Cicloide e braquistócrona

Nascimento, J. B. [1]   Gomes, S.C. L.[2]   Magno, C. S.[3]
Moreira, A. M. S.[4]

Sobral Matemática
préprints da Sobral Matemática
no. 2015.01
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

[1] jbn@ufap.br
[2] suellem_fisica@hotmail.com
[3] carolinemagno.fisica@gmail.com
[4] [illegible]

Resumo

Unificação em Ciência é fazer com que conceitos de diferentes concepções se revelem, dentro de uma percepção, como integrando uma mesma abordagem. O trabalho visa mostrar um exemplo simples disto e, ao mesmo tempo, faz proposta de abordagens desses.

palavras chave: EDO, metodologia, minimização

CICLOIDE
E
BRAQUISTÓCRONA

UM EXEMPLO ELEMENTAR DE UNIFICAÇÃO

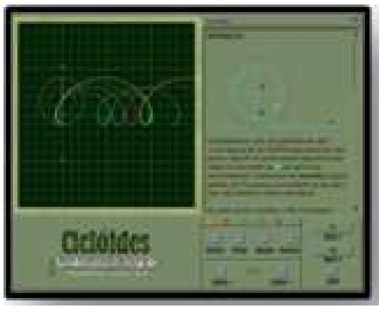
Por

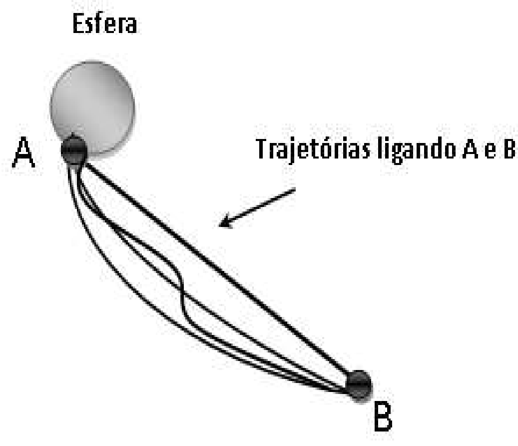
Nascimento, J.B.
Inst. Mat - ICEN/UFPA, jbn@ufpa.br

Gomes, S.C. L.
Bolsista, Labdemon/Física/ICEN/UFPA, suellem_fisica@hotmail.com

Magno, C. S.
Bolsista Labdemon/Física/ICEN/UFPA, carolinemagno.fisica@gmail.com

Moreira, A. M. S.
Mat. 11094000701, Física/ICEN/UFPA, alan_msantos@hotmail.com





APRESENTAÇÃO

Ao primeiro autor foi exposto por aluno do Labdemon/UFPA dificuldades matemáticas na divulgação de experimento consistindo de aparato composto de três canaletes - uma reta e duas ¨tortas¨ - ligando dois pontos em posições defasadas tanto na horizontal quanto verticalmente e dispositivo que solta três esferas simultaneamente do ponto mais alto. E a curiosidade científica é que o mais esperado, a esfera da canalete reta chegar primeiro ao ponto mais baixo, quiçá ainda com vantagem alongada, ficava visivelmente falsa.

Porquanto, ficando definido que chega primeiro a esfera de canalete ¨torta¨, fica posta à possibilidade de existir curva não linear que realiza tal percurso em tempo menor de todos os caminhos possíveis ligando esses dois pontos. Isso não era nenhuma novidade, posto que, é o famoso problema da **Braquistócrona**, cujo histórico, como veremos, é um belo capítulo da Ciência. O problema que expunha o aluno referido era como argumentar, portanto, quais conteúdo aprender, e referenciar de alguma forma os que foram plateia de uma exposição deste experimento.

Após encontro casual[1] em que fomos verificar uma braquistócrona montada no Labdemon, estávamos de saída quando um dos participantes trouxe para o corredor uma ¨lata joga e volta¨ [em cearencês: Maria-teimosa] a qual é uma lata cilíndrica cujo eixo de rotação é um elástico preso nas tampas e tendo um parafuso preso no meio desse. Quando se joga essa para deslizar o acúmulo de energia por torção do elástico faz com que essa adquira movimento retrocedente,

Digamos agora que houvesse outra pessoa em posição afastada da nossa e perpendicular da que a lata se movia, e que, além disso, na tampa desta houvesse fixadas algumas luzes de cores e posições diferentes. O que este veria como trajetória da cada ponto luminoso é chamada genericamente de curva cicloide, a qual é outra também belíssima história da Ciência, como veremos. E caso uma luz estivesse exatamente no bordo da tampa a curva descrita seria uma **Cicloide** propriamente dita.

E a unificação que matematicamente será realizada diz que se esse observador pegasse um pedaço apropriado de uma **Cicloide**, invertendo-a e adentrasse no laboratório do qual tínhamos acabado de sair, essa curva coincidiria com o percurso realizado pela esfera que chega primeiro. Ou seja, é a **Braquistócrona**.

No que segue, visando produzir um material para atender tal demanda e servir de referência na escola, primeiro se faz um histórico e descrição como fazer uma **Braquistócrona** usando materiais bem acessíveis. Depois, em conexão como as novas tecnologias, apresentamos um programa computacional dos mais acessíveis para gerar **Cicloide** e outras curvas. Por último, apresentamos uma demonstração, próxima da que foi dada pelos pioneiros que estudaram tal problema, de que ambas, **Cicloide** e **Braquistócrona**, a menos de referencial, são as mesma curvas.

[1] Alunos desse episódio
Augusto César Chaves, mat. 08094001601, ugustorasec_fisica@yahoo.com.br
Jacson Malcher Nascimento, mat.090940023-01, jacsonmalcher@hotmail.com
Raimison Ramos Corrêa, Mat: 090940025-01, raifisica@yahoo.com.br

1 - HISTÓRICO E MATERIAL EXPERIMENTAL ENVOLVENDO CICLOIDE E BRAQUISTÓCRONA

Gomes, S.C. L.
Bolsista do Labdemon, Inst. Física/ICEN/UFPA
suellem_fisica@hotmail.com
Magno, C. S.
Bolsista do Labdemon, Inst. Física/ICEN/UFPA
carolinemagno.fisica@gmail.com

A palavra `braquistócrona` deriva das palavras gregas **Brachistos** (que quer dizer ¨menor) e **Chronos** (que quer dizer ¨tempo¨) e se refere à **¨curva ou o caminho, que une dois pontos A e B pertencentes a um plano vertical, que toma o mínimo tempo, quando esta partícula está submetida apenas a influência da gravidade**.

Vejamos um trecho de artigo no tema (g.n)

¨Em Julho de 1696, na revista `Acta Eruditorium`*, fundada e mantida por* **Gottfried Wilhelm Leibniz**, *o matemático suíço* **Jean Bernouilli** *apresentou um problema que logo despertou o interesse de seus colegas. Tratava-se de achar qual deveria ser a forma de uma rampa para que uma partícula, deslizando por ela a partir do repouso e sob a ação da gravidade, gaste o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória. Leibniz espalhou o problema enviando-o por carta aos maiores matemáticos da época.*

A solução foi rapidamente encontrada por vários deles, inclusive o próprio **Leibniz**, *além de* **Isaac Newton** *e os irmãos* **Jacques e Jean Bernoulli**. `Todos indicaram que a curva mais rápida, ou braquistócrona deveria ser uma ciclóide.` *A ciclóide é uma curva muito interessante e já foi até chamada de Helena da Geometria, em alusão à famosa beldade que levou Tróia a seu trágico destino. No século 16, vários matemáticos, dentre eles* **Galileu**, *estudaram a ciclóide. Que é uma curva descrita por um ponto P de uma circunferência de um círculo quando este se movimenta ao longo de uma linha reta (Fig. 1).*

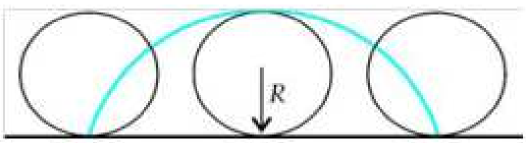


Figura 1. Traçado de uma ciclóide.¨

Texto extraído de EXPERIÊNCIA COM A BRAQUISTÓCRONA, Graciliano da Silveira Batista, Cleuton Freire e José Evangelista Moreira, Seara da Ciência (ww.seara.ufc.br), Universidade Federal do Ceará, http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol7/Num2/v13a10.pdf, acesso Nov/11

PROPOSTA DIDÁTICA PARA CONFECÇÃO DA BRAQUISTÓCRONA E MONTAGEM DE UM DISPOSITIVO PARA VERIFICAR QUE A RETA NÃO É O CAMINHO MAIS RÁPIDO

PASSO 1	PASSO 2	PASSO 3
		
Material - uma folha de isopor, 2 folhas de papel cartão (usaremos preto e vermelho), cola de isopor, tesoura, estilete, lápis, régua e duas petecas.	Medir a folha de isopor pelo tamanho do papel cartão e cortá-la no mesmo tamanho.	Colar o papel cartão na folha de isopor.
PASSO 4	PASSO 5	PASSO 6
		
Contar o cartão vermelhos em tiras	Colar as tiras em forma de reta e braquistócrona (cicloide invertida, como veremos)	A tira vertical do canto superior esquerdo deve ter o máximo de precisão, posto que, servirá para delimitar que as duas petecas, que serão simultaneamente soltas quando escoltadas nessa, partiram do mesmo nível.

ESTE EXPERIMENTO DEMONSTRA QUE PARA PARTÍCULAS/PETECAS SOLTAS AO MESMO TEMPO, A DA BRAQUISTÓCRONA CHEGA PRIMEIRO NA CAIXA FINAL.

Vídeo produzido, veja em:........

Referência específica:

- BRAQUISTÓCRONA - BIBLIOTECA DE OBJETOS MATEMÁTICOS DA UFPA, www.youtube.com/watch?v=aYjmfpX5G8o, acesso dez/11

- - www.uff.br/cdme/epiciclos/epiciclos-html/epiciclos-br.html, acesso dez/11

- www.youtube.com/watch?v=DPaTuGtnmkM, acesso dez/11

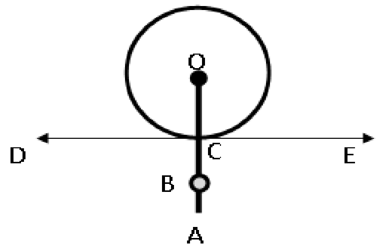
- www.educacionplastica.net/CurCic0.htm, acesso dez/11

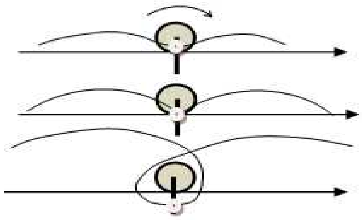
- LABDEMION, www.cultura.ufpa.br/labdemon, acesso dez/11

2 - DESCRIÇÃO DE PROGRAMA COMPUTACIONAL QUE GERA CICLOIDES E OUTRAS CURVAS

Moreira, A. M. S.
Mat. 11094000701, Inst. Física/ICEN/UFPA,
E-mail: alan_msantos@hotmail.com

INTRODUÇÃO - Considere um dispositivo, figura ao lado, composto por um círculo (disco) de centro O e um segmento OA fixado no disco e B um ponto luminoso sobre OA que pode ser fixo ou móvel. Quando o conjunto disco/segmento é colocado em movimento ao longo da reta DE o ponto B descreve uma curva.

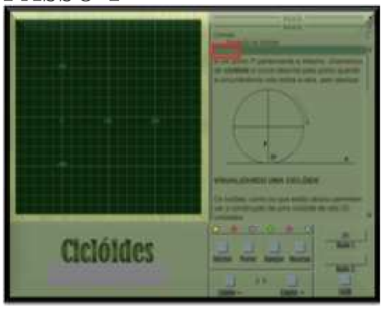
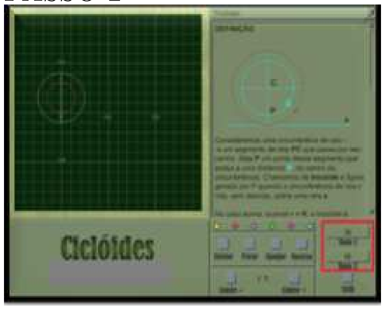
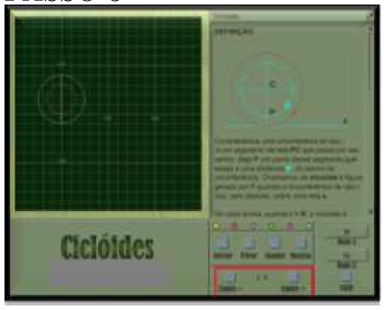
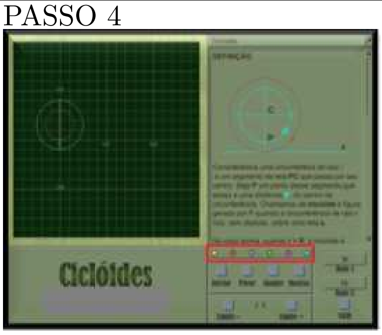
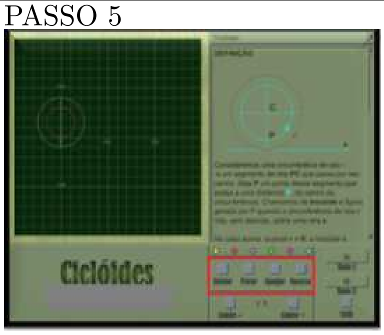


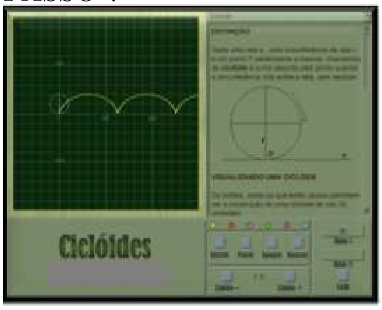
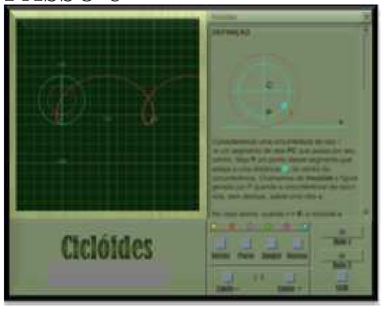


No que segue, B é fixo e o conjunto se move ao longo da reta com velocidade constante, portanto sem deslizamento ou atrito. Caso, B esteja fixo na interseção do círculo com a reta, ponto C, a curva descrita é chamada de Cicloide e se estiver entre C e A é chamada de Tricloide

O PROGRAMA - pode ser baixado em www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=tex&cod=_cicloides, acesso jan/11, O programa não precisa ser instalado, é só baixar e usar, desde que tenha no computador instalado o Macromedia Flash Player, o qual pode ser baixado gratuitamente em qualquer site de download.

COMO USAR ESSE PROGRAMA NOS CASOS CITADOS

PASSO 1	PASSO 2	PASSO 3
		
Click na aba índice e escolha a opção tricloides ou cicloide.	Click dentro da caixa raio 1 e digite 30 e na caixa raio 2 digite 50. OBS: O raio 1 é o raio do circulo interno e o raio 2 do circulo externo.	Na caixa limite pode ser configurado quantas voltas o circulo interno vai dar, nesta simulação 2π
PASSO 4	**PASSO 5**	**PASSO 6**
		
Nesta caixa pode ser configurada a cor da cicloide ou tricloide dependendo da simulação, basta clicar em uma das cores	Nesta caixa estão os botões para realizar a simulação.	Após as configurações anteriores click em iniciar para começar a simulação

PASSO 7	PASSO 8
	
Simulação de uma Cicloide.	Simulação de uma tricloide.

Após todos os passos de configuração e iniciar o simulador, o programa demonstra a trajetória de uma cicloide ou tricloide a opção no inicio das configurações.

Referências

- EXPERIMENTOTECA-LUDOTECA, IF/USP/ Departamento de Física Aplicada, www.ludoteca.if.usp.br/index.php, acesso jan/12

- A MAGIA DA CURVA CICLÓIDE, Veja, J. O. e Sassine, A. Ed. Scortecci, 2011, www.scortecci.com.br/lermais_materias.php?cd_materias=7076&friurl=:-A-MAGIA-DA-CURVA - CICLOIDE–Jose-Oscar-Vega–Andre-Sassine-:, acesso jan/12

3 - FORMALIZAÇÕES VIA CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Nascimento, J.B.
Inst. Mat - ICEN/UFPA, jbn@ufpa.br

MOVIMENTO EM QUEDA LIVRE DE GALILEU - No caso de **Movimento com Velocidade Inicial** v_0 e **Aceleração Constante** a, a **Velocidade** após decorrido um **Tempo** t é dada por: $V = V_0 + a \times t$. E o **Espaço Percorrido** nesse mesmo tempo ΔS é dado pela área do trapézio indicado na `fig.1`. Portanto, se a **Posição Inicial** é S_0, a **Posição** correspondente ao tempo t é: $S = S_0 + \Delta S = S_0 + \dfrac{(V + V_0) \times t}{2}$

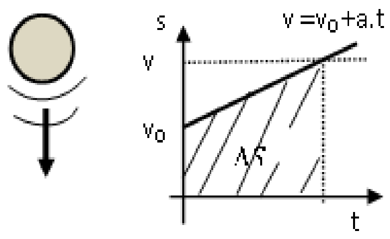


Fig. 1

No caso de queda livre $S_0 = V_0 = 0$ e $a = g =$ `Aceleração da Gravidade`, suposta `Constante`, temos: $V = g \times t$ e $S = \dfrac{V \times t}{2} = \dfrac{V^2}{2g} \therefore V = \sqrt{gS}$

CÁLCULO DAS VARIAÇÕES - MÁXIMO E MÍNIMO - Um registro histórico é o seguinte trecho de **Eneida** do Poeta Virgílio (70 a.C. - 19 a.C.):

¨*Uma mulher é o chefe da expedição. Chegados ao local onde verás agora enormes muralhas e a imponente cidadela de Cartago, compraram todo o terreno que um coro de touro podia cercar.*¨

Pois, nesse feito foi exigido conhecimento matemático tanto para fazer com esse couro a maior tira quanto para depois cercar com essa o maior terreno possível. Isto é parte de uma classe de problemas matemáticos, Isoperimétricos, e base de uma área da matemática, **Cálculo das Variações**, e da qual faremos uma explanação das mais básicas.

Definição - Dada uma função de variável real com valores reais $f : D_{\subset}\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$, um ponto $x_0 \in D_f$ é Ponto de **Máximo** quando $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in D_f$, caso em $f(x_0)$ é dito **Valor de Máximo** da f. Analogamente, define-se **Ponto** e **Valor de Mínimo**. Nesses casos são ditos ainda **Máximo** e **Mínimo Global**, por envolver todo o do domínio. E esses mesmos conceitos têm as suas versões locais. Isto é, ao invés de determiná-lo em todo o domínio, considera isso numa vizinhança deste. Ou seja, por exemplo, um ponto pode ser **Máximo Local** por ser onde a função assume o maior valor relativo aos pontos próximos.

Um método para detectá-los, Máximos e Mínimos, é determinar as regiões em que a função cresce e decresce. Por exemplo, se antes de um ponto a função cresce e depois decresce, sendo contínua, estamos ante um Máximo Local, o qual, dependendo de outras informações, poderá se revelar Máximo Global. E há técnicas para estudar máximos e mínimos apenas supondo contínua, $fig.2$, e um resultado geral é o seguinte:

Teorema: *Seja f uma função de variável real com valores reais e contínua. Se o seu domínio for um* **Conjunto Compacto** *(*`Fechado e Limitado no sentido Topológico`*), então possui ponto de Máximo e Mínimo.*

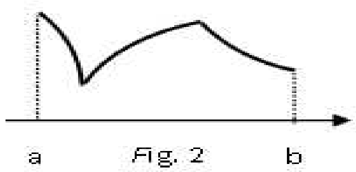


Fig. 2

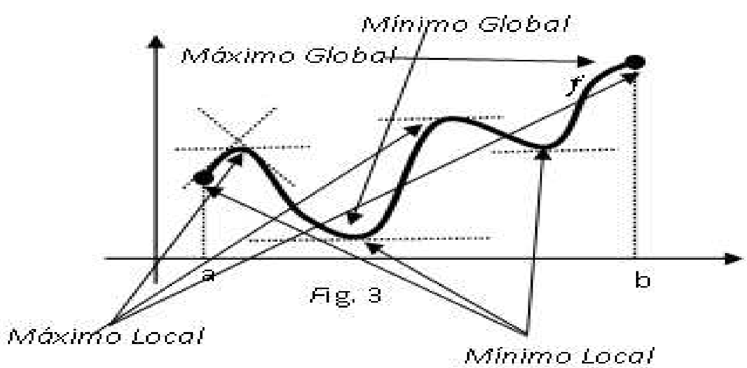
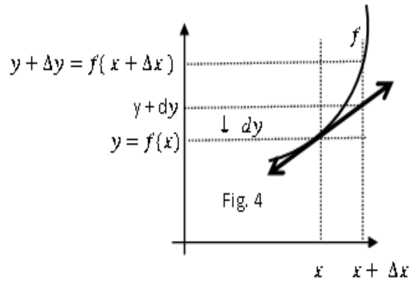


Fig. 3

No caso de função real com valores reais, $f : D_(f) \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ e **Derivável**, i.e, existe $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\forall x \in D_f$, o que implica ser contínua, o fato da derivada ser **Positiva**, $f'(x) > 0$, numa região do domínio decorre ser a função **Crescente** e **Negativa**, $f'(x) < 0$, que é **Decrescente**. Isso já induz, como é verdadeiro, que num ponto $x_(i)$ de **Máximo** ou **Mínimo Local** interno do domínio, sendo a função derivável, $f'(x_i) = 0$.

DIFERENCIAL - Dada uma função $y = f(x)$, temos que $\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, e a **Diferencial** da f, $df = dy$, é a `aproximação linear` de Δf, i.e. , $df = dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.



No caso, por exemplo, em que a função é de duas variáveis, $f(x,y)$, $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Em particular, se $f(x,y) = g(x) + h(y)$, então $df = g'(x)dx + h'(y)dy$. E a **Teoria de Máximo e Mínimo**, quando aplicada no caso diferenciável, indica que em tais pontos de região aberta do domínio deve ocorrer que $df = 0$. Para maiores detalhes em Cálculos das Variações recomendamos as referências [2], [9] [13].

A EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA (E.D.O) DA CICLOIDE

Seja $P = (x,y)$ um ponto da cicloide e, `Fig. 5`, $PC\widehat{C}M = \theta$ que ajuda na descrição da sua trajetória. Nisso temos: $\overline{CN)} = R\,cos(\theta)$, $\overline{PN} = R\,sen(\theta)$ e o arco mede $\widehat{PM} = \overline{OM} = R\,\theta$. Por isso, $y = \overline{CM} - \overline{CN} = R - Rcos(\theta) = R\big(1 - cos(\theta)\big)$ e $x = \overline{OM} - \overline{PN} = R - R\,sen(\theta) = R\big(1 - sen(\theta)\big)$

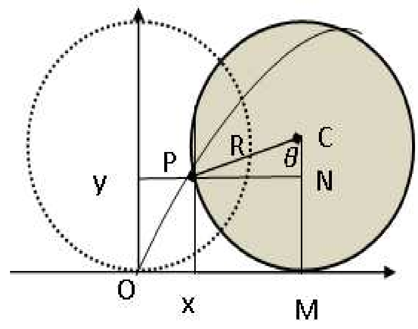


Fig. 5

Pela **Regra da Cadeia**, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}.\dfrac{d\theta}{dx} = Rsen(\theta).\dfrac{1}{R(1 - cos(\theta))} = \dfrac{sen(\theta)}{1 - cos(\theta)}$.

E $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{sen^2(\theta)}{\big(1 - cos(\theta)\big)^2} = \dfrac{1 - cos^2(\theta)}{\big(1 - cos(\theta)\big)^2} = \dfrac{1 - (1 - \frac{y}{R})^2}{(\frac{y}{R})^2} = \dfrac{2R - y}{y}$ em tudo supõe-se que $1 - cos(\theta) \neq 0 \therefore \theta \neq 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$

Logo, escolhendo um raio adequado, a cicloide é solução da Equação Diferencial Ordinária (EDO)

$$\boxed{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\alpha - y}{y}, \ \forall \alpha, y > 0}$$

A EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DA BRAQUISTÓCRONA

Vamos deduzir essa seguindo o exposto em [1], pág. 545 - 547, a qual é apontamento histórico da resolução dada por um dos **Bernoullis, Jacques I**(1654 - 1705). Lembrando que esse faz dentro de duas premissas:

A - Trata-se de encontrar a menor curva com tempo de queda entre duas posições;

B - Se a propriedade vale para toda curva, necessariamente vale para cada pedaço desta, mesmo que apenas infinitesimal.

Apenas para efeito histórico, esse inverte os eixos, portanto, `Fig. 6`, o sentido positivo é de A para B. E do ponto de vista de queda livre temos em cada instante que $\dfrac{ds}{dt} = v = \sqrt{2\,gx} \;\therefore\; dt = \dfrac{ds}{\sqrt{2gx}}$. Isso significa que o tempo é calculável, conforme intervalo especificado, por $t = \int \dfrac{ds}{\sqrt{2gx}} = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \int \dfrac{ds}{\sqrt{x}}$ (1) e desde que a gravidade g é suposta constante, esse fator constante não precisa aparecer em todos os cálculo, apenas fazendo ajuste, quando necessário, multiplicado por este.

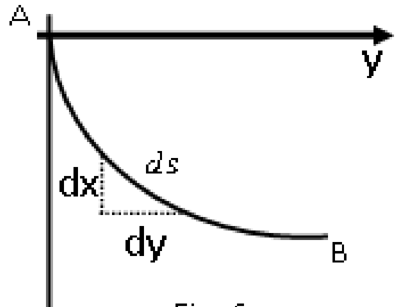


Fig. 6

Note que $\overline{ds}^2 = \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 = \overline{dx}^2\big(1 + (\dfrac{dy}{dx})^2\big) = \overline{dx}^2\big(1 + (y')^2\big) \therefore ds = \sqrt{1 + (y')^2}\ dx$ (2)

Por isso, substituindo (2) em (1): $t = \int \sqrt{\dfrac{1 + (y')^2}{x}}\ dx$

O cálculo visa determinar condições minimizantes desta. Para tanto, fixemos um pequeno trecho, `fig.7`. No intervalo $[x - h, x]$, temos: $tg(\alpha) = \dfrac{y - y_1}{h} = \dfrac{\Delta y}{h} = y'$. Nesse caso: $t_{[x-h,\ x]} = \displaystyle\int_{x-h}^{x} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{x}}\ dx = \int_{x-h}^{x} \sqrt{\frac{1 + tg^2(\alpha)}{x}}\ dx = \frac{1}{cos(\alpha)} \int_{x-h}^{x} \sqrt{\frac{1}{x}}\ dx = \frac{2[\sqrt{x} - \sqrt{x-h}\ ]}{cos(\alpha)}$. Analogamente, temos: $t_{[x,\ x+h]} = \dfrac{2[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\ ]}{cos(\beta)}$

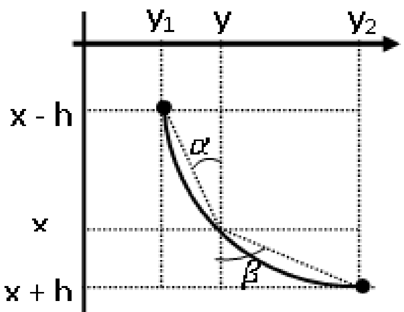


Fig. 7

Logo, $t_{[x-h,\ x+h]} = \dfrac{2[\sqrt{x} - \sqrt{x-h}\ ]}{cos(\alpha)} + \dfrac{2[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\ ]}{cos(\beta)}$

Considerando o intervalo fixo e $t_{[x-h,x+h]}$ função diferenciável em $(\alpha,\ \beta)$, ser mínimo em função desses fica: $\dfrac{[\sqrt{x} - \sqrt{x-h}\ ]sen(\alpha)\ d\alpha}{cos^2(\alpha)} + \dfrac{[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\ ]send(\beta)\ d\beta}{cos^2(\beta)} = 0$ (3)

Ainda, $tg(\alpha) = \dfrac{y - y_1}{h} \therefore h\ tg(\alpha) = y - y_1$ e $tg(\beta) = \dfrac{y_2 - y}{h} \therefore h\ tg(\beta) = y_2 - y$. Com isso, $h\ [tg(\alpha) + tg(\beta) = y_2 - y_1 =$ constante.

E novamente, como função de $(\alpha,\ \beta)$, $\dfrac{d\alpha}{cos^2(\alpha)} + \dfrac{d\beta}{cos^2(\beta)} = 0 \therefore \dfrac{d\alpha}{cos^2(\alpha)} = -\dfrac{d\beta}{cos^2(\beta)}$ (4)

Substituindo (4) em (3), obtemos: $[\sqrt{x} - \sqrt{x-h}\ ]sen(\alpha) = [\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\ ]send(\beta)$ e racionalizando ambos os termos:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-h}}\,[\sqrt{x}-\sqrt{x-h}\,]sen(\alpha)=\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\,[\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\,]send(\beta)\therefore$$
$$\frac{sen(\alpha)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-h}}=\frac{send(\beta)}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}(5)$$

Do ponto de vista a `Análise Infinitesimal`, a equação (5) é válida para todo ponto da **Braquistócrona** e para todo valor de h, portanto, *podemos* tomar $\frac{sen(\alpha)}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ como uma constante. Por outro lado, `fig.7`, $\frac{dy}{ds}=sen(\alpha)\therefore dy=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\gamma}}ds=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Assim $(\frac{dy}{dx})^2=\frac{x}{\gamma}\,(1+(\frac{dy}{dx})^2)\therefore(\frac{dy}{dx})^2(1-\frac{x}{\gamma})=\frac{x}{\gamma}\therefore(\frac{dx}{dy})^2=\frac{1-\frac{x}{\gamma}}{\frac{x}{\gamma}}$, Isto é:

$$\boxed{(\frac{dx}{dy})^2=\frac{\gamma-x}{x}}$$

CONCLUSÃO

Como, a menos de notação, ambas satisfazem a mesma Equação Diferencial Ordinária - E.D.O. e, supondo tudo suave, portanto sem nenhum movimento abrupto ou atrito, os resultados de existência e unicidade de soluções de E.D.O, [9], **garantem que ambas as curvas, `Cicloide` e `Braquistócrona`, a menos de referenciais, são as mesmas.**

REFERÊNCIAS

[1] A Magia dos Números, Karlson, P, Trad. Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta, Ed. Globo, RS, 1961,

[2] Aplicações do Cálculo Variacional: Braquistócrona e o Princípio de Fermat, Macedo, D. L, Unicamp, 2004, www.ifi.unicamp.br/ lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1_2004/931601_DanielM_Rigitano_F809_RF.pdf, acesso Nov/11

[3] A Unificação das Forças Fundamentais, Salam, A., Ed. Zahar.

[4] Cálculo, V Ávila, Geraldo ol. 1,2 e 3, LTC,1995.

[5] Cálculo, Lang, S. Vol. 1 e 2, Ed. LTC, 1970

[6] Cálculo Avançado, Kaplan, W , Vol. 1 e 2, Ed.Edgard Blucher, Ltda, 1972.

[7] Cálculo e Álgebra linear, Kaplan, W e Lewis D.J, Vol. 1, 2 Ed. LTC, 1973.

[8] Cálculo com Geometria Analítica, Larson, R.E, Hostetler, R. P. e Edwards, B.H. - Vol. 1, 2, 5ª edição, LTC.

[9] Equações Diferenciais Ordinárias, Arnold, V.i., Ed. Mir, 1985

[10] História da Matemática, Boyer, C. B. 2ª edição, Ed. Edgard Blücher Ltda, tradução da Profª. Dr.ª Elza F. Gomide, IME/USP.

[11] Introdução à História da Matemática, Eves, H., Ed. Unicamp, 3ª edição, 2002.

[12] Matemática e Metafísica em Leinbiz, O Cálculo Diferencial e Integral e o Processo Psíquico-Metafísico da Percepção, Piauí, W. S., www.theoria.com.br/edicao0510/matematica_e_metafisica_em_leibniz.pdf, Acesso jul/2011

[13] Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica, Arnold, V.i., Ed. Mir,1987

[14] O grande, O Pequeno e a Mente Humana, Penrose, R., Ed. Unesp,1997.

[15] Os Elementos de Euclides, Bicudo, I., Ed.Unesp, 2009.

[16] Um Curso de Cálculo, Guidorizzi, H.L., Vol. 1,2,,3 e 4, Ed. LTC, 5ª edição, 2002.

[17] Uma Breve História do Infinito, Morris, R., Ed.Zahar