A pirâmide de Pascal

Luzitelma Maria Barbosa de Castro*

Tarcisio Praciano-Pereira †

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú

Março de 2003

luzitl@hotmail.com

pré-prints do Curso de Matemática de Sobral
no. 2003.1
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Mostramos uma generalização do Triângulo de Pascal em que pisos de uma pirâmide governam a distribuição das potências de um trinômio.

palavras chave: pirâmide de Pascal, potências de um trinômio

---

*lusitelma@sobralmatematica.org

†Dep de Matemática Universidade Estadual Vale do Acaraú e-mail tarcisio@member.ams.org

1 Introdução

Um programa em Python permite calcular os coeficientes na multiplicação de dois polinômios, em particular as potências de um polinômio qualquer. O programa se encontra na última seção.

Uma descrição dos resultados segue-se para nos levar à descoberta da lei de formação. Essencialmente faremos uma transcrição dos resultados obtidos com o programa que é uma implementação da convolução para dados discretos, ver [1].

2 Os primeiros experimentos

Rodando um programa em Python obtivemos os seguintes resultados, devidamente editados.

$$\begin{aligned}
a = (1,1,1) &\equiv (a+b+c) \\
a^2 = (1,2,3,2,1) &\equiv (a+b+c)^2 - \text{segunda potência} \\
a^3 = (1,3,6,7,6,3,1) &\equiv (a+b+c)^3 - \text{terceira potência} \\
a^4 = (1,4,10,16,19,16,10,4,1) &\equiv (a+b+c)^4 - \text{quarta potência}
\end{aligned}$$

Cada seção abaixo, corresponde a um novo plano na “pirâmide”. Observe que a seqüência de linhas do Triângulo de Pascal estão escritas da maior para a menor.

		1					$(a+b+c)^0$
		1		1			$(b+c)^1$
			1				$(b+c)^0$
		1	1	1			$(a+b+c)^1$
	1		2		1		$(b+c)^2$
		2		2			$2*(b+c)^1$
			1				$(b+c)^0$
	1	2	3	2	1		$(a+b+c)^2$
1		3		3		1	$(b+c)^3$
	3		6		3		$3*(b+c)^2$
		3		3			$3*(b+c)^1$
			1				$1*(b+c)^0$
1	3	6	7	6	3	1	$(a+b+c)^3$

Veja a distribuição dos termos de $(a+b+c)^3$ sem os coeficientes:

a^3		a^2c		ac^2		c^3
	a^2b		abc		bc^2	
		ab^2		b^2c		
			b^3			

é só colar os coeficientes em cima.....

Mais um exemplo, os coeficientes $(a+b+c)^4$:

1		4		6		4		1	$(b+c)^4$
	4		12		12		4		$4(b+c)^3$
		6		12		6			$6(b+c)^2$
			4		4				$4(b+c)^1$
				1					$1(b+c)^0$
1	4	10	16	19	16	10	4	1	

A distribuição dos coeficientes a^p, b^q, c^r correspondem a esta distribuição acima perfeitamente. Veja a quinta potência:

Os coeficientes de $(a+b+c)^5$ são:

$$1, 5, 15, 30, 45, 51, 45, 30, 15, 5, 1$$

como distribuir quem com quem?

Analise $(a+(b+c))^5$.

Agora você tem um binômio, cujos coeficientes saem da L5 do triângulo:

$$1/5/10/10/5/1$$

Depois a distribuição dos coeficientes de $(a+(b+c))^5$ ficam, espaciamente, distribuidos assim:

$$\begin{array}{cc|ccccccccccc}
1*(b+c)^5 & \equiv & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
5*(b+c)^4 & \equiv & & 5 & & 20 & & 30 & & 20 & & 5 & \\
10*(b+c)^3 & \equiv & & & 10 & & 30 & & 30 & & 10 & & \\
10*(b+c)^2 & \equiv & & & & 10 & & 20 & & 10 & & & \\
5*(b+c)^1 & \equiv & & & & & 5 & & 5 & & & & \\
1*(b+c)^0 & \equiv & & & & & & 1 & & & & & \\
\text{somando} & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1
\end{array}$$

Quer dizer que $(a+b+c)^5$ se obtem com este coeficientes, assim distribuidos espacialmente, com uma distruibuição em cada linha dos coeficientes de “a”,“b” ou “c” com potências decrescentes e crescentes.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a^5 & & a^4c & & a^3c^2 & & a^2c^3 & & ac^4 & & c^5 \\
 & a^4b & & a^3bc & & a^2bc^2 & & abc^3 & & bc^4 & \\
 & & a^3b^2 & & a^2b^2c & & ab^2c^2 & & ab^2c^3 & & \\
 & & & a^2b^3 & & ab^3c & & ab^3c^2 & & & \\
 & & & & ab^4 & & ab^4c & & & & \\
 & & & & & b^5 & & & & &
\end{array} \tag{1}$$

Existe uma simetria perfeita em cada "seção plana" da "pirâmide" à semelhança do que acontece com as linhas do triângulo de Pascal.

As variáveis se mantêm com expoentes constantes ao longo das mesmas linhas paralelas. Se numa linha os expoentes variarem, o mesmo vai acontecer, e da mesma forma em qualquer outra paralela.

A arrumação depende apenas da escolha da posição das variáveis com expoente máximo, colocadas nos vértices dos triângulos.

Outro exemplo. Mais uma potência:

$$(a+b+c)^6$$

Os coeficientes são:

$$1, 6, 21, 50, 90, 126, 141, 126, 90, 50, 21, 6, 1$$

e para encontrar a distribuição uso os elementos da linha L6 do Triângulo de Pascal

$$1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1$$

cada um *como coeficiente* da expansão do binômio $(b+c)^k$

$1*(b+c)^6 \equiv$	1		6		15		20		15		6		1
$6*(b+c)^5 \equiv$		6		30		60		60		30		6	
$15*(b+c)^4 \equiv$			15		60		90		60		15		
$20*(b+c)^3 \equiv$				20		60		60		20			
$15*(b+c)^2 \equiv$					15		30		15				
$6*(b+c)^1 \equiv$						6		6					
$1*(b+c)^0 \equiv$							1						
	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1

que corresponde ao cálculo feito com o programa para a 6a. potência de $(1+1+1)^6$: 1, 6, 21, 50, 90, 126, 141, 126, 90, 50, 21, 6, 1

Outras potências:

$7a.$
$1, 7, 28, 77, 161, 266, 357, 393, 357, 266, 161, 77, 28, 7, 1$
$8a.$
$1, 8, 36, 112, 266, 504, 784, 1016, 1107, 1016, 784, 504,$ $266, 112, 36, 8, 1$
$9a.$
$1, 9, 45, 156, 414, 882, 1554, 2304, 2907, 3139, 2907,$ $2304, 1554, 882, 414, 156, 45, 9, 1$
$10a.$
$1, 10, 55, 210, 615, 1452, 2850, 4740, 6765, 8350, 8953,$ $8350, 6765, 4740, 2850, 1452, 615, 210, 55, 10, 1$
$11a.$
$1, 11, 66, 275, 880, 2277, 4917, 9042, 14355, 19855, 24068, 25653,$ $24068, 19855, 14355, 9042, 4917, 2277, 880, 275, 66, 11, 1$
$12a.$
$1, 12, 78, 352, 1221, 3432, 8074, 16236, 28314, 43252,$ $58278, 69576, 73789, 69576, 58278,$ $43252, 28314, 16236, 8074, 3432, 1221, 352, 78, 12, 1$

3 Algoritmo para obtenção de P_n - piso de ordem n

- • Faça uma tabela de dupla entrada usando a linha de ordem L_n do Triângulo de Pascal, na vertical.

- • Coloque, sucessivamente, as linhas do Triângulo de Pascal, a partir da linha L_n, na horizontal, multiplicada pelo termo que se encontra na vertical.
- • Os termos de cada nova linha, devem ter suas colunas intercaladas em relação a anterior, de modo que o primeiro elemento ocupe a posição intermediária entre o primeiro e o segundo elemento da linha mais acima.
- • A soma as colunas o resultado serão os termos cuja soma correspondem a $(1+1+1)^n$ o que ainda corresponde a 111^n numa base adequada.

Por exemplo, para obter o P_7. Escrever L_7 do triângulo na vertical, e todas as linhas do triângulo, a partir de L_7 na horizontal, multiplicadas pelo elemento indexador de coluna na vertical.

1	1	7	21	35	35	21	7	1	1	7	21	35	35	21	7	1
7	1	6	15	20	15	6	1		7	42	105	140	105	42	7	
21	1	5	10	10	5	1			21	105	210	210	105	21		
35	1	4	6	4	1				35	140	210	140	35			
35	1	3	3	1					35	105	105	35				
21	1	2	1						21	42	21					
7	1	1							7	7						
1	1								1							

O piso P7:

1		7		21		35		35		21		7		1
	7		42		105		140		105		42		7	
		21		105		210		210		105		21		
			35		140		210		140		35			
				35		105		105		35				
					21		42		21					
						7		7						
							1							
1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	161	77	28	7	1

A distribuição das potências de a,b,c em $(a+b+c)^7$ se fazem de tal forma que as potências cresçam ou decresçam com a soma dos expoentes constantes. Para obtê-las, coloque nos 1's a^7, b^7, c^7 e depois ao longo dos lados externos distribua os produtos de modo que em cada uma das linhas externas do piso, só apareçam os fatores que aparecem nos vértices que determinam estas linhas. Depois, em cada paralela, e nos mesmo sentido em que na externa, a potência de um fator tiver decrescido, da mesma forma vai descrescer em cada paralela como se pode ver na figura (1) página 8,

4 Um programa para convolução discreta

O programa abaixo, chamado multipol(), calcula o produto de dois polinômios. O algoritmo é exatamente o da convolução de dados discretos.

```
def multipol (lista1,lista2):
##  ## (1)   If a number is given change order etc...
if (type(lista2) == type(1)) or (type(lista2) == type(1.111)):
lista1, lista2 = lista2, lista1  ## troca os argumentos
   ##  ## (2) (numberp lista2) (* lista1 lista2)
if (type(lista2) == type(1)) or (type(lista2) == type(1.111)):
```

$$a^7 \quad 7a^6c \quad 21a^5c^2 \quad 35a^4c^3 \quad 35a^3c^4 \quad 21a^2c^5 \quad 7ac^6 \quad c^7$$

$$7a^6b \quad 42a^5bc \quad 105a^4bc^2 \quad 140a^3bc^3 \quad 105a^2bc^4 \quad 42abc^5 \quad 7bc^6$$

$$21a^5b^2 \quad 105a^4b^2c \quad 210a^3b^2c^2 \quad 210a^2b^2c^3 \quad 105ab^2c^4 \quad 21b^2c^5$$

$$35a^4b^3 \quad 140a^3b^3c \quad 210a^2b^3c^2 \quad 140ab^3c^3 \quad 35b^3c^4$$

$$35a^3b^4 \quad 105a^2b^4c \quad 105ab^4c^2 \quad 35b^4c^3$$

$$21a^2b^5 \quad 42ab^5c \quad 21b^5c^2$$

$$7ab^6 \quad 7b^6c$$

$$b^7$$

Figura 1: O piso de ordem 7

```
produto = lista1*lista2
else: ##  (mapcar '* lista2)
##  ## (3) lista1=lista1 to force lambda recognise lista1
produto = map(lambda x,lista1=lista1: lista1*x, lista2)
elif (type(lista1) == type(1)) or (type(lista1) == type(1.111)):
produto = map(lambda x,lista1=lista1: lista1*x, lista2)
else:
##  ## (4) Else if only lists are given
produto = convolucao(lista1,lista2)
return produto


## faz a convolucao quando len(lista1) < len(lista2)
```

```
def convolucao(lista1,lista2):
if len(lista1) > len(lista2):
lista1,lista2 = lista2,lista1
produto = []
lista1.reverse()
k = len(lista1)-1
while k >=0 :
produto.append(produto_escalar(lista1[k:],lista2))
k = k-1
while lista2:     ### (5)
produto.append(produto_escalar(lista1,lista2[1:]))
lista2=lista2[1:]
return produto[:len(produto)-1]  ### (6)


def produto_escalar(lista1,lista2):
if len(lista1) > len(lista2):
lista1,lista2 = lista2,lista1
soma = 0
while lista1:
soma = soma + lista1[0]*lista2[0]
lista1 = lista1[1:]
lista2 = lista2[1:]
return soma


def sum(lista):
soma = 0
while lista:
soma = soma + lista[0]
lista=lista[1:]
```

```
return soma


lista1 = [1,1,1,1,1,1]
lista2 = [1,1,1,1,1,1]

print multipol(lista1,lista2)
```

Você pode rodar este programa assim

python multipol.py

e o resultado será o produto dos polinômios cujas matrizes dos coeficientes se encontram nas duas penúltimas linhas do programa. Trocando estas matrizes você habilita o programa para calcular produtos de dois outros polinômios.

Referências

[1] MacLane, S e Birkhoff*Algebra*