Limite, limite de sucessões e continuidade

Praciano-Pereira, T

Sobral Matemática
22 de dezembro de 2014
préprints da Sobral Matemática
no. 2014.03
Editor Tarcisio Praciano-Pereira,
tarcisio@member.ams.org

Resumo

São três assuntos de que trata este texto: sucessões, limite e continuidade. Sucessões neste texto é o resultado de conjunto de experimentos, apenas estou supondo que a "quantidade" de experimentos possa ser infinita, e concordo que aqui existe um buraco lógico e aceito críticas para melhorar o texto. Limite é um operador linear que se aplica numa sucessão produzindo um número, pelo menos é este o caso neste texto, e desta forma conseguimos definir números reais a partir de sucessões de números racionais. Limite é discutido na segunda seção. Continuidade é uma qualificação para certas funções, apenas a grande maioria das funções que usamos, são contínuas o que coloca o Cálculo numa situação difícil: selecionamos algumas funções, as contínuas, mas a aparência é a de que não existem as outras que não sejam contínuas, pelo menos para o quem está se iniciando no estudo de Matemática. Mostro que não precisa ser assim.

palavras chave: limite de sucessões, sucessões de números racionais, continuidade

There are three topics in this text: sequences, limit of sequences and continuity. Sequences, here, are the result of experiments, only I am supposing that there can be infinitely many tries and I do agree that there is something fake in this approach and I am open to discuss how this can be improved. Limit is a linear operator applied to a sequence whose output is a number, at least this is the case in this text, and this is the way I be able to define real numbers. Limit is considered at the second section. Continuity is qualifier for a class of functions but the idea of the beginner is that there are no other kind of functions but the continuous ones and this puts Calculus in a very bizarre situation. I show that it does not need to be so.

keywords: limit of sequences, sequences of rational numbers, continuity

1 Sucessões

- **sucessões** são funções definidas no conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais e tomando valores num outro espaço que caracteriza o tipo de sucessão. Exemplo, se o conjunto de chegada for $\mathbf{Q}$, o conjunto dos números racionais, dizemos que se trata duma sucessão numérica, ou uma sucessão de números racionais.

Associado às sucessões existe um funcional linear, *limite* que nos permite classificar as sucessões em duas grandes classes, *convergentes* e *divergentes*. Confira *limite* na próxima seção.

As sucessões representam resultados de experimentos e o comportamento da sucessão assim resultante caracteriza o experimento como um *sucesso*, se a sucessão for convergente, ou um *insucesso* no caso contrário.

Por exemplo, o conjunto dos números racionais é incompleto no sentido de que há sucessões de números racionais que são "convergentes" e assim definem um número, mas este número não é um número racional. Considere a sucessão P_n dos polígonos regulares inscritos num círculo de raio 1. O quociente do perímetro de P_n pelo diametro do círculo se *aproxima arbitrariamente* de um número que os gregos chamaram de π que não é possível escrever como o quociente de dois inteiros e portanto não é um número racional. Desta forma $\lim\limits_{n} \frac{P_n}{2} = \pi$ e o operador lim fornece um número que completa $\mathbf{Q}$. O conjunto de todos os números que completam $\mathbf{Q}$ é o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais, e naturalmente $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Você tem aqui um exemplo de experimento, medir o perímetro de polígonos e comparar o resultado com o diâmetro. Os gregos ou possivelmente matemáticos antes deles, observaram que este quociente produzia números muito próximos de 3.14 e extrapolaram este resultado afirmando que no caso do círculo esta razão seria um número que chamaram de π.

A definição rigorosa de limite foi feita por Bolzano, depois redescoberta por Weierstrass:

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ |n > N| \implies |s_n - l| < \epsilon \tag{1}$$

quando dizemos suscintamente que $s_n \to l$ ou também

$$\lim_{n=\infty} s_n = l \tag{2}$$

A igualdade na expressão (eq. 2) apenas quer dizer que n cresce indefinidamente.

O conjunto dos números reais, $\mathbf{R}$, é a completação dos conjunto dos números racionais. Uma das formas de *construir* o conjunto $\mathbf{R}$ consiste do seguinte *programa*:

- a imersão de $\mathbf{Q}$ no conjunto das sucessões de números racionais, isto é na identificação de $\mathbf{Q}$ como um subconjunto do conjunto de todas as sucessões de números racionais,
- restrição do conjunto de todas as sucessões ao conjunto das sucessões que satifizerem ao critério de Cauchy. Dizemos que uma sucessão $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *é de Cauchy* se for verdadeiro

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ n, m > N \implies |s_n - s_m| < \epsilon \tag{3}$$

Tais sucessões são *instrinsicamente* convergentes uma vez que a partir do índice N todos os termos da sucessão se encontram dentro da *bola* de centro s_n e raio ϵ.

- Chame de $\mathcal{C}$ este conjunto das sucessões de Cauchy de números racionais. Podemos mostrar que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ é um anel que tem divisores de zero, mas podemos eliminar os divisores de zero passando ao quociente com grupo das sucessões que convergem para zero. Como este grupo é um *ideal maximal* de $\mathcal{C}$ o quociente é um corpo: o corpo $\mathbf{R}$ dos números reais.

Este programa que é atribuido à Cauchy é bem natural pese que considerado *avançado*, possivelmente pelos aspectos algébricos que envolve. Mas o que se espera dum número real é que ele seja uma sucessão de medidas convergentes. Desta forma $\mathbf{R}$ nada mais é do que o conjunto dos limites das sucessões de números racionais. Os limites são as etiquetas das classes quocientes mencionadas no *programa* acima.

Considere o experimento mencionado acima da comparação do perímetro de uma sucessão de polígonos com o diâmetro do círculos em que eles estiverem inscritos. Em lugar de polígonos regulares inscritos, podemos considerar uma sucessao de polígonos regulares envolventes a um círculo e o resultado do experimento será equivalente, apenas os quocientes obtido serão maiores que π. Assim você vê dois exemplos de sucessões equivalentes, a *etiqueta* que registra a classe a que elas pertencem é π.

O número s_n, na equação (eq. 3) pode ser considerado um valor aproximado do limite da sucessão a menos do erro ϵ. Desta forma o critério de Cauchy é um *instrumento prático* para encontrar aproximadamente o limite duma sucessão.

Outros exemplos mais simples de números não racionais são as raízes dos números naturais que, ou são números naturais, ou são número irracionais. O ou é exclusivo. Um algoritmo geométrico que faz esta construção pode ser encontrado em [1, Capítulo 5]

Confira também *limite superior, limite inferior*

2 O operador limite

- **limite** é um funcional linear que produz um elemento completando um espaço. Esta não é a forma como este operador é tratado no Cálculo Diferencial e Integral onde ele aparece pela primeira vez nos estudos de Matemática.

No Cálculo Diferencial e Integral, limite aparece como uma metodologia para

- testar se uma função é contínua, confira *continuidade*;
- calcular derivadas, confira *derivada*;
- definir a integral de Riemann. confira integral de Riemann.

Para entender como se processa esta completação, deixe-me rapidamente repetir o experimento feito acima para calcular a razão entre o perímetro dum polígono regular convexo inscrito num círculo de raio. Para cada valor de $n \geq 3$ podemos medir o perímetro dum polígono regular inscrito num círculo. A escolha dum círculo de raio 1 apenas simplifica as contas fazendo logo aparecer as casas decimais do número que os gregos chamaram de π, do contrário apareceria o raio multiplicado, e agora também aparece, mas vale 1.

O conjunto dos números racionais que é incompleto no sentido de que há sucessões de números racionais que são "convergentes", e assim definem um número, mas este número não é um número racional. A sucessão P_n dos polígonos regulares inscritos num círculo de raio 1 permite ilustrar este caso de forma simples.

O quociente do perímetro de P_n pelo diametro do círculo se *aproxima arbitrariamente* do número que os gregos chamaram de π que não é possível escrever como o quociente de dois inteiros e portanto não é um número racional. Desta forma

$$\lim_n \frac{P_n}{2} = \pi$$

e o operador lim fornece um número que completa $\mathbf{Q}$.

Esta é uma experiência que você pode facilmente repetir, e não precisa nem mesmo se dar ao trabalho de medir o perímetro de polígonos. Se aceitar como os dados da geometria euclidiana como verdadeiros, o que inclui a trigonometria, então a partir do ângulo central de cada polígono regular convexo você pode calcular o comprimento do lado dum polígono regular convexo inscrito com n lados, e inclusive usar graus como médida dos ângulos. Neste caso o ângulo central dum setor do polígono mede $\frac{360}{n}$ graus e como cada setor define um triângulo isósceles cujos lados iguais coincidem com o raio do círculo então a metade do lado que é perpendicular a altura é $\sin(\frac{360}{2n})$ portanto um lado do polígono regular mede $2\sin(\frac{360}{2n})$.

É claro que este "experimento" envolve as definições da trigonometria, mas tudo contido na geometria euclidiana elementar como ela deveria aparecer no Ensino Fundamental. O que vai sair do âmbito do *ensino elementar* é a sugestão que vou fazer agora de colocar estes dados num simples programa de computador para ver as aproximações de π aparecerem na tela do computador. Também as linguagens de programação não reconhecem a expressão "360 graus", elas foram construidas para reconhecer π como uma medida de ângulo o que parece uma falsidade um vez que o objetivo é descobrir o valor de π.

Na verdade estou tratando duas denominaçoes diferentes para um só objeto. O objeto geométrico que é uma rotação completa em torno de um ponto, *um ângulo de 360 graus*, e uma forma de referir à mesma rotação, que é o número π com que vou usar a função trigonométrica de uma linguagem de programação. Certas calculadoras tem um botão que lhe permite usar "grau" ou "radiano" para fazer referência aos ângulos de modo que você pode abandonar a linguagem de programação e fazer o mesmo experimento usando "*360 graus*" em lugar de π se isto a fizer mais segura.

No programa que você pode ler em seguida,

- Onde deveria estar $2 * n * sin(360/2n)/2$

- está $n * sin(\pi/n)$

porque o perímetro é $2 * n * sin(360/2n) = 2 * n * sin(180/n)$ e como o diâmetro vale 2 finalemente fica $n * sin(180/n)$ representado no programa por $n * sin(\pi/n)$.

Eis o programa feito em `calc`:

```
global pi = 4*atan(1); ## (2);

define s(n) {return  n*sin(pi/n);};

define experimento(){
local n = 3, N;
printf("vou rodar experimento(N), e vou pedir-lhe o valor de  N");
printf("forneça o valor para N -->  "); scanf("%f ", N);
while (n <= N){
if (n%50 == 0){
  printf("perímetro de P(%d) é %f \n", n, s(n));
}
n++; ## (5) equivale a n = n+1;
}
printf("valor de pi usado pela linguagem é %f \n",pi);
}

experimento();
```

Para rodar este programa, coloque o texto do programa no arquivo, `teste.calc` e depois chame `calc` assim:

calc < teste.cal

e as linhas com instruções irão aparecer na tela.

O conjunto de todos os números que completam **Q** é o conjunto **R** dos números reais, e, naturalmente, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Outros exemplos mais simples de números não racionais são as raízes dos números naturais que, <u>ou</u> são números naturais, <u>ou</u> são número irracionais. O <u>ou</u> é exclusivo. Um algoritmo geométrico que faz esta construção pode ser encontrado em [1, Capítulo 5]

A definição rigorosa de limite foi feita por Bolzano, depois redescoberta por Weierstrass:

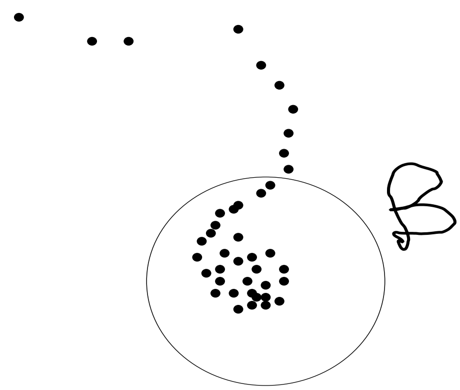
$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (|n > N| \implies |s_n - l| < \epsilon) \tag{4}$$

quando dizemos suscintamente que $s_n \to l$ ou também

$$\lim_{n=\infty} s_n = l \tag{5}$$

A igualdade com o símbolo ∞, na equação (eq. 5), é apenas uma maneira de indicar que n cresce indefinidamente.

A figura (fig 1), página 5, sugere o comportamento assintôtico duma sucessão de pontos do plano, que, a partir do N-ésimo elemento, todos



comportamento assintôtico duma sucessão de pontos do plano

Figura 1: Os pontos duma sucessão se acumulam numa bola

os elementos da sucessão se encontram dentro da bola $\mathcal{B}$. A partir da *índice* N todos os pontos se encontram dentro duma bola de raio ϵ. Se você exigir mais precisão, um valor menor para ϵ, será preciso que N seja maior, comparando, seria preciso que um computador rodasse mais *tempo* para encontrar um valor mais preciso.

Alguns exemplos

1. Convergência para zero Se $s_n = \frac{1}{n}$ então, $\lim_n s_n = 0$. N na (eq. 4) é um número natural maior do que $\frac{1}{\epsilon}$. Se $\epsilon = 0.1$ então $N \geq 11$. Este exemplo é tão importante que vou reescrever a equação (eq. 4) para este caso:

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (|n > N| \implies |s_n| < \epsilon) \tag{6}$$

que define a convergência para zero.

2. Primeiro usando a aritmética $s_n = \frac{n+1}{n}$ então, $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ pelas regras da aritmética. Pelas propriedades dos limite, confira o final do verbete, como $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ então $\lim_n \frac{n+1}{n} = 1$ e vale a mesma relação entre ϵ, N do item anterior.

3. Convergindo mais rápido para zero Se $n > m > 0$ então $\lim_k \frac{k^m}{k^n} = \lim_k \frac{1}{k^{n-m}}$ pelas regras da *aritmética*. Chame $p = n - m$, que é um

número natural diferente de zero, então, para um inteiro k_0

$$\frac{1}{k_0^p} < \epsilon \iff \frac{1}{\epsilon} < k_0^p; \tag{7}$$

$$(\exists N \in \mathbf{N})\ (\tfrac{1}{\epsilon} < N \leq k_0^p); \tag{8}$$

$$(\exists N \in \mathbf{N})\ (\sqrt[p]{\tfrac{1}{\epsilon}} < \sqrt[p]{N} \leq k_0); \tag{9}$$

$$\sqrt[p]{\tfrac{1}{\epsilon}} < \sqrt[p]{N} \leq k_0 < k; \tag{10}$$

$$\frac{1}{\epsilon} < k^p \iff \frac{1}{k^p} < \epsilon; \tag{11}$$

$$(\forall k > \lceil \sqrt[p]{N} \rceil)(\tfrac{1}{k^p} < \epsilon) \tag{12}$$

O número $\lceil \sqrt[p]{N} \rceil$ é o menor inteiro que é menor ou igual a $\sqrt[p]{N}$.

Então qualquer número inteiro positivo, maior do que $\sqrt[p]{\frac{1}{\epsilon}}$, serve no lugar de N na (eq. 4). Considere $p = 2$, e $\epsilon = 0.01$ então

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon}} = \sqrt{100} \Rightarrow N \geq 11$$

Compare com o exemplo (1).

4. Calculo de $N(\epsilon)$ computacionalmente Este exemplo tem finalidade didática, apenas! É preciso que você se convença de que não podemos *demonstrar* convergência de sucessões com um exemplo.

   É possível escrever programas de computador para verificar se uma sucessão é convergente mas praticamente cada caso é um caso...

   Mas, este exemplo pode deixar mais claro que "dado" um erro ϵ existe um índice $N \in \mathbf{N}$ a partir do qual $|s_n - l| < \epsilon$. E vou partir de uma sucessão convergente: $s_n = \frac{n+1}{n}$ do exemplo (2).

   Para rodar o programa,

   - Copie o texto para um arquivo, sugiro "teste.calc" e vou seguir usando esta sugestão, mas obviamente você pode usar o nome que desejar, apenas continue usando o mesmo nome na sequência.
   - Dentro do programa, no começo, já defini três sucessões, para lhe servir de exemplo, defina outras, mas deixe apenas uma sem comentários. No programa há duas "eliminadas" com comentários e uma "ativa", para lhe servir de exmplo.
   - abra um terminal e digite (em Gnu/Linux funciona ...) calc < teste.calc e você vair receber uma mensagem pedindo-lhe que forneça ϵ e o valor do limite, l.

   Você vair ver qual é o valor de N a partir do qual a diferença $|s_n - l| < \epsilon$.

   Claro, depois você vai precisar fazer, você mesmo, uma demonstração!

```
## três exemplos de sucessão, mas apenas um ativo.
## define s(n){return 1.0*(n+1)/n;}; ## o limite é 1
define s(n){return 1.0*n/(n+1);}; ## o limite é 1
```

```
## define s(n) {return 1.0/power(n,2);}; ## o limite é zero



define experimento(){
local n = 2, epsilon, l;
local N = 1000; ## (3)
printf("O valor do limite e de epsilon para o teste \n");
printf("aguardando para ler os valores de epsilon e l  \n");
printf("epsilon = "); scanf("%f", epsilon);
printf("l = "); scanf("%f", l);
printf("rodando com os valores: \n epsilon = %f l = %f\n",
epsilon, l);

printf("...pensando \n");
while ((n <= N) & ( abs(s(n)-l ) > epsilon)  ){
printf("...");
if (n%10 == 0){ ## (4)
  printf("n = %d abs(s(n)-l) = %f \n",
n,            abs(s(n)-l) );
}
n++; ## (5) equivale a n = n+1;
}
printf("fim dos testes \n
N = %d abs(s(n)-l) = %f \n", n, abs(s(n)-l));
}


experimento();
```

5. Um último exemplo extremamente aplicado.

   Vou fazer uma nova interpretação da figura (fig 1), página 5. Nela agora você deve ver as distintas posições dum asteroíde em rota de choque com a Terra por exemplo. Se a rota do asteroíde estiver em linha de colisão com a Terra, então o mesmo poderá dar diversas voltas em torno da Terra até finalmente entrar na atmosfera terrestre onde em muitos casos simples se vai desintegrar pelo atrito com o ar, ou em alguns casos finalmente cair no solo. Nos dois caso, desintegração na alta atmosfera, ou impacto com o solo corresponderiam ao "limite" das medidas s_n poderiam estar marcando uma posição no espaço tomando a Terra como ponto de referência, ou $t_n = |s_n|$ que poderiam ser os valores da distância do asteroíde à Terra. No caso de t_n o limite seria zero, o ponto de contacto com o solo ou ponto em que o asteróide se volatizou na atmosfera.

   É bem pedagógico assisir ao filme produzido pela European Space Agency (ESA).

   http://tarcisio.wordpress.com/tag/67pchuryumov-gerasimenko/

   Guarde-o para estiver estudando Equações Diferenciais.

Observe a diferença entre os exemplos 1 e 3.

- No exemplo 1 $N \approx \frac{1}{\epsilon}$,
- enquanto que no exemplo 3, $N \approx \sqrt[p]{\frac{1}{\epsilon}} < \frac{1}{\epsilon}$.
- usando a comparação do computador, no exemplo 3 o computador precisa rodar *menos tempo* para conseguir a mesma precisão obtida no exemplo 1. Dizemos que no exemplo 3 a sucessão converge mais rápido para zero do que no exemplo 1.
- no exemplo 3 também estão sendo comparados os polinômios k^n, k^m em que $n > m$. Numa fração em que o polinômio do numerador tiver grau menor do que o polinômio do denominador se tem convergência para zero. Se o grau do numerador foi maior do que o grau do denominador se tem "convergência" para ∞ e a maneira correta de falar é que se tem *divergência* porque ∞ não é um número.
- O quarto exemplo lhe apresenta um programa para ajudá-la a entender a relação $N(\epsilon)$, o valor de N para um erro ϵ fornecido.

Estes exemplos mostram alguns aspectos interessantes no estudo dos limites. O primeiro é um exemplo dos mais comuns e relativamente imediato e junto com o terceiro, são exemplos da *classe do zero*, as sucessões que definem o número zero.

A importância da classe do zero é grande, o caso do exemplo 2 não é uma coincidência, com frequência preciamos de identificar sequências convergindo para zero quando tentamos descobrir qual é o limite duma sucessão. Também é importante estar acostumada com a classe de qualquer número racional, confira os *limites notáveis*.

A classe do zero é um grupo aditivo, quer dizer que se duas sucessões convergirem para zero, a soma delas também converge. É mais do que um grupo, é um ideal e volto logo a esta história. Se você ainda não tiver estudo *grupo* ou *ideal*, são assuntos da álgebra, procure não dar muita importância a estas observações no texto, ou leia um pouco de álgebra e que o texto a motive para aprendê-la.

É interessante observar, também, que a classe do 1 é um grupo multiplicativo! Quer dizer, se duas sucessões convergirem para 1 então o produto delas também converge para 1.

De forma semelhante é importante ter um estoque de exemplos de sucessões que definem inteiros ou números racionais porque nem sempre conseguimos calcular exatamente limites e uma saída consiste em encontrar um intervalo onde se encontre o limite estudado. Este "estoque" de limites conhecido é comumente referido como *limites notáveis*.

Foi isto que fiz ao analisar o segundo exemplo, usei o primeiro exemplo de uma forma que é preciso salientar:

- inicialmente foi usada a *aritmética* para que surgissem expressões cujos limites fossem conhecidos,
- depois foi produzido um *salto lógico*, usando as propriedades do limite (confira o final do verbete) para deduzir o limite da nova expressão que estava sendo estudada.

O *salto lógico* é o que caracteriza que o cálculo de limites não é uma operação da artimética e neste cálculo podem aparecer entidades, como ∞, que não pertence à aritmética...

Um dos mais interessantes exemplos do uso repetido de operações aritméticas junto com saltos lógicos, é a determinação do número $e \approx 2.71828182845904523536$. Confira *limites notáveis*.

O conjunto dos números reais, $\mathbf{R}$, é a completação do conjunto dos números racionais e uma das formas de *construir* o conjunto $\mathbf{R}$ consiste do seguinte *programa*:

- A imersão de $\mathbf{Q}$ no conjunto das sucessões de números racionais. Identificamos $\mathbf{Q}$ como um subconjunto do conjunto de todas as sucessões de números racionais associando-se $a \in \mathbf{Q}$ com a sucessão constante $s_n = a$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Vou chamar de $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as sucessões de números racionais, então $\mathbf{Q} \subset \mathcal{S}$.
- Restrição do conjunto de todas as sucessões ao conjunto das sucessões que satifizerem ao critério de Cauchy. Dizemos que uma sucessão $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *é de Cauchy* se for verdadeiro

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ n, m > N \implies |s_n - s_m| < \epsilon \tag{13}$$

  Tais sucessões são *instrinsicamente* convergentes uma vez que a partir do índice N todos os termos da sucessão se encontram dentro da *bola* de centro s_n e raio ϵ. Isto significa, exatamente, que s_n é um *valor aproximado do limite*.
- Vou reutilizar a notação $\mathcal{S}$ para o conjunto de todas as sucessões de Cauchy de números racionais, então $\mathbf{Q} \subset \mathcal{S}$, porque uma sucessão constante satisfaz ao critério de Cauchy com qualquer valor estritamente positivo para ϵ.
- Podemos mostrar que $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ é um anel que tem divisores de zero, mas podemos eliminar os divisores de zero passando ao quociente com *grupo das sucessões que convergem para zero*, a classe do zero. Como este grupo é um *ideal maximal* de $\mathcal{S}$ o quociente é um corpo: o corpo $\mathbf{R}$ dos números reais.

Observe que a última ação pode parecer refinada, mas ela é comum com os números racionais desde o ensino fundamental quando se definem frações equivalentes... aqui o objetivo é o mesmo apenas com uma pintura algébrica.

Este programa, que é atribuido à Cauchy, é bem natural pese que considerado *avançado*, possivelmente pelos aspectos algébricos que envolve. Mas o que se espera dum número real é que ele seja uma sucessão de medidas convergentes. Desta forma $\mathbf{R}$ nada mais é do que o conjunto dos limites das sucessões de números racionais. Os limites são as etiquetas das classes quocientes mencionadas no *programa* acima. Como $\mathbf{R}$ é um corpo, acabei de "demonstrar" os teoremas básicos do limite, as propriedades do limite.

Propriedades do limite

- soma de limites é o limite da soma,

- produto de limites é o produto dos limites,
- como somente podemos dividir dois número reais se o segundo for diferente de zero, então o quociente de limites é o limite dos quocientes se o limite do quociente for diferente de zero.

O operador lim é um funcional linear! Valem todas as propriedades duma transformação linear. As propriedades do limite, são as propriedades dos números reais.

O número s_n, na equação (eq. 13) pode ser considerado um valor aproximado do limite da sucessão a menos do erro ϵ. Desta forma o critério de Cauchy é um *instrumento prático* para encontrar aproximadamente o limite duma sucessão quando ela for convergente e o critério de Cauchy serve para verificar se sucessão é convergente.

Infinitésimo

Até o começo do século passado havia uma palavra muito frequente em Matemática, *infinitésimo*. Os lívros de Cálculo se chamavam *Cálculo integral e infinitesimal* em que os *infinitesimais* eram as sucessões convergindo para zero. Quer dizer, as sucessões que definem o zero.

Foi preciso passar muito tempo até que os matemáticos compreendessem o simples que era: apenas uma classe de equivalência, a classe de equivalência do zero. O exemplos 1 e 3 trazem dois elementos desta classe e o que atrapalhava mesmo a compreensão é que se dividirmos o "zero" $\frac{1}{k^m}$ pelo "zero" $\frac{1}{k^n}$ o resultado pode ser "zero" ou ∞, dependendo se o maior grau estiver ou não, no denominador. Hoje apenas dizemos que são elementos com ordem de grandeza diferentes e a palavra *infinitésimo* está cuidadosamente guardada na história da Matemática.

E também ninguém deve dividir por zero... pode dar problema!

Confira também *limite superior, limite inferior*

3 Funções contínuas

- **Continuidade** é uma *propriedade* de uma *classe* de funções. Se diz que "*f é uma função contínua se o seu gráfico puder ser obtido sem que você tire o lápis do papel*". Mais a frente você encontra um exemplo mostrando que este *critério* pode ser inútil.

A *continuidade* é um conceito do Cálculo Diferencial e Integral, da Topologia que é uma teoria que foi desenvolvida em torno deste conceito e da Análise Matemática, que é a grande área da Matemática à qual estes conceitos pertencem.

Continuidade é um conceito muito intuitivo, como está expresso na frase inicial, e consequentemente muito difícil de ser formalizado. Está muito ligado ao conceito de *limite* do qual Courant dizia, "*é o vestíbulo da Matemática Superior*"...

Esta forma intuitiva de continuidade, contida na frase inicial sobre "lápis e gráfico de funções", aparece na obra de Gottfried Leibniz numa frase que ficou famosa, "*Natura non facit saltum*", a *Natureza não dá saltos*, contraditada por Darwin ao estabelecer que, sim, *a Natureza dá saltos, porém pequenos.* Em Matemática, quando houver salto, dizemos que há uma discontinuidade.

Uma das primeiras definições formais de continuidade, que se deve à Bolzano, tem a seguinte formulação

$$(\forall \epsilon)\ (\exists \delta)\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{14}$$

significando que f é contínua no ponto $x = a$. A figura (fig 2), página 11, é uma representação geométrica da equação (eq. 14). Nela você vê um

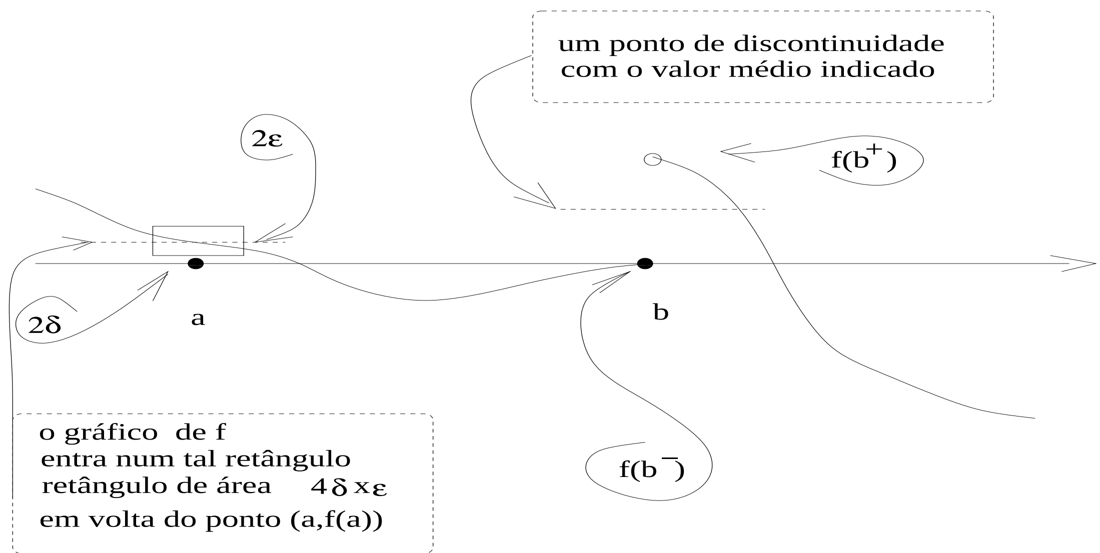


Figura 2: Interpretação geométrica da continuidade

retângulo de área $4\delta\epsilon$ e qualquer que seja a altura 2ϵ existe uma base 2δ de modo que o gráfico entra num tal retângulo, em volta do ponto $(a, f(a))$ onde f é contínua.

Isto deixa de ser verdadeiro em volta do ponto $(b, f(b))$ que pode até mesmo não estar definido. Dizemos que o ponto $x = b$ é um ponto de salto da função f, ou que $x = b$ é um ponto de discontinuidade de f. Algumas vezes é possível calcular-se o valor médio num ponto de descontinuidade de f como está indicado na figura (fig 2) e neste caso esse valor seria o valor mais conveniente para f e é possível então verificar que "*existe um ϵ para o qual não é possível encontrar δ para satisfazer a (eq. 14)*, relativamente ao ponto $x = b$. $x = b$ é um ponto de salto de f.

Num ponto de *salto finito* é possível determinar o valor à esquerda, $f(b^-)$ e o valor à direita, $f(b^+)$ que aparecem indicados no gráfico na figura (fig 2) com duas bolinhas, uma preenchida com preto, o valor à esquerda, $f(b^-)$, e a outra na cor do papel, o valor à direita, $f(b^+)$. O valor médio é

$$\frac{f(b^-) + f(b^+)}{2} \tag{15}$$

se existir, porque o salto por ser *infinito*.

A definição contida na equação (eq. 14) é *definiçao local* de continuidade. Nesta definição se diz que f é contínua no ponto $x = a$. Existe uma definição de continuidade global, em que dizemos apenas, *f é contínua*, o que significa que é contínua em todos os pontos do domínio de definição.

Usando a notação de espaços métricos posso traduzir a equação (eq. 14) assim

$$(\forall\epsilon)\ (\exists\delta)\ (d(x,a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \epsilon) \tag{16}$$

e como $d(x,a) < \delta$ significa que x pertence a uma *bola aberta* centrada em $\underline{a}$ e com raio $\underline{\delta}$,

$$x \in \mathcal{B}(a,\delta) \implies f(x) \in \mathcal{B}(a,\epsilon) \tag{17}$$

se pode chegar assim à formulação de continuidade global da topologia:

$$(\forall\mathcal{O} \text{ aberto de } Y)\ (\exists\mathcal{B} \text{ aberto de } X)\ f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O} \tag{18}$$

Mas esta não é definição *usual* de continuidade da topologia e sim uma consequência, ou um corolário. A definição *usual* é

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ é uma função contínua } X \xrightarrow{f} Y; \\ (\forall\mathcal{O} \text{ aberto de} Y)\ (f^{-1}(O) \text{ é um aberto de } X); \end{array}\right. \tag{19}$$

de onde se pode deduzir a equação (eq. 18) uma vez que sendo O um aberto de Y então $f^{-1}(O)$ é um aberto de X portanto existe um aberto $\mathcal{B}$ de X tal que

$$f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}; \tag{20}$$

No Cálculo existe uma outra forma de definir continuidade, chamada *continuidade sequencial* que é muito mais simples apesar de ser considerada *mais avançada*. Considere uma sucessão $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ convergindo para o ponto $x = a$:

$$s_k \longrightarrow a; \tag{21}$$

$$\text{Se } f \text{ for contínua no ponto } x = a \text{ então} \tag{22}$$

$$y_k = f(s_k) \longrightarrow f(a); \tag{23}$$

Quer dizer que as funções contínuas preservam a convergência. Observe analisando a figura (fig 2) que se uma sucessão $(t_k)_{k\in\mathbf{N}}$ convergir para $x = b$ a sucessão imagem $(f(t_k))_{k\in\mathbf{N}}$ pode ser divergente, pode ter como limite $f(b^-)$ ou $f(b^+)$. Por exemplo, se $(t_k)_{k\in\mathbf{N}}$ oscilar a volta de $x = b$ então a sucessão imagem será divergente. Num ponto de salto f *pode* não preservar a convergência de alguma sucessão o que implica na falha da *continuidade sequencial*.

A continuidade sequencial permite o enunciado dum critério muito útil para testar a continuidade que é “comutatividade” entre f, lim estabelecendo quando f é contínua no ponto $x = a$

$$\lim_k f(t_k) = f(\lim_k t_k); \tag{24}$$

Esta troca de símbolos permite a criação de funções contínuas a partir de expressões complicadas como $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ que não está definida para $x = 0$. Mas, como podemos provar que o limite desta expressão no zero é zero, então podemos redefinir f como $f(0) = 0$ obtendo a função contínua

$$\begin{cases} \text{Se } x \neq 0 f(x) & = x\sin(\frac{1}{x}; \\ \text{Se } x = 0 f(x) & = 0; \end{cases} \tag{25}$$

e aqui você tem um *exemplo duma função contínua cujo gráfico não pode ser feito sem que se retire a ponta do lápis do papel...*

A respeito de funções do tipo mostrada na equação (eq. 25), posso mencionar alguns conceitos que você deverá encontrar em outro lugar, como *oscilação*, *limite superior* e *limite inferior* . A função $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ tem oscilação $\omega_f(0) = 0$ e isto implica que é possível calcular-se o seu limite no ponto zero.

Do texto se deduz que o conceito de limite é um prerequesito para discutir a continuidade. Isto não é verdade e aqui voltamos a ver que a continuidade é mais difícil do que parece...nos espaços topológicos o conceito de limite fica difuso e algumas vezes simplesmente deixa de ter sentido quando topologia é muito rica. É quando aparece o conceito de *ponto de acumulação* que é uma das formas de generalizar o *limite*. É neste momento que a equação (eq. 19) é usada como definição de continuidade. A equação (eq. 19) se verifica extremamente fléxivel para ser usada em demonstrações e junto com continuidade sequencial são as duas formas mais simples de caracterizar a continuidade. O defeito da continuidade sequencial é que ela está associada às topologias semelhantes a que a reta real tem como *topologia usual* associadas *riqueza* de abertos da topologia.

A leitora pode ver que onde se encontra a razão da dificuldade inicial do Cálculo: *limite e continuidade*. Outra razão desta dificuldade se encontra no fato de que a grande maioria das funções que utilizamos são contínuas: polinômios, funçoes trigonométricas, desconsiderando a tangente e a cotagente, exponencial, módulo e logaritmo. Mais do que isto, se duas funções f, g forem contínuas, então as funções $f + g, -f, -g, fg, fog, gof$ também são contínuas valendo a afirmação tanto para a continuidade local como global. E se o limite de g no ponto $x = a$ for diferente de zero, então f/g será contínua no ponto $x = a$, continuidade local, portanto.

Estas propriedades estabelecem um estoque imenso de funções contínuas que cobre a grande maioria das funções que usamos no quotidiano. Quem está se iniciando no Cálculo tem a impressão que *descontinuidade* é um conceito inventado para usar em provas... Na verdade o próprio exemplo da divisão mostra que é fácil construir exemplos de funções que deixam de ser contínuas n'algum ponto como é o caso das funçoes trigonométricas *tan, cotan* ou de qualquer função racional cujo denominador tenha zeros.

Na verdade é preciso avançar um pouquinho mais para compreender que a continuidade é essencial e aparece de forma natural. A derivação oferece esta oportunidade. Considere a função módulo,

$$f(x) = |x|; \tag{26}$$

uma função contínua cujo gráfico é formado, à esquerda do zero pela semireta de equação $y = -x$ e à direita do zero pela semireta de equação $y = x$. Confira o gráfico na figura (fig 3), página 14,

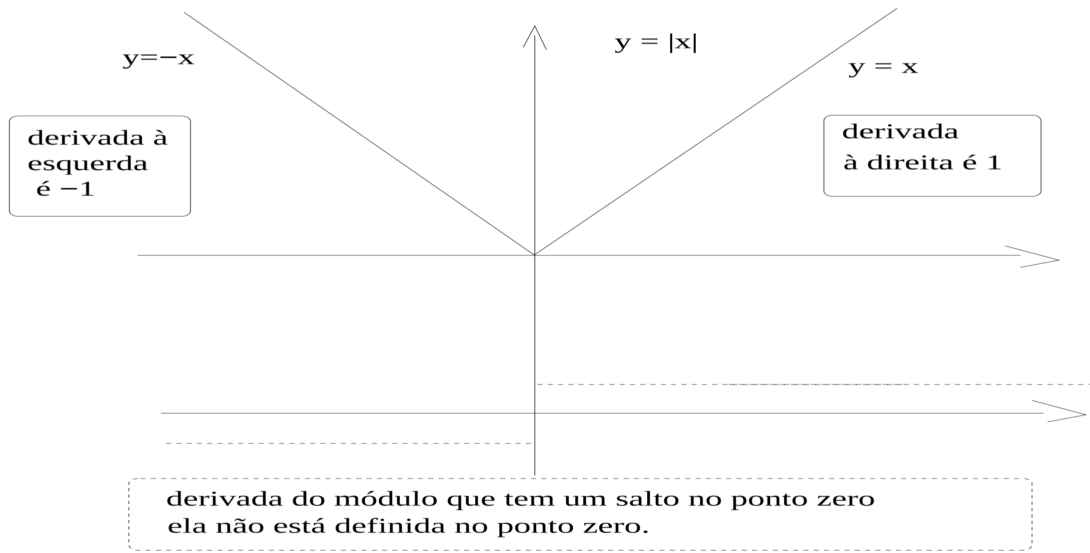


Figura 3: A derivada de $f(x) = |x|$ é descontínua no zero

Como a derivada duma função num ponto onde o gráfico seja um segmento de reta é exatamente o coeficiente angular da reta, então derivada à esquerda é -1 e a derivada à direita é 1. Na figura (fig 3) você pode ver dois gráficos sincronizados, o segundo é o gráfico da derivada do módulo que tem um salto no ponto zero onde ela não está definida.

Então a função módulo é contínua e é *quase sempre derivável*, não sendo derivável apenas no zero onde a derivada tem um ponto de salto. Os valores laterais da derivada do módulo são

$$|0^-|' = -1; |0^+|' = 1; \tag{27}$$

consequentemente a derivada do módulo não existe no zero.

Qualquer função cujo gráfico seja uma poligonal, como as que aparecem com frequência ilustrando estatísticas, podem apresentar este fenômeno em que suas derivadas sejam descontínuas.

Mas, ao estudar a equação do movimento dum carro você verá outro exemplo simples e quotidiano de descontinuidade: da aceleração. Cada vez que o motorista troca a marcha há um salto na aceleração.

- a aceleração tem saltos nas trocas de marcha;
- a velocidade em geral será contínua, mesmo nas freiadas bruscas ou nas trocas de marcha;
- o gráfico do movimento será contínuo, e derivável, com derivada contínua.

Este exemplo mostra que existe uma descontinuidade escondida na segunda derivada de uma função, no caso da função do movimento. Este fato dá aso à criação de *classes de continuidade* que ficam marcadas pela continuidade até uma certa ordem de derivada. O movimento dum corpo seria de classe $\mathcal{C}^1$ porque se tem continuidade até a derivada de primeira ordem e a continuidade é perdida na derivada de segunda ordem, quando a aceleração tiver pontos de salto.

O estudo da continuidade e do limite pode se alongar por dezenas de páginas, sendo um verbete de dicionário apenas um resumo rápido não pode se alongar na análise de todas as nuances do conceito. Vou terminar apresentando a demonstração da afirmação de que soma e produto de funções contínuas, continuidade global, é também uma função contínua. Vou fazer a demonstração no caso real para usar a continuidade sequencial o que cobre as necessidades do Cálculo. Vale, obviamente, para o caso local permitindo escrever-se um teorema semelhante para a divisão de funções que inclua a restrição sobre os zeros da função no quociente.

- Então considero duas funções, f, g que sejam globalmente contínuas e uma sequência qualquer $t_k \longrightarrow x \in \mathbf{R}$.
- então as sequencias imagens $f(t_k), g(t_k)$ convergem

$$f(t_k) \longrightarrow f(x); g(t_k) \longrightarrow g(x)$$

- e como *o limite da soma é a soma dos limites* então,

$$f + g(t_k) \longrightarrow f + g(x)$$

Esta demonstração tem uma lacuna contida na frase “ *o limite da soma é a soma dos limites*” que uma propriedade do “limite” que está sendo usada aqui. Também estou usando implicitamente que a função “*soma*” definida no espaço $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ é uma função contínua e no texto anterior não há nenhuma menção à definição de continuidade de funções duas variáveis.

Esta observação serve para que a leitora sinta como é difícil manter um sistema lógico completo e sem bolhas. Não pode ser a pretensão do autor dum verbete de dicionário atingir esta perfeição, assim como também tem que ficar claro que melhoras do texto podem ser alcançadas pela crítica colaborativa. Mas seria desonesto não apontar as falhas. Seria preciso alertar para o fato de que $\mathbf{R}$ é apenas um conjunto de sucessões convergentes de números racionais e que portanto o conceito de limite pertence à construção dos números reais o que torna o teorema sobre limite mencionado acima apenas um propriedade dos números reais, coisa que fica invisível dentro dos cursos de Cálculo.

Um resultado semelhante pode ser proposto para o produto de funções que é uma função contínua se cada fator o for. Novamente aqui está envolvida a continuidade do produto como função bilinear de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ e dum teorema sobre o produto de limites, que, novamente, é apenas um propriedade dos números reais.

Para terminar um teorema que ficará completamente contido no texto. Se

$$\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}, \mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$$

forem funções contínuas então as composições de função fog, gof são contínuas.

Porque, como f é contínua, então para toda sequência convergente $t_k \longrightarrow x$ se produz uma sucessão convergente $y_k = f(t_k) \longrightarrow f(x)$ e pela continuidade de g se transforma a sucessão convergente $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ n'outra sucessão convergente

$$z_k = g(y_k) = g(f(t_k)) \longrightarrow g(f(x)) = gof(x)$$

provando a convergência da função composta gof. É semelhante a prova de que fog é contínua.

Referências

[1] T. Rodrigues dos Santos, S. e Praciano-Pereira. *Introdução à Matemática Universitária*. Sobral Matemática, 2009.