Uma integral elíptica

Praciano-Pereira,Tarcisio

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
7 de maio de 2008
tarcisio@member.ams.org
pré-prints do Curso de Matemática de Sobral
no. 2008.3
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Motivado por uma pergunta de um aluno, resolvi mostrar neste artigo como lidar com uma integral a qual não seja possível aplicar o teorema fundamental do Cálculo mas que pode ser importante saber se a integral existe e uma forma de calcular-lhe uma estimativa.

Aqui apresento duas estimativas, uma feita formalmente calculando um majorante para a integral e outra usando aproximação polinomial.

Acho que este exemplo pode servir de guia em cálculos semelhantes embora o artigo não apresente nenhuma novidade matemática.

1 Existência da integral elíptica

Vou calcular (uma estimativa) da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+R)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{1}$$

considerando $R > 0$. Se R for negativo o caso fica mais complicado e talvez eu venha a retomá-lo em outro artigo.

O primeiro passo consiste em provar que a integral existe o que se pode fazer substituindo por uma função maior e cuja integral exista. Neste caso consegui facilmente definir uma função definida por duas leis que majora o integrando f

na reta inteira e que é integrável.

$$\begin{cases} \frac{1}{(x^2+R)^{3/2}} < \frac{1}{R^{3/2}} & \Leftarrow \quad |x| < R \\ \frac{1}{(x^2+R)^{3/2}} < \frac{1}{x^3} & \Leftarrow \quad |x| \leq R \end{cases} \tag{2}$$

a função g definida no segundo membro da desigualdade acima é integrável na reta inteira o que garante que f também o seja. Isto nos libera para fazer as contas.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+R)^{3/2}} = \tag{3}$$

$$x\frac{dx}{(x^2+R)^{3/2}}|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{(x^2+R)^{5/2}}2xdx = \tag{4}$$

$$= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{(x^2+R)^{5/2}}2xdx = \tag{5}$$

$$-[\int_{|x|<R} 2x^2\frac{1}{(x^2+R)^{5/2}}dx + \int_{|x|\leq R} 2x^2\frac{1}{(x^2+R)^{5/2}}dx = -(I+J) \tag{6}$$

$$I = \int_{|x|<R} 2x^2\frac{1}{(x^2+R)^{5/2}}dx \leq \frac{4}{3}R^{4/3} \tag{7}$$

$$J = \int_{|x|\leq R} 2x^2\frac{1}{(x^2+R)^{5/2}}dx \leq \int_{|x|\leq R} 2x^2\frac{1}{(x^2)^{5/2}}dx = \tag{8}$$

$$= \int_{|x|\leq R} 2\frac{1}{x^3}dx = -x^{-2}|_{|x|\leq R} = -2x^{-2}|_R^{\infty} = \frac{1}{R^2} \tag{9}$$

Assim, embora eu não saiba calcular esta integral exatamente, sei que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+R)^{3/2}} < \frac{4}{3}R^{4/3} + \frac{1}{R^2} = \frac{4/3R^{10/3}+1}{R^2}$$

No caso de R positivo. Se R = 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+R)^{3/2}} < \frac{7}{3}$$

2 Usando aproximação polinomial

Os cálculos feitos nesta seção podem ser executados porque já demonstramos na seção anterior que a integral existe.

Usando o programa [3, aproximacao], que ainda se encontra em preparação, mas pode ser experimentado, obtive 2.02485 como valor aproximado desta integral, no intervalo $[-300, 300]$, usando aproximação polinomial de grau 3 sugerindo que a majoração acima ainda é muito grande.

A figura (1), página 3, feita com [1, gnuplot] a partir de um arquivo de

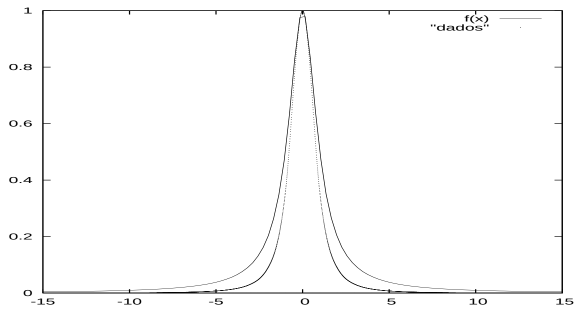

Figura 1: Comparação com $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

dados produzido pelo programa `aproximacao`, mostra os gráficos comparativos da função que estamos integrando com uma função bem conhecida.

A aproximação polinomial construida pelo programa `aproximacao` é a descrita no meu livro, [2, capítulo 5]. Este programa realiza todos os exemplos deste livro relativos aos capítulos cinco e seis.

Referências

[1] `gnuplot` *um programa para fazer grafico e alguns cálculos*

http://www.gnuplot.info

[2] Praciano-Pereira, T.

Cálculo numérico Computacional - Edição Eletrônica
Laboratório de Matemática Computacional - 2007

http://www.4shared.com/dir/1751707/4c187abc/sharing.html

[3] Praciano-Pereira, T *Programas para Cálculo Numérico - programas.tgz*

http://www.4shared.com/dir/2041165/e14cc331/programas.html