Funções analíticas e funções infinitamente diferenciáveis

Praciano-Pereira, T. *

Sobral Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
5 de novembro de 2012
tarcisio@member.ams.org
préprints da Sobral Matemática no. 2012.03
Editor Tarcisio Praciano-Pereira

Resumo

Neste pequeno artigo vou responder a uma questão de Nick Trefethen recentemente publicada no SIAM News sobre a diferença entre analiticidade e diferenciabilidade infinita. As funções complexas podem ser vistas como funções vetoriais de variável vetorial e as funções analíticas, ou holomorfas, são caracterizadas pelas equações de Cauchy-Riemann e estas últimas são simples consequência do conceito derivada complexa de funções de variáveis complexas. Ao final mostro um caminho rápido para entender os dois famosos operadores diferenciais que caracterizam a derivada complexa e as equações de Cauchy-Riemann.

palavras chave: derivada complexa, equações de Cauchy-Riemann, infinitamente diferenciável.

In this short note I give a different answer to a question raised, and answerer by Nick Trefethen in a recent article published at SIAM News about the difference between *analytic* and *infinite differentiability.* Complex functions can be understood as vector functions of vector variables but among there those which are analytic or holomorphic which are characterized by Cauchy-Riemann equations and these are simple consequence of complex differentiation. At last I show a short cut to two famous differential operators which characterize complex derivative and Cauchy-Riemann equations.

keywords: Cauchy-Riemann equations, complex differentiation, infinite differentiability.

*tarcisio@member.ams.org - Univ. Est. Vale do Acaraú

1 Diferenciabilidade infinita e analiticidade

Em artigo recente, [3], N. Trefethen discute três questões envolvendo as funções de variáveis complexas. As questões são bem conhecidas e não representam nenhuma novidade matemática e objetivo de Trefethen foi o de chamar o foco das atenções sobre análise complexa que todos sabemos que se encontra muito afastada do centro das atenções por algumas razões óbvias sendo a principal que é mais difícil fazer contas com números complexos do que fazê-los com os reais, no mínimo porque envolve dois números reais em cada cálculo! São três questões bem interessantes e que foram rapidamente resolvidas no mesmo artigo em que foram anunciados um pouco fora do hábito de Trefethen que costuma lançar desafios e dar um tempo para ver quantas pessoas se engajam em suas propostas. Vou discutir uma destas questões aqui: a diferença entre uma função ser de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ ou ser analítica.

No artigo citado Trefethen dá uma resposta curta relacionando analiciticidade com a convergência da série de Taylor numa vizinhança aberta de um ponto onde haja convergência. Como esta forma de separar as funções analíticas de outras funções indefinidamente diferenciáveis é muito onerosa, eu fui buscar a definição de derivação complexa que se encontra resumidamente apresentada em [1, página 41] para desenvolvê-la completamente na próxima seção e assim chegar às equações de Cauchy-Riemann. Esta forma, no meu entender, responde de maneira simples a esta questão, frequentemente levantada, sobre a diferença entre função analítica e função indefinidamente diferenciável, inclusive este método conduz a uma demonstração bem elementar de que o espaço das funções holomorfas é um subespaço fechado (de Banach) do espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis, porque é a imagem inversa do conjunto unitário $\{0\}$ por um operador linear contínuo, portanto, de certa forma a minha resposta, embora mais simples, chega mais longe que a resposta de Trefethen.

A organização do artigo é a seguinte:

1. A primeira seção com esta introdução.

2. Na segunda seção mostro que as equações de Cauchy-Rieman são consequência do conceito de derivada complexa determinando um subconjunto próprio das funções $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, daquelas que satisfazem às equações de Cauchy-Rieman, é o espaço das funções analíticas.

3. Na seção final algumas demonstrações dos resultados.

Se o leitor não estiver interessado em compreender as demonstrações e apenas quiser uma caracterização simples da diferença entre função analítica e função infinitamente diferenciável, a segunda seção responde de forma simples e didática a esta questão.

2 Derivada complexa e equações de Cauchy-Riemann

O conjunto dos números complexos tem as mesmas propriedades que o conjunto dos números reais (exceto a ordem) e assim é um *corpo*. Desta forma podemos aplicar a definição de derivada usual das *funções reais de variável real* às *funções complexas de variável complexa* que é o que se costuma chamar de *derivada complexa*, e neste momento surge um dos resultados mais intrigantes da análise: *se uma função complexa de variável complexa tiver derivada complexa ela será infinitamente diferenciável*. São as *funções analíticas*, as *funções complexas que têm derivada complexa*.

Uma forma simples de chegarmos a este resultado pode ser esquematizada na seguinte sequência em que estamos usando derivação implícita para fazer aparecer as equações de *Cauchy-Riemann*, também estamos usando a dualidade de interpretação $\mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$, $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$, conforme for conveniente:

$$f \text{ uma função complexa de variável complexa;} \tag{1}$$

$$f = u + iv; u, v \text{ funções reais de variável complexa;} \tag{2}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \alpha + i\beta = f'(z) \in \mathbf{C}; \tag{3}$$

$$df = J(f) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (\alpha + \beta i)(dx + idy) = (\alpha dx - \beta dy) + i(\alpha dy + \beta dx) \tag{4}$$

$$df = f'(z)dz = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$u_x = v_y; u_y = -v_x \tag{6}$$

A igualdade na equação (3) vem da afirmação inicial, $\mathbf{C}$ *é um corpo, como* $\mathbf{R}$*, a derivação das funções reais de variável real, se aplica* verbatim *ao caso complexo*, portanto, como no caso real, $f'(z) \in \mathbf{C}$, a *derivada complexa* é o número complexo $\alpha + i\beta$.

Este fato volta a ser usado na equação (4) para identificar um tipo particular de matriz jacobiana, a derivada de f, agora vista como função de $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, na equação (5). Vamos poder assim destacar, entre as funções $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, uma classe particular de funções cuja matriz jacobiana tem o formato apresentado na equação (5), as funções analíticas.

A equação (ou sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem), equação (6), obtida quando igualamos as matrizes nas equações (3) e (5), é conhecida como *equações de Cauchy-Riemann*, e elas caracterizam quando uma função $f = u + iv$ é análitica e são usadas com frequência como definição de função analítica. E a derivada complexa de f, se existir, é uma nova função complexa de variável complexa e se calcularmos sua derivada veremos aparecer novamente as *equações de Cauchy-Riemann*. Por indução se conclue que se f for uma função complexa, de variável complexa, então será infinitamente diferenciável se for derivável no sentido complexo.

Quer dizer que se voltarmos a olhar para as funções vetoriais de variável vetorial de dimensão dois haverá duas classes disjuntas de funções, aquelas que satisfazem às *equações de Cauchy-Riemann*, as funções analíticas, e as outras que podem ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ mas que não são analíticas. Por exemplo

$$g(x,y) = (x,-y) = (u(x,y),v(x,y)); g(z) = \overline{z} \quad u_x = 1 \neq v_y = -1 \tag{7}$$

não é uma função analítica mas é de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Uma das implicações mais fortes da analiticidade é que se f for analítica irá transformar *abertos do plano complexo* em *abertos do plano complexo* mas não é uma propriedade fácil de ser demonstrada. Esta propriedade fundamental caracteriza as *funções analíticas* como *aplicações abertas.*

3 O espaço das funções analíticas

A derivada complexa de f pode ser escrita numa das formas alternativas seguintes, usando as *equações de Cauchy-Riemann*:

$$u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y \tag{8}$$

em outras palavras, o número $f'(a+ib) = \alpha + i\beta$ pode ser obtido com um qualquer das expressões da equação (8). Se usarmos o conceito de operador diferencial, podemos deduzir das expressões na equação (8) as expressões, usando sempre a mesma notação:

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) = (\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x})(v) = (-i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x})(iv) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) \tag{9}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) = \alpha + i\beta = f'(a+ib) \tag{10}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) + (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) = 2(\alpha + i\beta) \tag{11}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u+iv) = 2(\alpha + i\beta) \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(f) = (\alpha + i\beta) = f'(a+ib) \tag{13}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) - (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) = 0 \tag{14}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u-iv) = 0 \tag{15}$$

$$\overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})}(u+iv) = 0 \tag{16}$$

$$\overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})}(f) = 0; (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(f) = 0 \tag{17}$$

Destes cálculos surgiram duas expressões mais simples que se tornaram dois operadores diferenciais clássicos permitindo uma forma concisa de expressar tanto as *equações de Cauchy-Riemann* como a definição da derivada de uma função analítica:

$$\partial = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \tag{18}$$

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \quad (19)$$

$$\partial(f) = \alpha + i\beta = f'(a+ib) \quad (20)$$

$$\overline{\partial}(f) = 0 \iff f \text{ satisfaz às equações de Cauchy-Rieman} \quad (21)$$

Embora a formulação à direita, nas equações (18) e (19) sejam mais didáticas (ligadas à definição de conjugado), a expressão que parece ser a mais comum são as que ficam à esquerda, para definir os operadores $\partial, \overline{\partial}$.

Todos os cálculos feitos nesta seção poderiam ter sido executados em um subconjunto Ω máximo onde a derivada existisse, por exemplo, a função $f(z) = \frac{1}{z}$ é uma função analítica do plano complexo sem o zero, e este é o domínio máximo de analiticidade desta função, aliás este é um dos conceitos mais interessantes da teoria das funções analítica, a determinação de aberto máximal onde ela seja analítica, e como a teoria foi desenvolvida por muitos lados, existem teoremas muito interessantes ligandos os diversos caminhos do seu desenvolvimento. Um dos desenvolvimentos da teoria foi feito usando o desenvolvimento em série de potências (série de Taylor) onde aparece o raio de convergência das séries ou seu disco de convergência então Ω pode ser coberto com tais discos ou, melhor dizendo, é uma reunião de tais discos.

Demonstramos assim o seguinte teorema

Teorema 1 (Caracterização da analiticiade) *Critério de Analiticidade*
Seja Ω um domínio aberto do plano. Suponha que

$$\Omega \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2; f(z) \mapsto u(z) + iv(z);$$

e que u, v tenham derivadas contínuas em todos os pontos de Ω, então se

$$J(f) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}; u_x = v_y; u_y = -v_x;$$

f é indefinidamente derivável, valendo as equações de Cauchy-Riemann para todas suas derivadas e $f'(z) = u_x - iu_y = u_x + iv_x$.

A formulação que você pode encontrar deste teorema em [2, página 251], é a seguinte:

Teorema 2 (Caracterização da analiticiade) *Critério de Analiticidade*

Seja Ω um domínio aberto do plano. Suponha que $\Omega \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$ tenha derivadas contínuas em todos os pontos de Ω. Se $\overline{\partial}(f) = 0$ em Ω então $f'(z) = \partial(f)(z); z \in \Omega$.

que é elegante e resumida porque faz uso uma de uma notação que esconde as coordenadas u, v de f. A primeira versão, sem a codificação elegante do operador ∂ é a que aparece na maioria dos textos de variável complexa.

Resta uma demonstração que ainda não foi feita, da afirmação de que uma nova derivação de f cairia numa reedição das equações de Cauchy-Riemann. A seguinte sucessão de igualdades entre as Hessianas mostra isto:

$$f'(z) == u_x - iu_y \tag{22}$$

$$f''(z) = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ -u_{yx} & -u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ -u_{xy} & v_{xy} \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$f''(z) = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ -u_{xy} & v_{yx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ -u_{xy} & u_{xx} \end{pmatrix} \tag{24}$$

em que usamos repetidamente o *teorema de Clairaut-Schwarz* para derivadas mistas. Suponha que vale para $f^{(n)}$ e derive novamente aplicando o teorema de Clairaut-Schwarz para concluir que as equações de Cauchy-Riemann voltam surgir, então valem as equações de Cauchy-Riemann para qualquer derivada de f.

4 Epílogo

É interessante observar que as equações de Cauchy-Riemann são um exemplo de equação diferencial parcial que foi resolvida ao longo de mais de um século, resultando na construção do que se chamava de *teoria das funções* que se pode dizer, com alguma dose de exagero, que é *a solução das equações de Cauchy-Riemann*, ou, a solução destas equações é uma função analítica e vice-versa. As funções analíticas são também chamadas de *funções holomorfas*. É uma teoria fascinante, porém, mais do que fascinante, é surpreendente, para uma teoria que nasceu no século 16[1] como recentemente se desenvolvem aplicações de séries em análise de algortimos. Sem dúvida tem sentido voltar a colocar o foco na análise complexa. Este artigo não tem nenhuma informação nova, mas entendo que a demonstração das equações de Cauchy-Riemann feita aqui não é a usual na literatura e isto vale pelo artigo. Como dito no começo, este artigo se originou de questões colocadas por Trefethen, precisamente para chamar a importância da análise complexa, se eu aqui conseguir estimular o seu estudo terei atingido o meu objetivo.

Referências

[1] Henri Cartan. *Calcul Différentiel*. Herman - Paris, 1967.

[2] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill - Book Company, 1974.

[3] N. Trefethen. What's so special about complex variables? *SIAM-News*, 45:2, 2012.

---

[1] Afirmações deste tipo podem ser sempre facilmente contestadas uma vez que os fatos estudados dentro uma teoria muitas vezes apareceram com distintos graus de precisão muitos anos antes.