Um passeio no Cálculo Diferencial e Integral

Praciano-Pereira, Tarcisio *

11 de março de 2017
preprints da Sobral Matemática
no. 2017.01
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Vou começar mostrando alguns exemplos simples do que significam a derivada, *o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico duma função*, e integral, *a quantidade acumulada sob o gráfico entre dois pontos escolhidos*. Calculando a integral dum função polinomial, vou mostrar que existe uma partícula que "tendendo para zero"me permite calcular exatamente o valor da integral e desta forma motivar a necessidade duma terceira operação, nada intuitiva, o cálculo de limites. Vou concluir que o Cálculo precisa ser estudado passando por limite, integral e derivada. Aliás, esta seria a ordem mais pedagógica e usada por Courant começando com a integral de funções polinomiais em que o cálculo do limite é trivial porque passa por um truque em que se elimina um denominador que tudo complicaria.

palavras chave: integral, limite, derivada

I will start with some simple examples showing what is the derivative, *the slope of the tangent line at a point of the graphic of a function*, and the integral, *the accumulated value under the graphic between two selected points*. By making the calculus of the integral of a polynomial function I shall pass by a *particle* whose limit being zero leads me to the exact value of the integral and this will show up the need of a third operator, not at all naive, but essential to the calculus of derivatives and integrals. To finish I will propose a sequence to study Calculus, which is integral, limit and derivative as the best one for pedagogical reasons, this was started by Courant. The integral of polynomial functions shows in a very easy way a trick to make off with the *particle* which otherwise will make the things difficult.

keywords: integral, limits, derivative

*tarcisio@member.ams.org

1 Introdução

- **Cálculo** É a disciplina da Matemática que estuda o comportamento das funções com o objetivo de descrever a continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade das mesmas. O seu nome completo é *Cálculo Diferencial e Integral* e o ambiente natural para desenvolver-se o Cálculo é o conjunto das *funções reais* com valores reais, o que ainda significa funções definidas no conjunto dos números reais cujos valores também estão no conjunto dos números reais. Esta definição pode ser expandida quando se estuda o Cálculo multivariado em que as funções são vetoriais com variáveis vetoriais.

Seu nome completo já foi Cálculo Diferencial e Infinitesimal.

Com frequência é interessante especializar a função, objeto do Cálculo, considerando um domínio mais restrito:

1. $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}; \mathbf{R} \ni x \xrightarrow{f} y \in \mathbf{R};$
2. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}; \mathbf{R} \ni x \xrightarrow{f} y \in \mathbf{R};$
3. $f : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}; \mathbf{R} \ni x \xrightarrow{f} y \in \mathbf{R};$
4. $f : [a,b) \longrightarrow \mathbf{R}; \mathbf{R} \ni x \xrightarrow{f} y \in \mathbf{R};$
5. $f : (a,b] \longrightarrow \mathbf{R}; \mathbf{R} \ni x \xrightarrow{f} y \in \mathbf{R};$

No primeiro caso você tem a representação simbólica do texto inicial, e nos três outros o domínio é um intervalo, um subconjunto da reta.

Apenas para deixá-la pensativa, vou acrescentar, sem comentários, que o terceiro caso é muito semelhante ao primeiro e completamente diferente dos outros, quando o domínio é um intervalo aberto. No segundo caso se tem um intervalo fechado e limitado: $[a,b]$. É a Topologia que trata destas diferenças.

Confira continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade.

O Cálculo, que surgiu no século 17 com os trabalhos de Euler, Fermat, os membros da família Bernouilli é uma compilação de três técnicas:

Euler parece ser o autor do primeiro livro de Cálculo, com este nome!

Os, mutuamente inimigos, Bernouilli.

- cálculo de limites, na verdade a construção dos números reais a partir dos números racionais, embora isto não fique claro dentro dos textos de Cálculo,
- cálculo da derivada duma função que é o coeficiente angular da reta tangente a um ponto arbitrário do gráfico e consequentemente um limite,
- cálculo da integral duma função que é a área algébrica da região do plano limitada pelo gráfico da função relativamente a um intervalo dado $[a,b]$ contido no domínio da mesma.

Se o gráfico da função for retilíneo, a integral recai no cálculo da área dum paralelogramo, mas se o gráfico não for retilíneo esta área somente pode ser calculada aproximadamente e então é um limite. Desta forma se vê que o *operador limite* se encontra na base do desenvolvimento da disciplina.

Um pouco mais profundo, ou menos visível é o significado da *reta tangente*: nem todo gráfico de função tem tangente num ponto dado e se tiver este gráfico cai numa classe de gráficos que se estuda sob o tópico *continuidade*. Novamente, para decidir sobre a existência da tangente ou da classificação pela *continuidade* é o *operador limite* que faz a distinção.

2 O operador limite

- **limite** é um funcional linear que produz um elemento, eventualmente, completando um espaço. Esta não é a forma como este operador é tratado no Cálculo Diferencial e Integral onde ele aparece pela primeira vez nos estudos de Matemática.

Também pode produzir um elemento do espaço, é o caso das sucessões constantes.

Confira também *limite de funções reais*.

No Cálculo Diferencial e Integral, limite aparece como uma metodologia para

- testar se uma função é contínua, confira *continuidade* e *limite de funções reais*,
- calcular derivadas, confira *derivada*;
- definir a integral de Riemann. confira integral de Riemann.
- mais avançado, limite de sucessões, ficando invisível para as estudantes que se trata da construção dos números reais,
- em Análise Matemática, é uma forma de definir números reais.
- um conceito *confuso e difuso* que alguns ainda tentam manter na ordem do dia, os *infinitésimos*, e que é usado na construção do conjunto dos *super reais* um conjunto que contém os números reais e é formado pelos *infinitésimos* que no fundo formam um subconjunto do conjunto de todas as sucessões de números racionais: é preciso eliminar as mais selvagens…é uma teoria interessante!
- em Análise Matemática e em Topologia, serve para distinguir espaços que tenha mais ou menos abertos, confira *espaço de Hausdorff*

Em seu famoso livro de Cálculo, Richard Courant, diz que *limite* se encontra no limiar da Matemática Superior …e tem um bom sentido porque hoje, o momento em que estudantes encontram este assunto é nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral, uma das primeiras disciplinas do Ensino Superior.

Se o golpe não trivializar também o Ensino Superior.

2.0.1 O limite e a construção de $\mathbf{Q}$

Para entender como se processa esta a *completação* do conjunto dos racionais, para obter o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais, observe que o conjunto dos números racionais é incompleto porque há sucessões de números racionais que são "convergentes", e assim definem um número, mas este número não precisa ser um número racional.

A sucessão P_n dos polígonos regulares inscritos num círculo de raio 1 permite ilustrar de forma simples como construir uma sucessão de números racionais que tem como limite um número que não é racional.

O quociente do perímetro de P_n pelo diâmetro do círculo se *aproxima arbitrariamente* dum número que os gregos chamaram de π que não é possível escrever como o quociente de dois inteiros e portanto não é um número racional. Desta forma, considerando o perímetro P do círculo trigonométrico,

$$\lim_n \frac{P_n}{2} = \frac{P}{2} = \pi \notin \mathbf{Q} \tag{1}$$

P_n é uma medida do perímetro do polígono de n lados que pode ser aproximada por um número racional.

e o operador lim "*define*" um número que completa $\mathbf{Q}$. Confira número real,$\mathbf{R}$, $\pi \notin \mathbf{Q}$.

A afirmação de que "*o limite completa* $\mathbf{Q}$" não diz tudo, apenas sugere que há um conjunto mais completo, $\mathbf{R}$.

Para que você compreenda que existe uma problema grave aqui, eu vou lançar diversas ideias mais ou menos soltas e posteriormente vou usá-las numa conclusão.

Você não precisa seguir à risca a sugestão de ler outras outros assuntos...

Esta afirmação de que um número real é um *novo tipo de número* e portanto o conjunto $\mathbf{R}$ dos números é um novo conjunto é crucial e aqui sugiro que você leia a respeito do *salto de cardinalidade* de Cantor porque este novo conjunto é *muito diferente* dos conjuntos numéricos anteriores, $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$.

A existência de sucessões de números racionais que convirjam para um número que não é racional *caracteriza* que o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais é incompleto, que é um conceito da *topologia* ou da teoria dos *espaços métricos*. Ou ainda mais claramente, não é *um conceito aritmético*. Isto faz do Cálculo uma miscelânea explosiva sem que a estudante seja advertida disto, mas pelo menos deveria!

Os elementos dos conjuntos $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ são aritméticos e o novo conjunto $\mathbf{R}$ contém números que não são aritméticos, entre outros novos tipos de números: *algébricos*, *transcendentais*.

O *ambiente natural* para desenvolver o Cálculo é o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais, então é preciso começar esta disciplina definindo o que é um número real.

Limite é o método para definir o *conjunto dos números reais* como completação do conjunto dos números racionais.

O conjunto dos números racionais é um *ente* aritmético e algébrico, no sentido de que ele é resultado duma definição da aritmética:

$$x \in \mathbf{Q} \equiv x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbf{Z}; q \neq 0; \tag{2}$$

então um número racional é *um objeto da aritmética*, confira o *algoritmo da divisão euclidiana.* Mas eu posso mostrar que o conjunto dos números racionais tem as propriedades da reta, um *ente* geométrico, então posso representar $\mathbf{Q}$ com uma reta, o que se chama de *representação geométrica dos racionais.* A figura (fig 1), página 3, mostra uma reta na qual foram escolhidos os números $0, 1$ tornando possível a representação de qualquer outro número inteiro e também dos racionais nos segmentos determinados entre dois inteiros.

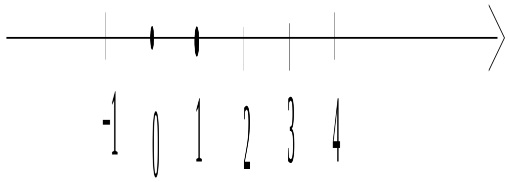


Figura 1: representação geométrica de $\mathbf{Q}$

Preconceito ? Os pontos, na reta numérica, representam números.

Mas na reta há "*pontos*" que não são racionais, por exemplo $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{n}$ quando n não for um quadrado perfeito e os gregos já sabiam disto. Então, quando n não for um quadrado perfeito, $\sqrt{n}$ *não é um objeto da aritmética* sendo definido como um *limite* duma sucessão de números racionais. São poucos os números *irracionais* que nós conhecemos, então dar um exemplo do que significa criar uma sucessão de números racionais que tenha limite e identificar este limite como um número é uma tarefa que não sabemos resolver... Como falei de $\sqrt{n}$ posso continuar com este exemplo para concretizar a linguagem. Há um algoritmo bem conhecido para calcular, aproximadamente, raízes quadradas, que é parecido com o algoritmo da divisão euclidiana. Sem entrar na descrição do algoritmo, deixe-me afirmar que em cada *ciclo* ele produz um número p_k que é construído a partir do anterior, p_{k-1}, pelo acréscimo de uma casa decimal tal que

Os gregos, e parece que antes deles os árabes, sabiam da existência dos números irracionais, embora não usassem a palavra irracional.

$$p_{k-1}^2 < p_k^2 < n \tag{3}$$

e sempre p_k é construído acrescentando-se o maior dígito a p_{k-1} que torne a equação (eq.3) verdadeira.

Ser limitada é diferente de ter limite!

Então a sucessão $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ é crescente e limitada, e posso demonstrar que tais sucessões tem limite.

k	p_k	p_k^2
0	1.4	power(p,2) = 1.96
1	1.42	power(p,2) = 2.0164
2	1.415	power(p,2) = 2.002225
3	1.4143	power(p,2) = 2.00024449
4	1.41422	power(p,2) = 2.0000182084
5	1.414214	power(p,2) = 2.000001237796
6	1.4142136	power(p,2) = 2.00000010642496
7	1.41421357	power(p,2) = 2.0000000215721449
8	1.414213563	power(p,2) = 2.000000001773154969
9	1.4142135624	power(p,2) = 2.00000000007609869376
10	1.41421356238	power(p,2) = 2.00000000001953015126

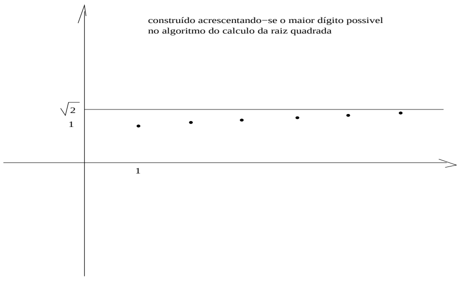


Figura 2: raiz, sucessão crescente

Na tabela você pode ver onze primeiros valores aproximando $\sqrt{2}$ produzidos por um programa. Observe que $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ cresce para o limite $\sqrt{2}$ mas que sucessão-imagem decresce para 2. Este é o resultado da construção do programa existe uma infinidadede representações, sucessões, do número irracional $\sqrt{2}$. A figura (fig 2), página 4, mostra os sucessivos valores da sucessão $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

Nada estranho, também existe uma infinidade de representações de qualquer número racional: *frações equivalentes.*

Você pode ver, na figura (fig. 3), página 4.

como se pode rebater a diagonal dum retângulo que mede $\sqrt{n}$ para o seu lugar na reta numérica, usando um compasso, e no meu programa de edição gráfica, o compasso é um círculo! Se for $n = m^2; m \in \mathbf{N}$ o resultado é o número racional m. Este algoritmo geométrico pode ser encontrado em [5, Capítulo 5].

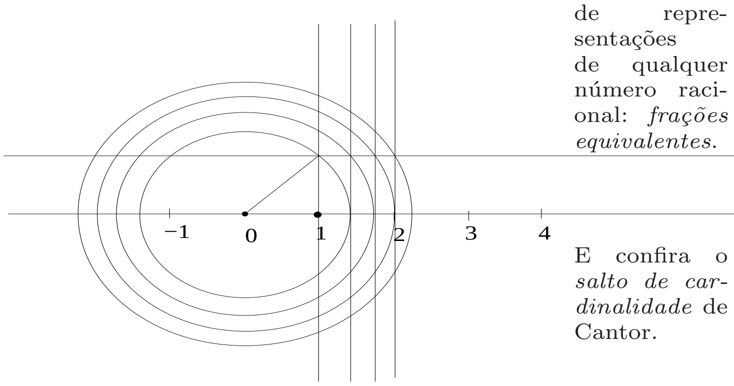


Figura 3: racionais marcados na reta

E confira o *salto de cardinalidade* de Cantor.

O salto entre *número aritmético* e *número real* representa frequentemente um grave problema de lógica que não pode encontrar uma discussão adequada dentro dos cursos de Cálculo: *estamos operando com os conjuntos da aritmética,* $\mathbf{Q}, \mathbf{Z}$*, lado à lado com o conjunto dos números reais,* $\mathbf{R}$ *que também tem uma estrutura algébrica semelhante à que existe em* $\mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ *mas sendo* $\mathbf{R}$ *um objeto produzido pela extensão de* $\mathbf{Q}$ *com um* operador *que não é aritmético: o limite.*

No curso de Cálculo não se consegue tratar deste problema porque ele foge do nível em que os estudantes se encontram no momento em que o Cálculo é estudado na Universidade.

Uma das contradições presentes nos livros de Cálculo é a *demonstração* das propriedades do *limite* que são simplesmente as propriedades do novo conjunto $\mathbf{R}$ criado com o operador *limite.* Se $\mathbf{R}$ foi definido como imagem do operador *limite* então simplesmente guarda as propriedades que tem a álgebra definida em $\mathbf{Q}$ e nada haveria que demonstrar! Seriam consequências da

O correto seria uma declaração da impossibilidade de demonstrar, mas ela fere construção, mas infelizmente esta não é feita, corretamente, sendo postergada para os cursos de "*análise*".

O conjunto de todos os números que completam **Q**, usando o operador lim, é o conjunto **R** dos números reais, e, naturalmente, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

A definição rigorosa de limite foi feita por Bolzano, depois redescoberta por Weierstrass:

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (|n > N| \implies |s_n - l| < \epsilon) \tag{4}$$

quando dizemos sucintamente que $s_n \to l$ ou também

$$\lim_{n=\infty} s_n = l \tag{5}$$

A igualdade com o símbolo ∞, na equação (eq. 5), é apenas uma maneira de indicar que n cresce indefinidamente.

A figura (fig 4), página 5, sugere o comportamento assintótico duma sucessão de pontos do plano, que, a partir do N-ésimo elemento, todos os elementos da sucessão se encontram dentro da bola $\mathcal{B}$.

A partir da *índice* N todos os pontos se encontram dentro duma bola de raio ϵ. Se você exigir mais precisão, um valor menor para ϵ, será preciso que N seja maior, comparando, seria preciso que um computador rodasse mais *tempo* para encontrar um valor mais preciso.

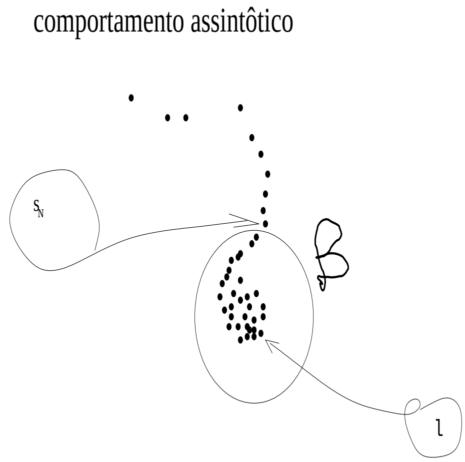


Figura 4: Pontos se acumulam numa bola

2.0.2 Mais exemplos

Existe um capítulo comum nos livros de Cálculo, em geral denominado como *limites notáveis* que lembra bem um tópico do Ensino Médio de Matemática, *os produtos notáveis*. São *notáveis* exatamente porque serão essenciais para a determinação de outras fórmulas, fora o fato de que em geral tem uma característica muito comum: difíceis...

1. Convergência para zero Se $s_n = \frac{1}{n}$ então, $\lim_n s_n = 0$. N na (eq. 4) é um número natural maior do que $\frac{1}{\epsilon}$. Se $\epsilon = 0.1$ então $N \geq 11$. Este exemplo é tão importante que vou reescrever a equação (eq. 4) para este caso:

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (|n > N| \implies |s_n| < \epsilon); \tag{6}$$
$$\epsilon = 0.1; n > 10 \implies |s_n| < 0.1; \tag{7}$$
$$s_{11} \approx 0.09090909090909090909 << 0.1; \tag{8}$$

que define a convergência para zero.

2. Convergência para zero Se $s_n = \frac{1}{n^2}$ então, $\lim_n s_n = 0$. N na (eq. 6) é um número natural maior do que $\frac{1}{\epsilon}$. Se $\epsilon = 0.01$ então $N \geq 11$. Observe a diferença com o exemplo anterior e objetivo é acrescentar importância aos dois exemplos. Agora, para o mesmo índice 11 a precisão do ϵ ficou aumentada. Com isto dizemos que $s_n = \frac{1}{n^2}$ *decresce mais rapidamente para zero*:

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (|n > N| \implies |s_n| < \epsilon); \tag{9}$$
$$\epsilon = 0.1; n > 10 \implies |s_n| < 0.01; \tag{10}$$
$$s_{11} \approx 0.00826446280991735537; < 0.01; \tag{11}$$

Também é uma sucessão que converge para zero, ou define o zero, pois zero é *apenas uma etiqueta* que marca todas as sucessões que convergem para zero.

3. Primeiro usando a aritmética $s_n = \frac{n+1}{n}$ então, $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ pelas regras da aritmética. Pelas propriedades do limite, confira o final do verbete, como $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ então $\lim_n \frac{n+1}{n} = 1$ e vale a mesma relação entre ϵ, N do exemplo (ex. 1).

4. Convergindo mais rápido para zero Se $n > m > 0$ então $\lim_k \frac{k^m}{k^n} = \lim_k \frac{1}{k^{n-m}}$ pelas regras da *aritmética*. Chame $p = n - m$, que é um número natural diferente de zero, então, para um inteiro k_0

$$\frac{1}{k_0^p} < \epsilon \iff \frac{1}{\epsilon} < k_0^p; \tag{12}$$
$$(\exists N \in \mathbf{N})\ (\tfrac{1}{\epsilon} < N \leq k_0^p); \tag{13}$$
$$(\exists N \in \mathbf{N})\ (\sqrt[p]{\tfrac{1}{\epsilon}} < \sqrt[p]{N} \leq k_0); \tag{14}$$
$$\sqrt[p]{\tfrac{1}{\epsilon}} < \sqrt[p]{N} \leq k_0 < k; \tag{15}$$
$$\frac{1}{\epsilon} < k^p \iff \frac{1}{k^p} < \epsilon; \tag{16}$$
$$(\forall k > \lceil \sqrt[p]{N} \rceil)(\tfrac{1}{k^p} < \epsilon) \tag{17}$$

O número $\lceil \sqrt[p]{N} \rceil$ é o menor inteiro que é menor ou igual a $\sqrt[p]{N}$.

Então qualquer número inteiro positivo, maior do que $\sqrt[p]{\frac{1}{\epsilon}}$, serve no lugar de N na (eq. 9). Considere $p = 2$, que o caso do exemplo (ex. 2), e $\epsilon = 0.01$ então

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon}} = \sqrt{100} \Rightarrow N \geq 11;$$

Basta colocar uma quantidade k de zeros para corrigir a desigualdade quando você usar um valor qualquer para k.

5. Quero saber se a sucessão $s_n = \frac{n^2+3n+7}{3n^2+5n+9}$ tem limite e se tiver qual é.

O primeiro passo é algébrico, desmembrar a expressão de s_n em limites conhecidos, os chamados *limites notáveis*:

$$\frac{n^2+3n+7}{3n^2+5n+9} = \frac{n^2}{3n^2+5n+9} + \frac{3n}{3n^2+5n+9} + \frac{7}{3n^2+5n+9}; \tag{18}$$
$$\frac{n^2}{3n^2+5n+9} \approx \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}\frac{n^2}{n^2} \approx \frac{1}{3}; \tag{19}$$
$$\frac{3n}{3n^2+5n+9} \approx \frac{3n}{3n^2} = \frac{3}{3n} = \frac{1}{n} \approx 0; \tag{20}$$
$$\frac{7}{3n^2+5n+9} \approx \frac{7}{3n^2} = \frac{7}{3}\frac{1}{n^2} \approx 0; \tag{21}$$
$$s_n = \frac{n^2+3n+7}{3n^2+5n+9} \approx \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{3}; \tag{22}$$

Na equação (eq. 18) o cálculo é algébrico, a fração do primeiro membro foi desmembrada numa soma de frações. É uma identidade algébrica.

Nas demais equações o cálculo é lógico, não são identidades algébricas, são equivalências do ponto de vista do limite. Por exemplo, na equação (eq. 19) posso dizer:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^2}{3n^2+5n+9} = \lim_{n=\infty} \frac{n^2}{3n^2} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}; \tag{23}$$

o uso do sinal de equivalência simplifica as expressões.

Analisando cada um dos exemplos, observe a diferença entre os exemplos 1 e 4.

- No exemplo 1 $N \approx \frac{1}{\epsilon}$,
- enquanto que no exemplo 4, $N \approx \sqrt[p]{\frac{1}{\epsilon}} < \frac{1}{\epsilon}$.
- usando a comparação do computador, no exemplo 4 o computador precisa rodar *menos tempo* para conseguir a mesma precisão obtida no exemplo 1. Dizemos que no exemplo 4 a sucessão converge mais rápido para zero do que no exemplo 1.
- no exemplo 4 também estão sendo comparados os polinômios k^n, k^m em que $n > m$. Numa fração em que o polinômio do numerador tiver grau menor do que o polinômio do denominador se tem convergência para zero. Se o grau do numerador foi maior do que o grau do denominador se tem "convergência" para ∞ e a maneira correta de falar é que se tem *divergência* porque ∞ não é um número.

Estes exemplos mostram alguns aspectos interessantes no estudo dos limites. O primeiro é um exemplo dos mais comuns e relativamente imediato e junto com os que lhe seguem, são exemplos da *classe do zero*, as sucessões que definem o número zero.

A importância da classe do zero é grande, o caso dos exemplos, (ex. 1), (ex. 2) e (ex. 3) mostram como precisamos de refinar a comparação para identificar sequências convergindo para zero quando tentamos descobrir qual é o limite duma sucessão.

A classe do zero é um grupo aditivo, quer dizer que se duas sucessões convergirem para zero, a soma delas também converge para zero. É mais do que um grupo, é um *ideal* de um certo anel, e volto logo a esta história.

É interessante observar, também, que a classe do 1 é um grupo multiplicativo! Quer dizer, se duas sucessões convergirem para 1 então o produto delas também converge para 1.

Atente para as afirmações anteriores, nelas está sendo dito que os números são apenas etiquetas que marcam classes de sucessões, ou talvez se devesse dizer, que os números <u>são</u> as classes de sucessões que eles marcam.

Nada extraordinário, os números racionais, as frações, são também classes de equivalência: $\frac{1}{3} \approx \frac{4}{12}$ ou $2 \approx \frac{6}{3}$.

É importante ter um estoque de exemplos de sucessões que definem inteiros ou números racionais porque nem sempre conseguimos calcular exatamente limites e uma saída consiste em encontrar um intervalo onde se encontre o limite estudado. Este "estoque" de limites conhecido é comumente referido como *limites notáveis*.

Foi isto que fiz ao estudar o o exemplo (ex. 3), usei o primeiro exemplo de uma forma que é preciso salientar:

- inicialmente foi usada a *aritmética* para que surgissem expressões cujos limites fossem conhecidos,
- depois foi produzido um *salto lógico*, usando as propriedades do limite (confira o final do verbete) para deduzir o limite da nova expressão que estava sendo estudada.

O *salto lógico* é o que caracteriza que o cálculo de limites não é uma operação da aritmética e neste cálculo podem aparecer entidades, como ∞, que não pertencem à aritmética...

No último exemplo *saltos lógicos* e *operações aritméticas* foram utilizadas para obter o valor do limite da sucessão. Este último exemplo é um caso simples mas lhe mostra tudo o que você precisa para calcular qualquer limite, apenas, acrescentando o uso de desigualdades para refinar o cálculo, mas, desigualdades fazem parte integrante da álgebra dos números reais, como somar ou multiplicar...

Um dos exemplos mais interessantes do uso repetido de operações aritméticas junto com saltos lógicos, é a determinação do número

$$e \approx 2.71828182845904523536; \tag{24}$$

que é apresentado na maioria dos livros de Cálculo, confira *limites notáveis* em qualquer livro ou, com certeza, no livro de Cálculo do Courant.

Os livros de Cálculo de Richard Courant se encontram hoje em domínio público e podem ser baixados de várias fontes.

O conjunto dos números reais, $\mathbf{R}$, é a completação do conjunto dos números racionais e uma das formas de *construir* o conjunto $\mathbf{R}$ consiste do seguinte *programa*:

Este "*programa*" precisa dos conhecimentos dum curso elementar de Álgebra homológica, a teoria dos ideais, basicamente.

- A imersão de $\mathbf{Q}$ no conjunto das sucessões de números racionais. Identificamos $\mathbf{Q}$ como um subconjunto do conjunto de todas as sucessões de números racionais associando-se $a \in \mathbf{Q}$ com a sucessão constante $s_n = a$ para todo $n \in \mathbf{N}$ e todas as sucessões "*equivalentes*" a esta. Vou chamar de $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as sucessões de números racionais, então $\mathbf{Q} \subset \mathcal{S}$.

- Restrição do conjunto de todas as sucessões ao conjunto das sucessões que satisfizerem ao critério de Cauchy. Dizemos que uma sucessão $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *é de Cauchy* se for verdadeiro

$$(\forall\epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ n, m > N \implies |s_n - s_m| < \epsilon \tag{25}$$

  Tais sucessões são *intrinsecamente* convergentes uma vez que a partir do índice N todos os termos da sucessão se encontram dentro da *bola* de centro s_n e raio ϵ. Isto significa, exatamente, que s_n é um *valor aproximado do limite*.

- Vou reutilizar a notação $\mathcal{S}$ para o conjunto de todas as sucessões de Cauchy de números racionais, então $\mathbf{Q} \subset \mathcal{S}$, porque uma sucessão constante satisfaz ao critério de Cauchy com qualquer valor estritamente positivo para ϵ.

- Podemos mostrar que $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ é um anel que tem divisores de zero, mas podemos eliminar os divisores de zero passando ao quociente com *grupo das sucessões que convergem para zero*, a classe do zero. Como este grupo é um *ideal maximal* de $\mathcal{S}$ o quociente é um corpo: o corpo $\mathbf{R}$ dos números reais.

Observe que a última ação pode parecer refinada, mas ela é comum com os números racionais desde o ensino fundamental quando se definem frações equivalentes... aqui o objetivo é o mesmo apenas com uma pintura algébrica.

Este programa, que é atribuído à Cauchy, é bem natural pese que considerado *avançado*, possivelmente pelos aspectos algébricos que envolve. Mas o que se espera dum número real é que ele seja uma sucessão de medidas convergentes. Desta forma $\mathbf{R}$ nada mais é do que o conjunto dos limites das sucessões de números racionais. Os limites são as etiquetas das classes quocientes mencionadas no *programa* acima. Como $\mathbf{R}$ é um corpo, acabei de "demonstrar" os teoremas básicos do limite, as propriedades do limite.

2.0.3 Propriedades do limite

- soma de limites é o limite da soma,
- produto de limites é o produto dos limites,
- produto dum limite por um número real é o produto deste número real pelo limite,

- como somente podemos dividir dois número reais se o segundo for diferente de zero, então o quociente de limites é o limite dos quocientes se o limite do quociente for diferente de zero.

enfim, as propriedades que o corpo dos números reais tem, e aqui que reside a dificuldade de provar as *propriedades do limite*, o que se está fazendo é, exatamente, construir o conjunto dos números reais...

O operador lim é um funcional linear! Valem todas as propriedades duma transformação linear. As propriedades do limite, são as propriedades dos números reais.

O número s_n, na equação (eq. 25) pode ser considerado um valor aproximado do limite da sucessão a menos do erro ϵ. Desta forma o critério de Cauchy é um *instrumento prático* para encontrar aproximadamente o limite duma sucessão quando ela for convergente e o critério de Cauchy serve para verificar se sucessão é convergente.

2.0.4 Infinitésimos

Até o começo do século passado havia uma palavra muito frequente em Matemática, *infinitésimos*. Os livros de Cálculo se chamavam *Cálculo integral e infinitesimal* em que os *infinitesimais* eram as sucessões convergindo para zero. Quer dizer, as sucessões que definem o zero.

Foi preciso passar muito tempo até que os matemáticos compreendessem o simples que era: apenas uma classe de equivalência, a classe de equivalência do zero. O exemplos 1 e 4 trazem dois elementos desta classe e o que atrapalhava mesmo a compreensão é que se dividirmos o "zero" $\frac{1}{k^m}$ pelo "zero" $\frac{1}{k^n}$ o resultado pode ser "zero" ou ∞, dependendo se o maior grau estiver ou não, no denominador. Hoje apenas dizemos que são elementos com ordem de grandeza diferentes e a palavra *infinitésimo* está, *cuidadosamente*, guardada na história da Matemática. E também ninguém deve dividir por zero... pode dar problema!

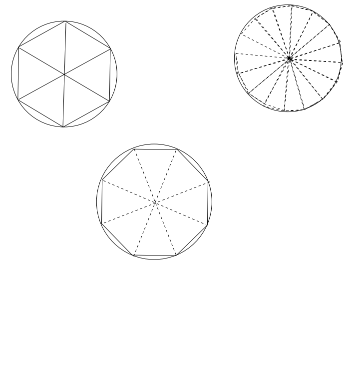
Confira também *limite superior, limite inferior*

3 A integral de Riemann

- **integral de Riemann** A integral é uma generalização dos conceitos *área* e *volume* da geometria. Vou me referir à área, mas praticamente tudo que disser vale para volume.

Um exemplo mostra a ideia da *integral de Riemann* que é usada no Cálculo em oposição a um método mais avançado que é a *integral de Lebesgue*.

A figura (fig 3), página 9, mostra três polígonos regulares numa ordem crescente do número de lados e então, substituir a área do círculo pela área destes polígonos é um processo de aproximação. Quanto maior o número de lados, mais exata fica a aproximação.



Para calcular a área dos polígonos se os divide em triângulos, e sendo regulares os polígonos suas áreas são o múltiplo por n, o número de lados, pelo produto $\frac{b_n a_n}{2}$ em que b_n é o lado do polígono, a_n é o apótema. Quando o número de lados aumenta, a sucessão a_n cresce mas é limitada pelo raio do círculo, R. Embora o lado decresça para zero, a soma das áreas continua crescendo e para um valor fixo de n posso escrever

$$A_n = n\frac{b_n a_n}{2} = \frac{nb_n a_n}{2} = \frac{P_n a_n}{2}; \tag{26}$$

e agora tenho na equação (eq.26) um produto de sucessões crescentes, P_n, a_n evitando a presença duma sucessão que converge para zero.

Neste ponto foram usadas duas metodologias básicas no calculo de limites:

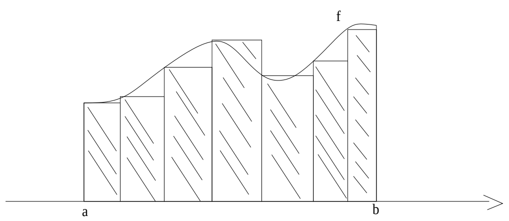
Dois princípios	1. Fazer todas as possíveis transformações aritméticas antes de aplicar o operador limite. Observe que na equação (eq.26) todas as igualdades são de natureza aritmética. 2. Evitar, sempre que possível, sucessões que convirjam para zero.

Como na equação (eq.26) tenho um produto de sucessões crescentes, resulta o produto numa nova sucessão crescente, e limitada porque os polígonos se encontram dentro dum envolvida e um teorema da geometria nos diz que área da envolvida é menor do que área da envolvente, o círculo. O perímetro da envolvente, $2\pi R$ é maior do que perímetro P_n da envolvida então esta última sucessão é crescente e limitada sendo o seu limite $2\pi R$ sendo a conclusão que a área do círculo é o limite da sucessão na equação (eq.26)

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_n}{2} a_n = \frac{2\pi R}{2} R = \pi R^2; \tag{27}$$

Neste cálculo usei, como já disse, uma técnica de limite pela qual se evitam sucessões convergindo para zero. Também usei desigualdades, mas essencialmente usei a propriedade que sucessões limitadas e crescentes tem limite.

No cálculo da integral se tem que evitar sempre uma sucessão que converge para zero como vou mostrar no próximo exemplo. Vou calcular a integral da função polinomial, $f(x) = x^2$, no intervalo $[0, 1]$. A figura (fig 3), página 10,



Aproximação da integral com áreas de retângulos

mostra a motivação geométrica. Subdividimos o intervalo sobre o qual queremos calcular integral em n partes iguais produzindo uma soma que se chama *soma de Riemann uniforme* em oposição aquelas em que a divisão é feita em subintervalos de tamanho variado. Se pode provar que, se a integral existir então a convergência via somas de Riemann uniformes ou não é a mesma: o limite é comum. Uma classe de funções, as contínuas, têm esta propriedade e $f(x) = x^2$ é uma função contínua. Então posso aplicar no cálculo da integral as somas de Riemann uniformes.

E tem integrais que não existem!

$$\Delta x = \tfrac{b-a}{n} = \tfrac{1-0}{n} = \tfrac{1}{n}; \tag{28}$$

$$I = \int_0^1 x^2 dx \approx \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x; \tag{29}$$

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \Delta x^2 \Delta x; \tag{30}$$

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \Delta x^3 = \Delta x^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \tfrac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2; \tag{31}$$

Na equação (eq.31) se tem a soma dos quadrados n primeiros números naturais, confira somas notáveis, e nós sabemos calcular esta soma sendo o seu resultado

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{32}$$

que substituindo na (eq.31) nos dá

$$\tfrac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \tfrac{1}{n^3}\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \tfrac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \tag{33}$$

$$\tfrac{2}{6} + \tfrac{3}{6n} + \tfrac{1}{6n^2}; \tag{34}$$

Na última equação apliquei novamente o primeiro dos *dois princípios básicos do limite*-3, acima listados: a equação (eq.34) foi obtida da equação anterior (eq.33) por operações aritméticas. A igualdade entre elas é da aritmética. Vou aplicar o operador limite à (eq.34) onde tenho uma sucessão constante, $\frac{2}{6}$, cujo limite é o valor constante, e duas sucessões decrescentes e limitadas pelo zero. Elas convergem para zero, então

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{6} + \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \tag{35}$$

que é o valor da integral.

Ficou uma contradição *e as contradições são saudáveis* porque no final eu usei duas sucessões que convergem para zero quando no enunciado dos dois princípios 3 está explicito *evitar sempre que possível* sucessões que convirjam para zero, mas é sempre que possível e no final eu precisei de sucessões que convirjam para zero: elas são inevitáveis!

O cálculo da integral das funções polinomiais é simples de ser feito uma vez que repousa essencialmente em dois resultados:

1. *a soma dos termos duma sucessão polinomial imagem duma sucessão aritmética, é dada por outra sucessão polinomial em que as duas diferem de um grau.*

2. o binômio de Newton.

Isto permite construir a teoria do cálculo de integrais de forma completa quando restringida às funções polinomiais e depois simplesmente estender estas propriedades às integrais das outras funções. Inclusive o teorema crucial, que é o *Teorema Fundamental do Cálculo* fica trivializado e intuitivo neste método.

Teorema **1 (Fundamental)** *do Cálculo*

$$\int_a^x t^p dt = \frac{t^{p+1}}{p+1}\Big|_a^x \tag{36}$$

Dem *: As somas de Riemann uniformes produzidas por esta integral contem somas de sucessões aritméticas elevadas à potência p cujo resultado é obtido por um polinômio de grau $p+1$.*

Todos os termos da expressão terão limite zero, exceto o primeiro cujo coeficiente é $\frac{1}{p+1}$ que vem do segundo termo do binômio de Newton. Este termo que resta é o que se encontra no segundo membro da expressão do Teorema Fundamental do Cálculo.

q.e.d .

Este teorema vai ser completado dentro do desenvolvimento do conceito de derivada.

3.0.5 Malba Tahan e o xadrez

No célebre livro de Malba Tahan, *O homem que calculava*, ele nos conta a lenda da invenção xadrez quando um *golpista-real* recuperado de sua profunda depressão reencontra a alegria de viver com o invento do xadrez. Para recompensar o inventor *a sua real golpeza* lhe propõe que escolha o presente que desejar quando sugere que entre os *itens* poderiam entrar uma ou mais das belas mulheres da corte que eram então vistas como simples material de consumo na ótica do *golpe real*, e para sua chateação o inventor lhe pede apenas que lhe sejam concedidos graus de trigo numa progressão geométrica cujo soma eu obtive usando `calc` instalado na minha máquina Debian/Gnu/Linux executando as operações:

$$
\begin{aligned}
soma &= 0; k = 0; && (37)\\
while(k &< 64)\{ && (38)\\
&\qquad soma = soma + power(2,k); k++; && (39)\\
\} & && (40)\\
&\qquad print\ soma \rightarrow 18446744073709551615; && (41)
\end{aligned}
$$

$$\frac{2^{64}-1}{2-1} = 18446744073709551615 \tag{42}$$

e na última equação se encontra fórmula para o cálculo da soma dos termos duma p.g. com o valor também calculado com `calc`.

O *real golpista*, aborrecido com o pedido sem graça que lhe havia feito o matemático, inventor do xadrez, ordenou ao *golpista ministro da fazenda* que entregasse o trigo solicitado ao inventor, mas para aumentar o seu aborrecimento fica sabendo que nem os navios do reino com apoio dos navios dos reinos amigos, teriam capacidade para transportar a quantidade de trigo solicitada, o que aborreceu profundamente quando lhe veio em ajuda o *golpista matemático oficial do reino* propondo uma negociação ao inventor:

Aqui eu estou completando a história de Malba Tahan!

–*Continuamos a p.g. geométrica indefinidamente?*

propôs o *serviçal golpista*. Sem perceber que havia um golpe por trás da oferta magnânima, o inventor concordou e acompanhou as contas que o *matemático golpista* produziu com giz branco num *quadro negro* pendurado à parede

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} + \cdots &= J; && (43)\\
J &= 1 + 2(1 + 2 + \cdots + 2^{62} + 2^{63} + \dots) && (44)\\
J = 1 + 2J \ \Rightarrow\ -J &= 1 \ \Rightarrow\ J = -1; && (45)
\end{aligned}
$$

ficando inventor com a dívida de um grão de trigo ao *real golpista* e não tendo trigo foi condenado à morte.

Vou terminar esta seção usando o método de Malba Tahan para demonstrar que *uma importante integral não existe* e é importante porque envolve a função $f(x) = \frac{1}{x}$, um tópico central na construção do Cálculo conduzindo à definição do logaritmo e sua propriedades, e como consequência a definição da exponencial e suas propriedades.

Há integrais que não existem e é o caso da integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ se considerarmos um intervalo contendo o zero como mostra a figura (fig. 5), página 14.

Vou calcular a integral desta função incluindo o zero no domínio de integração e usar o método de *Malba Tahan* para chegar a uma contradição. Confira o que vai acontecer.

$$f(x)=\frac{1}{x}; J=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}; \tag{46}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\Delta x=0}\sum_{k=1}^{n} f(k\Delta x)\Delta x; \tag{47}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k\Delta x)\Delta x; \Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}; \tag{48}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n})\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}; J=\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}; \tag{49}$$

Seguindo Malba Tahan:

$$J=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}; I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}; P=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}; \tag{50}$$

$$J=1+I+P; -J+I+P=-1 \tag{51}$$

$$J=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k}=1+\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k+1}); \tag{52}$$

$$J=1+\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k+1}); \tag{53}$$

$$J=1+\frac{J}{2}+I; 2J=2+J+2I; -J+2I=-2; \tag{54}$$

$$P+2=2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=2+\frac{J}{2}; \tag{55}$$

$$\frac{J}{2}-P=0; J-2P=0; \tag{56}$$

Triangularizando o sistema tenho:

$$\begin{cases} -J+I+P=-1; \\ -J+2I=-2; \\ J-2P=0; \end{cases} \tag{57}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J \\ I \\ P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J \\ J-I \\ 2J-I+P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$2J-2I+P=-1; J+P=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} J-2I=-2 \;\Rightarrow\; I=\frac{2+J}{2}; \tag{60}$$

$$2(J-I)+P=-1; J>I \;\Rightarrow\; J-I>0 \tag{61}$$

$$\begin{cases} J-I>0; \\ 2(J-I)+P=-1 \end{cases} \Rightarrow P=-1-2(J-I)<0; \tag{62}$$

O determinante do sistema é zero mas a última linha permite que ele seja consistente a equação (eq. 60) foi obtida aplicando a matriz diagonalizada à matriz de variáveis permitindo escrever I, P em função de J, o sistema é consistente com grau de liberdade 1.

A equação (eq. 61) foi obtida da (eq. 60) e como I é uma parte da soma J em que todas as parcelas são números positivos então $J > I$ ou equivalentemente $J - I > 0$ conduzindo à equação (eq. 62) cuja conclusão é falsa, $P < 0$, mas implicação é verdadeira, porque P sendo uma soma de números positivos não pode ser negativo. Cheguei a uma contradição!

Todas as operações que seguem à hipótese construída com o *método Malba Tahan* foram obtidas por aplicação das leis da aritmética e cheguei a afirmação falsa.

A conclusão é que foi introduzida uma premissa falsa levando à contradição contida na equação (eq.62) sendo esta a suposição de que J, I, P são números, e é isto é falso, e consequentemente a conclusão é de que J não é um número e portanto a integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \tag{63}$$

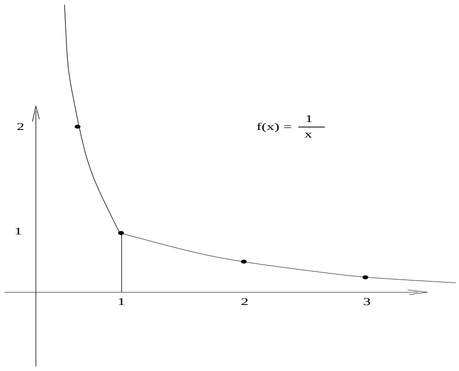


Figura 5:

não existe.

O truque do *matemático golpista* e antiético como o são muitos técnicos e cientistas que aceitam fraudar a ciência e o sistema como querem fazê-lo com a Previdência, com a Petrobras, e já fizeram com a Vale do Rio Doce, com as Teles e a Energia Elétrica para atender o golpe de dia.

O *matemático golpista* introduziu na equação (eq.43) um ente não aritmético ao qual aplicou, na equação (eq.44), a lei da distributividade da multiplicação relativamente à soma, conhecida neste caso como *colocar em evidência* o 2.

A equação (eq.44) tornou-se assim falsa assim como o resultado que dela decorre: $J = -1$; É o mesmo golpe que dei na equação equação (eq.50) quando defini também os entes não aritméticos, J, I, P aos quais apliquei a lei da distributividade da multiplicação relativamente à soma, neste caso colocando $\frac{1}{2}$ em evidência, ilegalmente, para identificar J na equação seguinte obtendo uma falsa *soma de Riemann* para usar como o limite e assim definir a integral que não existe.

Então a integral $\int_0^1 f(x)dx$ não existe, não é um número. Uma integral do tipo $\int_a^b f(x)dx$, se existir, é um numero.

4 Complementando a aritmética de R

O *golpe aritmético* que conduziu a contradição da existência da integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ consistiu em supor que uma série divergente era um número, como também no caso da história da invenção do xadrez.

Na seção 2 eu afirmei que o conjunto dos números reais não é um ente aritmético, o que é verdade. Mas no processo de construção dos números reais, que o Cálculo não consegue fazer por razões diversas de exequibilidade do programa, passamos a usar as leis da aritmética estendidas ao conjunto dos números reais. A justificativa disto são exatamente as propriedades do limite, tais como "*limite da soma, é a soma dos limites*". Ao provarmos estas propriedades se está estendendo ao conjunto dos números reais as leis da aritmética.

Assim, se uma série for convergente é possível aplicar-lhe as leis da aritmética como as leis da distributividade, *comutatividade* e *associatividade*.

A associatividade exige uma condição extra: a série tem que ser incondicionalmente convergente ou *absolutamente convergente* como mostra o contraexemplo da série harmônica:

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}; \tag{64}$$

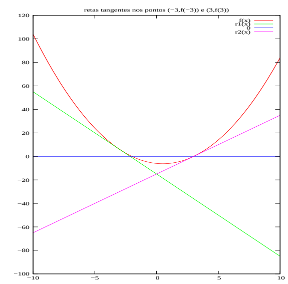
$$J = I - P; \tag{65}$$

em que estou reutilizando a notação da equação (eq.3.57). Na equação (eq.4.64) está a série harmônica, que é convergente, mas não é absolutamente convergente.

Aplicando a associatividade à série harmônica se conclui que ela é a soma de duas séries divergentes. Como a série harmônica é convergente, este exemplo mostra que aplicar-lhe à associatividade é ilegal.

5 O operador derivada

- **derivada** Se uma função real $y = f(x)$ de variável real tiver retas tangentes ao seu gráfico numa vizinhança do ponto a, então se diz que f é diferenciável em a e o coeficiente angular da reta tangente ao ponto $(a, f(a))$, designado com o símbolo $f'(a)$, é a *derivada* de f no ponto a. A função $y = f'(x)$ que fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ se chama derivada de f.



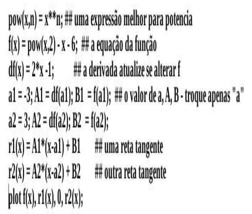
A figura (fig. 5) mostra as tangentes ao gráfico da função $y = f(x) = x^2 - x - 6$ em dois pontos escolhidos no gráfico.

A derivada é um *operador*. Algumas vezes identificamos a derivada com a letra D e há ainda diversas outras notações que vou apresentar aos poucos. Quer dizer que $D(f) = f'$ é uma nova função, a "derivada" de f.

Com a palavra *operador* evitamos de dizer "uma função que transforma uma função noutra função".

Confira também o conceito de *tangência* está sendo implicitamente usado na definição de derivada.

`gnuplot` é um programa para fazer gráficos e ele entende um pouco de Matemática, posso fazer algumas operações algébricas com ele. Os gráficos na figura (fig 5), página 15, foram feitos com `gnuplot` para ilustrar a frase anterior. A figura (fig. 6), página 15, lhe mostra o programa escrito em gnuplot que eu rodei.



```
pow(x,n) = x**n; ## uma expressão melhor para potencia
f(x) = pow(x,2) - x - 6;  ## a equação da função
df(x) = 2*x -1;        ## a derivada atualize se alterar f
a1 = -3; A1 = df(a1); B1  = f(a1);  ## o valor de a, A, B - troque apenas "a"
a2 = 3; A2 = df(a2); B2  = f(a2);
r1(x) = A1*(x-a1) + B1      ## uma reta tangente
r2(x) = A2*(x-a2) + B2      ## outra reta tangente
plot f(x), r1(x), 0, r2(x);
```

Figura 6: um script do `gnuplot`

Se você souber calcular a derivada de f você pode fazer experiências com este programinha do `gnuplot`. O objetivo lhe mostrando logo este programa é o de traduzir o poder da derivada. Se você souber calcular a derivada de uma função então você tem o poder de colocar uma reta tangente ao gráfico de f em qualquer ponto que você desejar.

Se você souber calcular a derivada de uma função pode imediatamente usar este programa para fazer gráficos de funções. Raspe, cole, e se divirta! Se ainda não souber calcular derivadas, aguarde um pouco que até o final deste texto você verá como calcular algumas derivadas.

Observe que $r_1(x)$ é a equação de uma reta apenas os coeficientes A_1, B_1 foram calculados usando $f(a)$, o coeficiente angular da reta foi calculado usando a derivada $f'(a)$. Este é o significado da derivada: $f'(a)$ é coeficiente angular instantâneo do gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Leia "coeficiente angular instantâneo" como "coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto".

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ se deduz direto da equação da reta que passa no ponto $(a, f(a))$ e tem coeficiente angular $\underline{m}$

$$y = P(x) = b + m(x - a); \tag{66}$$

$$(a, b) = (a, f(a)); m = f'(a); \tag{67}$$

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a); \tag{68}$$

que é a expressão do *polinômio de Taylor* do primeiro grau desenvolvido no ponto x=a.

Para que você entenda melhor esta questão do *coeficiente angular instantâneo* um exemplo da Física é bem instrutivo. Considere a seguinte situação, representada no gráfico da figura (fig 7), página 16. Neste gráfico estou simulando o que aconteceria se eu estivesse rodando uma pedra presa a um cordão que se quebrasse num determinado instante. A pedra em movimento, enquanto presa à minha mão pelo cordão, muda de direção a cada instante. Mas quando o cordão se quebra ela se mantém numa direção fixa, a da tangente. Obviamente que em seguida ela vai mudar de direção porque passa a ficar presa à Terra pela força de gravidade. Mas, se não houvesse a *força de gravidade*, então, sim, ela seguiria por uma reta - *movimento uniforme não acelerado* como diz a Física.

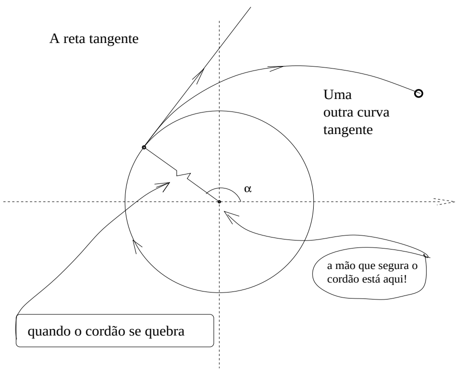


Figura 7: o cordão se quebra, a reta sai pela tangente

A verdade é que, em todo o Universo, não existe um só corpo em *movimento uniforme não acelerado*, todos os corpos sofrem a ação da gravidade dos outros corpos no Universo e assim em todo o Universo não existe uma única reta... mas na Geometria Euclidiana existem retas e é duma reta da *Geometria Euclidiana* que estou fazendo uso para discutir a *derivada.*

Observe que neste simples exemplo, estou sugerindo que Geometria Euclidiana, que parece tão concreta, na verdade é uma grande *abstração* da mente humana.

Retornando à figura (fig 7), o coeficiente angular da reta que ali aparece, é a derivada do círculo naquele ponto. Você pode ver logo aqui um método geométrico para o cálculo de derivadas:

- coloque uma régua tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$,
- para fazer gráficos, necessariamente, você tem um sistema de eixos definidos, o sistema está com um referencial numérico estabelecido,
- calcule o coeficiente angular, m, desta reta, usando os dados do sistema de eixos, desenhe um triângulo retângulo apropriado em que a reta passa pela hipotenusa.
- $f'(a) = m$.

Outra vez usando `gnuplot`, com os comandos que aparecem na figura (fig. 6), página 15, que você pode raspar e colar num terminal do `gnuplot`.

Você pode repetir a figura (5), página 15, em que está representada a reta tangente ao gráfico de $f(x) = (x+3)(x-5)x$ no ponto $(4, f(4))$. Apenas trocando valor de $\underline{a}$ você pode obter gráficos de outras retas tangentes ao gráfico desta mesma função ou outra de sua escolha (redefina f e *df* no programa), escolha distintos valores para a e repita o comando `plot` para ver tangentes em diversos pontos do gráfico. Por exemplo, raspe e cole num terminal do gnuplot o programa que aparece na figura (fig 6), página 15, e você vai ver sucessivos gráficos de retas tangentes ao gráfico da função $y = f(x)$. Você pode baixar programas semelhantes ao que aparece na figura (fig 7) da página

`http://www.calculo.sobralmatematica.org/programas/` procure programas com extensão `.gnuplot`.

Até este momento adotei um ponto de vista que pode ser constrangedor para você, leitora. Estou usando a derivada, e supondo que você já sabe derivar, mas eu lhe pedi que aceitasse esta forma de comunicação com paciência, e agora vou mostrar-lhe o caminho para aprender a derivar. Vou ser resumido do contrário eu iria escrever um capítulo do livro de Cálculo, e não é este o objetivo aqui. Você pode ler o livro de Cálculo na biblioteca, aqui estou apenas tentando estimulá-la a fazer isto.

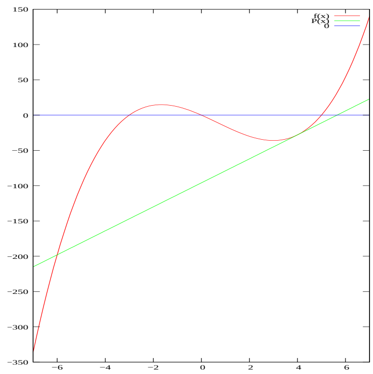


Figura 8: Reta tangente

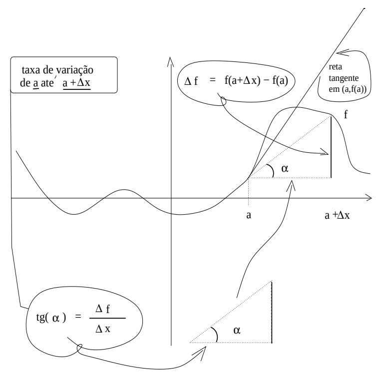
A definição da derivada para funções reais

A derivada mede uma taxa de variação instantânea, portanto um *cálculo de limite*. Mas deixe-me começar do começo, taxa de variação quer dizer um quociente de diferenças que você pode ver indicado no gráfico na figura (fig 5), página 17. Este quociente representa a taxa de variação de f no intervalo $[a, a + \Delta x]$.

Os símbolos $\Delta y, \Delta x$ representam diferenças.

O quociente entre duas diferenças:

$$y = f(x); \Delta_a(f) = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad (69)$$



é a tangente do ângulo α no triângulo retângulo que você pode ver na figura (fig 5).

Mas eu quero o coeficiente angular da reta tangente no ponto $(a, f(a))$ que é $f'(a)$. Se a curva $graf(f)$ fosse a trajetória de uma nave que fosse liberar no ponto $(a, f(a))$ um foguete, este foguete seguiria pela reta tangente com coeficiente angular $f'(a)$. É uma *situação semelhante* a da pedra presa ao cordão que se quebra na figura (fig 7).

Eu vou agora mostrar-lhe o cálculo deste limite.

Dada uma função $y = f(x)$ posso aplicar-lhe o operador diferença caracterizado pelo símbolo Δ, seguido do operador *quociente* para o qual não há um símbolo padrão. A sequência de operações é esta:

$$\Delta_{a,h}(f) = f(a + h) - f(a) \quad (70)$$

$$Q_{a,h}(f) = \frac{\Delta_a(f)}{h} \quad (71)$$

$$\lim_{h=0} Q_{a,h}(f) = f'(a) \quad (72)$$

Se eu souber o significado da última linha, calculei a derivada. Para "decifrar" a última linha algumas vezes é preciso muito prática. Entretanto, salvo alguns casos muito especiais que inclusive são chamados de *limites notáveis* a grande maioria dos casos simples do dia-a-dia são resolvidos com as regras de derivação descritas abaixo e mais um banco de derivadas conhecidas, *e alguma prática de cálculo...*

Um exemplo simples

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2 (A derivada da função)** $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$\boxed{\textbf{Dem}}$: *vou calcular esta derivada usando quociente de diferenças seguido do limite. Acompanhe a sequência de operações para a qual vou fazer uma legenda em seguida, e você pode saltar da legenda para a sequências de operações para procurar entender as passagens.*

$$f(x) = x^3; \Delta_{a,h}(f) = f(a+h) - f(a) = 3a^2h + 3ah^2 + h^3; \tag{73}$$

$$Q_{a,h}(f) = \frac{\Delta_{a,h}(f)}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2; \tag{74}$$

$$\lim_{h=0} Q_{a,h}(f) = 3a^2 = f'(a) \tag{75}$$

- *Na equação (eq. 73) calculei a diferença com auxílio do triângulo de Pascal, confira no* triângulo *a linha de ordem 3, cancelei o termo em a^3 quando subtrai $f(a)$;*
- *Na equação (eq. 74) calculei o quociente de f no ponto a com a diferença h. No quociente $Q_{a,h}(f)$ as potências de h caíram de uma unidade, ficando um termo livre de h.*
- *Na equação (eq. 75) calculei o limite de $Q_{a,h}(f)$ quando $h = 0$ que neste caso é simples, os termos que tem h se anulam. Resta o termo que não tem h com a conclusão $f'(a) = 3a^2$.*

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Para todas as funções polinomiais é assim simples, o cálculo vai ter mais termos e ficar um pouco mais complicado de fazer a redação, mas tem alguns truques redacionais que vou mostrar-lhe.

Considere apenas $f(x) = x^n$ e confira que é semelhante ao caso acima. A diferença é calculada com a linha de ordem n do triângulo de Pascal que começa com a^n seguido de $\binom{n}{n-1}a^{n-1}h$ e termina com h^n. Coloque reticências no meio que é tudo "irrelevante". Se convença!

Quando calcular $\Delta_{a,h}(f)$ vai se cancelar o termo de maior grau, em a ficando de $\binom{n}{n-1}a^{n-1}h$ e terminando com h^n. Coloque reticências no meio que é tudo "irrelevante". Se convença!

$$\binom{n}{n-1}a^{n-1}h = na^{n-1}h$$

Quando calculei o quociente $Q_{a,h}(f)$ caíram de uma unidade todas as potências de h ficando de na^{n-1} e terminando com h^{n-1}. Coloque reticências no meio que é tudo "irrelevante". Se convença!

Quando eu *passar ao limite quando* $h = 0$ todos os termos, exceto o primeiro, na^{n-1} se anulam. Conclusão:

$$f(a) = a^n \Longrightarrow f'(a) = na^{n-1}$$

que é a regra de derivação da enésima potência.

Logo você vai ver as regras de derivação, abaixo, e como calcular a derivada de um polinômio qualquer.

O cálculo da derivada

A derivada não é uma operação aritmética, ela é o resultado da aplicação do *operador limite* a uma sucessão de *quocientes de diferenças* isto torna pouco provável que se consiga implementar a derivação em *Computação Algébrica* ou seja "calcular a derivada automaticamente com um programa de computador".

Você pode ver facilmente que procede o que foi dito no parágrafo anterior analisando as contas que fiz para determinar a derivada de $f(x) = x^n$. Observe a passagem da equação (eq. 76) para a equação (eq. 77) . Não foi uma passagem algébrica, houve um *salto lógico* que se traduziu na frase "todos termos que contém h se anulam exceto o primeiro". Este raciocínio não é algébrico e nós apenas sabemos dizer que *aplicamos o operador limite* $\lim\limits_{h=0}$. Sabemos fazer este cálculo, mas não sabemos traduzi-lo com um algoritmo o que torna impossível, no momento pelo menos, traduzir esta passagem para um programa de computador.

Ainda assim os programas de *Computação Algébrica* conseguem calcular derivadas de forma mais efetiva que nós humanos ao aplicar as regras do Cálculo para diferenciação que se podem resumir nas seguintes:

- A derivada de uma função constante é zero.
- Se uma função for linear ela é a sua própria função linear tangente portanto a derivada de uma função linear é ela mesma. Aqui há um problema de interpretação, deixe-me apresentar em símbolos o que acabei de dizer:

$$f(x) = ax; f'(x) = a; \tag{76}$$
$$g(x) = ax + b; g'(x) = a; \tag{77}$$

  e explicando as contas:

  - Na equação (eq.76) estou identificando a função linear $f(x) = ax$ com o coeficiente angular $\underline{a}$. O que caracteriza uma equação linear é o coeficiente multiplicativo e a derivada é o coeficiente angular no caso univariado o que justifica a equação (eq.76).
  - A gráfico da função $g(x) = ax+b$ é uma reta paralela ao gráfico da função $f(x) = ax$ então os coeficientes angulares das duas é o mesmo $\underline{a}$ o que justifica a equação (eq.77).

- <u>derivada da soma</u> Se f e g forem deriváveis, então $f+g$ é derivável e

$$(f+g)' = f' + g'. \tag{78}$$

  É repetição da equação (eq. 70) e seguintes, confira:

  $\boxed{\textbf{Dem}}$:

$$F = f + g; \Delta_{a,h}(F) = f(a+h) - f(a) + g(a+h) - g(a) \tag{79}$$
$$Q_{a,h}(F) = \frac{\Delta_a(f)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)+g(a+h)-g(a)}{h} \tag{80}$$
$$Q_{a,h}(F) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \tag{81}$$
$$Q_{a,h}(F) = Q_{a,h}(f) + Q_{a,h}(g) \tag{82}$$
$$\lim_{h=0} Q_{a,h}(f) = f'(a) + g'(a) \tag{83}$$

  Da penúltima equação se dá um salto que não é aritmético, é o cálculo do limite, em que passei duma equação para a outra, silenciosamente, usando o limite. $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

- <u>derivada do produto</u> que se f, g forem duas funções diferenciáveis, então

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{84}$$

  Para demonstrar esta fórmula é preciso um pequeno e velho truque, somar e subtrair o mesmo termo apenas tendo o cuidado que seja o termo adequado.

  $\boxed{\textbf{Dem}}$:

$$\Delta_{a,h}(fg) = f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) = \tag{85}$$
$$= f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a) = \tag{86}$$
$$Q_{a,h}(fg) = \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = \tag{87}$$
$$\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)}{h} + \frac{f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}; \tag{88}$$
$$Q_{a,h}(fg) = g(a+h)\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}; \tag{89}$$
$$(fg)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a) \tag{90}$$

Na equação (eq.86) somei e subtrai o mesmo termo. Na equação (eq.87) escrevi o quociente da soma que depois separei em soma de quocientes, na equação (eq.88). Na equação (eq.89) tive o cuidado de retirar do numerador, em cada uma das frações, um termo que podia ser posto em evidência transformando-as em produtos em que, um dos termos tem como limite uma derivada, e o outro o valor de f ou de g no ponto a. Até aqui operações aritméticas. Como cada termo tem limite, vale a regra "limite do produto é o produto do limite" em que, silenciosamente, transformei a equação (eq.89) na equação (eq.90). Esta última passagem não é aritmética, faz parte da extensão da aritmética ao conjunto dos números reais. $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

- derivada de uma função multiplicada por um número está contida na primeira regra e na regra da derivada do produto, mas merece destaque. Se r for um número, e se f for derivável, então $(rf)' = rf'$. Aplique a derivada do produto e você verá que obtém esta regra.

- derivada de funções polinomiais é a iteração da derivada da soma e da multiplicação por uma constante às derivadas dos monômios $f(x) = x^n$, $f'(x) = n * x^n$ para funções reais de variável real (ou complexa);. É uma aplicação direta do operador diferença ao monômio $f(x) = x^n$ seguido do cálculo do limite.

  Para um polinômio qualquer se aplica a regra da soma de derivadas, e para cada um dos monômios da soma, $a_k x^k$ se aplica a regras derivada da multiplicação pelo número real a_k.

- derivada da $\frac{1}{f}$

$$\frac{\frac{1}{f(a+\Delta x)} - \frac{1}{f(a)}}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(a+\Delta x)}{\Delta x f(a+\Delta x) f(a)} = \frac{\frac{f(a)-f(a+\Delta x)}{\Delta x}}{f(a+\Delta x) f(a)} \tag{91}$$

  na última equação tanto o numerador como denominador têm limite e o limite do denominador é diferente de zero então podemos aplicar o operador limite $\lim \Delta x = 0$ tendo por resultado

$$(\frac{1}{f}(a))' = \frac{f'(a)}{f(a)^2} \tag{92}$$

- derivada do quociente quando $g(x)$ não se anular no ponto a, então numa vizinhança de a

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

- a regra da cadeia, a derivada da função composta, que se f, g forem duas funções diferenciáveis e se a composta $f(g(x))$ existir então

$$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

  A regra da cadeia se aplica *ipsis literis* em qualquer dimensão em que as compostas estejam definidas.

Estas regras junto com *um banco de derivadas conhecidas* permitem que os programas de Computação Algébrica calculem derivadas de forma muito mais efetiva que o ser humano sugerindo a existência de *inteligência artificial.*

Uma alternativa à Computação Algébrica é a diferenciação algorítmica que tem conseguido alguns avanços, mais ainda não se pode comparar com as possibilidades da Computação Algébrica, e como esta, esbarra no salto lógico entre operações aritméticas e operador limite.

Dois exemplos, um deles difícil

Mostro-lhe um exemplo, aliás, dois:

- Uma derivada difícil: $f(x) = \sin(x)$; $f'(x) = \cos(x)$; Esta derivada é obtida com uma desigualdade geométrica e mais algumas propriedades do limite.

- Mas $\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$;

- $g(x) = \cos(x)$; então posso calcular $g'(x)$ usando uma propriedade da trigonometria, junto com a derivada do sin.

$$g'(x) = \lim_{h=0} Q_{x,h}(g); \tag{93}$$

$$Q_{x,h}(g) = \frac{\cos(x+h) - cos(x)}{h} = \frac{\sin(x+h-\frac{\pi}{2}) - \sin(x-\frac{\pi}{2})}{h}; \tag{94}$$

$$Q_{x,h}(g) = Q_{x-\frac{\pi}{2},h}(f); \tag{95}$$

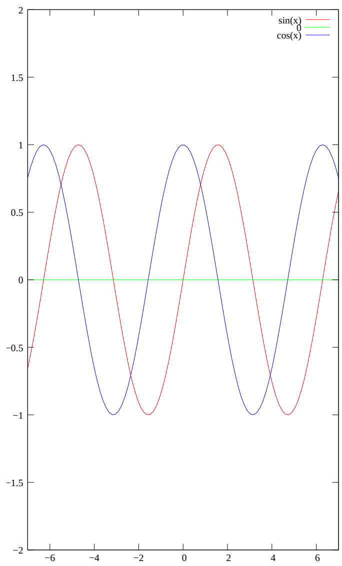
$$g'(x) = f'(x - \tfrac{\pi}{2}) = \cos(x - \tfrac{\pi}{2}) = \sin(x); \tag{96}$$

$$\cos(x)' = \sin(x); \tag{97}$$

Você pode se perguntar como é que os nossos antepassados matemáticos descobriram estes teoremas tão complicados ou suas demonstrações. Primeiro, muitos deles, e Euler é um exemplo, se dedicavam exclusivamente a fazer contas. Inclusive viveu cego a metade de sua vida e ainda assim produziu mais do que muitos matemáticos e para isto ele ensinou Matemática à sua esposa para que *eles dois pudessem falar Matemática*. E muito do que foi descoberto, por Euler, o foi com experiências, tentativas. Observe o gráfico na figura (fig. 5), página 21.

As duas funções, *seno, cosseno*, são praticamente idênticas, são as coordenadas dum ponto no círculo trigonométrico e na verdade você passa duma para outra por uma translação:

$$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x); \sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos(x);$$



se você trasladar sin, para frente ou para trás, obtém $\pm\cos$. Agora acompanhe as contas na sucessões de equações seguintes:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1; \tag{98}$$

$$2\sin(x)d\sin(x)dx + 2\cos(x)d\cos(x)dx = 0; \tag{99}$$

$$\sin(x)d\sin(x)dx + \cos(x)d\cos(x)dx = 0; \tag{100}$$

$$d\sin(x) = \cos(x) \quad\Rightarrow\quad \sin(x)\cos(x)dx + \cos(x)d\cos(x)dx = 0; \tag{101}$$

$$\sin(x)\cos(x)dx = -\cos(x)d\cos(x)dx \quad\Rightarrow\quad d\cos(x) = -\sin(x); \tag{102}$$

1. Na equação (eq.98) está expressa a *relação fundamental da trigonometria* que não é outra coisa senão a equação do círculo de raio 1.

2. Na equação (eq.99) eu usei *derivação implícita* que no segundo membro deu zero, a derivada duma constante. A letra "d" está sendo usada para representar derivação.

3. Na equação (eq.100) simplifiquei, cancelei o dois.

4. Como a derivada duma função transladada é igual à função original e tenho a equação (eq.101).

5. Na equação (eq.102) eu calculei o valor da derivada do cos.

O método descrito nas equações (eq.98)- -(eq.102) é muito usado, por exemplo para calcular derivadas de funções inversas, como dos pares $tan, atan$, $\log, \exp$. É preciso apenas alguma prática...

A Conclusão é que há algumas derivadas que são difíceis de serem calculadas, como é o caso da derivada do $\sin(x)$, mas na medida em que aumentarmos o banco de dados de derivadas conhecidas, e ampliarmos a lista de regras com novas propriedades, conseguimos também ampliar muito rapidamente o banco de dados. Esta é uma breve descrição da metodologia com que os programas de *Computação Algébrica* calculam derivadas e consequentemente também integrais, ou seja apenas eles representam uma automatização dos métodos que nós, os humanos, usamos para calcular derivadas, e conseguem fazer o trabalho com muito mais rapidez e sem os erros que os humanos frequentemente cometem...

Que é mesmo a derivada?

A comparação da derivada de funções univariadas com a jacobiana das funções multivariadas levou a uma generalização do conceito de derivada. Observe como isto foi feito, obviamente, olhando depois que tudo aconteceu... Quem nos dá o fio da meada é a derivada implícita. Se $z = F(x, y)$ for diferenciável então podemos obter, derivando implicitamente:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = \tag{103}$$

$$dz = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{104}$$

Na equação (eq. 104) deduzi da equação (eq. 103) um produto de matrizes em que aparecem as estranhas variáveis dx, dy, dz nas quais não há nem x nem y e nem z. Isto é uma outra história que criou um tremendo drama na Matemática numa tentativa de explicar o que seriam os *infinitésimos* com que os matemáticos até o início do século 20 identificavam os símbolos dx, dy, dz.

Para entender como o drama foi resolvido, vou derivar implicitamente, coisa que ninguém faz, uma função univariada: $y - f(x) = 0$. Para fazê-lo escrevi a função univariada de forma implícita...

$$y - f(x) = 0 \;\Rightarrow\; dy - f'(x)dx \;\Rightarrow\; dy = f'(x)dx; \tag{105}$$

Se considerarmos o ponto $(a, f(a))$ do gráfico da função diferenciável $y = f(x)$ podemos obter da equação (eq. 105) a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(a, f(a)) = (a, b)$

$$(a, f(a)) = (a, b); \tag{106}$$

$$dx := (x - a); dy := (y - b); \tag{107}$$

$$dy = f'(x)dx \;\Rightarrow\; y - b = f'(a)(x - a); \tag{108}$$

um novo produto de matrizes na equação (eq. 108). Apenas agora uma matriz 1×1 que se identifica com um número. Matrizes são identificadas com funções lineares e $f'(a)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

Com isto resolvi o significado das variáveis estranhas, agora dx, dy no caso univariado. Quando derivamos encontramos o *modelo* para o objeto linear tangente, não o próprio objeto linear tangente. Então a derivada é uma função linear que serve como modelo para o objeto linear tangente. Observe o gráfico na figura (fig 9), página 23.

Eu podia ter feito dois gráficos, um num espaço identificado pelas variáveis dx, dy e outro onde se encontra o gráfico de $y = f(x)$. Simplesmente não preciso de infinitesimais. dx, dy são os nomes de duas variáveis em relação ás quais se representa a função linear tangente em parte devido a um defeito de linguagem e comunicação porque é complicado falar da função linear $f'(a)$ e mais natural falar da função linear que associa à variável dx a sua imagem $f'(a)dx = dy$. Então, como a derivada é uma função que associa a cada ponto do domínio uma função linear cujo gráfico é paralelo ao gráfico da reta tangente, no caso univariado ou em qualquer outra dimensão finita.

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}; x \overset{f}{\mapsto} f(x) \in \mathbf{R}; f'\mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R},\mathbf{R}); x \overset{f'}{\mapsto} f'(x)\mathcal{L}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \tag{109}$$

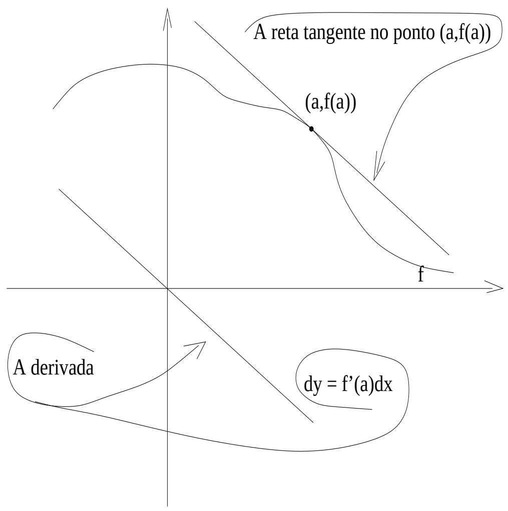


Figura 9: a reta tangente e o gráfico da derivada

Esta formulação está pronta para a generalização para espaços de dimensão não finita. O Cálculo que fazemos com espaços de dimensão finita pode ser generalizado para os espaços abstratos, no caso dos espaços vetoriais normados praticamente podemos repetir as relações existentes nos livros de Cálculo evitando as questões dimensionais, e Henri Cartan escreveu, na década de 60, um livrinho intitulado *Calcul différentiel dans les espaces de Banach*.

É isto que é jacobiana de uma função multivariada, a função linear que serve de modelo para a variedade linear tangente ao gráfico de uma função diferenciável em cada um dos pontos de seu gráfico. O nome jacobiana surgiu pela falta de claro entendimento do que seria o conjunto de derivadas parciais que aparecem quando derivamos uma função multivariada e que a derivada implícita, claramente, mostra que se trata de uma função linear sendo a jacobiana a matriz da mesma.

E os *infinitésimos*? como muita coisa em ciência, foi trabalho perdido e muita pesquisa feita para justificá-los até mesmo foi criada uma bonita e complicada teoria de expansão dos números reais, "*non-standard analysis*" onde eles aparecem como *números reais fora do padrão*. Talvez os *infinitésimos* sejam apenas as sucessões de números racionais. Confira *análise não padronizada.*

teorema fundamental do Cálculo É o teorema que associa os dois operadores básicos do Cálculo Diferencial e Integral, a derivada e a integral:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{110}$$

em que f é uma função integrável num intervalo contendo o intervalo $[a, x]$. O número a se chama *condição inicial* sendo esta "condição inicial" a responsável pela constante de integração. F é a primitiva de f associada à *condição inicial* $\underline{a}$ e podemos mostrar que f é a *derivada* de F.

A cada *condição inicial* corresponde uma *primitiva* da função integrável f na equação (110).

Se F_a, F_b forem duas primitivas de f então $F_b - F_a = C$:

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt; F_b(x) = \int_b^x f(t)dt; \tag{111}$$

$$F_a(x) - F_b(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_b^x f(t)dt; \tag{112}$$

$$F_a(x) - F_b(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt; \tag{113}$$

$$F_a(x) - F_b(x) = \int_a^b f(t)dt = C; \tag{114}$$

$$F_a(x) = F_b(x) + C; F(x) = F_b(x) + C; \tag{115}$$

$$F(b) - F(a) = F_b(b) - F_b(a) = C; \tag{116}$$

$$\int_a^b f(t)dt = F|_a^b = F(b) - F(a); \tag{117}$$

a expressão, ao final da equação (117), é apenas uma formulação resumida para a expressão que se encontra no início da equação (111).

A equação (117), é o “algoritmo” para calcular integrais. Para calcular a integral da função f temos que descobrir uma “primitiva” F qualquer, independente da condição inicial sendo a equação (117) a fórmula para o cálculo da integral.

Eu indexei a função primitiva F obtida com a condição inicial a usando a própria condição inicial que lhe dá origem: F_a. Esta notação não é um padrão.

Por exemplo, sabemos que se $f(x) = x^n$ então $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F|_a^b = (\frac{x^{n+1}}{n+1} + C)|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} + C - (\frac{a^{n+1}}{n+1} + C); \tag{118}$$

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}; \tag{119}$$

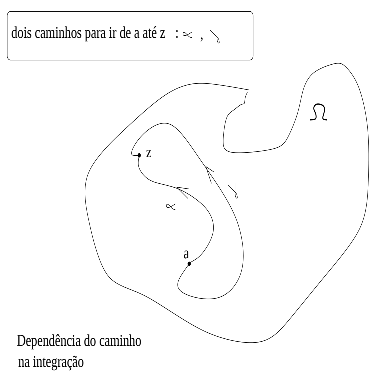


Figura 10: dependência do caminho

de onde se deduz que podemos tomar $C = 0$ ou dizer que a constante é qualquer. Embora seja um exemplo, o resultado vale para o caso geral. É isto que está expresso na equação (117).

O teorema fundamental do Cálculo para calcular integrais é supervalorizado nos cursos de Cálculo, infelizmente este é o único caminho didático possível para conduzir o estudante a um domínio de cálculos que na verdade são o grande objetivo. O defeito do método é que se perde a enfase na importância do próprio teorema.

Este teorema atinge o seu pleno significado no Cálculo multivariado quando se pode compreender que ele é uma generalização do caso univariado e conduz uma simplificação de dois teoremas célebres, teorema de Green e teorema de Stokes. Vou obter esta generalização partindo da formulação do caso univariado.

Uma das formas de generalizar o teorema consiste em reduzir a hipótese sobre a função f que pode ser uma *medida* definida num intervalo contendo $[a, x]$, ou seja reduzir a regularidade de f. Outra maneira de o fazer é passando ao caso multivariado, agora f está definida em uma região Ω do plano[1], como mostra a figura (10), página 24,

Saindo do caso univariado a forma de atingir o ponto z partindo do ponto a deixa de ser única e a figura (10) mostra dois caminhos α, γ que fazem este percurso. A integral

$$F(z) = \oint_a^z f(t)dt \tag{120}$$

depende da escolha de um destes caminhos. As funções f se classificam em dois tipos:

1. f não depende do caminho conduzindo de a até z no domínio Ω;
2. f depende do caminho conduzindo de a até z no domínio Ω;

No primeiro caso $F(z)$, definida na equação (120) está bem definida, no segundo caso, não! Dizemos ainda que f tem primitiva se sua integral entre dois pontos de Ω não depender do caminho de integração. Estas duas alternativas ainda podem ser colocadas assim:

1. A integral de f sobre qualquer curva fechada de Ω é zero. Esta afirmação equivale a dizer que a intergral de f não depende do caminho entre dois pontos. Ainda equivale a diezer que f é uma derivada.
2. Existe alguma curva fechada contida em Ω sobre a qual a integral de f é diferente de zero, ou seja, a integral de f depende do caminho em Ω.

No primeiro caso diremos que f tem uma primitiva, F, com condição inicial a. Esta formulação, embora seja geometricamente simples e intuitiva, é bastante difícil de ser tratada formalmente:

- como descobrir uma curva fechada sobre a qual a integral de f seja diferente de zero?
- como provar que a integral de f é nula sobre qualquer curva fechada?

A resposta para estas questões é o teorema de Green e uma forma de intuitiva de entender este belo teorema consiste em analisar as funções

$$\mathbf{R}^2 \Longrightarrow \mathbf{R}^2$$

para entender como é que ele separa esta duas funções em duas classes, aquelas cuja integral é invariante por caminhos das outras que não têm esta propriedade de invariância por caminhos. A Física inseriu na Matemática, neste ponto, o conceito de *potencial*:

1. As funções $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ cujas integrais sejam invariantes por caminhos são *derivadas* e uma sua primitiva é um potêncial. elas são derivadas de funções $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, da mesma forma como no Cálculo univariado, cada derivada corresponde a uma família de funções parametrizadas por *condições iniciais*. Neste caso a integral de linha, no teorema de Green se anula, para todas as curvas fechadas.
2. As funções $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ cujas integrais não sejam invariantes por caminhos, elas não são potências, elas não são derivadas de nenhuma função $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$. Ainda assim tem sentido calcular as integrais destas funções, sobre curvas fechadas, para descobrir uma diferença de potencial ou uma correção do potencial. Neste caso a integral de linha, no teorema de Green pode ser diferente de zero sobre alguma curva fechada.

[1]Ou de um espaço de dimensão maior.

funções primitivas para descobrir suas propriedades. Suponha que $z = F(x, y)$ seja derivável, então ela tem derivadas parciais e a derivação implícita desta expressão nós conduz à compreensão do que seria a derivada:

$$dz = F_x dx + F_y dy = (F_x F_y) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{121}$$

em que é melhor pensar nos símbolos dz, dx, dy como variáveis que nada têm o que ver com z, x, y, e a derivada implícita produz o modelo do que é a derivada: uma função linear[2], representada pela matriz jacobiana, quando calculada em um ponto $(a, b) \in \Omega$. Ou seja, quando derivarmos $z = F(x, y)$, implicitamente, encontramos um par de funções $z = P(x, y), z = Q(x, y)$ e vemos assim que:

- $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função derivável;
- $F' : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}); F'(x, y)(dx, dy) = (P(x, y)Q(x, y)) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$.

  $(P(x, y)\ Q(x, y)) = (F_x(x, y)\ F_y(x, y))\,; F'(x, y)(dx, dy) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy$ é esta a expressão cuja integral de linha será calculada no teorema de Green, por exemplo.
- isto somente é possível se $F'(a, b)$ tiver a integral invariante por caminhos em Ω, ou equivalentemente, se a integral de $F'(a, b)$ se anular sobre qualquer curva fechada em Ω.

Já vimos que esta formulação é uma formulação geométrica do problema que é muito difícil de ser usada em cálculos formais, coisa que precisamos quando desejarmos fazer demonstrações. Vamos procurar outra forma de caracterizar o fato de que F seja uma primitiva de (P, Q), ou melhor, quando é que (P, Q) é uma derivada. Para obter um resultado vamos fazer algumas hipóteses que tornem possível fazermos alguns cálculos (este é o método experimental em Matemática). Vamos supor que F seja derivável em um domínio mais amplo contendo Ω para que possamos falar da curva γ que é a fronteira de Ω sobre a qual vamos calcular a integral de (P, Q). Vamos usar a notação: $\gamma = \partial(\Omega)$.

$$\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Omega}\int \frac{\partial P}{\partial y} dxdy + \int\limits_{\Omega}\int \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy \tag{122}$$

Esta expressão precisa ser melhor analisada, observe, por exemplo, que a integral de linha troca de sinal se alterarmos a orientação da curva γ e isto precisa ficar indicado na soma de integrais duplas. Uma convenção habitual nos conduziria a escrever esta identidade (que precisamos demonstrar) assim:

$$\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Omega}\int \frac{\partial P}{\partial y} dydx + \int\limits_{\Omega}\int \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy \tag{123}$$

6 Somas notáveis

- <u>**somas notáveis**</u> Há diversas *somas notáveis* de que precisamos com frequência ou que ocorrem em várias situações como

[2]Observe, a função linear é $J(F)(a, b) = F'(a, b)$ e não a função F', ou ainda, em cada ponto (a, b) se tem uma função linear $F'(a, b) = (P(a, b), Q(a, b))$.

- soma dos termos dum progressão aritmética, ou geométrica,
- soma dos quadrados duma sequência de números.
- soma das potências p duma progressão aritmética de números inteiros (pode ser um pouco mais geral).

Estas somas são polinomiais e as fórmulas para o seu cálculo são também polinomiais tendo um formato *idêntico*:

Exceto a soma dos termos das p.g. de que vou tratar ao final.

Teorema **3 (somas)** *polinomiais* *Suponha que P seja um polinômio do grau p então a soma*

$$\sum_{k=0}^{n} P(k) = Q(n+1) - Q(0) \tag{124}$$

em que Q é um polinômio do grau $p+1$ **Dem**: *É corolário do lema, $x \mapsto Q(x)$ é um polinômio do grau $p+1$ se e somente se $x \mapsto Q(x+1) - Q(x)$ é um polinômio do grau p.* **q.e.d .**

Este resultado não vem atoa, ele está por trás da fórmula de integração de funções polinomiais que é um simples corolário dele:

$$\int_a^b x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_a^b \tag{125}$$

porque as somas de Riemann uniformes são soma do tipo mencionado acima. E para demonstrar a existência desta integral é suficiente trabalhar com as somas de Riemann uniformes porque como a função é contínua já sei de partida que sua integral de Riemann existe portanto posso selecionar uma cadeia particular do conjunto parcialmente ordenado das somas de Riemann: das somas de Riemann uniformes. Todas as cadeias tem o mesmo supremo que é um máximo. Isto vale para qualquer função contínua definida num intervalo fechado.

A soma dos termos das progressões aritméticas é um caso particular quando $p = 1$ de modo que vou tratar do caso geral. Como seria muito difícil encontrar uma notação adequada para demonstrar o caso geral, eu vou tratar do caso $p = 2$ e deixar indicado como fazer em qualquer caso.

Teorema **4 (soma)** *dos quadrados*
A soma dos quadrados é dada pela fórmula

$$1 + 4 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{126}$$

Dem:
Pelo lema, no teorema 3, existe um polinômio Q do grau 3, tal que

$$0 + 1 + 4 + \cdots n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = Q(n+1) - Q(0); \tag{127}$$

em que incluí zero na soma para manter a expressão já mencionada anteriormente na diferença entre polinômios no último membro da equação (eq.127). Deixo para a leitora a expressão genérica desta diferença...

Então, pelo lema do teorema 3

$$Q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D; D = 0;$$

em que deixei $D = 0$ porque não interessa qual o valor de D uma vez que vou calcular $Q(n+1) - Q(0)$ então D pode ser qualquer.

Para determinar um polinômio do grau n preciso de $n+1$ amostras deste polinômio o que vai produzir um sistema de $n+1$ equações nas $n+1$ incógnitas que são os coeficientes do polinômio. Neste caso preciso de apenas três amostras porque $D=0$. A amostragem de que preciso é

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{1} k^2 = 1 = Q(2) - Q(0) = Q(2) = 8A + 4B + 2C; \\ \sum_{k=0}^{2} k^2 = 5 = Q(3) - Q(0) = Q(3) = 27A + 9B + 3C; \\ \sum_{k=0}^{3} k^2 = 14 = Q(4) - Q(0) = Q(4) = 64A + 16B + 4C; \end{cases} \tag{128}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \\ 64 & 16 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}; \tag{129}$$

que é um sistema com um determinante de Vandermonde que tem por solução

$$A = \tfrac{1}{3}, B = \tfrac{-1}{2}, C = \tfrac{1}{6} \tag{130}$$

$$Q(x) = \tfrac{2x^3-3x^2+x}{6} = \tfrac{x(x-1)(2x-1)}{6} \tag{131}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \tfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} \tag{132}$$

O lema do teorema 3 mostra que esta demonstração é geral, apenas não disponho duma notação para escrevê-la em formato geral sem tornar a redação quase ilegível, mas a metodologia serve para qualquer caso. **q.e.d .**

Você pode usar o método do teorema 4 para demonstrar as formulas seguintes:

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2; \tag{133}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2. \tag{134}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \tfrac{6n^5-15n^4+10n^3-n}{30}; \tag{135}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^5 = \tfrac{2n^6-6n^5+5n^4-n^2}{12}; \tag{136}$$

Para obter o resultado relativo a integral de polinômios que está registrado na equação (eq.125), basta descobrir o primeiro termo do polinômio Q:

Teorema 5 (somas) *de potências de p.a.*

$$\sum_{k=0}^{n} k^p = Q(n+1) - Q(0) \tag{137}$$

e $Q(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} + A_p x^p + \cdots A_1 x$ *e não interessa saber* $A_p, \ldots, A_1$. **Dem** *:*

Não interessa saber quais são os coeficientes das potências inferiores a $p+1$ porque quando o resultado for colocado na soma de Riemann que fornece a aproximação para a integral na equação (eq.125), todos os termos de grau inferior a $p+1$ terão limite zero restando apenas o termo de grau $p+1$ para calcular o limite. Isto simplifica muito a solução do sistema na equação (eq.128), interessa-me apenas o termo do maior grau e ele é dado pelo segundo termo da linha de ordem n do triângulo de Pascal

$$\frac{1}{C_n^{n-1}} = \frac{1}{n}; \tag{138}$$

Chamamos de triângulo de Pascal a um algoritmo conhecido de matemáticos chineses há 6 mil anos.

levando ao conhecido resultado da integral das funções polinomiais.

q.e.d .

Vou agora tratar do caso da soma dos termos duma p.g. que também é uma soma de potências, mas agora as potências se encontram em progressão aritmética:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **6 (soma)** *progressão geométrica*

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n; a \neq 0; \tag{139}$$

$\boxed{\textbf{Dem}}$: *Este caso sai do lema, um dos produtos notáveis,*

$$(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)(a - 1) = a^{n+1} - 1 \tag{140}$$

que pode ser facilmente demonstrado por indução finita. Então

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \tag{141}$$

que é a conhecida fórmula da soma dos termos duma progressão geométrica.

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Índice Remissivo

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus vol II.* Blaisdell Publishing Company, 1962.

[2] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[3] Harold J. Larson. *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference.* John Wiley & Sons, Inc - Wiley International Edition, 1969.

[4] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional.* Sobral Matematica, 2007.

[5] Tarcisio Praciano-Pereira Stálio Rodrigues dos Santos. *Introdução à Matemática Universitária.* Sobral Matemática, 2009.

[6] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.