Primeiros Exemplos de Equações Diferenciais

da Silva, M.Ilsangela

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
1 de agosto de 2008
milsangela@gmail.com
pré-prints do Curso de Matemática em Sobral
no.2008.5
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Neste artigo temos por objetivo introduzir, de forma sucinta, um estudo de equações diferenciais, concentrado em alguns exemplos simples de equações diferenciais ordinárias de primeira e de segunda ordem à variáveis separáveis, além de mostrar um exemplo de problema da Física, que envolve esses tipo de equações, [1] de forma que, iniciantes nessa área, tenham total compreensão do assunto em estudo.
palavras chave: família de curvas, integração direta, redução de ordem, modelagem

[1] um exemplo de modelagem

1. - Equações Diferenciais - Noções Gerais

Vamos iniciar com uma definição de equação diferencial.
Seja y uma função de x, e um determinado número n tal que: $n \in \mathbf{Z}_+$. Então, uma relação de igualdade que envolva x,y,y',y'',...,y^n damos o nome de *Equação Diferencial de ordem* [2] *n*.
A forma mais geral de uma equação diferencial de **ordem n** na variável independente **x** e função desconhecida ou variável dependente $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ é dada por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', ..., \mathbf{y}^{\mathbf{n}}) = \mathbf{0}$$

em que **F** é uma função específica a valores reais em $\mathbf{n} + \mathbf{2}$ variáveis.

Definição:

Equação Diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida, incógnita da equação, e uma ou mais de suas próprias derivadas.

Exemplos:

Equação Diferencial	Ordem e Grau
i.$y' = 1$	tem ordem 1 e grau 1
ii.$y'' + x^2(y')^3 = 0$	tem ordem 2 e grau 3
iii.$x^3y''' - x^2y'' + xy' = 0$	tem ordem 3 e grau 1
iv.$a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \frac{\partial u}{\partial t}$	tem ordem 2
v.$a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	tem ordem 2

1.1 - Classificação das Equações Diferenciais

As Equações Diferenciais classificam-se em:

⋆ Equação Diferencial Ordinária - EDO: São as que envolvem derivadas de uma função que tem apenas uma variável independente.
Exemplo:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \mathbf{y}^{\mathbf{3}} \qquad \text{(variável independente } \mathbf{x}\text{)}$$

As equações dos exemplos (i), (ii), (iii) também são classificadas como equações diferenciais ordinárias (edo).

⋆ Equação Diferencial Parcial - EDP: São as que envolvem derivadas parciais de uma função com mais de uma variável independente.
Exemplo:[3]

$$\frac{\partial^{\mathbf{2}}\mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{2}}} + \frac{\partial^{\mathbf{2}}\mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^{\mathbf{2}}} = \mathbf{0} \qquad \text{(variáveis independentes } \mathbf{x}, \mathbf{y}\text{)}$$

A equação do calor, assim como a equação da onda, são exemplos de equações diferenciais parciais (edp). Nos exemplo (iv) e (v) temos estas equações respectivamente.

Neste artigo discutiremos apenas as equações diferenciais ordinárias, deixando as equações diferenciais parciais para um estudo posterior.

[2] ordem da mais alta derivada da função incógnita que temos na equação
[3] exemplo de uma EDP homogênea

1.2 - Solução de uma Equação Diferencial

A solução de uma equação diferencial é uma função que não contém derivadas nem diferenciais e que satisfaz a equação dada, ou seja, quando substituída na equação, está é reduzida a uma identidade. Podemos encontrar equações diferenciais que, por exemplo: não têm solução, àquelas para as quais existe solução, sendo que, pode ser única ou não, as que são fáceis de resolver e outras que são super complicadas.

1.2.1 - Classificação da Solução

A solução de uma equação diferencial tem duas classificações:

Solução geral: Aquela que apresenta n constantes independentes entre si e que nos fornece todas as soluções possíveis da equação.

Solução particular: São obtidas da solução geral, mediante as condições dadas, condições essas, que podemos chamar de *condições iniciais* ou, se preferir, *condições de contorno*.

No exemplo (i) de equação $y' = 1$, uma solução particular é $y = x$ enquanto que a solução geral é $y = x + C$, onde $C \in \mathbf{R}$.
Para ilustrar temos um exemplo abaixo:

A equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3x - 3$$

é fácil de resolver, ou seja, encontrar a solução geral e posteriormente uma solução particular a partir de uma condição, digamos $y(-2) = 2$. Temos:

$$dy = (2x^2 + 3x - 3)dx$$

equações desse tipo é só integrar ambos os membros para encontrarmos a solução geral. Aceite inicialmente como verdade, depois analisaremos.

$$\int dy = \int (2x^2 + 3x - 3)dx$$

$$\int dy = 2\int x^2 dx + 3\int x dx - 3\int dx$$

$$y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + C \qquad \textbf{(solução geral)}$$

Para $y(-2) = 2$ encontramos uma solução particular.

$$2 = \frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 - 3(-2) + C \Rightarrow C = -\frac{14}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{14}{3} \qquad \textbf{(solução particular)}$$

1.2.2 - Solução por integração direta

A equação diferencial de primeira ordem[4] $y' = f(x,y)$ toma uma forma simples caso a função f for independente da variável y:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

Nesse caso, para encontrarmos a solução geral da Eq. (1) que é uma família de curva, é só integrar ambos os seus membros para obtermos

$$y = \int f(x)dx + C \tag{2}$$

em que C é uma constante arbitrária e para cada escolha dessa constante temos uma solução particular da equação diferencial em questão, satisfazendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad y(x_0) = y.$$

Que resolve as equações diferenciais do cálculo.

Mas afinal, existe a fração $\frac{dy}{dx}$, ou seja, podemos realizar tais contas?
Por enquanto vamos supor que podemos fazer esses cálculos.

Obs: Em [2] você pode ter um estudo mais aprofundado sobre essa discurssão.

2. - Resolução de algumas Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira e Segunda Ordem[5]

2.1- EDO de Primeria ordem

Na tabela abaixo temos algumas equações diferenciais ordinárias simples de resolver, sendo que, a maioria são de primeira ordem, e que, iremos encontrar a solução geral por integração direta e, posteriormente, uma solução particular a partir da condição inicial estabelecida para cada equação diferencial, em seguida, construiremos o gráfico.

Equação Condição (ções) Inicial (ais)	**Equação Condição (ções) Inicial (ais)**
a)$y' = 0 \quad y(0) = 3$	b)$y' = 1 \quad y(2) = 1$
c)$y' = 1 \quad y(0) = -3$	d)$y' = x \quad y(3) = 1$
e)$y' = 1 \quad y(0) = -2$	f)$y' = x \quad y(-3) = 1$
g)$y'' = 1 \quad y'(0) = -2; y(1) = 5$	h)$y'' = -1 \quad y'(-3) = 1; y(-3) = 1$

A equação $y' = 0$ pode ser expressa por $\frac{dy}{dx} = 0$ a mesma significa que a derivada de y é 0, ou seja, uma reta que tem coeficiente angular nulo, já que o coeficiente angular é a derivada. Então a solução para essa equação é uma função cuja derivada é 0. Podemos dizer que a família de retas paralelas ao eixo x é solução para essa equação diferencial. Vejamos:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow dy = 0dx$$

integrando ambos os membros

$$\int dy = \int 0dx \Rightarrow y = C$$

[4] envolve apenas a primeira derivada e a solução desse tipo de equação são curvas.
[5] equações à variáveis separáveis

que é a solução geral da equação diferencial. Fazendo $y(0) = 3$ na equação, encontramos

$$y = C = 3 \Rightarrow y = 3 \qquad \text{(solução particular)}$$

Na Figura 1 temos o gráfico da família de retas paralelas ao eixo x, soluções da equação diferencial $y' = 0$.

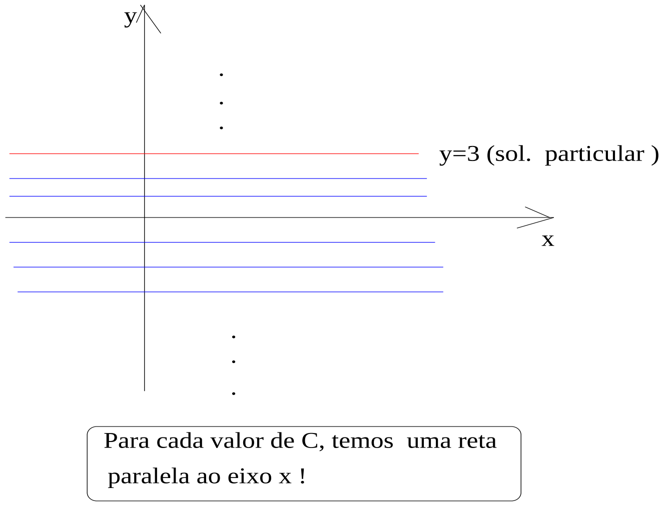

Figura 1: Retas paralelas ao eixo x - solução da equação diferencial $y' = 0$.

A solução geral da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 1$ também é uma família de retas paralelas. Nesse caso com coeficiente angular igual a 1, ou seja, a derivada de y é igual a 1. Então a solução é

$$dy = 1dx$$

integrando ambos os lados da equação

$$\int dy = \int 1dx \Rightarrow y = x + C$$

que, dependendo da condição inicial, temos infinitas retas com o mesmo coeficiente angular[6] variando apenas a constante C, que chamamos de coeficiente linear. Encontraremos soluções particulares para a equação $\frac{dy}{dx} = 1$ satisfazendo a condição de valor inicial dada $y(x_0) = y_0$. Sendo $y(2) = 1$ temos:

$$y = x + C \Rightarrow 1 = 2 + C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y = x - 1$$

A reta $y = x - 1$ é uma solução particular da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 1$, tem coeficiente angular igual a 1 e corta o eixo y em -1.
Outra solução particular que podemos encontrar para a mesma equação é considerar $y(0) = -3$, veja:

$$y = x + C \Rightarrow -3 = C \Rightarrow C = -3 \Rightarrow y = x - 3$$

A reta $y = x - 3$ corta o eixo y em -3.
Para $y(0) = -2$ temos outra solução particular

$$y = x + C \Rightarrow -2 = C \Rightarrow C = -2 \Rightarrow y = x - 2$$

nesse caso, o coeficiente também é 1 e a reta $y = x - 2$ corta o eixo y em -2. Na Figura 2 temos o gráfico da família de retas paralelas, soluções da equação diferencial $y' = 1$ e, em destaque, as soluções particulares, de acordo com as condições iniciais que foram dadas.

[6]retas paralelas

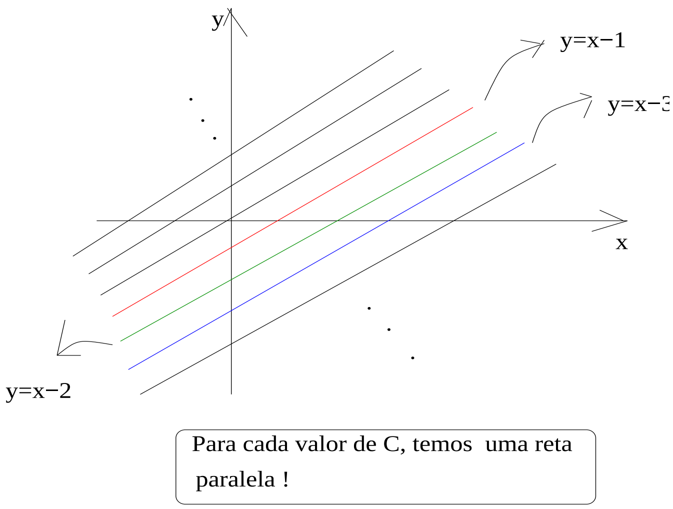

Figura 2: Retas paralelas - solução da equação diferencial $y' = 1$.

Até o momento resolvemos apenas equações diferenciais de primerira ordem [7] em que o coeficiente é constante[8]. Agora vamos resolver um exemplo da mesma equação com uma diferença: o coeficiente é variável[9].

$$\frac{dy}{dx} = x$$

é uma equação com coeficiente variável, em que, a solução desse tipo de equação é uma família de parábolas paralelas com curvatura constante.

$$dy = xdx \Rightarrow \int dy = \int xdx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C$$

A função $y = \frac{x^2}{2} + C$ é a solução geral da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x$. Para cada valor de C, uma parábola, sendo que nesse caso, sempre paralelas. Uma solução particular seria considerar como condição inicial $y(3) = 1$.

$$y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow 1 = \frac{3^2}{2} + C \Rightarrow C = -3.5 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - 3.5$$

Temos a função $y = \frac{x^2}{2} - 3.5$ como uma solução particular da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x$ em $y(3) = 1$.
Para $y(-3) = 1$ temos outra solução particular

$$y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow 1 = \frac{(-3)^2}{2} + C \Rightarrow C = -3.5 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - 3.5$$

Concluimos que para a condição inicial $y(3) = 1$ e $y(-3) = 1$ tem a mesma parábola pois, -3 e 3 são as raízes da função $y = \frac{x^2}{2} + C$ nessas condições iniciais.
Na Figura 3 temos o gráfico da família de parábolas paralelas, soluções da equação diferencial $y' = x$.

```
set zeroaxis
set yr [-10:10]
set title " parabolas paralelas"
```

[7] envolve apenas a primeira derivada
[8] nesse caso, podemos dizer termo indepentente
[9] geralmente equações diferenciais com coeficientes variáveis são mais consideradas em aplicações

```
set terminal postscript portrait color linewidth 0.5
set output " exerc02_edo03.eps"
C1 = -3.5; C2 = -1; C3 = -2; C4 = -3; C5 = -3.5; C6 = -4; C7 = -4.5;
 plot x**2/2+C1 ,\
  x**2/2+C2 ,\
  x**2/2+C3 ,\
  x**2/2+C4 ,\
  x**2/2+C5 ,\
  x**2/2+C6 ,\
  x**2/2+C7
```

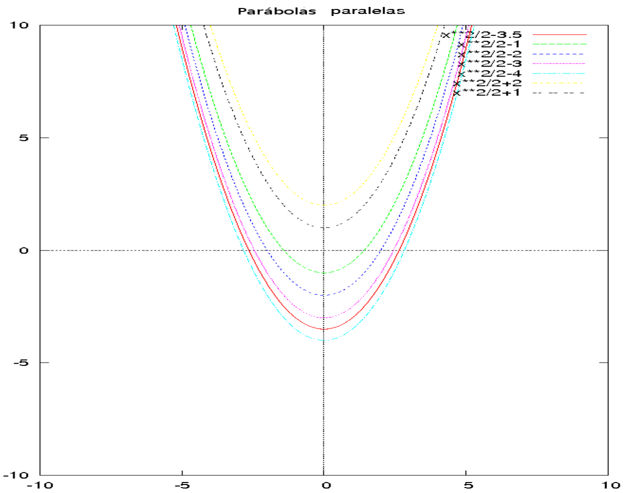

Figura 3: parábolas paralelas - Solução da equação diferencial $y' = x$.

Como vimos, a equação de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = f(x)$ é fácil de resolver, desde que possamos escrever a equação sob a forma

$$\int f'(x)dx$$

2.2- Reduzindo a Ordem de uma Equação Diferencial Ordinária

Um método para resolver equações diferenciais ordinárias de segunda ordem da forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x),$$

em que a função $f(x)$ não envolve a variável dependente y nem suas derivadas, é transformando-a em um sistema de equações de primeira ordem, ou seja, podemos resolver equações desse tipo por soluções sucessivas das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para tanto, é necessário considerarmos uma determinada função, digamos z, para nos auxiliar na resolução do sistema. A função z será de tal forma que, ao derivarmos, encontraremos a função $f(x)$ e intrgrando z, encontraremos a solução da equação diferencial ordinária do tipo $y'' = f(x)$.
Pensando assim, podemos escrever que $z = \frac{dy}{dx}$ logo,

$$y'' = z' = f(x) \tag{3}$$

o que nos conduz a escrever o seguinte sistema de duas equações de primeira ordem.

$$\frac{dz}{dx} = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = z(x)$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f(x) & \text{Eq.(I)} \\ \frac{dy}{dx} = z(x) & \text{Eq.(II)} \end{cases}$$

Obs: z é uma função de x.
A equação $y'' = 1$ é de segunda ordem[10] e podemos resolver facilmente, já que, a função do segundo membro não envolve a variável dependente y nem sua derivada.

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 1 & \text{Eq.(I)} \\ \frac{dy}{dx} = z & \text{Eq.(II)} \end{cases}$$

Para a Eq.(I) temos que:

$$dz = 1dx$$

Integrando ambos os membros da Eq.(I) temos:

$$\int dz = \int 1dx$$

$$z = x + C1$$

Mesmo raciocínio para a Eq.(II).

$$dy = zdx$$

Integrando ambos os membros da Eq.(II) fica:

$$\int dy = \int zdx$$

$$y = \int [x + C1]dx$$

$$y = \int xdx + \int C1dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C1x + C2$$

onde $C1$ e $C2$ são constantes arbitrárias. A função $y = \frac{x^2}{2} + C1x + C2$ é a solução geral da equação diferencial ordinária $y'' = 1$. Uma solução particular seria considerar como condições iniciais

$$y'(0) = -2 \quad \text{e} \quad y(1) = 5$$

Encontrando primeiramente o valor de $C1$ temos:

$$y' = x + C1 \Rightarrow -2 = 0 + C1 \Rightarrow C1 = -2$$

Agora, encontrar o valor de $C2$.

$$y = \frac{x^2}{2} + C1x + C2 \Rightarrow 5 = \frac{1^2}{2} - 2 + C2 \Rightarrow C2 = 6.5$$

$$y = \frac{x^2}{2} - 2x + 6.5$$

Logo a função $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 6.5$ é uma solução particular da equação $y'' = 1$.

Na Figura 4 temos o gráfico da solução particular da equação diferencial $y'' = 1$ com a condição inicial $y'(0) = -2$ e $y(1) = 5$.

[10] é equivalente escrever: $\frac{d^2y}{dx^2} = 1$

```
set zeroaxis
set yr [-40:40]
f(x)=x**2/2-2*x+6.5
set terminal postscript portrait color linewidth 0.5
set output " exerc02_edo04.eps"
plot f(x)
```

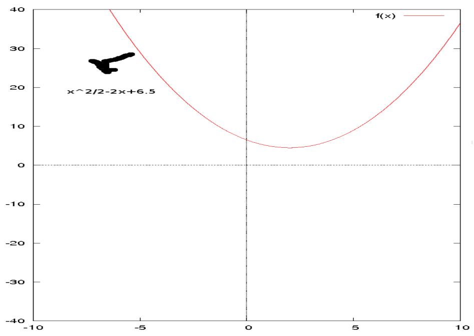

Figura 4: Uma solução particular da equação diferencial $y'' = 1$.

Resolvendo agora a equação $y'' = -1$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = -1 & \text{Eq.(I)} \\ \frac{dy}{dx} = z(x) & \text{Eq.(II)} \end{cases}$$

Para a Eq.(I) temos que:

$$dz = -1dx$$

Integrando ambos os membros da Eq.(I) temos:

$$\int dz = \int -1dx$$

$$z = -x + C1$$

Mesmo raciocínio para a Eq.(II).

$$dy = zdx$$

Integrando ambos os membros da Eq.(II) fica:

$$\int dy = \int zdx$$

$$y = \int [-x + C1]dx$$

$$y = \int -xdx + \int C1dx$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + C1x + C2$$

onde $C1$ e $C2$ são constantes arbitrárias. A função $y = -\frac{x^2}{2} + C1x + C2$ é a solução geral da equação diferencial ordinária $y'' = -1$. Uma solução particular seria considerar como condição inicial

$$y'(-3) = 1 \quad \text{e} \quad y(-3) = 1$$

Encontrando primeiramente o valor de $C1$ temos:

$$y' = x + C1 \Rightarrow 1 = -(-3) + C1 \Rightarrow C1 = -2$$

Agora, encontrar o valor de $C2$.

$$y = \frac{x^2}{2} + C1x + C2 \Rightarrow 1 = -\frac{(-3)^2}{2} + (-2)(-3) + C2 \Rightarrow C2 = -0.5$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 0.5$$

Logo a função $y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 0.5$ é uma solução particular da equação $y'' = -1$.
Na Figura 5 temos o gráfico da solução particular da equação diferencial $y'' = -1$ com a condição inicial $y'(-3) = 1$ e $y(-3) = 1$.
Como vimos acima, as equações de segunda ordem envolvem duas constantes em suas soluções.

```
set zeroaxis
set yr [-100:100]
set xr [-10:10]
f(x)=-x**2/2-2*x-0.5
set terminal postscript portrait color linewidth 0.5
set output " exerc02_edo05.eps"
 plot  f(x)
```

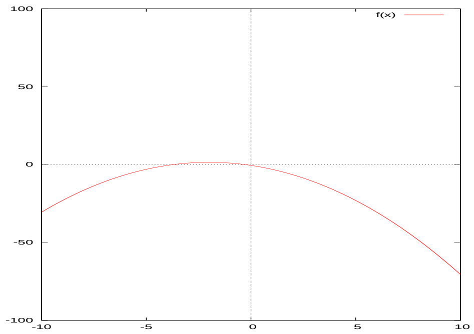

Figura 5: Uma solução particular da equação diferencial $y'' = -1$.

3 - (Modelagem)- Um Problema que envolve Equações Diferenciais à variáveis separáveis

Podemos encontrar os primeiros exemplos de equações diferenciais nas leis da Física. Por exemplo, na Mecânica temos definições como: deslocamento, velocidade e aceleração que são traduzidas matematicamente como equações à variáveis separáveis, ou seja, as variáveis x e y podem ser separadas em lados opostos de uma equação. Vamos representar através de equações diferenciais a $v$elocidade, sabemos da Física que é a derivada do deslocamento, a aceleração- derivada da velocidade e em seguida consideraremos um corpo em queda livre atribuíndo-lhe uma equação das forças atuando sobre esse corpo e finalmente deduzir a equação do corpo que cai em queda livre, despresando a resistência do ar.

3.1- Equação que descreve a queda livre de um corpo

Quando queremos calcular a velocidade de um determinado objeto móvel, [11] usamos o conceito de derivada do cálculo diferencial e integral. A velocidade de uma partícula é a razão segundo a qual sua posição varia com o tempo. Temos na Figura 6 uma partícula no ponto A e no instante t_1. Em um instante posterior, t_2, teremos a partícula deslocada para o ponto B logo, esta mudança de posição é representada por

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

[11] partícula

e o intervalo de tempo é definido por

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Então, a velocidade média [12] neste intervalo de tempo é:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Podemos saber a velocidade da partícula em cada instante, nesse caso, temos o que chamamos

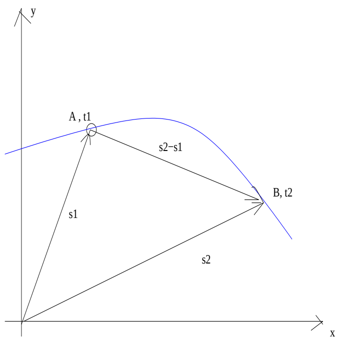

Figura 6: Velocidade Média.

de velocidade instantânea que iremos definir em seguida. Vamos considerar que temos um objeto móvel e em queda livre, então para encontrarmos a velocidade v num determinado instante t, fazemos: no intervalo de tempo Δt entre t e um instante posterior $t + \Delta$, este móvel cai uma distância Δs. A velocidade média durante este intervalo é dado pelo quociente

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Quando Δt é suficientemente pequeno, essa velocidade média converge para a velocidade exata v no começo do intervalo, ou seja,

$$v \simeq \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Além disso, quanto menor for Δt, melhor a aproximação, ou seja, se Δs é o deslocamento em um intervalo de tempo Δt, após um instante t, podemos dizer que a velocidade é o valor limite do qual se aproxima $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δs e Δt estão bem próximos de zero. Sendo assim temos:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{4}$$

O limite na Eq.(4) é justamente a derivada $\frac{ds}{dt}$, ou seja

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{5}$$

Podemos usar este raciocínio para qualquer movimento ao longo de uma reta. Se levarmos em consideração a Figura 6 podemos deduzir o seguinte: quanto mais o ponto B se aproxima do ponto A, a velocidade média aproxima-se da velocidade instantânea v em A, em que, v é chamado de tangete à trajetória no ponto A, ou seja, a velocidade média pode ser representada por um limite do quociente de diferenças.

De maneira geral, podemos definir o seguinte:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

[12] pois, não temos detalhes sobre o movimento entre os pontos A e B

que é a derivada da função y=s(t), já que a derivada é o limite do quociente de diferença. Então podemos concluí que a velocidade de um ponto móvel[13] é simplismente a derivada desse quociente, isto é, de sua função posição[14]

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = y'.$$

A aceleração de uma partícula é a razão segundo a qual sua velocidade varia com o tempo. Quando a velocidade dessa determinada partícula varia, dissemos que a mesma sofre aceleração. Temos agora na Figura 7 uma partícula que no instante t_1 está no ponto A deslocando-se com uma certa velocidade instantânea v_1 e que no instante posterior, t_2, está em B deslocando-se com uma velocidade instantânea v_2. O triângulo mostra a variação vetorial da velocidade. A aceleração média[15] $\overline{a}$ é então, o quociente da variação da velocidade pelo intervalo de tempo

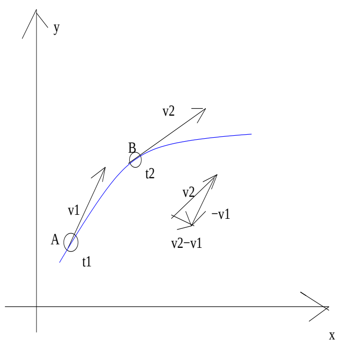

Figura 7: Aceleração Média.

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Se o quociente $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ permanecer constante em qualquer intervalo de tempo então, teremos um movimento com aceleração constante caso contrário, ou seja, se o quociente $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ variar teremos aceleração variável, nesse caso, é preciso determinar a aceleração da partícula em cada instante, ou melhor, a aceleração instantânea que é dada por:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Isto é, a aceleração instantânea de uma partícula no instante t é o valor limite de $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, no instante t, quando Δv e Δt ficam muito próximo de zero.

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{6}$$

Graficamente a aceleração em qualquer ponto é a inclinação da curva de $v(t)$ naquele ponto. Finalmente, podemos combinar a Eq.(6) com Eq.(5) para podermos escrever o que segue

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{7}$$

Em palavras podemos escrever que a aceleração de uma partícula em qualquer instante é dada pela derivada segunda de sua função posição $y = s(t)$ naquele ponto, ou simplesmente pela derivada da velocidade. Podemos dizer que

$$y'' = a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

[13] em queda livre por exemplo!!

[14] derivada do deslocamento

[15] pois, não informa como a velocidade varia com o tempo durante o intervalo Δt

A aceleração de um corpo em queda livre é chamada aceleração da gravidade e podemos representar por g. Essa aceleração tem valor negativo, pois, ela é dirigida para baixo sobre o eixo y, e assim, seu valor é dado por $-g$ nas equações. A força da gravidade é a única força que atua sobre uma partícula em queda livre, cuja equação dessa força está descrita abaixo

$$y'' = g \equiv y'' - g = 0$$

que é uma equação diferencial ordinária à variável separável. E que podemos resolvê-la facilmente por um sistema de equações de primeira ordem. vamos resolvê-la:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g & \text{Eq.(I)} \\ \frac{dy}{dt} = v & \text{Eq.(II)} \end{cases}$$

Para a Eq.(I) temos que:

$$dv = gdt$$

Integrando ambos os membros da Eq.(I) temos:

$$\int dv = \int gdt$$

$$v = gt + C1$$

Para determinarmos o valor da constante $C1$ fazemos $t = 0$, em que $v = v_0$ substituindo esses valores, que deve valer para qualquer valor de t temos:

$$v_0 = (a)(0) + C1 = C1$$

Ficando então,

$$v = gt + v_0 \equiv y' = gt + v_0$$

Mesmo raciocínio para a Eq.(II).

$$dy = vdt$$

Integrando ambos os membros da Eq.(II) fica:

$$\int dy = \int vdt$$

$$y = \int [gt + v_0]dt$$

$$y = \int gtdt + \int v_0 dt$$

$$y = g\frac{t^2}{2} + v_0 t + C2 \equiv s = g\frac{t^2}{2} + v_0 t + C2$$

Temos outra constante de integração, $C2$, para encontrá-la devemos fazer $t = 0$ para termos então, $s = s_0$. Substituindo estes valores na equação anterior temos

$$s_0 = g\frac{(0)^2}{2} + v_0(0) + C2 = C2$$

Ficando então

$$y = g\frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0 \equiv s = g\frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0$$

que é a equação de um corpo que cai em queda livre despresando a resistência do ar.

Referências

[1] Jr, C.H. Edwards; Penney, David E. *Equações Diferenciais Elementares com Problema de contorno*. 3ª ed. Rio de janeiro: Prentice-Hall,1995.

[2] Praciano-Pereira, T. *Notas de Aula de Equações Diferenciais Ordinárias* http://www.edo-metodos.sobralmatematica.org/textos

[3] Resnick, Robert; Halliday, David. *Física I*. Vol 1. 4º ed. Rio de Janeiro: Ltda,1984.

[4] Simmons, George F. *Cálculo com geometria analítica*. Vol 1. São Paulo: McGraw-Hill,1987.

[5] http://www.somatematica.com.br/superior/equacoesdif/eq.php