Equações Diferenciais Exatas

Silva, M. Ilsangela* Oliveira, F. Vagner†

3 de outubro de 2008

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Pré-Prints do Curso de Matemática em Sobral
no.2008.6
Editor Tarcisio Praciano-Pereira

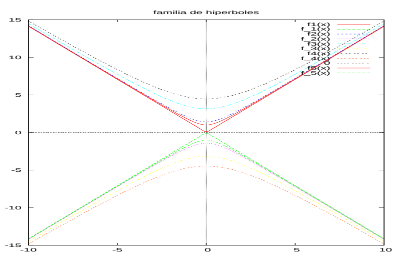

Figura 1: Família de hipérboles.

Resumo

As equações de primeira ordem tem a forma normal $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, em que f é uma função com duas variáveis. Para estas equações existem vários métodos de integração que são aplicáveis a diversas classes. Algumas dessas classes são consideradas especiais, como por exemplo, as equações diferenciais exatas pois, possuem um método de resolução próprio. Neste artigo iremos aprofundar um pouco o estudo sobre essa classe especial de equações, em que a solução geral são curvas de nível[1] e que, derivando implicitamente essa solução, encontraremos a equação diferencial que tínhamos no início. Essas equações são de primeira ordem e podem ser resolvidas por métodos de integração elementares.

palavras chave: derivação implícita, curva de nível, equações diferenciais exatas

*milsangela@gmail.com
†fvagneroliveira@bol.com.br
[1]Conjunto dos pontos (x, y) onde f toma o valor C.

1. Equações Diferenciais de 1ª Ordem e 1º Grau

A ordem de uma equação diferencial é definida pela ordem da mais alta derivada da função incógnita que temos na equação e o grau é definido pelo expoente da mais alta derivada. Mas, nem sempre é possível dizermos de imediato a ordem e o grau de algumas equações diferenciais sem antes realizarmos alguns cálculos elementares.
Considere o seguinte exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 3x \tag{1}$$

podemos perceber que é um exemplo simples de equação de primeira ordem e primeiro grau, pois, no primeiro membro temos a derivada primeira da função incógnita y, sendo esta, a mais alta derivada da função e no segundo membro temos uma função diferenciável do tipo $g(x)$.
Uma diversidade de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e primeiro grau pode ser escrita na sua forma normal, dada por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2}$$

Podemos escrever isso de uma outra forma, por exemplo, quando representamos a função $f(x,y)$ por um quociente de duas outras funções, digamos, $P(x,y)$ e $Q(x,y)$.
Veja:

$$f(x,y)dx = dy \tag{3}$$

$$f(x,y)dx - dy = 0 \tag{4}$$

Seja $P(x,y) = f(x,y)$ e $Q(x,y) = -1$. Lembrando que trata-se de uma equação à variáveis separáveis,[4] e fazendo alguns cálculos percebemos que $f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, com $Q(x,y) \neq 0$.
Sendo assim,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{5}$$

portanto,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6}$$

tem a forma do diferencial total, sendo $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ as derivadas parciais contínuas da função em uma região do plano. Numa equação diferencial nos interessa encontrar a solução, ou seja, uma curva diferenciável $y = f(x)$ que satisfaça essa equação para qualquer que seja x no intervalo determinado, mas, nem sempre essas funções existem, se existirem, é necessário usar algum método para encontrá-las. Esse método não é um caso geral, dependendo da classe de equações temos métodos diferentes.

2 - Equações Diferenciais Exatas

Vamos considerar de início a resolução de um exemplo de equação diferencial, em seguida, deduziremos um método para resolvermos equações desse tipo.
Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 6xy^2}{-6x^2y - 4y^3} \tag{7}$$

que pode ser representada por:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0 \tag{8}$$

Essa equação não é linear e nem de variáveis separáveis,[4], portanto, não é possível aplicarmos os métodos de resolução destes tipos de equações, nessa equação específica. No entanto, encontraremos o método próprio de resolução para equações diferenciais desse tipo. Podemos notar que uma função, a qual chamaremos de $F(x,y)$ é definida por $F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$ além de possuir a seguinte propriedade

$$3x^2 + 6xy^2 = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \quad 6x^2y + 4y^3 = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \tag{9}$$

Então, temos que:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = 0 \tag{10}$$

Agora, considere $P(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ e $Q(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$. Assim, podemos escrever a Eq.(10) na forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{11}$$

para certas funções diferenciáveis $P(x,y)$ e $Q(x,y)$.
Logo,

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C \tag{12}$$

em que C é uma constante arbitrária e $F(x,y)$ é uma função que define implicitamente as soluções da equação Eq.(8). Os cálculos omitidos serão feitos posteriormente ao que se segue.
Nesse exemplo, o reconhecimento de que existe uma função $F(x,y)$ que satisfaz a Eq.(9) foi de imediato. Mas, temos um problema de como reconhecer que uma dada equação diferencial, nessa forma, pode ser escrita em termos de derivadas parciais de uma única função, no caso, $z = F(x,y)$, ou melhor, como descobrir que realmente existe uma função $F(x,y)$ de tal forma que $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ sejam exatamente as derivadas parciais

$$P(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}. \tag{13}$$

2.1 - Encontrando a Função $F(x,y)$

Como vimos, o ponto crucial na resolução da Eq.(8) foi termos reconhecido que uma função $F(x,y)$ existe, satisfazendo a Eq.(9). De maneira geral não é tão simples assim reconhecermos de imediato essa função.
Seja $z = F(x,y)$ uma função de variáveis x e y. Se derivarmos implicitamente obteremos:

$$dz = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy \tag{14}$$

em que suas derivadas parciais são contínuas em uma região do plano. Chamamos essa expressão de diferencial total. Se $F(x,y) = C$, então $dz = 0$. Nesse caso, as soluções da equação diferencial são curvas de nível. Logo,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = 0 \tag{15}$$

ou seja, com uma família de curvas $F(x,y) = C$ podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem simplismente determinando a diferencial total. Mas, o problema que iremos discutir é exatamente como descobrir essa função, partindo de uma equação diferencial de primeira ordem.
Considere uma equação diferencial na forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{16}$$

Caso exista uma função

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$(x, y) \mapsto z = F(x, y)$$

definida no domínio $\Omega \subset \mathbf{R^2}$ de tal forma que

$$dz = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = dF \tag{17}$$

então:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \tag{18}$$

Nos resta saber se a expressão $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ é uma diferencial exata, ou seja, se a mesma corresponde à diferencial total de alguma função $F(x,y)$. O teorema a seguir diz que, se existir $z = f(x,y)$ assim como suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, contínuas num determinado intervalo, então a igualdade $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é verdadeira. O mesmo servirá para testarmos se essa expressão é ou não uma diferencial exata.

Teorema 1: Teorema de Schwarz,[3]

Se uma função

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

possui derivadas até a segunda ordem e que sejam contínuas, ou seja, duas vezes continuamente difereciáveis, então,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \tag{19}$$

Vamos usar esse teorema para verificarmos a existência da função $F(x,y)$.
Dizer que a expressão $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ é o diferencial total de uma determinada função $F(x,y)$ é o mesmo que

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = dF = 0 \tag{20}$$

podemos escrever,

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} \tag{21}$$

e

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{22}$$

Então, derivando a Eq.(21) em relação a y e a Eq.(22) em relação a x, temos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \tag{23}$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{24}$$

Pelo teorema de Schwarz

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{25}$$

Daí,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{26}$$

Portanto,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{27}$$

O primeiro membro da Eq.(27) é diferencial exata se, e somente se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{28}$$

que consideramos uma condição necessária e suficiente para que a Eq.(27) seja uma equação diferencial exata.
Já sabemos que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ é verdadeira. Queremos agora encontrar a função $F(x,y)$ tal que $dF = Pdx + Qdy$.
Sendo assim, podemos reescrever a expressão $Pdx + Qdy = 0$ da forma

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{29}$$

e considerar

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \tag{30}$$

Para obter $F(x,y)$ é preciso integrar a Eq.(30) em relação a x e considerar que, para qualquer $g(y)$ a função

$$F(x,y) = \int Pdx + g(y) \tag{31}$$

satisfaz a Eq.(30). Além disso, essa constante de integração $g(y)$ tem que ser de tal forma, a satisfazer também, a igualdade

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y}. \tag{32}$$

Sendo $g(y)$ uma função arbitrária de y, resta-nos calcular essa função. Então deriva-se a Eq.(31) em relação a y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx + g'(y) \tag{33}$$

Sabemos que $N = \frac{\partial F}{\partial y}$.
Portanto,

$$Q = \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx + g'(y) \tag{34}$$

de modo que,

$$g'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx \tag{35}$$

seja a derivada de $g(y)$. Para encontrarmos $g(y)$ devemos integrar a Eq.(35) em relação a y

$$g(y) = \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx\right] dy \tag{36}$$

Substituíndo $g(y)$ na Eq.(31) obteremos a função $F(x,y)$

$$F(x,y) = \int Pdx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx\right] dy \tag{37}$$

Portanto, Eq.(37) é a solução geral da equação diferencial exata.

2.2 - Método de Resolução

A cima chegamos a um dos métodos que temos para resolver equações diferenciais exatas. Na prática, para resolvermos uma equação do tipo $Pdx + Qdy = 0$, devemos primeiramente verificar se a mesma é uma equação diferencial exata, em caso afirmativo devemos garantir que exite uma função $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \tag{38}$$

Em seguida, integrar $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ em relação à variável x para obtermos

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + g(y) \tag{39}$$

sendo $F(x, y)$ função apenas de y. Agora devemos derivar a Eq.(39) em relação à variável y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx + g'(y) \tag{40}$$

E por fim, igualar Eq.(40) com a função $Q(x, y)$ para obtermos $g(y)$. Portanto a solução da equação diferencial exata será dada por $F(x, y) = C$.

Vamos resolver por esse método a Eq.(8).
temos a equação:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0 \tag{41}$$

Considere,

$$P = 3x^2 + 6xy^2 \quad e \quad Q = 6x^2y + 4y^3$$

Para resolvê-la devemos seguir os seguintes passos:
1º passo: Verificar se a mesma é uma equação diferencial exata;

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{42}$$

Temos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6xy^2) \tag{43}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy \tag{44}$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y + 4y^3) \tag{45}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy \tag{46}$$

Logo,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{47}$$

a equação diferencial é exata.
Então, existe uma função $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \tag{48}$$

2º passo: Integrar $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ em relação a x;

$$F(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + g(y) \tag{49}$$

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + g(y) \tag{50}$$

3º passo: Derivar a Eq.(50) em relação a y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 3x^2y^2) + g'(y) \tag{51}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y + g'(y) \tag{52}$$

4º passo: Sendo

$$Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{53}$$

temos que

$$6x^2y + 4y^3 = 6x^2y + g'(y) \tag{54}$$

$$g'(y) = 4y^3 \tag{55}$$

5º passo: Integrar a Eq.(55) em relação a y para obtermos $g(y)$.

$$g(y) = y^4 + C \tag{56}$$

6º passo: Substituí a Eq.(56) na Eq.(50)

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C \tag{57}$$

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C \tag{58}$$

Que é a função procurada.

2.3 - Equações Diferenciais com o Número de Variáveis > 2,[3]

Podemos ter também equações diferenciais exatas com mais de duas variáveis, nesse caso, a solução não será uma curva de nível. Dependendo do número de variável pode ser uma superfície de nível ou mais geral, variedades de nível.
Seja $z = F(x_1, x_2, x_3)$ uma função com três variávies. Se derivarmos implicitamente obteremos:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}dx_3 \tag{59}$$

Sendo $z = F(x_1, x_2, x_3)$, nos garante que $dz = 0$, então,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}dx_3 = 0 \tag{60}$$

Se essa equação for exata, então, as três igualdades abaixo serão satisfeitas.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} \quad e \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \tag{61}$$

Para um caso mais geral considere a função $z = F(x_1, x_2, ...x_n)$ em que

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}dx_3 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n = 0 \tag{62}$$

Se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \tag{63}$$

$\forall i, j \in \mathbf{N}$ e $i \neq j$, a Eq.(62) é uma equação diferencial exata com soluções da forma

$$F(x_1, x_2, ...x_n) = 0 \tag{64}$$

Referências

[1] Abunahman, Sérgio A. *Equações Diferenciais*-Rio de Janeiro:LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1984.

[2] Boyce, William. E e Diprima, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problema de Valores de Contorno*. 8ª ed. Rio de janeiro: LTC, 2006.

[3] Praciano-Pereira, T. *Notas de Aula de Equações Diferenciais Ordinárias* http://www.edo-metodos.sobralmatematica.org/textos

[4] Silva, M. Ilsangela. Primeiros Exemplos de Equações Diferenciais. Disponível em: www.sobralmatematica.org/preprints/ilsangela02.pdf
Acesso em: 12 set.2008