsto e^{it}$ *é* $t \mapsto ie^{it}$ *então*

$$h'(t,r) = Ai\left(\cos(t) + i\sin(t)\right) = A\left(-\sin(t) + i\cos(t)\right);$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Como as imagens das duas funções,* $f(t), g(t)$, *coincidem então os limites*

$$f(t+h,A) - f(t,A) = A\left(\cos(t+h) - \cos(t), \sin(t+h) - \sin(t)\right); \tag{100}$$

$$\frac{f(t+h,A) - f(t,A)}{h} = A\left(\frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h}, \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h}\right); \tag{101}$$

$$\lim_{h=0} \frac{f(t+h,A) - f(t,A)}{h} = \left(A\lim_{h=0} \frac{\cos(t+h) - \cos(t)}{h}, A\lim_{h=0} \frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{h}\right); \tag{102}$$

tem que existir e valem, respectivamante,

$$\begin{cases} A \lim\limits_{h=0} \frac{\cos(t+h)-\cos(t)}{h} = -A\sin(t); & \cos'(t) = -\sin(t); \\ A \lim\limits_{h=0} \frac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h} = A\cos(t); & \sin'(t) = \cos(t); \end{cases} \tag{103}$$

gabarito:

O gabarito da lista.

Cálculo 1	**Gabarito da Lista numero 1**
números complexos	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**
alun@:	
23 de abril de 2017	**Universidade**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.calculo.sobralmatematica.org/`

Exercícios 2 *números complexos*
objetivo: *Esta lista vai conduzí-la às derivadas das funções trigonométricas* seno, cosseno*.*
Ao lado da chave gabarito *você encontra um número, fatore-o e terá a lista dos itens verdadeiros da questão correspondente.*
palavras chave: fórmula de Euler, número complexo, derivada das funções trigonométricas.

1. *gabarito: 21*
2. *gabarito: 110*
3. *gabarito: 110*
4. *gabarito: 385*
5. *gabarito: 231*
6. *gabarito: 1155*
7. *gabarito: 154*
8. *gabarito: 110*
9. *gabarito: 1155*
10. *gabarito: 2310*

3 Integral independente do caminho

O salto da dimensão 1 para dimensão dois é surpreendente, um novo mundo se abre, claro tem mais espaço pela frente e a Matemática nos oferece alguns segredos interessantes a cada vez que saltamos para uma nova dimensão, mas este salto, da dimensão um para dimensão dois eu considero que é o fundamental. É também o mais simples e como aocontecem alguns resultados interessantes então fica mais fácil entender o que pode acontecer ainda em dimensão maior.

Por exemplo, no Cálculo univariado, a maioria das funções com que lidamos tem *primtiva*, qualquer "*função decente*" tem integral e podemos definir-lhe uma primitiva pelo menos em algum intervalo. já $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$ pode não ter meio de se lhe definir uma *primitiva.*

E há funções que nos ajudam a descobrir as veredas e não é atôa que elas se encontram no centro de muitos teoremas. Uma delas é

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right); \tag{104}$$

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}; \tag{105}$$

$$v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}; \tag{106}$$

e eu já escolhi a notação que vou usar posteriormente em outras situações. Uma função $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$ nós dizemos que duas componentes e algumas vezes é prático dar nome a cada uma das compoentes como eu fiz aqui chamando-as de u, v.

- **integral de linha** É uma generalização da integral *a uma variável* em que o integrando é uma função vetorial (com valores num espaço vetorial de dimensão maior ou igual que 2) e pelo menos duas variáveis reais.

A ideia consiste em selecionar um *caminho* dentro dum espaço vetorial de dimensão maior do que dois para nele definir uma função univariada e depois aplicar a integração do Cálculo unvariado: *integral sobre uma linha.* Confira o gráfico na figura (fig. 4), página 18, e logo em seguida eu vou explicar-lhe, detalhadamente, o que foi feito. Entretanto a ideia consiste em definir uma linha, um caminho, num espaço de dimensão alta e calcular a integral relativamente a este caminho: uma integral univariada!

Um caso típico é o comprimento de arco de uma curva (embora nem sempre caracterizado como integral de linha).

Deixe-me partir do significado da derivada para voltar para a *primitiva* como se faz no Cálculo univariado, como motivação para discutir a *integral de linha.* Acompanhe a ideia.

Considere uma função bivariada

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2; f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}; \tag{107}$$

a sua derivada vai ser do *tipo*

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2; Df : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2; \tag{108}$$

$$Df(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right); \tag{109}$$

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}; v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}; \tag{110}$$

e você pode ver que a derivada *expande* o conjunto dos valores que agora, *na derivada*, é de dimensão dois. Observe outros exemplos

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2; f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2; Df : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^4; \tag{111}$$

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2; f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^4; Df : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^8; \tag{112}$$

$$\Omega \subset \mathbf{R}^m; f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n; Df : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^{nm}; \tag{113}$$

em que $Df = J(f)$ é a derivada de f.

Então vem a pergunta, como ficam as primitivas?

Este é um dos *segredos* do Cálculo. Quando saltamos do *Cálculo univariado* para o *Cálculo multivariado* surge a primeira diferença: nem toda função multivariada tem primitiva. No Cálculo univariado toda *função decente* tem primitiva! Praticamente todas as funções que aparecem como exemplos nos livros de Cálculo univariado tem primitivas, pelo menos nalgum intervalo.

No Cálculo multivariado já não é mais assim e você vai entender aqui o que acontece, mas é com o *Teorema de Green* vai se fechar a informação de forma muito precisa.

Eu vou tratar aqui do caso

$$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \tag{114}$$

e depois facilmente se generaliza a ideia para para o caso

$$\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m; \tag{115}$$

Deixe-me retornar à *integral de linha*.

Para definir a primitiva duma função de várias variáveis, forçamos um retorno ao Cálculo univariado, e é aqui entra a *integral de linha*, e usamos a metodologia ali desenvolvida para definir primitivas. Depois é possível criar uma formulação independente, mas inicialmente é este o caminho mais fácil e mais intuitivo.

Vou descrever o caso de funções de duas variáveis porque será mais fácil fazer representações geométricas, mas a ideia se generaliza para qualquer dimensão.

Deixe-me escolher um ponto no plano, uma condição inicial, P, e vou traçar uma curva deste ponto até outro ponto qualquer, confira o gráfico na figura (fig 4), página 18,

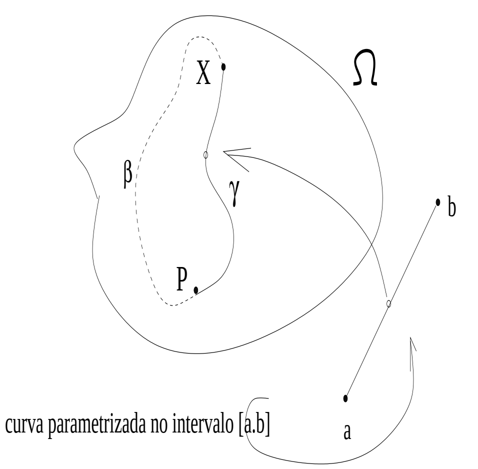


Figura 4:

em que se pode ver o ponto P conectado ao ponto X pelo caminho γ.

A palavra "caminho" usualmente significa nos textos de Geometria Diferencial uma curva diferenciável e é este o sentido que estou tomando aqui. Então eu posso "parametrizar" o caminho γ num intervalo $[a, b]$ como você pode ver na figura (fig 4), e tenho

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \subset \mathbf{R}^2; \tag{116}$$

$$[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Omega; \tag{117}$$

em que estou fazendo a confusão que habitual, usando o símbolo γ para representar tanto a curva como a função, a parametrização desta curva. Então $\gamma(t)$ é uma função real à qual se pode aplicar a integração do Cálculo 1 para obter uma primitiva

corretamente, se separa, γ^*, a curva, e γ a parametrizaç

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds; \tag{118}$$

$$\gamma(t_0) = P; \gamma(t) = X; f(\gamma(t)) = f(X); \tag{119}$$

Na equação (eq.118) eu defini a primitiva F com a condição inicial P e *relativamente ao caminho* γ, esta observação é importante! Também na equação (eq.118) esto usando um produto, $f(\gamma(s))\gamma'(s)$ que eu ainda preciso explicar.

O problema é que há funções que são *sensíveis* à escolha do caminho. Confira a figura (fig 4), eu posso ir da condição inicial P para o ponto X por muitos caminhos. Se a função f for *sensível* à escolha do caminho, ela, simplesmente, não tem primitiva! Porque $F(X)$ fica indefinido, eu posso seguir pelo caminho β^* ou pelo caminho γ^*, confira a figura (fig 4) e ter resultados diferentes o que significa que eu não tenho uma deifnição de $F(X)$.

Um método para verificar isto consiste em construir um caminho fechado. Na figura (fig 4) o caminho β foi *projetado* partindo de P para chegar em X. Os caminhos são orientados, este um outro segredo em espaços de dimensão maior do que 1. Deixe-me chamar $-\beta$ o caminho que vai de X para P, e considere o caminho $\gamma^* \cup -\beta^*$. É um caminho fechado.

A orientação existe em dir apenas fica bida!

Se a função f for *sensível* à escolha do caminho, a integral sobre $\gamma * \cup - \beta *$ *pode* ser diferente de zero.

As funções *sensíveis* à escolha do caminho de caminho se chamam *dependentes do caminho* e não têm primitivas. A integral de linha destas funções, sobre um caminho fechado *pode* ser diferente de zero.

Vou usar um exemplo clássico que também costumo usar em outros contextos:

na última equação está a justificativa da escolha do exemplo!

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right); \tag{120}$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}; v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}; \tag{121}$$

$$z = x + iy; u(z) + iv(z) = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z} \tag{122}$$

Esta função não está definida em $(x,y) = (0,0)$ então vou escolher uma curva fechada contendo a origem, o círculo unitário, por exemplo e calcular a *integral de linha* desta função sobre o círculo:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)); \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2; \tag{123}$$

$$\oint_{\gamma^*} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \tag{124}$$

$$= \int_a^b h(t)dt; \tag{125}$$

Observe a equação (eq.124) é a forma como eu escreveria uma integral do Cálculo univariado! Esta equação está mal definida, ela contém um "produto de vetores", e vou logo abaixo corrigir este defeito, melhor, dar sentido ao produto de vetores.

E como no Cálculo univariado, eu posso trocar a parametrização, isto se chama no Cálculo univariado, de "mudança de variável", apenas, no Cálculo univariado, se produz uma compensação com a derivada de modo que a integral não mude de valor, porque lá não tem sentido "*troca de caminhos*" que agora em dimensão dois, tem!

Compare a equação (eq.125) que escrevi para ajudar sua memória. O símbolo "*dt*" na integral significa a derivada da "variável de integração", que na equação (eq.124) é a expressão do caminho. As duas últimas equações são uma comparação, vou ignorar a a equação (eq.125) que escrevi apenas para que você entendesse melhor a anterior.

Na figura (fig 5), página 20,
eu fiz um deslocamento do disco unitário colocando-o entre dois círculos de raio 1 e 3 o que vai me permitir o uso de duas desigualdes para o obter uma estimativa da integral.

Continuando, a partir da (eq.124) que precisa ser *interpretada*, ela contém um produto de dois vetores e uma das formas de dar sentido a este produto é considerar um *produto escalar de vetores*. Vou escrever corretamente a equação (eq.124) usando a notação $\vec{A} \cdot \vec{B}$ para representar o produto escalar dos vetores $\vec{A}, \vec{B}$.

$$\oint_{\gamma^*} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt; \tag{126}$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\sqrt{2} + \cos(t), \sqrt{2} + \sin(t)); \tag{127}$$

$$1 < |(x(t), y(t))| = |(x(t), -y(t))| < 3 \quad \Rightarrow \tag{128}$$

$$1 < |(x(t), -y(t))|^2 < 9; 1 < x(t)^2 + y(t)^2 < 9 \quad \Rightarrow \tag{129}$$

$$\frac{1}{9} < |\frac{1}{x(t)^2+y(t)^2}| < 1; \tag{130}$$

$$\frac{1}{9} < |\frac{|(x(t),y(t))|}{x(t)^2+y(t)^2}| = |\frac{|(x(t),-y(t))|}{x(t)^2+y(t)^2}| = |f(x(t), y(t))| < 27; \tag{131}$$

$$\frac{1}{9} < |f(x(t), y(t))| < 27; \tag{132}$$

$$\frac{2\pi}{9} < \oint_{\gamma^*} |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|dt < 54\pi; \tag{133}$$

e encontrei uma curva sobre a qual a integral $\oint_{\gamma^*} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$ é diferente de zero. Calculando esta integral com um programa escrito em `calc` encontrei o valor aproximado

$$1.57073948802026468094 \approx \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{9} < \frac{\pi}{2}; 4\pi < 9\pi; \tag{134}$$

e portanto dentro da desigualdade expressa na equação (eq.133), como mostra o *produto dos meios e extremos* ao final da última equação.

Você pode baixar o programa da página [Green.calc][5] e refazer as experiências aqui mencionadas ou alterá-lo para fazer as experiências que desejar. Ele se encontra editado para o cálculo com $\gamma(t)$ definida na equação (eq.128).

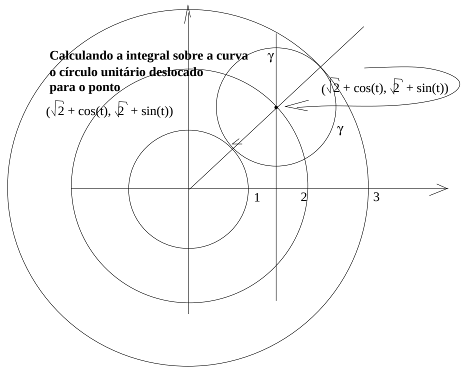


Figura 5:

Então $f(x, y)$ não tem primitiva, ou ainda, não existe uma função definida num domínio $\Omega \subset \mathbf{R}^2$

$$z = F(x, y); J(F) = f; \tag{135}$$

Mas basta fazer o inverso, partir duma função $z = F(x, y)$ que seja diferenciavel e podemos encontrar uma jacobiana $f(x, y)$. Para uma tal função a integral sobre qualquer curva fechada tem que ser zero de modo que se possa partir dum ponto P qualquer dentro do domínio $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ onde ela estiver sefinida por um caminho arbitrário e encontrar F calculando uma integral sobre uma curva contida em Ω independente da escolha da curva. Tais integrais serão independentes do caminho escolhido e defininem a primitiva.

Confira o teorema de Green como uma aplicação deste tópico, *integral de linha.*

Na expressão do teorema de Green, eu vou usar a notação $(u, v) = (P, Q)$ para me adaptar a linguagem habitual dos livros de Cálculo.

- **Green, teorema de** Este teorema é um dos resultados mais importantes do *Cálculo multivariado* junto com outros teoremas que podem ser considerados extensões ou complementações dele: teorema de Stokes e o teorema da divergência de Gauss.

O teorema de Green tem uma versão trivial pela qual vou começar e que serve para classificar os campos vetoriais que vou usar ao final na expressão do teorema. Vou apresentar esta redação no caso de campos vetoriais bivariados, $(x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbf{R}$ com o objetivo de manter a linguagem simples. Para obter o caso com mais variáveis, basta acrescentar mais "*coordenadas*" às derivadas.

Se F for um campo vetorial, *uma função real de duas variáveis reais*, por exemplo, continuamente diferenciável, então, pelo teorema de *Schwarz-Clairaut* , as derivadas mistas serão iguais

$$J(F) = f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)); \tag{136}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y); \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y); \tag{137}$$

$$\left(\begin{array}{cc} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{array}\right); \tag{138}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F_{xy} = Q_x = P_y = F_{yx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \tag{139}$$

o que torna a integral

$$\int\int_{\Omega} (Q_x - P_y) dxdy = \int\int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = 0; \tag{140}$$

nula. Como posso calcular as primitivas destas funções, é possível deduzir, desta integral dupla, a integral de linha, também nula,

$$\oint_{\partial\Omega} P_x dx + Q_y dy = 0 \tag{141}$$

em que agora o símbolo $\partial\Omega$ representa a fronteira do domínio Ω, e esta integral é também nula.

A razão pela qual a integral de linha na equação (eq.141) é nula se pode deduzir de forma independente da integração feita na equação (eq.140). Ela é a *integral de linha* sobre um caminho fechado, a fronteira do domínio Ω quer dizer, uma integral que sai do ponto P e retorna ao ponto P ao longo do caminho $\partial\Omega$. Como nesta construção inicial o integrando foi construído como derivada dum campo vetorial F então a integral de linha começando numa condição inicial $P \in \Omega$ define uma primitiva F associada à esta condição inicial P e então as integrais do tipo da equação (eq.141), sobre circuítos fechados, têm que ser nulas.

Esta é a formulação trivial do teorema de Greeen. Se eu alterar um pouquinho a notação vou obter a expressão comum nos livros de Cálculo.

$$P(x,y) = F_x(x,y); \; Q(x,y) = F_y(x,y); \tag{142}$$

$$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 = \int\int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy \tag{143}$$

que é a expressão (trivial) do *teorema de Green* quando partimos de uma função diferenciável F, porque todas as integrais envolvidas são nulas.

Se (P,Q) for um campo vetorial diferenciável continuamente, ainda vale o teorema de Green mas as integrais não precisam ser nulas sobre um domínio Ω qualquer. A integral de linha, por exemplo, separa os campos vetoriais em duas classes:

- *Campos conservativos*, é o caso trivial, quando o campo vetorial é a derivada de um campo escalar. Então a integral de linha sobre qualquer curva fechada é zero, é uma aplicação direta do *teorema fundamental do Cálculo*.
- Campos não conservativos, quando houver uma curva fechada, fronteira de um domínio Ω sobre a qual a integral de linha na equação (143) é diferente de zero.

o valor da integral de linha é então a perda (ou ganho) de energia que o campo escalar sofre ao longo da curva $\partial\Omega$. Neste caso o campo vetorial (P, Q) não tem primitiva. Esta formulação permite ainda explicar dois tipos de integrais,

- *integrais independentes do caminho* aquelas, da forma

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

  que são nulas sobre qualquer curva fechada. O campo escalar é conservativo, tem primitiva (vem da derivada de um campo escalar diferenciável).

- *integrais que dependem do caminho* aquelas, da forma

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

  que podem ser "*não nulas*" sobre uma curva fechada. O campo escalar é não conservativo e não tem primitiva (não vem da derivada de um campo escalar diferenciável). Dizemos que integral depende do caminho porque, escolhidos dois caminhos entre dois pontos dados P_1, P_2, como se pode ver na figura (6) página 27, se o valor da integral sobre um dos caminhos, de P_1 até P_2 for diferente do valor da integral sobre o outro caminho, também de P_1 até P_2, podemos definir uma curva fechada, indo de P_1 até P_1, então a integral será diferente zero sobre esta curva fechada. Isto equivale a dizer-se que o campo vetorial (P, Q) não tem primitiva, não é a derivada de um campo escalar.

4 Número de voltas duma curva

Sem sair do espirito deste artigo, eu agora vou retornar à visão do $\mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{C}$ para descobrir mais um segredo relativo às funções bivariadas e cuja imagem é também bivariada. Na seção anterior eu lhe mostrei que as funções

$$f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2 \tag{144}$$

ficam divididas em duas classes:

- as que tem primitiva, e consequentemente, suas integrais não dependem de caminhos,
- as que não têm primitivas e cujas integrais sobre circuítos fechados podem ser diferentes de zero.

Agora o centro da questão vai ser uma nova forma de ver a derivação, a *derivada complexa.*

- **derivada complexa** O conjunto dos números complexos tem as mesmas propriedades que o conjunto dos números reais (exceto a ordem) e é, assim, um *corpo.* Desta forma podemos aplicar a definição de derivada usual das *funções reais de variável real* às *funções complexas de variável complexa* que é o que se costuma chamar de *derivada complexa*, e neste momento surge um dos resultados mais intrigantes da análise: *se uma função complexa de variável complexa tiver derivada complexa ela será infinitamente diferenciável.* São as *funções analíticas*, as *funções complexas que têm derivada complexa.*

Uma forma simples de se chegar a este resultado pode ser esquematizada na seguinte sequência em que estou usando derivação implícita para fazer aparecer as equações de *Cauchy-Riemann*, também estiu usando a dualidade de interpretação $\mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$, $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$, conforme for conveniente:

$$f \text{ uma função complexa de variável complexa;} \tag{145}$$

$$f = u + iv; u, v \text{ funções reais de variável complexa;} \tag{146}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \alpha + i\beta = f'(z) \in \mathbf{C}; \tag{147}$$

$$df = J(f) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (\alpha + \beta i)(dx + idy) = (\alpha dx - \beta dy) + i(\alpha dy + \beta dx) \tag{148}$$

$$df = f'(z)dz = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{149}$$

$$u_x = v_y; u_y = -v_x \tag{150}$$

A igualdade na equação (147) vem da afirmação inicial, $\mathbf{C}$ *é um corpo, como* $\mathbf{R}$*, a derivação das funções reais de variável real, se aplica* verbatim *ao caso complexo*, portanto, como no caso real, $f'(z) \in \mathbf{C}$, a *derivada complexa* é o número complexo $\alpha + i\beta$.

Este fato volta a ser usado na equação (148) para identificar um tipo particular de matriz jacobiana, a derivada de f, agora vista como função de $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, na equação (149). Vamos poder assim destacar, entre as funções $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, uma classe particular de funções cuja matriz jacobiana tem o formato apresentado na equação (149), as funções analíticas.

A equação (ou sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem), equação (150), obtida quando se igualar as matrizes nas equações (147) e (149), é conhecida como *equações de Cauchy-Riemann*, e elas caracterizam quando uma função $f = u + iv$ é analítica e são usadas com frequência como definição de função analítica.

A derivada complexa de f, se existir, é uma nova função complexa de variável complexa e ao calcular-se sua derivada vão novamente aparecer as *equações de Cauchy-Riemann*. Por indução se conclui que se f for uma função complexa, de variável complexa, então será infinitamente diferenciável se for derivável no sentido complexo.

Quer dizer que se voltarmos a olhar para as funções vetoriais de variável vetorial de dimensão dois haverá duas classes disjuntas de funções, aquelas que satisfazem às *equações de Cauchy-Riemann*, as funções analíticas, e as outras que podem ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ mas que não são analíticas. Por exemplo

$$g(x, y) = (x, -y) = (u(x, y), v(x, y)); g(z) = \overline{z} \quad u_x = 1 \neq v_y = -1 \tag{151}$$

não é uma função analítica mas é de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Uma das implicações mais fortes da analiticidade é que se f for analítica irá transformar *abertos do plano complexo* em *abertos do plano complexo* mas não é uma propriedade fácil de ser demonstrada. Esta propriedade fundamental caracteriza as *funções analíticas* como *aplicações abertas.*

A derivada complexa de f pode ser escrita numa das formas alternativas seguintes, usando as *equações de Cauchy-Riemann*:

$$u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y \tag{152}$$

em outras palavras, o número $f'(a+ib) = \alpha+i\beta$ pode ser obtido com um qualquer das expressões da equação (152). Se usarmos o conceito de operador diferencial, podemos deduzir das expressões na equação (152) as expressões, usando sempre a mesma notação:

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) = (\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x})(v) = (-i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x})(iv) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) \quad (153)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) = \alpha + i\beta = f'(a+ib) \quad (154)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) + (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) = 2(\alpha + i\beta) \quad (155)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u + iv) = 2(\alpha + i\beta) \quad (156)$$

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(f) = (\alpha + i\beta) = f'(a+ib) \quad (157)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) - (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) = 0 \quad (158)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u - iv) = 0 \quad (159)$$

$$\overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u + iv)} = 0 \quad (160)$$

$$\overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})}(f) = 0; (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(f) = 0 \quad (161)$$

Destes cálculos surgiram duas expressões mais simples que se tornaram dois operadores diferenciais clássicos permitindo uma forma concisa de expressar tanto as *equações de Cauchy-Riemann* como a definição da derivada de uma função analítica:

$$\partial = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \quad (162)$$

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \quad (163)$$

$$\partial(f) = \alpha + i\beta = f'(a+ib) \quad (164)$$

$$\overline{\partial}(f) = 0 \iff f \text{ satisfaz às equações de Cauchy-Rieman} \quad (165)$$

Embora a formulação à direita, nas equações (162) e (163) sejam mais didáticas (ligadas à definição de conjugado), a expressão que parece ser a mais comum são as que ficam à esquerda, para definir os operadores $\partial, \overline{\partial}$.

É interessante observar que as equações de Cauchy-Riemann são um exemplo de equação diferencial parcial que foi resolvida ao longo de mais de um século, resultando na construção do que se chamava de *teoria das funções* que se pode dizer, com alguma dose de exagero, que é *a solução das equações de Cauchy-Riemann*, ou, a solução destas equações é uma função analítica e vice-versa. As funções analíticas são também chamadas de *funções holomorfas*.

É interessante observar que se $f = u + iv$ for analítica, então as duas funções reais u, v são harmônicas, quer dizer, satisfazem à equação homogênea de Laplace $\Delta(u) = \Delta(v) = 0$, isto é consequência direta das equações de Cauchy-Riemann e do teorema de Schwarz-Clairaut das derivadas mistas.. As funções u, v chamam-se *conjugados harmônicos*. A recíproca é verdadeira e passa pela solução da equação diferencial de Cauchy-Riemann (as equações de Cauchy-Riemann) em que uma das duas funções, u ou v, é um dado do problema. A solução é única a menos de uma constante. Para resolver a *equação diferencial parcial* $\Delta(F) = 0$ foi preciso montar toda a teria das funções analíticas.

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus vol II.* Blaisdell Publishing Company, 1962.

[2] Wikimedia Foundation. Wikipedia, enciclopédia livre na internet. http://www.wikipedia.org.

[3] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[4] Harold J. Larson. *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference.* John Wiley & Sons, Inc - Wiley International Edition, 1969.

[5] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[6] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional.* Sobral Matematica, 2007.

[7] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.

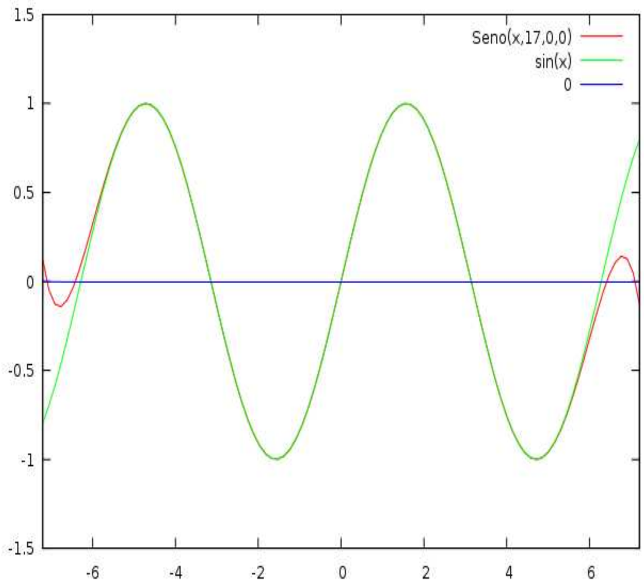


Figura 2: Polinômio de Taylor de grau 17 do seno na origem

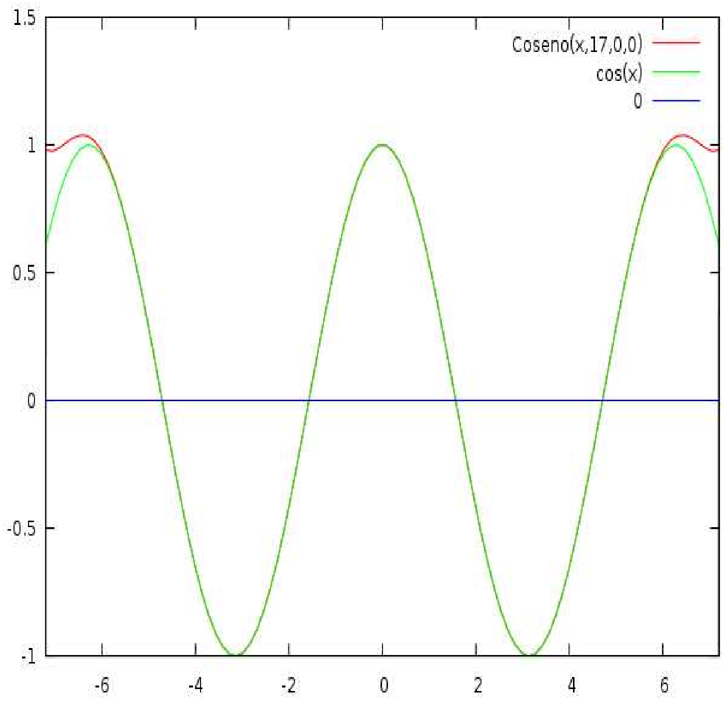
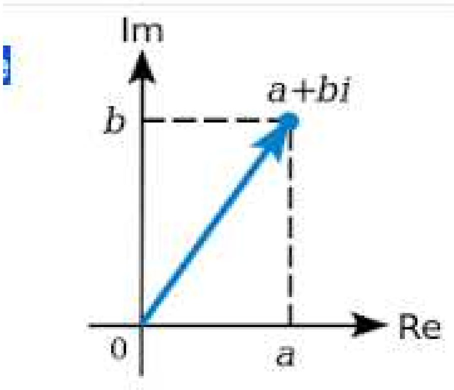
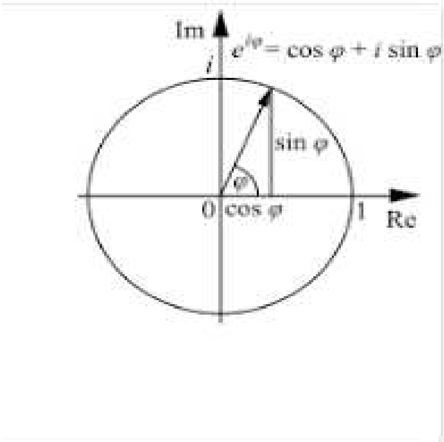
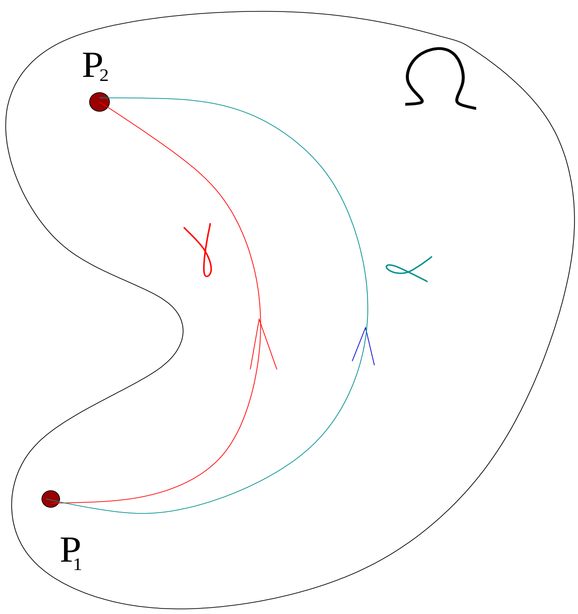


Figura 3: Polinômio de Taylor de grau 17 do cosseno na origem





um domínio não convexo no plano



$$\int_\alpha F \neq \int_\gamma F$$

Figura 6: