

# Curvas de nível homotópicas a um ponto

Praciano-Pereira, T

Sobral Matemática

6 de agosto de 2011

tarcisio@member.ams.org

pré-prints da Sobral Matemática

no. 2011.03

Editor Tarcisio Praciano-Pereira,

tarcisio@member.ams.org

## Resumo

Quando as curvas pertencentes uma família de curvas de nível forem homotópicas a um ponto  $P$  então elas podem ser associadas a uma família de círculos concêntricos num ponto  $R$  que será atingido por uma segmento de reta passando pelo raio comum. Neste artigo estou construindo um difeomorfismo entre as duas classes de curvas, as curvas de nível homotópicas a um ponto e uma família de círculos concêntricos.

Aplicação: construção de um algoritmo para determinar extremos. Este é um trabalho em andamento como pode ser facilmente visto pela natureza ainda vaga como os resultados estão sendo expressos, melhor seria dizer que é um plano de trabalho.

**palavras chave:** curvas homotópicas a um ponto, curvas de nível, extremos

# 1 Introdução

Esta seção inicial é uma expansão do resumo em que vou descrever o plano do trabalho, mas de forma intuitiva, tentando passar ao leitor uma visão do que pretendo fazer e necessariamente de forma um pouco vaga. Na seção seguinte vou fazer todas as definições e enunciar o resultado principal deste trabalho deixando as demonstrações para a penúltima seção. Vou terminar indicando uma aplicação que na verdade é uma descrição de como o trabalho vai ser continuado.

Considere uma superfície do tipo  $z = F(x, y)$  cujo domínio seja o plano  $\mathbf{R}^2$ , e suas curvas de nível.

Há dois tipos de famílias curvas de nível, quando o domínio é o plano todo, fechadas ou não fechadas! Em [2] estas duas classes foram descritas como *curvas do tipo círculos concêntricos* ou *curvas do tipo hiperbólicas*. Se uma família de curvas de nível se compuser de curvas fechadas, e se esta família for indexada num *subconjunto infinito de  $\mathbf{N}$* , será então um conjunto ordenado, com a ordem da inclusão, *uma curva estará inserida na outra*, elas serão homotópicas a um ponto  $P$  que é um extremo de  $F$ . Observe o detalhe, a família precisa ser indexada num *subconjunto infinito de  $\mathbf{N}$* , porque pode haver mais de um extremo o que vai garantir o aparecimento de *outro tipo ponto de homotopia* numa análise mais precisa! Leia: acrescentado mais dados ao levantamento, refinando a amostragem.

Em outras palavras, uma família de curvas de nível que sejam homotópicas a um ponto, *pode determinar um extremo de  $F$* , mas nós não sabemos qual é este *ponto de extremo  $P$*  e nem mesmo se ele é único se tivermos,  $n$  curvas homotópicas a um ponto,  $n \in \mathbf{N}$ . Esta *indefinição* poderia parecer como definitiva para invalidar esta pesquisa, seria impossível encontrar um algoritmo como o aqui pretendido deixando que um programa procurasse um extremo com o risco de haver uma dubiedade. Mas algoritmos, como o que pretendo, se voltam para uma situação prática, por exemplo, a busca de um foco de epidemia. Se houver mais de um foco, e se pelo menos um deles for apontado com razoável precisão, o objetivo foi alcançado e fica o problema de verificar se há outros focos, o que naturalmente seria feito, e o algoritmo estará disponível para prosseguir o trabalho.

São as famílias curvas de curvas de nível *homotópicas a um ponto* que são denominadas em [2] como *curvas do tipo círculos concêntricos*, porque tais curvas são homotópicas a qualquer curva fechada, em particular a um círculo, e uma família destas curvas será homotópica a uma família de círculos concêntricos.

Eu vou me concentrar nas *curvas homotópicas a um ponto* neste artigo.

Considere uma família  $\mathcal{E}$  de curvas de nível homotópicas a um ponto, o que significa que são curvas fechadas e inseridas uma dentro da seguinte, considerando que estejam indexadas num subconjunto de  $\mathbf{N}$ . Na próxima seção eu vou precisar todos os termos que nesta seção estão ficando vagos.

Se considerarmos uma família de círculos concêntricos,  $\mathcal{F}$ , tendo como centro comum o ponto  $R$ , é possível determinar *um difeomorfismo  $\phi$*  que ponha em correspondência estas duas famílias de modo que exista um ponto  $P$ , imagem

inversa de  $R$  pelo difeomorfismo, que é o ponto de extremo de  $F$  determinado pela família  $\mathcal{E}$ .

A dificuldade na utilização desta metodologia para determinar extremos é evidente: o difeomorfismo mencionado não é único e existe uma infinidade (não enumerável) de famílias de círculos concêntricos difeomórficos com os membros da família  $\mathcal{E}$ , portanto o problema na realidade consiste, exatamente em, (1) na determinação de  $P$ , ou (2) do difeomorfismo  $\phi$ .

Se uma metodologia for construída para associar os elementos da família  $\mathcal{E}$  com uma família de círculos concêntricos num ponto  $R$  sendo esta associação um difeomorfismo  $\phi$ , então o ponto de extremo  $P$  será a imagem inversa por  $\phi$  de  $R$ , e tenho um algoritmo para determinar extremos. O meu objetivo é a construção de  $\phi$ .

Homotopia é um conceito topológico, mas como as curvas de vou tratar aqui são de classe  $\mathcal{C}^1$  se justifica plenamente considerar como *equivalência topológica* um difeomorfismo.

## 2 As definições

As hipóteses deste trabalho são aquelas que se encontram descritas em [2].

O ponto de partida, ou os pré-requisitos para esta investigação é a existência de uma série estatística de medidas tomadas em uma região na qual foram feitas medições da intensidade e taxas de variação ao longo de duas direções padrão, que suponho serem os eixos coordenados, relativamente a pontos selecionados nesta região. Os pontos onde as medições foram feitas correspondem a uma  $\epsilon$ -malha com  $n^2$  nós produzindo o sistema de equações

$$(a_i, b_j); \quad i, j = 1, \dots, n \text{ nós da malha;} \quad (1)$$

$$F(a_i, b_j); \quad i, j = 1, \dots, n \text{ intensidade medida;} \quad (2)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \Big|_{(a_i, b_j)}; \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \Big|_{(a_i, b_j)}; \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3)$$

descrevendo os dados colhidos. Aqui estou usando uma matriz quadrada de dados, facilmente posso reformatar o trabalho para considerar uma matriz  $n \times m$  de nós.

Nestas condições é possível obter uma visão gráfica dos dados colhidos e tomar uma decisão, escolhendo que conjuntos de pontos vão produzir cada uma das curvas de nível. Caso isto não seja possível, por exemplo pela escassez de dados, um novo levantamento mais preciso teria que ser feito e vou me colocar na suposição de tenho os dados em quantidade suficiente para definir as curvas de nível.

Sem dúvida o objetivo é conseguir um algoritmo que possa operar sem a *visão do programador*, mas sabemos que esta é uma esperança nem sempre possível. Mesmo assim ao final desta seção estou mostrando que algumas técnicas podem reduzir esta necessidade de uma análise visual dos dados, pelo menos depois que alguns ajustes forem alcançados numa segunda ou terceira versão do levantamento de dados.

A afirmação de que *é possível, a partir de uma visão gráfica, selecionar conjuntos de dados que definam curvas de nível* é consequência do formato como os dados foram colhidos, os valores  $F(a_i, b_j)$  representam intensidades medidas e, em confronto com os dados, é decidido um erro e os valores que se encontrarem dentro de uma mesma faixa de erro representarão a mesma intensidade. As derivadas parciais permitem obter segmentos de retas onde se situam os pontos de tangências de curvas polinomiais ligando os pontos que tem mesma intensidade formando as curvas de nível, aproximadamente.

As figuras (1), página 3 e (2), página 4, apresentam uma visão artística (não foram realmente obtidos dados e nem tão pouco foi rodado um programa) de como se podem ver os dados e uma curva de nível obtida a partir dos mesmos. Em outro ponto eu vou mostrar dados concretos obtidos com uma simulação tendo como base uma superfície algébrica  $z = F(x, y)$  que servirá de teste para o algoritmo.

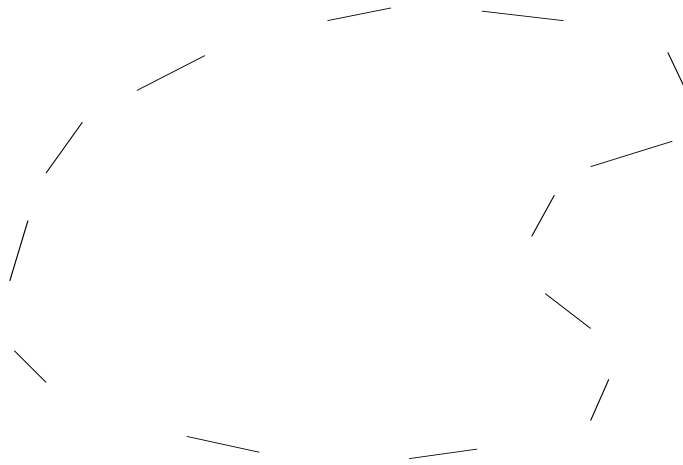


Figura 1: Dados coletados

Desta forma ficam garantidas as condições para a primeira hipótese neste trabalho que é

**Hipótese 1 (Curvas de nível)** *Uma família de curvas de nível  
Tenho um conjunto de curvas de nível homotópicas a um ponto.*

Um resultado básico de homotopia é que uma família de curvas homotópicas a um ponto são também homotópicas a uma família de círculos concêntricos. A família de círculos concêntricos é qualquer apenas a cardinalidade das famílias deve ser observada, é conveniente que seja a mesma. Já observei porque estarei usando *difeomorfismos* como equivalência topológica entre as curvas.

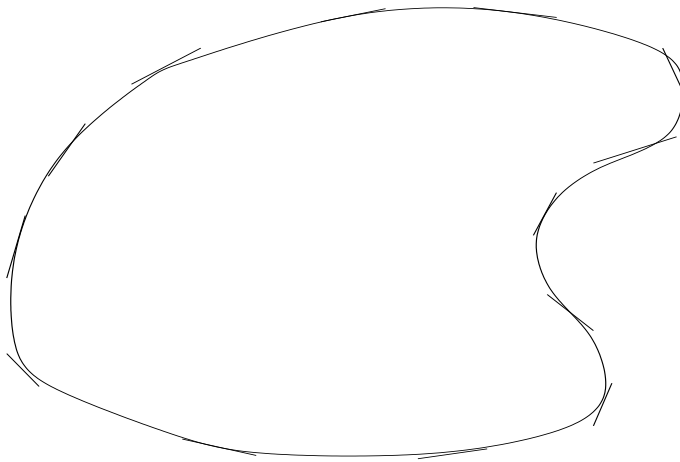


Figura 2: Dados coletados e curva de nível obtida

## 2.1 As curvas de nível

Não vou entrar no detalhe da definição das curvas agora, ainda no espírito desta primeira seção, porém vou fazer uma descrição de como elas serão construídas.

### 2.1.1 Ordem dos pontos sobre uma curva

Para não tornar a notação excessivamente complicada, vou adotar a metodologia de notação de programas de computação.

Vou descrever como é possível definir uma *ordem* dos pontos em cima de uma curva de nível e portanto mostrar que é o algoritmo que estou propondo é exequível. Esta conclusão vem do fato de que, se existir uma *ordem*, então é possível construir um *laço* com o incremento baseado nesta ordem.

As curvas de nível diferem pela *intensidade* de  $F$  e são obtidas por saltos desta *intensidade*, quer dizer que o conjunto dos pontos, *no levantamento de dados*, que pertençam a uma mesma curva de nível é *finito*, como aliás o é todo o conjunto de dados, e podem ser selecionados automaticamente por uma programa usando as condições:

1. condição de parada *enquanto*  $F==I$   
em que  $I$  é cada um dos valores captados para a intensidade do fenômeno definido o último ponto quando o programa detectar a repetição dos dados.
2. condição de evolução no laço  $x++=x$  e  $y++=y$ ,
  - em que  $==$  é o teste lógico de igualdade em C++ o teste detectando que há uma *repetição das coordenadas* portanto foi atingido o último ponto, *no arquivo de dados*, descrevendo uma mesma curva de nível,

- o símbolo ++ representa um acréscimo operado sobre os elementos de um conjunto ordenado.

portanto foram percorridos todos os pontos que definem uma mesma curva de nível I, provocando uma parada do laço que descreve uma curva de nível.

Isto mostra que é possível construir um programa para percorrer todos os dados selecionando as curvas de nível descritas pela massa de dados obtida pelo levantamento.

Há várias formas de representar o conjunto dos dados expressos nas equações (1)-(3) usando a notação de curvas planas, de modo que um laço de programa selecione o próximo elemento de uma sequência.

### 2.1.2 Método para alimentar o programa com os dados

Pretendo ter os dados guardados num arquivo, ordenado por linhas em que a *intensidade* se encontre como primeiro elemento da linha: o laço ignora a linha que comece com *intensidade errada* percorrendo assim cada uma das curvas de nível em sua leitura do arquivo.

Tenho usado este método com sucesso em muitos programas, evitando um uso intensivo de memória central, memória RAM. Já houve tempo em na literatura se considerava esta forma de processar dados como ineficiente, porém hoje parece que este aspecto se encontra superado devido a grande velocidade de acesso ao discos, em alguns casos memória externa (estas ainda um pouco lentas). Esta experiência pode ser analisada nos programas que compõem o texto [3].

### 2.1.3 Sistema de equações paramétricas

Já mostrei que é possível definir uma ordem dos pontos sobre uma curva de nível portanto posso usar a notação de laços para substituir a indexação de matemática.

Para determinar as curvas de nível mencionadas na hipótese 1, vou usar dois pontos sucessivos, de acordo com a ordem definida sobre cada uma das curvas de nível que vão aparecer dentro de um loop. Desta forma é suficiente expressar a equação de cada um pedaços de curva de nível um par de componentes da equação paramétrica usando um único intervalo para parametrizar todos as curvas que vou escolher como sendo  $[0, 1]$ . Na verdade estarei expressando o conteúdo genérico de um laço. Depois este trecho será iterado que é a forma de evitar a indexação matemática.

Ainda informalmente, designando por  $(x, y)$  e  $(x++, y++)$  dois pontos sucessivos de uma curva nível, e  $(dx, dy)$  e  $(dx++, dy++)$  as derivadas nas extremidades sucessivas, podemos deduzir das equações (1)-(3) usando a notação de curvas planas, o sistema de equações

$$x(0) = x; y(0) = y \quad (4)$$

$$x'(0) = dx; y'(0) = dy \quad (5)$$

$$x(1) = x++; y(1) = y++ \quad (6)$$

$$x'(1) = dx++; y'(1) = dy++ \quad (7)$$

que mostra que tenho quatro informações sobre cada uma das equações paramétricas da curva,

$$(x(t), y(t)); t \in [0, 1] \quad (8)$$

portanto posso determinar  $x(t), y(t)$  com polinômios do terceiro grau de modo que o próximo segmento de curva coincida com o anterior inclusive na derivada, e assim as aproximações polinomiais das curvas de nível serão de classe  $C^1$ . A metodologia para determinação destas equações está completamente descrita, inclusive com programas funcionando em [3, capítulo 4].

### 3 Demonstrações e construções

#### 3.1 Construção das curvas de nível

A malha, representada pela família de nós

$$(a_i, b_j); i, j = 1, \dots, n \quad (9)$$

será considerada aqui ordenada alfabeticamente. Esta é uma forma pouco efetiva de trabalhar porque o *programa irá percorrer todas as linhas do arquivo, selecionando aqueles com mesma intensidade*.

Uma solução para este problema, pelo menos enquanto não me surge outra opção melhor, consiste de fazer o programa rodar em *dois passos*.

1. Selecionando todas as curvas de nível *num primeiro passo* do programa e criando arquivos distintos para cada uma das curvas de nível;
2. No segundo passo construindo os segmentos polinômiais do terceiro grau de cada uma das *curvas de nível*.

#### 3.2 A construção da família de círculos

Vou precisar deste teorema básico de homotopia.

**Teorema 1 (Propriedade dos difeomorfismos)** *Propriedade básica dos difeomorfismos*

*Seja  $\mathcal{E}$  uma família de curvas de homotópicas a um ponto e  $\phi$  for um difeomorfismo do plano. Então  $\mathcal{F} = \phi(\mathcal{E})$  é uma família de curvas homotópicas a um ponto, isto é,  $\phi$  transforma famílias de curvas homotópicas a um ponto em outra família desta mesma classe, mas não necessariamente o ponto que classifica as duas famílias é o mesmo.*

Este teorema apenas diz que homotopia é uma relação de equivalência.

- Vou selecionar um ponto interior a todas as curvas de nível (interior àquela que tiver menor diâmetro).
- Considero um círculo centrado neste ponto que contenha todas as curvas e para simplificar as contas vou considerá-lo como de raio 1,  $\mathbf{S}^1$ . Consequentemente estou fazendo uma translação no plano para que a origem seja um ponto interior a todas as curvas que pertencem à família  $\mathcal{E}$ .
- Seja agora a família  $\mathcal{E}_1$  de todas as curvas inversas dos elementos de  $\mathcal{E}$  relativamente a  $\mathbf{S}^1$ , ver [1]. A figura (3), página 7, mostra  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}_1$ . Seja

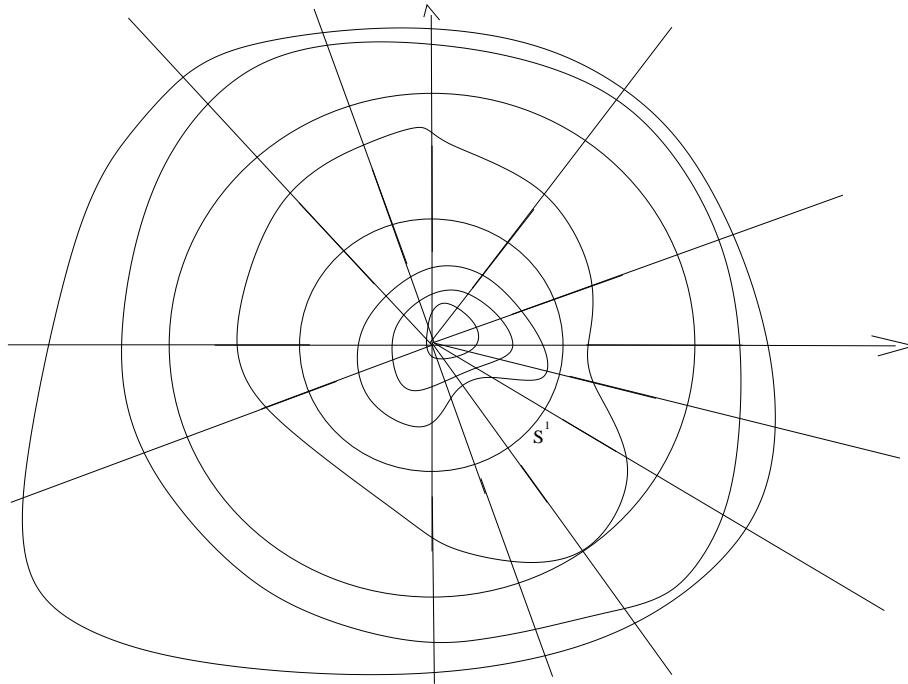


Figura 3: Curvas inversas em relação a  $\mathbf{S}^1$

$\rho$  o difeomorfismo que inverte em relação  $\mathbf{S}^1$

- As curvas da família  $\mathcal{E}_1$ , como foram obtidas por  $\rho$  estão sucessivamente todas contidas uma na outra *na razão inversa* dos membro da classe  $\mathcal{E}$ . Vou considerá-la sucessivamente indexadas no conjunto  $I = \{1, \dots, n\}$  em que  $n$  é a cardinalidade da classe  $\mathcal{E}_1$ . Vou designar estas curvas por  $\gamma_j; j \in I$ .
- Seja  $r_1\mathbf{S}^1$  o menor círculo, concêntrico com  $\mathbf{S}^1$  contendo a primeira das curvas de  $\mathcal{E}_1$  e  $\phi_1$  a transformação do plano que expande o plano com um coeficiente radial de modo a levar  $\gamma_1$  sobre  $r_1\mathbf{S}^1$  e idêntica a identidade fora do círculo  $r_1\mathbf{S}^1$ .



- Defino sucessivamente  $\phi_j$  de forma idêntica expandindo cada uma das curvas  $\gamma_j$  para levá-las para o círculo  $r_j\mathbf{S}^1$  que é o menor círculo contendo  $\gamma_j$  e definido fora de  $r_j\mathbf{S}^1$  pela transformação identidade do plano no plano.
- A composição  $\phi$ , dos difeomorfismos  $\phi_j; j = 1, \dots, n$  é um difeomorfismo do plano que transforma os elementos de  $\mathcal{E}$  na família  $(r_j)_{j \in I}$ .

Esta sucessão de passos demonstra o teorema:

**Teorema 2 (Do difeomorfismo)** *Difeomorfismo entre famílias de curvas de nível*

*Existe um difeomorfismo  $\phi$  entre uma família de curvas de nível homotópicas a um ponto e uma família de círculos concêntricos.*

O gráfico na figura (3), página 7, é apenas ilustrativo e foi feito à mão com `xfig`, mas em artigo vindouro desta série vou apresentar as equações e gráfico construídos com um programa. Não há nada que não seja conhecido neste ponto, apenas é trabalhoso de construir e o leitor sabe que este é artigo é *uma proposta de trabalho*, ou anúncio de um trabalho em andamento.

**Teorema 3 (do extremo)** *Um extremo de  $F$  é  $\phi^{-1}(0)$*

**Dem:**

Porque a família de círculos,  $(r_j)_{j \in I}$ , por construção, se encontra centrada na origem.

**q.e.d.**

### 3.3 Detalhes técnicos na demonstração

É óbvio que não será possível simplesmente colocar um círculo em volta de uma das curvas da família  $\mathcal{E}_1$  sem que ele intercepte outra curva da família, por exemplo a próxima. Isto não invalida os cálculos feitos mas seria preciso discutir detalhadamente este caso.

## 4 Aplicações

Há diversas aplicações em que algoritmos deste podem ser aplicados, no fundamento eu estou usando uma quantidade muito pequena de taxas de variação aproximada, o que é a grande vantagem que esta classe de algoritmos vai oferecer: preciso apenas das primeiras derivadas parciais. Estou essencialmente na solução aproximada de *equações diferenciais exatas*.

O fato de que eu precise da primeira ordem de derivação é um trunfo importante porque os erros serão necessariamente pequenos.

O artigo de Del Moral, [4], me sugere alguns itens de aplicação, quando eu puder entender que uma sucessão de segmentos de reta representem as curvas de nível de algum fenômeno, posso usar algumas das técnicas de filtragem para corrigir erros e vou também analisar esta possibilidade em alguns dos artigos que formaram uma sequência de que este é o inicial.

## Referências

- [1] Davis, Tom  
*Inversion in a Circle*  
<http://www.geometer.org/mathcircles> - March 23, 2011
- [2] RIOS, J. V. V.  
*Equações diferenciais exatas e determinação de extremos*  
Monografias da Sobral Matematica - 2009 - 03  
<http://www.sobralmatematica.org/monografias/vianey.pdf>
- [3] Praciano-Pereira, T  
*Cálculo Numérico Computacional*  
<http://www.sobralmatematica.org/editora/ananu00.2p.pdf>
- [4] Del Moral, P.  
*Fundamental of stochastic filtering - a book review*  
Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 48-02, April  
2011