Teoria Local das Curvas

Márcio Nascimento da Silva

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
26 de setembro de 2007
mharcius@gmail.com
pré-prints do Curso de Matemática de Sobral
no. 2007.7
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

O objetivo deste trabalho é caracterizar uma curva usando um referencial móvel. Para isso vamos usar o triedro de Frenet, uma base ortonormal positiva obtida a partir da própria curva, quando suposta parametrizada pelo comprimento de arco.

palavras chave: curvatura, torção, triedro de frenet

1 Curvatura

Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e considere a Figura 1.

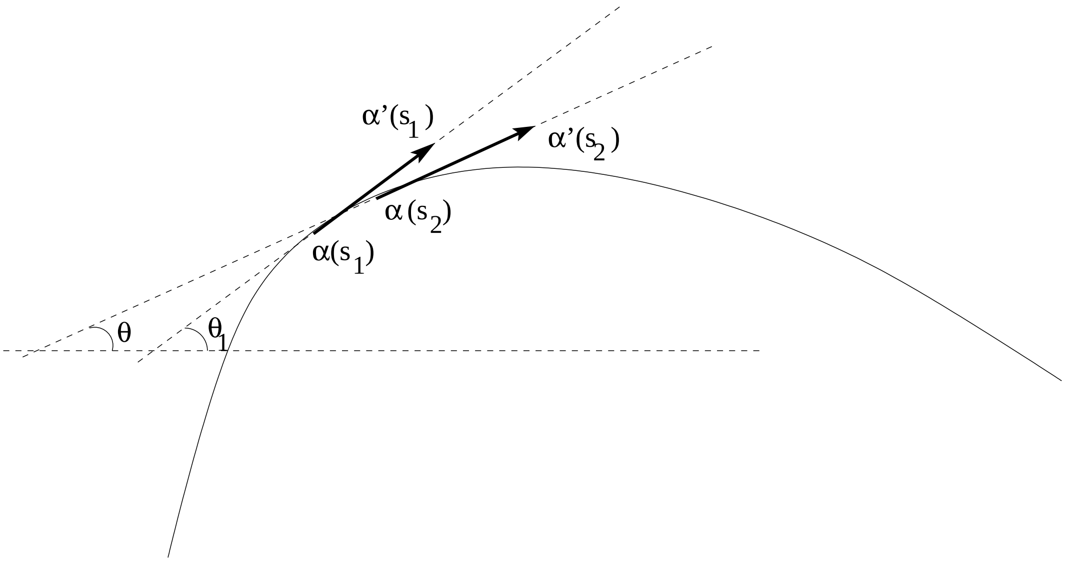

Figura 1: *Vetor tangente ao traço de α nos pontos $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$.*

Os vetores velocidade nos pontos $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$ são representados por $\alpha'(s_1)$ e $\alpha'(s_2)$ respectivamente. Considere o ângulo que θ_i que o vetor $\alpha'(s_i)$ faz com a horizontal e seja $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ como mostra a Figura 2.

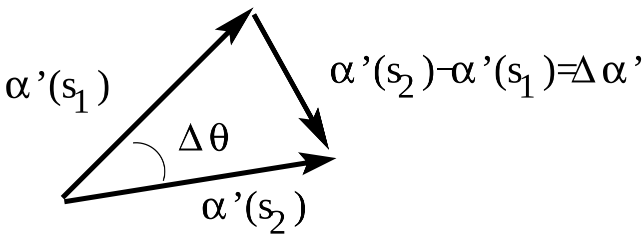

Figura 2: *Variação do ângulo θ.*

Sabemos que

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \frac{d}{ds}\alpha'(s) \\ &= \lim_{s \to s_0} \frac{\alpha'(s) - \alpha'(s_0)}{s - s_0} \\ &= \lim_{s \to s_0} \frac{\Delta\alpha'}{\Delta s} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
||\alpha''(s)|| &= \left\| \frac{d}{ds}\alpha'(s) \right\| \\
&= \left\| \lim_{s\to s_0} \frac{\alpha'(s)-\alpha'(s_0)}{s-s_0} \right\| \\
&= \left\| \lim_{s\to s_0} \left(\frac{\alpha_1'(s)-\alpha_1'(s_0)}{s-s_0}, \frac{\alpha_2'(s)-\alpha_2'(s_0)}{s-s_0}, \frac{\alpha_3'(s)-\alpha_3'(s_0)}{s-s_0} \right) \right\| \\
&= \left\| \left(\lim_{s\to s_0} \frac{\alpha_1'(s)-\alpha_1'(s_0)}{s-s_0}, \lim_{s\to s_0} \frac{\alpha_2'(s)-\alpha_2'(s_0)}{s-s_0}, \lim_{s\to s_0} \frac{\alpha_3'(s)-\alpha_3'(s_0)}{s-s_0} \right) \right\| \\
&= \sqrt{\left(\lim_{s\to s_0} \frac{\alpha_1'(s)-\alpha_1'(s_0)}{s-s_0} \right)^2 + \left(\lim_{s\to s_0} \frac{\alpha_2'(s)-\alpha_2'(s_0)}{s-s_0} \right)^2 + \left(\lim_{s\to s_0} \frac{\alpha_3'(s)-\alpha_3'(s_0)}{s-s_0} \right)^2} \\
&= \sqrt{\lim_{s\to s_0} \left(\frac{\alpha_1'(s)-\alpha_1'(s_0)}{s-s_0} \right)^2 + \lim_{s\to s_0} \left(\frac{\alpha_2'(s)-\alpha_2'(s_0)}{s-s_0} \right)^2 + \lim_{s\to s_0} \left(\frac{\alpha_3'(s)-\alpha_3'(s_0)}{s-s_0} \right)^2} \\
&= \sqrt{\lim_{s\to s_0} \left[\left(\frac{\alpha_1'(s)-\alpha_1'(s_0)}{s-s_0} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2'(s)-\alpha_2'(s_0)}{s-s_0} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_3'(s)-\alpha_3'(s_0)}{s-s_0} \right)^2 \right]} \\
&= \lim_{s\to s_0} \sqrt{\left(\frac{\alpha_1'(s)-\alpha_1'(s_0)}{s-s_0} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2'(s)-\alpha_2'(s_0)}{s-s_0} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_3'(s)-\alpha_3'(s_0)}{s-s_0} \right)^2} \\
&= \lim_{s\to s_0} \sqrt{\frac{1}{(s-s_0)^2}\Big(\alpha_1'(s)-\alpha_1'(s_0)\Big)^2 + \Big(\alpha_2'(s)-\alpha_2'(s_0)\Big)^2 + \Big(\alpha_3'(s)-\alpha_3'(s_0)\Big)^2} \\
&= \lim_{s\to s_0} \frac{1}{|s-s_0|} \|\alpha'(s)-\alpha'(s_1)\| \\
&= \lim_{s\to s_0} \frac{\|\Delta\alpha'\|}{\Delta s}
\end{aligned}$$

Por outro lado, observando a Figura 3, temos que a seguinte relação:

$$A_{S_h} < A_T < A_{S_1}$$

onde A_{S_h} é a área do setor circular do círculo de raio h (circunferência pontilhada), A_T é a área do triângulo AOB e A_{S_1} é a área do setor circular do círculo de raio 1, uma vez que α está parametrizada pelo comprimento de arco e $||\alpha'(s)|| = 1$ para todo $s \in I$.

Como a área do setor circular é dada por

$$\frac{r.\theta}{2}$$

onde r é o raio do círculo e θ o ângulo central, segue que

$$A_{S_h} = \frac{h.|\Delta\theta|}{2}$$

$$A_{S_1} = \frac{1.|\Delta\theta|}{2}$$

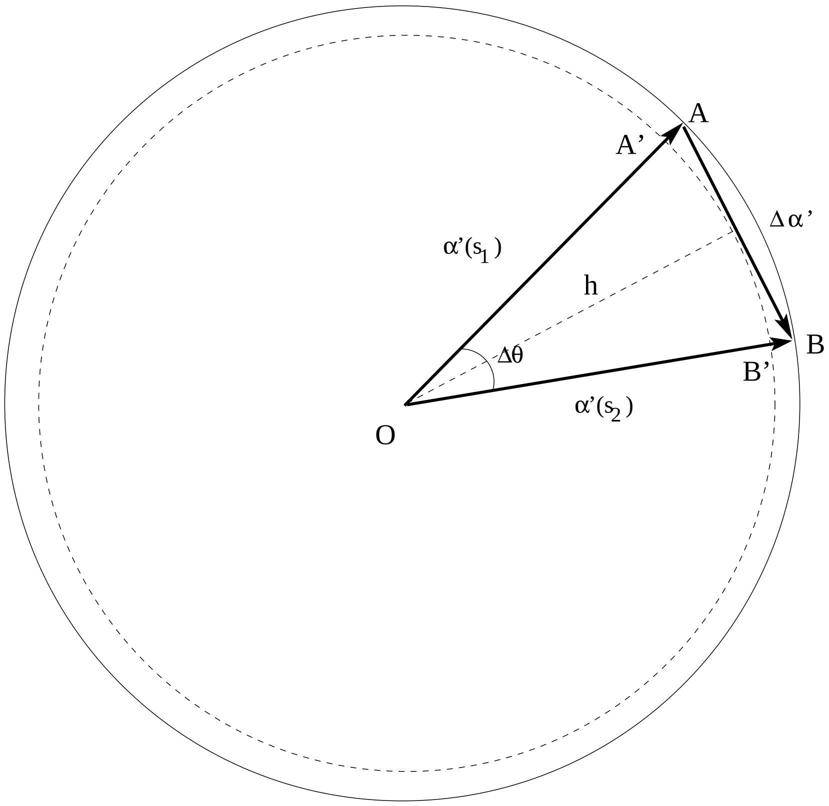

Figura 3: *Variação do ângulo θ.*

e

$$A_T = \frac{||\Delta\alpha'||.h}{2}$$

Assim

$$\frac{h.|\Delta\theta|}{2} < \frac{||\Delta\alpha'||.h}{2} < \frac{1.|\Delta\theta|}{2}$$

o que equivale a

$$|\Delta\theta| < ||\Delta\alpha'|| < \frac{|\Delta\theta|}{h} \tag{1}$$

Daí

$$\lim_{s\to s_0} \frac{|\Delta\theta|}{|s-s_0|} < \lim_{s\to s_0} \frac{||\Delta\alpha'||}{|s-s_0|} < \lim_{s\to s_0} \frac{|\Delta\theta|}{h.|s-s_0|}$$

e temos

$$\lim_{s\to s_0} \frac{|\Delta\theta|}{h.|s-s_0|} = \lim_{s\to s_0} \frac{|\Delta\theta|}{|s-s_0|}.\lim_{s\to s_0} \frac{1}{h} = \lim_{s\to s_0} \frac{|\Delta\theta|}{|s-s_0|}$$

uma vez que

$$\lim_{s\to s_0} h = 1$$

(observe a Figura 3). Pelo Teorema do Confronto, segue que

$$\lim_{s\to s_0} \frac{||\Delta\alpha'||}{|s-s_0|} = \lim_{s\to s_0} \frac{|\Delta\theta|}{|s-s_0|}$$

ou seja

$$\|\alpha''(s)\| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|$$

e concluímos que a quantidade $\|\alpha''(s)\|$ nos dá a variação do ângulo que a linha tangente faz com a direção horizontal.

Definição 1.1 *A* **curvatura** *de α em s é definida por*

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Veja que grandes variações de θ implicam em $\left|\frac{d\theta}{ds}\right|$ relativamente grande, isto é, pontos do traço de α nos quais a curva é bem "fechada", têm curvatura relativamente grande. E claro, pequenas variações de θ significam curvatura relativamente pequena.

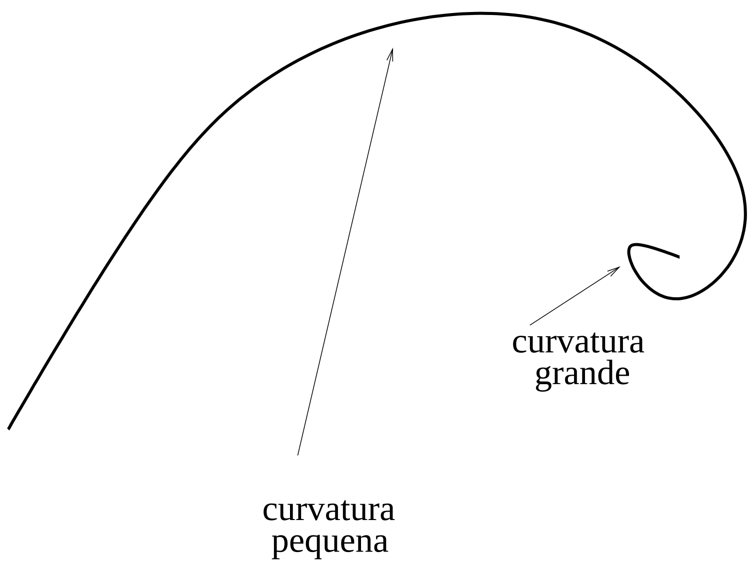

Figura 4: *Curvatura.*

Exemplo 1.1 *Se α é uma reta, então $\Delta\theta$ é sempre nulo para quaisquer dois pontos $\alpha(s_1), \alpha(s_2)$ no traço de α, isto é, $\frac{d\theta}{ds} = 0$. Assim, $\|\alpha''(s)\| = 0$, ou seja, uma reta tem curvatura zero.*

Exemplo 1.2 *Se α é uma circunferência de raio 1, digamos, com a parametrização*

$$\alpha(s) = (\cos s, \text{sen} s, 0)$$

então

$$\alpha'(s) = (-\text{sen} s, \cos s, 0)$$

e

$$\alpha''(s) = (-\cos s, -\text{sen} s, 0)$$

ou seja

$$\|\alpha''(s)\| = \sqrt{(-\cos s)^2 + (-\mathrm{sen} s)^2 + 0^2} = 1$$

e assim, uma circunferência tem curvatura constante.

Exemplo 1.3 *Considerando agora uma circunferência de raio r, temos, por exemplo, a seguinte parametrização pelo comprimento de arco*

$$\alpha(s) = (r.\cos(s/r), r.\mathrm{sen}(s/r), 0)$$

Daí

$$\alpha'(s) = (-\mathrm{sen}(s/r), \cos(s/r), 0)$$

e

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos(s/r), -\frac{1}{r}\mathrm{sen}(s/r), 0\right)$$

logo

$$\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{r}$$

Assim, uma circunferência de raio r tem curvatura constante igual a $\frac{1}{r}$.

Quando $\kappa(s) = 0$ (ou seja $\|\alpha''(s)\| = 0$ que equivale a $\alpha''(s) = (0,0,0)$), dizemos que a curva α tem uma *singularidade de ordem 1.* Singularidade de ordem zero ocorre quando $\alpha'(s) = (0,0,0)$. Consideraremos curvas regulares ($\alpha'(s) \neq (0,0,0)$) sem singularidades de ordem 1.

O número $\frac{1}{\kappa(s)}$ é chamado *raio de curvatura* de α em s. Considerando a circunferência de raio $\frac{1}{\kappa(s)}$ contida no plano gerado por $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$ e tangente ao traço de α no ponto $\alpha(s)$ temos um *círculo de curvatura* em $\alpha(s)$.

A circunferência é uma curva onde o círculo de curvatura em cada ponto coincide com a própria curva, uma vez que no Exemplo 1.3 obtivemos

$$\kappa(s) = \frac{1}{r}$$

e portanto o raio de curvatura em cada ponto é

$$\frac{1}{\kappa(s)} = r$$

2 Triedro de Frenet

Se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, sabemos que $\alpha'(s)$ é um vetor unitário para cada $s \in I$. Vamos denotar o vetor tangente $\alpha'(s)$ por $T(s)$. Também é verdade que

$$\langle T(s), T(s)\rangle = 1$$

Derivando, obtemos

$$\langle T'(s), T(s)\rangle = 0$$

ou seja, $T'(s) \perp T(s)$. Lembre que $T'(s) = (T(s))' = (\alpha'(s))' = \alpha''(s)$. Seja $N(s)$ o vetor unitário na direção de $T'(s)$, ou seja,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{||T'(s)||} = \frac{T'(s)}{||\alpha''(s)||} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} \Longleftrightarrow T'(s) = \kappa(s).N(s)$$

Chamamos N de *vetor unitário normal* de α. O plano gerado por T e N é chamado *plano osculador*.

Agora considere o vetor $B(s) = T(s) \times N(s)$. Note que $B(s)$ é um vetor unitário para cada s. De fato,

$$||B(s)|| = ||T(s) \times N(s)|| = ||T(s)||.||N(s)||.|\text{sen}(T(s), N(s))|$$

onde $(T(s), N(s))$ representa o ângulo entre $T(s)$ e $N(s)$. Como tal ângulo é $\pi/2$, segue que $||B(s)|| = 1$. O vetor B é chamado *vetor binormal* de α. Os vetores T, N, B formam, então, uma base ortonormal positiva para cada s chamada *Triedro de Frenet*. O plano gerado pelos vetores N e B é chamado *plano normal*. Já o plano gerado por T e B é chamado *plano retificador*.

Ainda sobre o vetor binormal B, temos:

$$||B(s)|| = 1 \Longrightarrow \langle B(s), B(s)\rangle = 1 \Longrightarrow \langle B'(s), B(s)\rangle = 0 \Longrightarrow B'(s) \perp B(s) \quad (2)$$

e

$$B'(s) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \Longrightarrow B'(s) = T(s) \times N'(s)$$

equivale à

$$B'(s) \perp T(s) \quad (3)$$

uma vez que $T'(s)//N(s)$ implica em $T'(s) \times N(s) = 0$. De (2) e (3) temos

$$B'(s)//N(s)$$

para cada s. Assim, existe $\tau = \tau(s)$ tal que

$$B'(s) = \tau(s).N(s)$$

Repare ainda que $B(s)$ é ortogonal ao plano osculador de α para cada s. Assim, $||B'(s)||$ nos dá a medida de quão rapidamente o plano osculador varia. Como $B'(s) = \tau(s).N(s)$ segue que

$$\tau(s) = ||B'(s)||$$

chamada *torsão* de α.

2.1 Fórmulas de Frenet

Podemos expressar os vetores T', N' e B' em função de T, N, B.

Já vimos que $T'(s) = \kappa(s).N(s)$ e que $B'(s) = \tau(s).N(s)$. Falta encontrar uma expressão para $N'(s)$. Sendo $T(s), N(s), B(s)$ um triedro ortonormal positivo para cada s, segue que $B(s) \times T(s) = N(s)$. Daí

$$N'(s) = B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s)$$

que equivale a

$$N'(s) = (\tau(s)N(s)) \times T(s) + B(s) \times (\kappa(s).N(s))$$

e portanto
$$N'(s) = -\kappa(s).T(s) - \tau(s).B(s)$$
e portanto seguem-se as *Fórmulas de Frenet*:

$$\begin{aligned}
T'(s) &= \kappa(s).N(s) \\
N'(s) &= -\kappa(s).T(s) - \tau(s).B(s) \\
B'(s) &= \tau(s).N(s)
\end{aligned}$$

3 Forma Canônica Local

Vamos usar o Triedro de Frenet como base no ponto $\alpha(s_0)$ do traço de α e exprimir $\alpha(s)$ numa vizinhança de s_0. Considere a expansão de Taylor de terceira ordem de α:

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0).\alpha'(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2}\alpha''(s_0) + \frac{(s-s_0)^3}{6}\alpha'''(s_0) + R$$

onde $\lim_{s \to s_0} \dfrac{R}{(s-s_0)^3} = 0$. Já vimos que $\alpha' = T$ e que $\alpha'' = T' = \kappa.N$ para cada s. Daí

$$\alpha''' = (\kappa.N)' = \kappa'.N + \kappa.N' = \kappa'.N + \kappa.(-\kappa.T - \tau.B) = -\kappa^2.T + \kappa'.N - \kappa.\tau.B$$

Assim

$$\begin{aligned}
\alpha(s) - \alpha(s_0) \quad &= \quad (s - s_0).T(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa(s_0).N(s_0) + \\
&\quad + \frac{(s-s_0)^3}{6}\left[-\kappa(s_0)^2.T(s_0) + \kappa'(s_0).N(s_0) - \kappa(s_0).\tau(s_0).B(s_0)\right] + R \\
&= \quad \left[(s - s_0) - \kappa(s_0)^2\frac{(s-s_0)^3}{6}\right] T(s_0) + \\
&\quad + \left[\frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa(s_0) + \kappa'(s_0)\frac{(s-s_0)^3}{6}\right] N(s_0) + \\
&\quad + \left[-\kappa(s_0).\tau(s_0).\frac{(s-s_0)^3}{6}\right] B(s_0) + R
\end{aligned}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $s_0 = 0$. Fazendo com que $\alpha(s_0)$ coincida com a origem de $\mathbb{R}^3$ e que $T(s_0) = (1, 0, 0)$, $N(s_0) = (0, 1, 0)$ e $B(s_0) = (0, 0, 1)$ então $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ é tal que

$$\begin{aligned}
x(s) &= s - \frac{\kappa^2 s^3}{6} + R_x \\
y(s) &= \frac{\kappa.s^2}{2} + \frac{\kappa'.s^3}{6} + R_y \\
z(s) &= -\frac{\kappa.\tau.s^3}{6} + R_z
\end{aligned}$$

onde as funções κ e τ estão avaliadas em $s_0 = 0$ e $(R_x, R_y, R_z) = R$. As três equações acima representam a *forma canônica local* de α numa vizinhança de $s_0 = 0$.

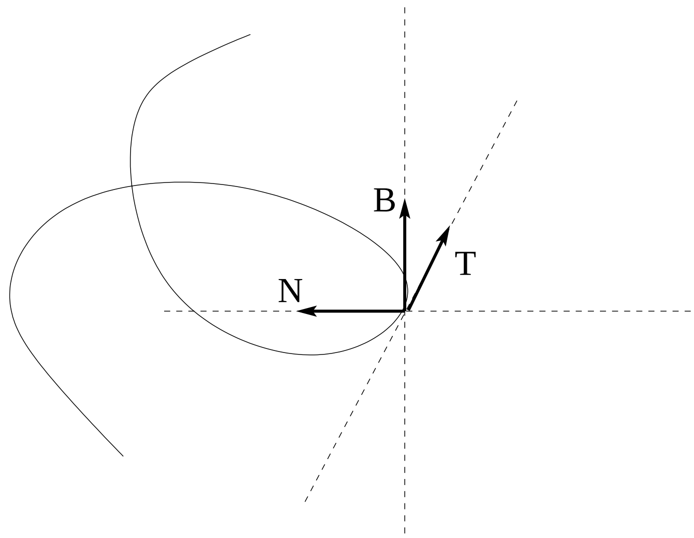

Figura 5: *Triedro de Frenet.*

Referências

[1] DO CARMO, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976, New Jersey.

[2] ARAÚJO, P. V. Geomtria Diferencial, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998, Rio de Janeiro.

[3] O'NEILL, B. Elementary Differential Geometry, Academic Press, 1997, San Diego.