Produto de convolução de funções contínuas

Praciano-Pereira, Tarcisio *

Sobral Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
26 de dezembro de 2014
tarcisio@member.ams.org
préprints da Sobral Matemática
no. 2014.01
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Neste artigo demonstro, detalhadamente, que $h = f * g$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ se apenas f, g forem funções contínuas e a suporte compacto. Além disto apresento um sistema de programas em *python* que podem ser usados para fazer simulações com a convolução. A condição sobre o suporte ser compacto pode ser aliviada para um dos fatores no produto por convolução, o que vou mostrar nas considerações finais.

palavras chave: convolução, diferenciabilidade do produto de convolução, funções à suporte compacto.

The point with this paper is to show that the product of convolution defines continuously differentiable functions from a pair of continuous functions with compact support. In addition I present a collection of python programs to produce simulations with convolution. The restriction of compactness of the support can be dropped from one of the convolution factors, this will be shown in last part.

keywords: convolution, differentiabilility of convolution product, compact support fuctions.

*tarcisio@member.ams.org

1 O que é a convolução

Um pouco de história para justificar que um resultado não tão importante mereça alguma coinsideração na produção de uma demontração elementar, que é o objetivo deste trabalho.

Entre 1932 e 1957, muito se escreveu sobre $f * g$, confira [4] onde está registrada uma troca de correspondência entre Rudin e Dieudonné em que este último pede que Rudin lhe mostre onde estaria o erro em sua demonstração a respeito da álgebra $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Rudin acabava de anunciar uma melhora dum famoso resultado de Salem, [5], [6], estabelecedo que

$$\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n) * \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n) = \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n) \tag{1}$$

e Dieudonné havia demonstrado uma inclusão estrita em vez de igualdade apresentando um exemplo de função de $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ que não podia ser o produto de convolução de duas outras funções de $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$.

A importância da convolução para os dias de hoje aparece no que chamo de *programa de Widder*, [8] em que ele esboça o projeto de representar os operacores integrais como operadores de convolução sobre que falo um pouco mais em seguida.

Até 1950 o produto de convolução aparecia nos capítulos avançados dos livros de Cálculo como um método de regularização de funções, tornava contínuas as funções descontínuas, mas não passava dum instrumento teórico porque pela definição:

$$(f, g) \mapsto h; h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = f * g(x); \tag{2}$$

já era um *exercício* assustador.

A convolução já teria aparecido nos trabalhos de D'Alembert em 1754, [9, Convolution], aliás, também nesta citação,[9, Convolution], você irá encontrar um interessante gráfico mostrando porque a convolução é algumas vezes chamada de "*média viajante*", ou "*travelling mean*". O artigo citado, da Wikipedia, mostra que os instrumentos computacionais que se encontram à nossa disposição hoje é que recuperaram a convolução para torná-la a ferramenta que que Widder e Hirschman anteviram como a "solução" para entender os operadores diferenciais na década de 40. Também mais a frente, neste artigo, estarei apresentando alguns programas que lhe vão oferecer a oportunidade de repetir as experiências com a convolução usadas aqui asssim como alterá-los para que você faça as suas próprias experiências ou utilize modificações destes programas como ferramentas didáticas em aulas de Cálculo.

Em vários artigos, Widder e Hirschman começaram a montar uma teoria geral da convolução com a aparente ideia de que os operadores de convolução representariam uma forma generalizada de trabalhar com operadores diferenciais, ver [8] para ter uma ideia, é um artigo livremente distribuido no site da American Mathematical Society. Eles não estavam errados, são os operadores de convolução que representam uma grande parte das "*simulações*" com que os operadores são estudados para compreender o comportamento das soluções das equações diferenciais parciais que é a forma como atualmente se estudam este tipo de equações.

A *medida de Dirac* com frequência chamada erroneamente de "*função de Dirac*", é a unidade relativamente ao produto de convolução apresentando o excitante problema duma álgebra de funções cuja unidade não pertence à álgebra:

$$(f, \delta_0) \mapsto f; f = f * \delta_0; \tag{3}$$

Mas $f * g$ não pode ser definida arbitrariamente porque a integral precisa existir o que se resolve localizando a teoria num *espaço vetorial de funções* apropriado para trabalhar com operadores de convolução, ou se deixa esta questão em aberto como parte do *problema* aguardando que construção da teoria finalmente feche a questão de forma harmoniosa.

Para o contexto deste artigo vou deixar a convolução bem definida, sem muito mais Matemática do que *uma estudante de Cálculo* possa, com algum esforço extra, acompanhar, considerando uma álgebra de funções à suporte compacto, então a convolução é uma operação interna desta álgebra. As funções características são exemplos de tais funções portanto estou num contexto realístico no qual vou desenvolver o próximo parágrafo.

O objetivo deste artigo é a demonstração dum teorema bem conhecido mas cuja demontração você terá grande dificuldade de encontrar feita, eu procurei e não a encontrei! É uma classe de resultados que todos conhecem e usam, um resultado que todo mundo sabe que é verdadeiro, digamos, um *exercício avançado* e na verdade você vai ver que ele se enquadra na lista dos teoremas cuja fronteira de validade é *difusa*, isto ficará claro na seção final do artigo.

2 Quando $f * g$ é de classe $\mathcal{C}^1$

O objetivo desta seção é a demonstração do teorema

Teorema **1 (diferenciabilidade contínua)** *da convolução*

Se f, g forem funções reais contínuas e a suporte compacto então $h = f * g$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$.

Dem *:*

Deixe-me fazer uma suposição e estabelecer uma **notação**,

$$suporte(f) = [A, B]; f(t) = 0; t \notin [A, B];$$

Este será o significado das variáveis A, B a partir de agora.

Por definição

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = f * g(x); \tag{4}$$

$$h(x) = \int_{A}^{B} f(t)g(x-t)dt; \tag{5}$$

$$h(x) = -\int_{x-A}^{x-B} f(x-u)g(u)du = \int_{x-B}^{x-A} f(x-u)g(u)du; \tag{6}$$

em que x é um parâmetro no integrando, um tipo de equação chamada de "integral dependendo dum parâmetro" *e que pela operação usualmente chamada de* mudança de variáveis *posso reescrever no formato da equação (eq. 2.6).*

Vou usar o lema do valor médio das funções contínuas:

$\boxed{\text{Lema}}$ **1 (do valor médio para funções contínuas)** *Se $\phi : [a,b] \longrightarrow [m,M]$ for uma função contínua e sobrejetiva, então dado qualquer $q \in [m,M]$ existe pelo menos um $p \in [a,b]$ tal que $\phi(p) = q$.*

$\boxed{\textbf{Dem}}$:

Não caberia fazer uma demonstração já que é um conhecido teorema dos livros de Análise na reta, mas é instrutiva a forma de demonstração que vou usar porque estarei introduzindo um algoritmo *que não é usado nas demonstrações e que será usado logo neste artigo.*

Se ϕ for função contínua, é integrável à Riemann sobre qualquer intervalo compacto $[a,b]$ e

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \phi(x)dx \in [m,M]$$

é o valor médio integral de ϕ em $[a,b]$ e como

$$x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad m \leq \phi(x) \leq M; \tag{7}$$

$$\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b m dx = m \leq \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b \phi(x)dx \leq \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b M dx = M; \tag{8}$$

$$x \in [a,b[\quad \Rightarrow \quad m \leq \tfrac{1}{b-x}\int\limits_a^x \phi(t)dt \leq M; \tag{9}$$

Mas dado $q \in [m,M]$ vou colocar a equação:

$$\Phi(x) = \frac{1}{x-a}\int\limits_a^x \phi(t)dt = q \in [m,M];$$

- *Suponha, por absurdo que $\Phi(x) < q$, para qualquer que seja $x \in [a,b]$, então ϕ não é sobrejetiva!*
- *Suponha agora, por absurdo, que $\Phi(x) > q$, para qualquer que seja $x \in [a,b]$ e então novamente ϕ não é sobrejetiva!*

Então, pela lei do terceiro excluso deve haver $p \in [a,b]$ tal que $\Phi(p) = q$. $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Usei a demonstração clássica de que $[m,M]$ é um conjunto conexo escondida na demonstração por absurdo.

Observação 1 *Valor médio integral*

$q \in [m,M]$ é um valor médio de ϕ à volta de $p \in [a,b]$. Observe que $q = M$ ou $q = m$ são duas possibilidades inteiramente legais para um valor médio.

$$p, p+\epsilon \in [a,b) \quad \Rightarrow \quad q = m(\phi)_{p,\epsilon} = \tfrac{1}{\epsilon}\int\limits_p^{p+\epsilon} \phi(t)dt; \tag{10}$$

$$p = b, \epsilon < (b-a) \quad \Rightarrow \quad q = m(\phi)_{p,\epsilon} = \tfrac{1}{\epsilon}\int\limits_{p-\epsilon}^{p} \phi(t)dt; \tag{11}$$

é <u>um</u> valor médio integral de ϕ <u>à volta</u> de p que vai interessar-me. O valor médio integral *depende do intervalo considerado sendo esta a razão da notação*

$$q = m(\phi)_{p,\epsilon}; \tag{12}$$

Como consequência do lema 1 e do Teorema Fundamental do Cálculo Integral, se ϕ for uma função contínua então posso "eliminar" m, ϵ, na equação (2.12):

$\boxed{\text{Lema}}$ **2 (Primitiva e derivada)** *Seja ϕ uma função contínua definida em $[a, b]$. A função $h_a(x) = \int\limits_a^x \phi(t)dt$ é de classe $\mathcal{C}^1$ com*

$$h_a'(q) = \lim_{\epsilon=0} m(\phi)_{q,\epsilon} = m(\phi)_q = \phi(q); \tag{13}$$

A leitora deve reconhecer que a notação h_a tem objetivo de fazer referência à primitiva com condição inicial $\underline{a}$ e na sequência vou omitir esta referência para simplificar a simbologia ficando implícito da integral que se trata duma primitiva com condição inicial indicada.

Sendo preciso observar que

- *para $x = b$ é a* derivada à esquerda *que se tem,*
- *para $x; a < x < b$ pela definição do limite no (lema 2) está definida a* derivada à direita
- *para $x = a$ se tem apenas* derivada à direita.

Quero aplicar o (lema 2) ao produto de convolução das duas funções contínuas f, g que estou supondo que são à suporte compacto. Para aproveitar a notação do (lema 2) vou usar o intervalo $[a, b]$ como a soma de conjuntos dos suportes de f e de g, que é o suporte da função $f * g$ e os cálculos seguintes nos conduzem à conclusão do nosso objetivo imediato, a demonstração do teorema 1:

$$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = f * g(x) = \int\limits_a^b f(t)g(x-t)dt; \tag{14}$$

$$h(x) = -\int\limits_{x-a}^{x-b} f(x-u)g(u)du = \int\limits_{x-b}^{x-a} f(x-u)g(u)du; \tag{15}$$

$$\textit{Considere } x \in [a, b[\textit{ então } \exists \epsilon > 0; \tag{16}$$

$$h(x+\epsilon) - h(x) = \int\limits_{x-b+\epsilon}^{x-a+\epsilon} f(x+\epsilon-u)g(u)du - \int\limits_{x-b}^{x-a} f(x-u)g(u)du; = \tag{17}$$

$$= -\int\limits_{x-b}^{x-b+\epsilon} f(x-u)g(u)du + \tag{18}$$

$$+ \int\limits_{x-b+\epsilon}^{x-a} (f(x+\epsilon-u) - f(x-u))g(u)du + \tag{19}$$

$$+ \int\limits_{x-a}^{x-a+\epsilon} f(x+\epsilon-u)g(u)du; \tag{20}$$

$$h'(x) = \lim_{\epsilon=0} \frac{1}{\epsilon} \int\limits_{x-b+\epsilon}^{x-a} (f(x+\epsilon-u) - f(x-u))g(u)du \tag{21}$$

O limite nas equações (eq. 2.18) e (eq. 2.20), sob divisão por ϵ, é um cálculo de valor médio *e quando $\epsilon = 0$ vale zero, resta calcular o limite na equação (eq. 2.21). Mas é mais simples retomar a equação (eq. 2.14) e recalcular $h(x+\epsilon) - h(x)$.*

Observe-se, en pasant*, que se eu tivesse a hipótese de diferenciabilidade de f, que não tenho, poderia deduzir da equação (eq. 2.21) a conhecida fórmula de diferenciação da convolução*

$$h'(x) = \lim_{\epsilon=0} \frac{1}{\epsilon} \int\limits_{x-b+\epsilon}^{x-a} (f(x+\epsilon-u) - f(x-u))g(u)du = \left(f' * g\right)(x) = \left(f * g'\right)(x) \tag{22}$$

valendo o termo à direita com a hipótese de diferenciabilidade de g.

Aqui vale um comentário que põe em evidência a dificuldade desta demonstração, o que aliás justifica que ela seja feita detalhadamente. O valor de $h'(x)$ não é óbvio e nem existe como uma expressão simples e isto é bem conhecido ao longo dos 300 anos de uso desta operação "intrigante".

A convolução é responsável pelo fenômeno de Gibbs *devido ao* valor médio *usando o núcleo de Dirichlet, por exemplo, e ao regularizar uma função descontínua ela elimina a Dirac calculando um ponto médio do salto. Num ponto de salto a transformada de Fourier passa no ponto médio do salto. Em suma, não é possível exibir-se uma expressão simples, envolvendo valores de f e de g no cálculo de $h'(x)$. Os programas usados nas simulações deste artigo servem para deixar isto claro, e também mostram a tentativa falha deste autor na busca desta formulação simples em algum caso especial, por exemplo uma expressão semelhante à derivada do produto, usando a convolução como transformação bilinear.*

O cálculo impossível de ser feito na equação (2.22) é ilustrativo:

- $h' = f' * g$;
- $h' = f * g'$;
- *Nenhum dos dois resultados acima...*

Para demonstrar a existência da derivada, na impossibilidade de um cálculo rápido a partir da equação (eq. 2.21) eu vou retormar as contas a partir da equação (eq. 2.14).

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_a^b f(t)g(x-t)dt; \tag{23}$$

$$h(x+\epsilon) - h(x) = \int_a^b f(t)(g(x+\epsilon-t) - g(x-t)); \tag{24}$$

$$\|h(x+\epsilon) - h(x)\| \leq (b-a)\|f\|_\infty \int_a^b |g(x+\epsilon-t) - g(x-t)|dt; \tag{25}$$

$$\|h(x+\epsilon) - h(x)\| \leq (b-a)\|f\|_\infty \int_a^b |\breve{g}(t-x-\epsilon) - \breve{g}(t-x)|dt; \tag{26}$$

$$\|h(x+\epsilon) - h(x)\| \leq (b-a)\|f\|_\infty \|\breve{g}_{x+\epsilon} - \breve{g}_x\|_1; \tag{27}$$

Nas equações (2.26) e (2.27) aparece a distância em $\mathcal{L}^1_m(\mathbf{R})$ das translatadas da função contínua $\breve{g}$, por $x+\epsilon$ e x, uma vez que, se g for contínua também $\breve{g}$ o será. O índice m, em $\mathcal{L}^1_m(\mathbf{R})$ se refere a à medida de Lebesgue da reta.

Em $\mathcal{L}^1_m(\mathbf{R})$ a translação é uma função linear contínua, e isto significa que dado ρ, existe ϵ tal que $\|\breve{g}_{x+\epsilon} - \breve{g}_x\|_1 < \rho$ para números reais positivos, ρ, ϵ. Como a translação é linear, então $\rho = C\epsilon$, é um múltiplo de ϵ, e C é uma constante muito particular que é específica de cada transformação linear muito à maneira do que acontece na Álgebra Linear a dimensão finita, mais característico ainda no caso da Álgebra Linear de dimensão 1, $x \mapsto Cx; C \in \mathbf{R}$, em que C é a própria matriz. Em dimensão maior do que 1, mas ainda finita, C é uma constante a ser deduzida das entradas da matriz da transformação linear. Aqui estou usando um conhecido teorema que estabelece que as funções lineares são Lipschitz-contínuas e C é a constante de Lipschitz da translação.

C é a chamada comumente de "módulo de continuidade" porque corresponde à norma da transformação linear como elemento dum espaço vetorial normado de funções *, no caso da translação $C = 1$, quando a medida for invariante por translação, e é o caso da medida de Lebesgue. Assim tenho*

$$\|\tfrac{h(x+\epsilon)-h(x)}{\epsilon}\| \leq (b-a)\|f\|_\infty \|\breve{g}_{x+\epsilon} - \breve{g}_x\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty \rho; \tag{28}$$

$$\|\tfrac{h(x+\epsilon)-h(x)}{\epsilon}\| = (b-a)\|f\|_\infty \epsilon = O(\epsilon); \tag{29}$$

implicando que

$$\lim_{\epsilon=0} \frac{h(x+\epsilon) - h(x)}{\epsilon} = h'(x) \tag{30}$$

existe para cada $x \in [a, b[$.

Para $x = b$ se obtem a derivada à esquerda bastando apenas usar $h(x-\epsilon) - h(x)$ em lugar de $h(x+\epsilon) - h(x)$. No ponto $x = a$ também o que obtive foi a derivada à direita.

Para terminar apenas uma observação, $h'(x)$ nada mais é do que o valor médio integral da função $t \mapsto f(t)g(x-t)$, à volta do ponto x, *que é uma função contínua portanto h' é contínua sendo $h = f * g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, pelo lema 2.*

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

2.1 Simulações com um programa em `Python`

Fiz algumas simulações com um programa em `Python` apresentado num apêndice ao final do artigo que pode ser baixado de [3, Convolucao02_py]. Ele foi usado para para conseguir evidências computacionais dos resultados, na verdade tentativas para encontrar uma fórmula simples, n'algum caso, para $h'(x)$. Eu estava com tentando encontrar uma fórmula que se assemelhasse à do produto para derivadas, usando agora o produto por convolução como uma transformação bilinear, e minhas tentativas falharam.

As tabelas (tab. 1), (tab. 2), (tab. 3) que também se encontram ao final, no apêndice, que foram também geradas pelo programa em `Python`, mostram três simulações da equação (2.21) feitas com o programa com tres valores para ϵ indicados no cabeçalho de cada uma das tabelas.

A tabela 4, que também está apresentada no apêndice, mostra o resultado da simulação usando $f, g = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ na qual podemos ver alguns resultados curiosos pelo fato de serem produzidos por um programa, na terceira coluna, usando $\epsilon = \frac{1}{10^5}$ aparece o número ± 1999.99 para o qual não consegui uma explicação. Usando $\epsilon = \frac{1}{10}$ o valor que aparece é ± 0.95 quando minha expectativa seria a de que aparecessem valores grandes em valor absoluto apenas nos pontos de salto, mostrando a presença da Dirac. O programa, [3, Convolucao02_py], está disponível para quem desejar analisar algum erro no algoritmo, eu agradeceria um retorno.

A figura (1) página 6, mostra o produto da função triângulo com suporte

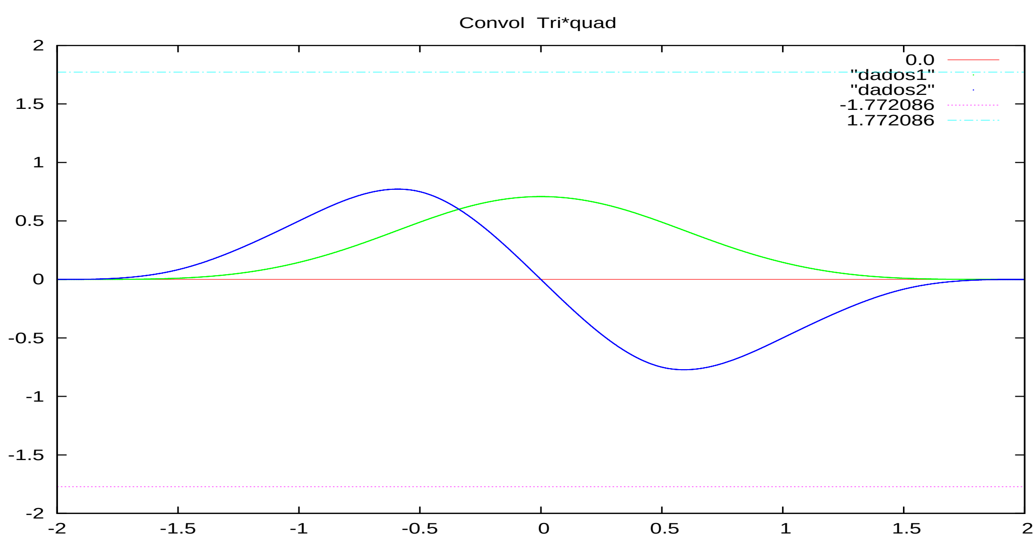

Figura 1: produto de convolução $Tri * quad$

$[-1, 1]$ e um 2-splines que tem o mesmo suporte $[-1, 1]$ e a figura (2) página 7, mostra o produto de convolução da função triângulo por ela mesma. O

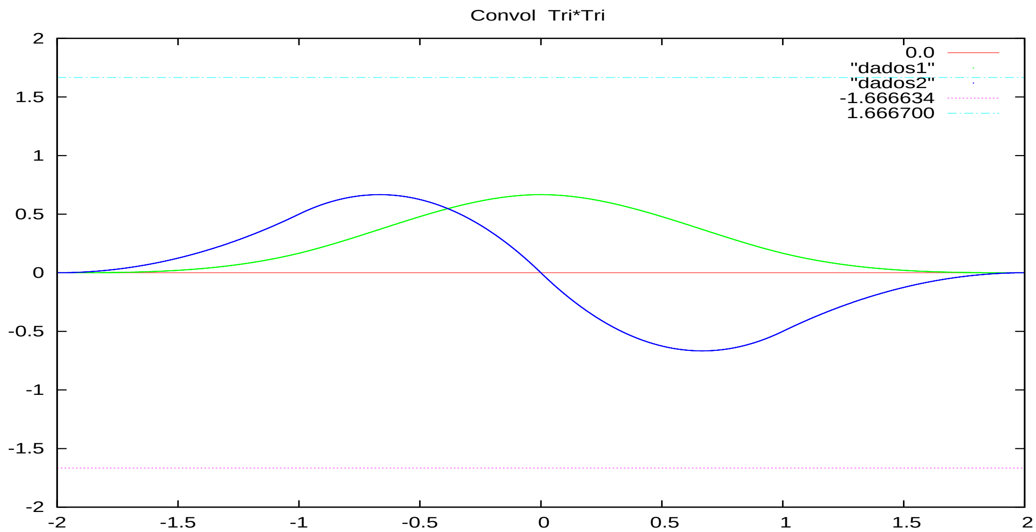

Figura 2: produto de convolução $Tri * Tri$

programa em `Python`, apresentado ao final no apêndice, [3, Convolucao02_py] usa os módulos "`scipy, system, os`" que são distribuidos com a linguagem, e os módulos produzidos por este autor,

`gnuplot, operadores, nucleo, ambiente, funcoes`

que estão descritos aqui, [2].

Você pode baixar o programa que foi usado neste artigo de [3, Convolucao02_py], e altere `Convolucao02_py` para `Convolucao02.py` para que o interpretador `Python` o reconheça.

Este resultado é muito forte mas inteiramente esperado, ver [1], em que a potência de convolução de funções características é calculada sendo uma função contínua, a partir da segunda potência.

Na próxima seção vou considerar uma hipótese mais fraca e dar um exemplo mostrando que a hipótese de continuidade não pode ser retirada ao desejarmos a continuidade da derivada de $f * g$.

3 Os fatores têm que ser contínuos

Considere H_0 a função de Heaviside que é descontínua com um salto unitário na origem, constante zero na semireta negativa constante 1 na semireta positiva. Sua derivada é a medida de Dirac δ_0, confira [7, página 36] consequentemente

$$(H_0 * H_0)' = H_0 * \delta_0 = H_0 \quad (31)$$

então o produto de convolução $H_0 * H_0$ é uma função contínua mas sua derivada é descontínua, mais exatamente, $H_0 * H_0$ é nula para $x \leq 0$ e coincide com a primeira bissetriz para $x \geq 0$:

$$(H_0 * H_0)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0; \\ x & x > 0; \end{cases} \tag{32}$$

A derivada tem um salto no ponto zero.

3.1 Visão geral do domínio da convolução

Uma desigualdade resolve a especificação dum domínio para a convolução:

Teorema 2 (convolução) *norma e desigualdade*

Usando o símbolo $\|\|_p$ para representar as normas dos espaços de Lebesgue, e naturalmente, sob a suposição de que $\|f\|_p$ exista na expressão abaixo, temos a seguinte cópia da desigualdade de Hölder para funções reais de variáveis reais

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q ; \frac{1}{p} + \frac{1}{1} = 1 \tag{33}$$

Dem :

Se $\|f\|_p, \|g\|_q$ forem números, então

$$\|h(x)\| = \| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt\| = \tag{34}$$

$$= \| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_{-x}(-t)dt\| \leq \tag{35}$$

$$\leq \|f\|_p \|\breve{g}_x\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{36}$$

Na equação (3.36) aparece a notação $\breve{g}(x) = g(x-t)$, e estou usando o fato de que as translatadas de qualquer função em $\mathcal{L}^q$ tem a mesma norma pela invariância de translação da medida de Lebesgue.

q.e.d .

Com esta desigualdade a convolução pode ser definida como um operador no dual adequado dum espaço de Lebesgue de acordo com a desigualdade de Hölder. Em particular as funções do parágrafo inicial pertencem a qualquer espaço de Lebesgue que se deseje.

O exemplo da função de Heaviside mostra que a continuidade não pode ser eliminada para que $f*g$ tenha uma derivada contínua, e o teorema 2 mostra que é preciso haver uma condição tipo desigualdade de Hölder para que um produto de funções seja integrável. Mas se desejarmos apenas garantir que o produto seja de classe $\mathcal{C}^1$ o teorema 2 é excessivo como condição para as duas funções. Com isto chegamos à hipótese certa:

- um dos fatores precisa estar num espaço de Lebesgue, que é o que nos permite o uso da norma de $\mathcal{L}^p$ na desigualdade final da demontração do teorema 1.

- e outro é suficiente que seja uma função integrável e limitada em qualquer intervalo compacto $[a, b]$ o que nos vai permitir de usar a norma do supremo na desigualdade final da demontração do teorema 1.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **3 (diferenciabilidade)** *da convolução*
Se um da fatores f, g, for um elemento dum espaço $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ e outro for uma função integrável e limitada em qualquer intervalo compacto, então $f * g$ é de classe $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$.

$\boxed{\textbf{Dem}}$*:*
A demonstração do teorema 1 se aplica com uma modificação: uso da norma de $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ onde está sendo usada a norma de $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$.
$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Observe que há um ganho significativo neste teorema final, eliminei a condição sobre o suporte de ambos os fatores assim como a da continuidade, ficou apenas a condição de *integrabilidade forte*, pertencer a um espaço $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$, para um dos fatores, e para o outro ser integrável e ter supremo em qualquer intervalo compacto.

Consequentemente se $f = \chi_{[A,B]}$ e $g \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ então $f * g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ apenas não sabemos escrever de forma simples o valor da derivada nos pontos A, B, mas você tem um programa aqui, à sua disposição, para lhe informar um valor aproximado de $(f * g)'(A), (f * g)'(B)$.

Referências

[1] A.J. Neves and T. Praciano-Pereira. Convolutions power of a characteristic function. *arxiv.org*, 2012, April, 22:16, 2012.

[2] T Praciano-Pereira. Python program to solve ordinary differential equations. Technical report, Sobral Matematica http://www.sobralmatematica.org/preprints/2013.02, 2013.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, 2009. http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/.

[4] Kenneth A. Ross. A trip from classical to abstract fourier analysis. *Notices of AMS*, Vol 61 (9):6, 2014.

[5] Raphaël Salem. Sur les transformations des séries de fourier. *Fund. Math*, 33:6, 1939.

[6] Raphaël Salem. *Oeuvres Mathématiques*. Herman - Paris, 1967.

[7] Laurent Schwartz. *Théorie des Distribution*. Hermann, 1973.

[8] D V. Widder. The convolution transform. *Bulletin of American Mathematical Society*, 60,5:444–456, 1954.

[9] the free enciclopedia in the Internet Wikipedia. Wikipedia, the free enciclopedia in the internet. http://www.wikipedia.org.

Tabelas e o programa em `Python`

Tabela 1: derivada e equação (0.24) $\epsilon = 0.100000$

x= -2.000000	h'(-2.000000) = 0.000002	0.000152 = equação (eq. 0.14)
x= -1.500000	h'(-1.500000) = 0.125004	0.110738 = equação (eq. 0.14)
x= -1.000000	h'(-1.000000) = 0.499996	0.548291 = equação (eq. 0.14)
x= -0.500000	h'(-0.500000) = 0.624987	0.714888 = equação (eq. 0.14)
x= 0.000000	h'(0.000000) = -0.000000	-0.099481 = equação (eq. 0.14)
x= 0.500000	h'(0.500000) = -0.624988	-0.764665 = equação (eq. 0.14)
x= 1.000000	h'(1.000000) = -0.499996	-0.448962 = equação (eq. 0.14)
x= 1.500000	h'(1.500000) = -0.125004	-0.060962 = equação (eq. 0.14)
x= 2.000000	h'(2.000000) = -0.000002	0.000000 = equação (eq. 0.14)

Tabela 2: derivada e equação (0.24) $\epsilon = 0.010000$

x= -2.000000	h'(-2.000000) = 0.000002	0.000000 = equação (eq. 0.14)
x= -1.500000	h'(-1.500000) = 0.125004	0.089894 = equação (eq. 0.14)
x= -1.000000	h'(-1.000000) = 0.499996	0.512468 = equação (eq. 0.14)
x= -0.500000	h'(-0.500000) = 0.624987	0.750335 = equação (eq. 0.14)
x= 0.000000	h'(0.000000) = -0.000000	-0.009985 = equação (eq. 0.14)
x= 0.500000	h'(0.500000) = -0.624988	-0.755491 = equação (eq. 0.14)
x= 1.000000	h'(1.000000) = -0.499996	-0.502483 = equação (eq. 0.14)
x= 1.500000	h'(1.500000) = -0.125004	-0.084738 = equação (eq. 0.14)
x= 2.000000	h'(2.000000) = -0.000002	0.000000 = equação (eq. 0.14)

Tabela 3: derivada e equação (0.24) $\epsilon = 0.000100$

x= -2.000000	h'(-2.000000) = 0.000002	0.000000 = equação (eq. 0.14)
x= -1.500000	h'(-1.500000) = 0.125004	0.088613 = equação (eq. 0.14)
x= -1.000000	h'(-1.000000) = 0.499996	0.510025 = equação (eq. 0.14)
x= -0.500000	h'(-0.500000) = 0.624987	0.754162 = equação (eq. 0.14)
x= 0.000000	h'(0.000000) = -0.000000	-0.000100 = equação (eq. 0.14)
x= 0.500000	h'(0.500000) = -0.624988	-0.754214 = equação (eq. 0.14)
x= 1.000000	h'(1.000000) = -0.499996	-0.509925 = equação (eq. 0.14)
x= 1.500000	h'(1.500000) = -0.125004	-0.088561 = equação (eq. 0.14)
x= 2.000000	h'(2.000000) = -0.000002	0.000000 = equação (eq. 0.14)

```
#! /usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-
## distribuido sob GPL na versão que lhe melhor convier.
## seção incluindo módulos externos
from math import  *
import scipy as sp
from scipy import special
from os import system, remove
from gnuplot import *  ## grafunN and friends N=1...5
from operadores import * ## operadores
from nucleo import *   ## funçoes e núcleos
from ambiente import *
from funcoes import *
###    fim da importação #########################
##################################################

## ativa a classe ambiente
ambi = ambiente();


############### definição de funções   ###############
############### altere Convol(x,Tri,Tri) para Convol(x,f,g);
def h(x):
  return Convol(x,Tri,Tri); ## para núcleo com suporte [-1,1]

def dh(x):
  return Dif(x,h);

## calcula a equação (2.17) -
## artigo: Produto de convolução de funções contínuas
def teste(x,epsilon,alpha, beta,f,g):
  return (1.0/epsilon)*RiemSpl( lambda u:(Tri(x+epsilon-u)-Tri(x-u))*quad(u),x-beta+ep
```

Tabela 4: derivada e equação (0.24) $\epsilon = 0.000010$

x= -1.000000	h'(-1.000000) = 0.500000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.900000	h'(-0.900000) = 1.000000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.800000	h'(-0.800000) = 1.000000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.700000	h'(-0.700000) = 1.000000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.600000	h'(-0.600000) = 1.000000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.500000	h'(-0.500000) = 1.000000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.400000	h'(-0.400000) = 1.000000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.300000	h'(-0.300000) = 1.000000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.200000	h'(-0.200000) = 1.000000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.100000	h'(-0.100000) = 1.000000	1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= -0.000000	h'(-0.000000) = -0.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 0.100000	h'(0.100000) = -1.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 0.200000	h'(0.200000) = -1.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 0.300000	h'(0.300000) = -1.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 0.400000	h'(0.400000) = -1.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 0.500000	h'(0.500000) = -1.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 0.600000	h'(0.600000) = -1.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 0.700000	h'(0.700000) = -1.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 0.800000	h'(0.800000) = -1.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 0.900000	h'(0.900000) = -1.000000	-1999.990000 = equação (eq. 0.14)
x= 1.000000	h'(1.000000) = -0.500000	0.000000 = equação (eq. 0.14)

```
##  Calcula as tabelas do artigo Produto de convolução de funções contínuas
def cria_tabela(alpha, beta, delta_x, referencia,f,g):
  x = alpha; salto = 0.1; ## é salto da tabela, granularidade da tabela
  tabela = open("Convolucao_tabela.tex", "w");
  tabela.write(" %% tabela criada por programa escrito em Python \n");
  tabela.write(" \\begin{table}[h] \n");
  tabela.write(" \\centering \n");
  tabela.write(" \\caption{derivada e equação\
    \\addtocounter{equacaoCinco}{10}\
    (\\arabic{section}.\\arabic{equacaoCinco})$ \\epsilon  = %f$}\
    \n"\
%(delta_x)   );
  referencia = "DerivadaSimulacao"+referencia;
  tabela.write(" \\label{"+referencia+"}\n");
  tabela.write(" \\begin{tabular}{||l|r|r||}  \\hline \n");
  while(x <= beta):
    C= teste(x,delta_x,alpha, beta,f,g); ## chama a função teste com os parâmetros x,
    tabela.write("x= %f &  h'(%f) = %f  & %f = equação\
    (\\arabic{section}.\\arabic{equacaoCinco}) \\\\ \\hline    \n"\
         %( x,      x,  dh(x),  C ));
```

```
    x += salto; ## salto da tabela no LaTeX
  tabela.write(" \\end{tabular} \n");
  tabela.write(" \\end{table}  \\addtocounter{equacaoCinco}{-10} \n");
  tabela.close();


alpha, beta, delta_x = -2, 2, 0.0001;  ## selecione aqui dados da tabela
referencia="Tres";  ## referência da tabela no LaTeX
cria_tabela(alpha, beta, delta_x, referencia,f,g);  ## elimine comentário para criar
## quit();         ## se eliminar este comentário o programa para aqui


## altere a mensagem indicando qual é a convolução
inicio =-2;fim =2;mensagem="Convolução  Tri*quad ";n=3000;
grafun2(h, dh, inicio, fim, n, mensagem);
ambi.apeteco2();
quit();
```