A exponencial

Praciano-Pereira, Tarcisio *

25 de janeiro de 2016
préprints da Sobral Matemática
no. 2016.01
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Estou resolvendo, neste artigo, a equação $y' = y$, detalhadamente, e usando apenas o Cálculo como pré-requisito. Antes lembro como ela aparece no Cálculo associada ao logaritmo e como solução aproximada duma integral que não tem um cálculo formal.

palavras chave: equação diferencial ordinária, série de potências, exponencial

I am solving in detail the differential equation $y' = y$ but using only Calculus as prerequisite. But to start with I recall how it comes up at Calculus associated to logarithm and to an approximate solution for an integral whose formal calculus is not possible.

keywords: ordinary differential equation, power series, exponential

*tarcisio@member.ams.org

1 Método alternativo de solução

Vou resolver neste artigo, detalhadamente, a equação diferencial

$$y' = y \tag{1}$$

que é comumente resolvida no Cálculo, indiretamente, como consequência do Cálculo aproximado da integral

$$f(x) = \log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \tag{2}$$

Esta integral é um dos mais bonitos exemplos para mostrar que o Cálculo não pode oferecer meios para calcular uma integral qualquer abrindo logo num momento inicial a perspectiva de solução aproximada ao mesmo tempo que nos ajuda a reescrever a história da Matemática discutindo um instrumento que esteve presente na vida dos calculistas desde a Idade Média até meados do século passado, o *logaritmo*, evoluindo depois para ser um instrumento de análise fina e sem mais perspectiva de ser usado como meio de fazer contas, embora o Ensino Médio, com seu atraso folclórico, ainda mencione *logaritmo* com este objetivo.

É relativamente fácil provar todas as propriedades do logaritmo com uma função definida pela equação (eq. 2) e que como tal é uma função contínua, derivável, definida na semi reta positiva, estritamente.

Como $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ então f é crescente e logo inversível. Como o conjunto dos valores do log é o conjunto dos números reais então a função inversa está definida na reta e tem como conjunto de valores a semi reta positiva. Chamando a função inversa de E se catalogam suas propriedades, a partir das propriedades do *logaritmo*

$$E(x+y) = E(x)E(y); \tag{3}$$
$$E(0) = 1; E(x) > 0; \tag{4}$$
$$E(-x) = \tfrac{1}{E(x)} \tag{5}$$

E se deduz o gráfico de E como rebatimento do gráfico de log em torno da primeira bissetriz exatamente porque se trata dum par de funções inversas.

Este projeto consome uma semana de aulas do Cálculo com boas oportunidades para introduzir métodos computacionais em aula, confira [2], ou fazer um aprofundamento deles se já tiverem sido introduzidos. Este é o método possivelmente inaugurado em forma didática por Courant e depois seguidos por alguns poucos autores de Cálculo, confira [1].

Na próxima seção vou seguir a trilha inversa, num certo sentido, partindo duma série de potências para resolver a equação diferencial $y' = y$ e provar que a solução satisfaz às propriedades descritas nas equações (eq. 1.3)- (eq. 1.5).

2 Solução duma equação diferencial

A função **exponencial** é uma função do tipo

$$f(x) = Ke^x; K \in \mathbf{R}; \tag{6}$$

é portanto uma família de funções a um parâmetro. Continua verdadeira a afirmação se $x \in \mathbf{C}$ inclusive todas as contas feitas neste artigo podem ser consideradas como se $x \in \mathbf{C}$ apenas com modificações significativas do domínio e gráficos.

A expressão na equação (eq. 6) é a solução da equação diferencial

$$y' = y \tag{7}$$

que pode ser facilmente obtida usando-se *série de potência* que é o objetivo aqui.

Supondo que $y = f(x)$ tenha uma *série de Taylor* convergente numa certa região, o que vai ser controlado pelo *raio de convergência*, então

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k; \tag{8}$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = y; \tag{9}$$

$$a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k; \tag{10}$$

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k; \tag{11}$$

$$a_0 - a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k - (k+1)a_{k+1}\right) x^k \equiv 0; \tag{12}$$

$$a_0 - a_1 = 0; a_1 - 2a_2 = 0, \dots (a_k - (k+1)a_{k+1}) = 0, \dots; \tag{13}$$

$$a_1 = a_0, a_2 = \tfrac{a_1}{2}, \dots, k \geq 2\ a_{k+1} = \tfrac{a_k}{k+1}, dots \tag{14}$$

$$a_0 = f(0); k \geq 1\ a_{k+1} = \tfrac{a_k}{(k+1)}; \tag{15}$$

Na última equação, (eq. 15) selecionei um *valor possível* para $f(0)$ determinando assim todos os coeficientes da *série de McLaurin*, iterativamente. Por exemplo, se $f(0) = 1$ então

$$a_0 = f(0) = 1; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{3!}; a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n!}; \tag{16}$$

e nestas condições $\rho = \infty$, a série de potências na equação (eq. 8), converge uniformemente para qualquer número real e define uma função $f(x)$ cujo domínio é a reta dos números reais. A afirmação vale também para qualquer número complexo.

Como no caso dos polinômios, $f(1)$ é a soma dos coeficientes, é um dos *limites notáveis*, é valor da constante e,

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!} + \dots = e \tag{17}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} x^k ; f(1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k!} = e; \tag{18}$$

$$\lim_{n=\infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n = e = \lim_{n=\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} (\tfrac{1}{n})^k \right); \tag{19}$$

$$e = \lim_{n=\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \tfrac{n!}{(n-k)!k!} (\tfrac{1}{n})^k \right); \tag{20}$$

$$e = \lim_{n=\infty} 1 + 1 + \tfrac{n(n-1)}{2} \tfrac{1}{n^2} + \ldots + \tag{21}$$

$$+ \tfrac{n(n-1)\ldots(n-(k-1)}{k!} \tfrac{1}{n}^k + \ldots + \tfrac{n!}{n!} (\tfrac{1}{n})^n; \tag{22}$$

Na equação (eq. 19) se encontra uma forma alternativa de calcular o número $\underline{e}$, e, na última equação, (eq. 22), se tem uma sucessão de somas parciais do desenvolvimento da equação (eq. 19) cujos termos são menores do que $\frac{1}{k!}$ mas cujo limite limite é a série numérica que fornece o valor de e:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{23}$$

mostrando que o limite na equação (eq. 19), é uma forma alternativa do cálculo de e.

A forma de demonstrar a convergência destas séries é por comparação com as séries geométricas, ela é menor do qualquer série geométrica portanto converge e seu limite define o número e, ou no caso da série de potências define uma função $f(x)$ para qualquer número real x. Vou provar que $f(x) = e^x$ é uma solução possível.

Calculando este limite usando a expressão equivalente

$$f(a) = \lim_{n=\infty} (1 + \tfrac{a}{n})^n = \lim_{n=\infty} (1 + \tfrac{1}{an})^n; \tag{24}$$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n=\infty} (1 + \tfrac{1}{an})^n = (\lim_{n=\infty} (1 + \tfrac{1}{an})^{an})^{1/a} = e; \tag{25}$$

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n=\infty} (1 + \tfrac{a}{n})^n = 1 = e^0; \tag{26}$$

$$a \in \mathbf{Z}^-; a \text{ par} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n=\infty} (1 + \tfrac{a}{n})^n = \lim_{n=\infty} (1 + \tfrac{a}{n})^{an})^{1/a} = e; \tag{27}$$

$$f(a) = \lim_{n=\infty} (1 + \tfrac{a}{n})^n = e^a; \tag{28}$$

1. A equação (eq. 24) vale porque é a imagem do limite por uma função contínua então função e limite comutam.

2. O mesmo argumento da equação (eq. 24) se aplica à a equação (eq. 26) *imagem por uma função contínua*, que é a multiplicação pelo número $\underline{a}$.

O limite na equação (eq. 24) define a função exponencial para os reais positivos e inteiros negativos pares. Como a série é absolutamente convergente na expressão equivalente da equação (eq. 18) então posso simplesmente *expandir* *a definição da função exponencial* a qualquer número negativo, e portanto, para todos os números reais, usando a expressão da equação (eq. 24). Os cálculos seguintes, que valem para qualquer que sejam os números a, b validam o raciocínio acima:

$$f(a) = \lim_{n=\infty}(1 + \tfrac{1}{an})^n = e^a \tag{29}$$

$$f(b) = \lim_{n=\infty}(1 + \tfrac{1}{bn})^n = e^b \tag{30}$$

$$f(a)f(b) = \lim_{n=\infty}(1 + \tfrac{a}{n})^n(1 + \tfrac{b}{n})^n = \lim_{n=\infty}((1 + \tfrac{a}{n})(1 + \tfrac{b}{n}))^n; \tag{31}$$

$$f(a)f(b) = \lim_{n=\infty}(1 + \tfrac{a}{n} + \tfrac{b}{n} + \tfrac{ab}{n^2})^n; \tag{32}$$

$$f(a)f(b) = \lim_{n=\infty}(1 + \tfrac{a+b}{n} + \tfrac{ab}{n^2})^n; \tag{33}$$

Partindo na equação (eq. 29) e (eq. 30), até a equação (eq. 33) os cálculos se justificam pelas regras da álgebra, ou da aritmética. No segundo membro da equação (eq. 33) podemos identificar a *parte principal* na expressão do segundo membro como $1 + \frac{a+b}{n}$ uma vez que o termo desprezado tem *ordem de grandeza menor* do que os que foram considerados. A *ordem de grandeza ser menor* significa que

$$\frac{ab}{n^2} = o(\frac{a+b}{n}) \equiv \lim_{n=\infty} \frac{\frac{ab}{n^2}}{\frac{a+b}{n}} = 0; \tag{34}$$

Ao mesmo tempo, desprezando este termo de ordem menor, o limite

$$\lim_{n=\infty}(1 + \frac{a+b}{n})^n = e^{a+b} \tag{35}$$

existe. Nestas condições

$$f(a)f(b) = \lim_{n=\infty}(1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2})^n = \lim_{n=\infty}(1 + \frac{a+b}{n})^n = e^{a+b}; \tag{36}$$

$$f(a)f(b) = f(a+b); \tag{37}$$

e esta propriedade vale para as funções do tipo $f(x) = Ke^x$ em que K é um número real qualquer. Esta é a propriedade descrita na equação (eq. 2.3).

A propriedade foi seleção de valor para $f(0)$ feita equação (eq. 1, 15) porque estou resolvendo uma equação diferencial e assim selecionando uma solução particular.

A terceira propriedade é consequência destas duas primeiras.

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus vol II.* Blaisdell Publishing Company, 1962.

[2] Tarcisio Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, 2009. http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/.