Curvas Diferenciáveis

Márcio Nascimento da Silva

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
26 de setembro de 2007
mharcius@gmail.com
pré-prints do Curso de Matemática de Sobral
no. 2007.6
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Uma breve introdução às curvas diferenciáveis planas. O objetivo é se dirigir aos iniciantes em geometria diferencial discutindo mais demoradamente os conceitos básicos sobre curvas.

palavras chave: curvas diferenciáveis, vetor velocidade

1 Introdução

Suponha que você tenha um pedaço de arame bastante flexível que você possa inclusive esticá-lo ou encolhê-lo. Você pode dar muitas formas a este objeto retorcendo-o. Por exemplo, você pode enrolar esse arame num lápis e obter algo parecido com fio de telefone. Ou ainda, você pode formar a letra "U". O que se está fazendo? Criando-se uma *curva*. Se considerarmos apenas as formas planas que essas deformações podem tomar, ou seja, formas nas quais o arame retorcido possa ser colocado sobre uma mesa e todos os pontos do arame toquem a mesa, estamos diante de uma *curva plana*.

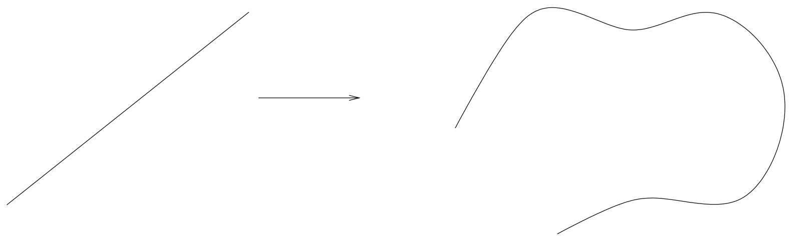

Figura 1: Deformação de um pedaço de arame em uma Curva Plana.

Quando se faz uma deformação como a comentada acima, podemos obter diversos *tipos* de figuras. Por exemplo, podemos obter polígonos, linhas poligonais, elipses e parte de *senóides*. Quando obtemos polígonos (ou poligonais) obtemos curvas que apresentam *quinas*, o que não ocorre quando deformamos o arame de modo a obter uma circunferência, por exemplo. As deformações que não apresentam *quinas* serão tratadas de modo especial, veremos mais adiante que elas serão chamadas de *curvas suaves*. As que apresentam quinas não serão descartadas, pois podemos dividí-las exatamente nas *quinas* e obter curvas *suaves por partes* (Figura 2).

2 Definição

Agora vamos definir "formalmente", do ponto de vista de *aplicações*, o que é uma curva.

Considere um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Podemos "deformar" esse intervalo e obter um objeto que não está mais contido em $\mathbb{R}$. Por exemplo, considere o intervalo $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$. Para cada ponto t desse intervalo, tome o ponto $(\cos t, \text{sen} t) \in \mathbb{R}^2$. Vejamos o que ocorre em alguns pontos:

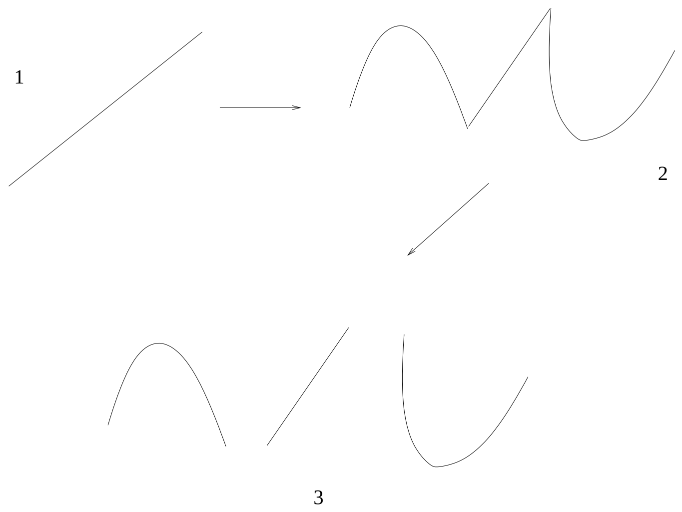

Figura 2: Curva suave por partes.

Em $[a, b]$	Em $\mathbb{R}^2$
$t = 0$	$(\cos 0, \text{sen}0) = (1, 0)$
$t = \frac{\pi}{4}$	$(\cos\frac{\pi}{4}, \text{sen}\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$t = \frac{\pi}{2}$	$(\cos\frac{\pi}{2}, \text{sen}\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$
$t = \frac{3\pi}{4}$	$(\cos\frac{3\pi}{4}, \text{sen}\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$t = \pi$	$(\cos\pi, \text{sen}\pi) = (-1, 0)$
$t = \frac{5\pi}{4}$	$(\cos\frac{5\pi}{4}, \text{sen}\frac{5\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$t = \frac{3\pi}{2}$	$(\cos\frac{3\pi}{2}, \text{sen}\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$
$t = \frac{7\pi}{4}$	$(\cos\frac{7\pi}{4}, \text{sen}\frac{7\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$t = 2\pi$	$(\cos 2\pi, \text{sen}2\pi) = (1, 0)$

Agora vamos marcar tais pontos em $\mathbb{R}^2$ (Figura 3).

Observe que se colocarmos mais pontos, teremos uma figura cada vez mais parecida com uma *circunferência*. Repare ainda que o comprimento dessa circunferência é exatamente 2π (já que seu raio é igual a 1), ou seja, podemos "retorcer" o intervalo $[0, 2\pi]$ de modo a obter a circunferência de raio 1.

Relembremos o que acabamos de fazer:

1. Tomamos um intevalo fechado ($[0, 2\pi]$);

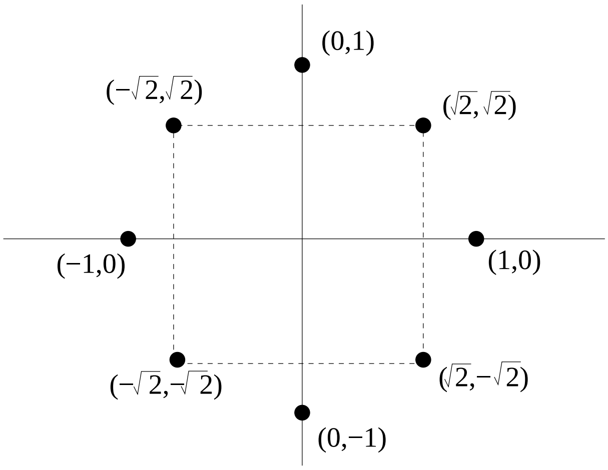

Figura 3: Pares ordenados da forma $(\cos t, \mathrm{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$.

2. A cada ponto t de $[0, 2\pi]$ associamos um ponto de $\mathbb{R}^2$, neste caso, na forma $(\cos t, \mathrm{sen} t)$;
3. Obtivemos um "objeto" que é o intervalo $[0, 2\pi]$ "retorcido", no caso, o objeto é uma circunferência de raio 1.

Agora se associamos a cada ponto t do intervalo $[0, 2\pi]$ o par ordenado $(2\cos t, 2\mathrm{sen} t) \in \mathbb{R}^2$, obteremos também uma circunferência, mas dessa vez com raio 2, ou seja, o intervalo $[0, 2\pi]$ foi agora "esticado" e "retorcido", uma vez que uma circunferência de raio 2 tem comprimento igual a 4π, o dobro do comprimento do intervalo.

Fica claro também que se a cada ponto do intervalo t associarmos o par ordenado $\left(\dfrac{\cos t}{3}, \dfrac{\mathrm{sen} t}{3}\right) \in \mathbb{R}^2$, vamos obter uma circunferência de raio $1/3$, ou seja, o intervalo foi "encolhido" e "retorcido", já que a circunferência terá comprimento igual a $1/3$ do comprimento do intervalo.

Nestes dois casos, usamos os mesmos três passos citados anteriormente. Repare ainda que nos três exemplos, fizemos o seguinte: a cada ponto t do intervalo $[0, 2\pi]$ associamos um par ordenado $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais que dependem de t. Agora podemos dar a seguinte definição para uma *curva plana*:

Definição 2.1 (Curva Plana) *Seja $[a, b]$ um intervalo de $\mathbb{R}$. Uma aplicação contínua do tipo*

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

onde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ será chamada uma **curva plana**. *A imagem dessa aplicação será chamada* **traço de** *α e $x(t), y(t)$ são as* **funções coordenadas de** *α.*

Vale ressaltar que uma aplicação do tipo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é também comumente chamada de *curva parametrizada* (onde t é o parâmetro) uma vez que tal expressão é uma equação paramétrica. Desse modo, vimos que

$$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

onde

$$\alpha(t) = (\cos t, \text{sen} t)$$

ou seja, $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \text{sen} t$ é uma curva plana cujo traço é uma circunferência de raio 1. Obviamente, $\alpha_1(t) = (2\cos t, 2\text{sen} t)$ é uma curva plana cujo traço é uma circunferência de raio 2. Vejamos mais alguns exemplos.

Considere a aplicação $\alpha : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (t, |t|)$. Vemos que $x(t) = t$ e $y(t) = |t|$ são as funções coordenadas de α. O traço de α, que é a **imagem** da aplicação (ou seja, o lugar geométrico dos pontos $(t, |t|)$ quando $t \in [-1, 1]$) aparece na Figura 4.

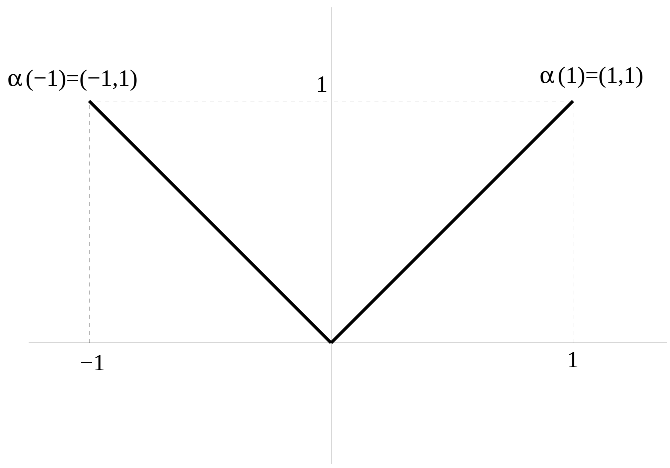

Figura 4: Traço da curva $\alpha(t) = (t, |t|)$ com $t \in [-1, 1]$.

Considere agora a aplicação $\beta : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\beta(t) = (t, t^2)$. Suas funções coordenadas são $x(t) = t, y(t) = t^2$. O traço de β aparece na Figura 5.

Vamos olhar agora mais atentamente para as funções coordenadas das curvas dos exemplos acima. As funções coordenadas da curva $\alpha(t) = (t, |t|)$ são $x(t) = t$, $y(t) = |t|$. Como é fato, a função $x(t) = t$ é derivável para qualquer valor de t (é um polinômio!), em particular, $x(t) = t$ é derivável no intervalo $(-1, 1)$. Já $y(t) = |t|$ não é derivável em $t = 0$ e $0 \in (-1, 1)$. Já na curva $\beta(t) = (t, t^2)$, vemos que suas funções coordenadas são ambas deriváveis em todo $\mathbb{R}$, em particular, deriváveis em $(0, 1)$.

Definição 2.2 (Curva Diferenciável) *Diremos que uma curva* $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ *é* **diferenciável** *se suas funções coordenadas*

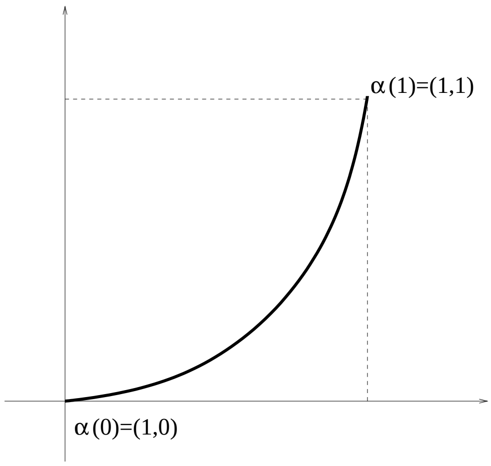

Figura 5: Traço da curva $\alpha(t) = (t, t^2)$ com $t \in [0, 1]$.

x, y são funções deriváveis no intervalo $[a, b]$, ou seja, x, y são deriváveis em (a, b) e existem as derivadas laterais $x'_+(a), y'_+(a), x'_-(b), y'_-(b)$.

Sendo assim, $\alpha(t) = (t, |t|)$, $t \in [-1, 1]$ **não é** uma curva diferenciável ao passo que $\beta(t) = (t, t^2), t \in [0, 1]$ e $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen} t), t \in [0, 2\pi]$ são curvas diferenciáveis.

Daqui por diante falaremos apenas de *curvas diferenciáveis.*

3 Vetor Velocidade

Dada uma curva diferenciável, podemos associar a cada ponto de seu traço um vetor tangente. Tome por exemplo, mais uma vez, a curva $\alpha(t) = (\cos t, \text{sen} t)$. A Figura 6 apresenta algumas "amostras" de vetores tangentes ao seu traço.

Agora observe o seguinte. Sendo α diferenciável, é possível encontrar as derivadas das funções coordenadas. Neste caso, claramente, $x'(t) = -\text{sen} t$ e $y'(t) = \cos t$. Vejamos o que ocorre com essas derivadas para valores de $t \in [0, 2\pi]$.

Em $[a, b]$	Vetor em $\mathbb{R}^2$
$t = 0$	$(-\text{sen} 0, \cos 0) = (0, 1)$
$t = \frac{\pi}{2}$	$(-\text{sen}\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$
$t = \pi$	$(-\text{sen}\pi, \cos\pi) = (0, -1)$
$t = \frac{3\pi}{2}$	$(-\text{sen}\frac{3\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{2}) = (1, 0)$
$t = 2\pi$	$(-\text{sen} 2\pi, \cos 2\pi) = (0, 1)$

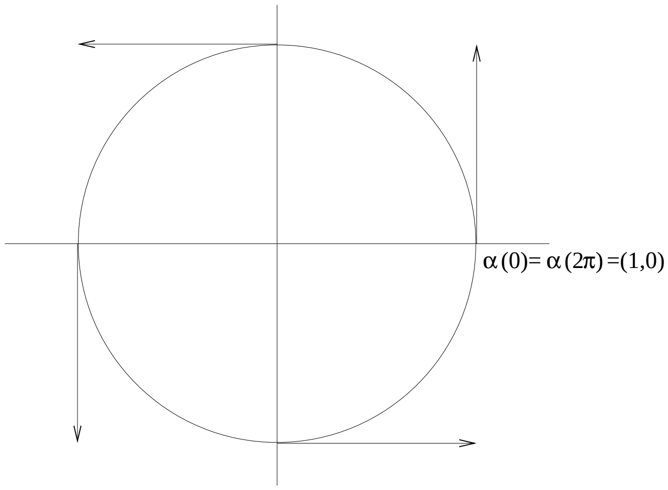

Figura 6: Traço da curva $\alpha(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, com alguns vetores tangentes ao seu traço.

Como sabemos, cada ponto de $\mathbb{R}^2$ está associado a um único segmento orientado do plano (representante de um vetor...). Assim, podemos considerar os pares ordenados encontrados acima como coordenadas de um vetor na base natural de $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, o par ordenado $(1, 0)$ é o ponto de coordenadas (1,0) do plano e também é o ponto final de um vetor que tem origem em $(0, 0)$.

Agora, em cada ponto $(x(t), y(t))$ do traço de α vamos colocar o vetor $(x'(t), y'(t))$ com ponto inicial exatamente em $(x(t), y(t))$. Olhe a Figura 7.

Definição 3.1 (Vetor velocidade) *Dada uma curva diferenciável* $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ *chamaremos o vetor* $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ *de* **vetor velocidade de α em $\alpha(t)$**.

A cada ponto do traço de α, isto é, no ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ é associado um vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ que tem ponto inicial em $\alpha(t)$, como na Figura 8.

Vejamos agora a razão do nome *vetor velocidade*. Vamos mais uma vez vamos considerar o exemplo da circunferência, ou seja, a curva $\alpha(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ cujo traço é uma circunferência de raio 1. Como já vimos, o comprimento do traço de α é exatamente 2π que também é o comprimento do intervalo $[0, 2\pi]$. O vetor velocidade de α é o vetor:

$$\alpha'(t) = (-\mathrm{sen} t, \cos t)$$

e seu comprimento é

$$||\alpha'(t)|| = \sqrt{(-\mathrm{sen} t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

ou seja, o vetor velocidade tem comprimento constante igual a 1. Agora imagine a seguinte situação: suponha que dois seres estão sobre os objetos "intervalo" e

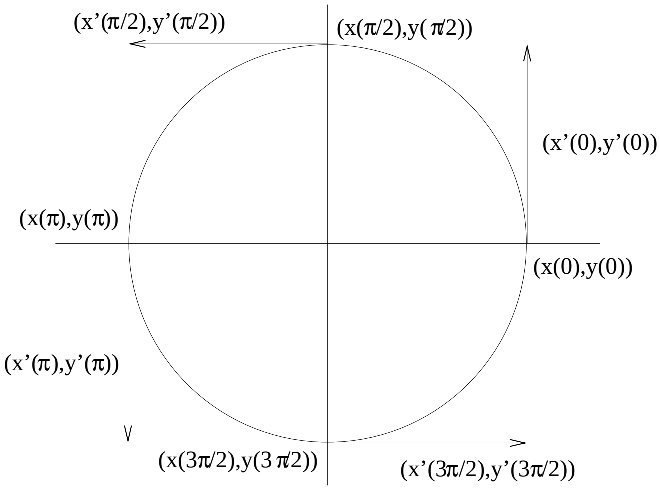

Figura 7: Traço da curva $\alpha(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, com os vetores $(-\mathrm{sen} t, \cos t)$.

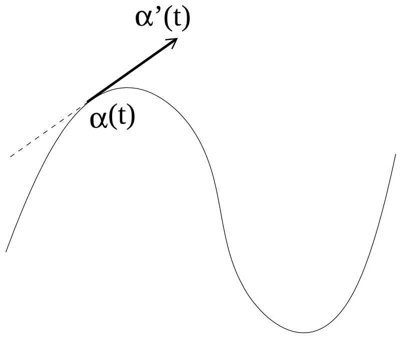

Figura 8: Vetor velocidade em $\alpha(t)$.

"traço". Um ser está sobre $[0, 2\pi]$, mais precisamente sobre o 0 e o outro ser está sobre a circunfência, exatamente no ponto $(1, 0)$. Imagine que eles começam a caminhar exatamente ao mesmo tempo sobre seus respectivos objetos de modo que cheguem ao final de cada um deles também ao mesmo tempo, isto é, o ser que está no intevalo chegará ao ponto 2π exatamente no mesmo instante em que o ser que está sobre a circunferência chegar novamente ao ponto $(1, 0)$ depois de dada uma volta.

Como os objetos têm o mesmo comprimento, ninguém vai "correr" mais rápido.

Agora se considerarmos a curva $\beta(t) = (2\cos t, 2\mathrm{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$, vemos que o intervalo continua com comprimento igual a 2π enquanto o traço agora é

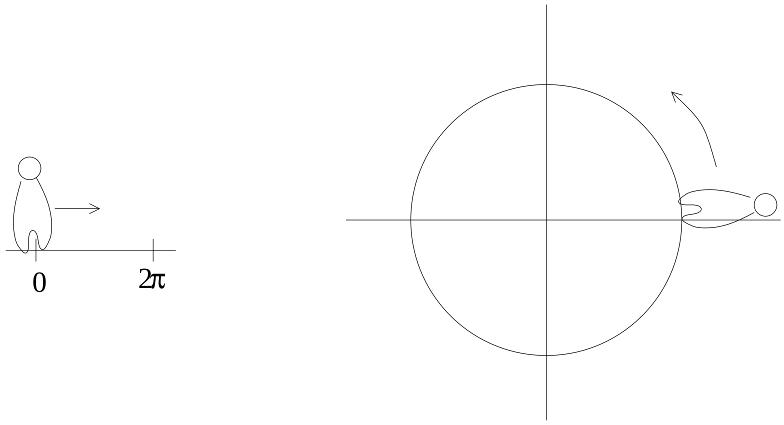

Figura 9: Seres percorrendo os objetos "intervalo" e "traço" no mesmo intervalo de tempo.

uma circunferência de raio 2, ou seja, tem comprimento igual a 4π. Assim, para que os seres percorram suas devidas trajetórias num mesmo espaço de tempo, é preciso que o ser que está sobre a cincunferência "ande" mais rápido, pois o seu percusso é maior. Vamos ver o que ocorre com o vetor velocidade de β:

$$\beta'(t) = (-2\text{sen}t, 2\cos t) \Longrightarrow ||\beta'(t)|| = \sqrt{(-2\text{sen}t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$$

ou seja, a velocidade escalar do ser que percorre a cincunferência agora é igual a 2.

Os exemplos acima, trazem curvas que são percorridas com velocidade escalar constante, mas isso nem sempre acontece. Tome por exemplo a curva $\alpha(t) = (t, t^2)$ com $t \in [0,1]$ o traço de α aparece na Figura 5. Veja que $\alpha'(t) = (1, 2t)$ e portanto,

$$||\alpha'(t)|| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

ou seja, a velocidade escalar varia em função de t. Repare que sua velocidade escalar inicial vale 1 (quando $t = 0$, $||\alpha'(0)|| = 1$) e seu valor cresce até $\sqrt{5}$ (pois $t = 1$ implica que $||\alpha'(t)|| = \sqrt{5}$).

Um outro exemplo é a curva $\alpha : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (t^2, t^3)$. Temos que $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ e portanto sua velocidade escalar é

$$||\alpha'(t)|| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|.\sqrt{4 + 9t^2}$$

e aqui também a velocidade escalar varia em função de t. A Figura 10 mostra o campo de vetores velocidade ao longo do traço de α. Veremos mais a frente, que podemos ter parametrizações diferentes que resultam no mesmo traço e portanto, um mesmo caminho pode ser percorrido com velocidades diferentes. Até mesmo, com velocidade constante!

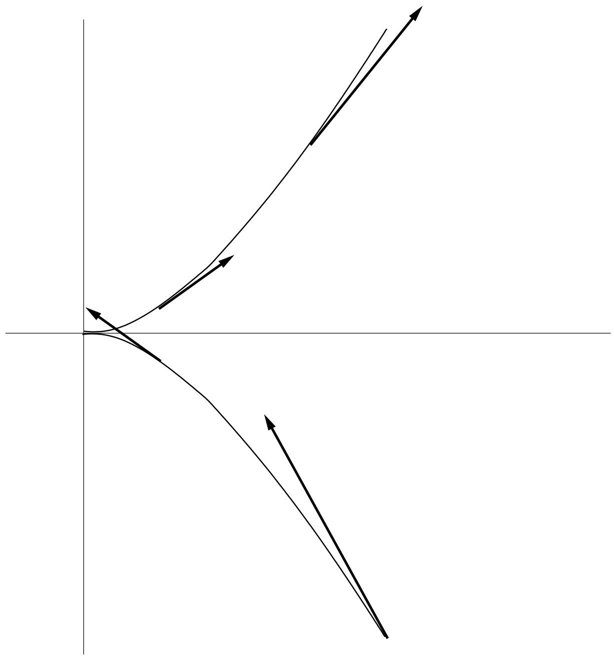

Figura 10: Campo de vetores velocidade ao longo do traço de $\alpha(t) = (t^2, t^3)$.

t	$\alpha'(t)$	$\|\|\alpha'(t)\|\|$
-1	$(-2, 3)$	$\sqrt{13}$
$-1/2$	$(-1, 3/4)$	$(1/2)\sqrt{17/4}$
0	$(0, 0)$	0
$1/2$	$(1, 3/4)$	$(1/2)\sqrt{17/4}$
1	$(2, 3)$	$\sqrt{13}$

Observe que neste exemplo, a velocidade zera em um ponto da curva ($\alpha(0)$). Quando isso ocorre dizemos que $t = 0$ (o valor de t para o qual ocorre $\alpha'(t) = (0, 0)$) é uma *singularidade de* α.

Definição 3.2 (Curva Regular) *Uma curva diferenciável* $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é dita* **regular** *quanto* $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ *para todo* $t \in [a, b]$.

Observação 3.1 (Classe de Diferenciabilidade) *Já sabemos que uma curva diferenciável é aquela cujas funções coordenadas são deriváveis. Quando uma curva* α *for tal que suas funções coordenadas possuem derivadas contínuas de todas as ordens, diremos que* α *é de classe* C^∞ *ou* **suave**.

Daqui por diante trataremos das curvas parametrizadas regulares suaves.

4 Comprimento de Arco

Em um dos exemplos acima, vimos casos onde o tamanho do intervalo era exatamente igual ao tamanho do traço da curva (quando $\alpha(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t)$). No entanto, quando vimos a curva $\alpha(t) = (t, t^2)$ nada foi falado sobre o seu comprimento. Sabemos apenas que aqueles seres percorrem suas trajetória e em um mesmo intervalo de tempo e que o ser sobre o traço da curva não tinha velocidade constante. Vamos ver como obter o comprimento do traço de uma curva $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, ou seja, vamos calcular o *comprimento do arco que liga* $\alpha(a)$ $\alpha(b)$.

Considere o traço de uma curva $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como na Figura 11. Os pontos $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ são pontos do traço de α que determinam uma poligonal que se aproxima do traço de α. Quanto mais pontos na poligonal, melhor a aproximação. Podemos dizer que $P_1 = \alpha(t_1), P_2 = \alpha(t_2), P_3 = \alpha(t_3), P_4 = \alpha(t_4), P_5 = \alpha(t_5)$ onde $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in (a, b)$, assim, o comprimento da poligonal é dado por

$$\sum_{i=1}^{4} d(P_{i+1}, P_i)$$

onde $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6 = b$ é uma *partição*[1] de $[a, b]$.

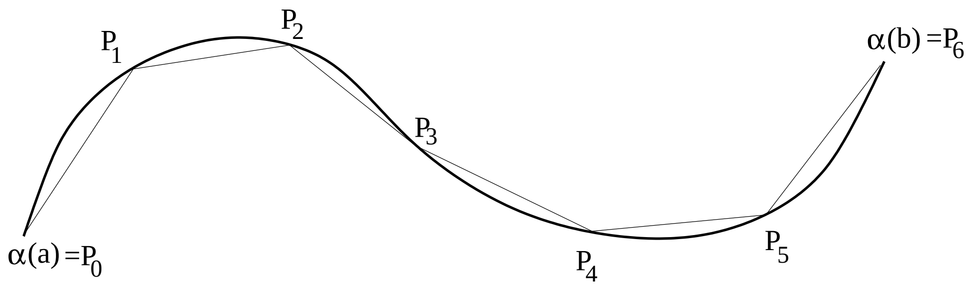

Figura 11: Traço de α aproximada por uma poligonal.

Se tomarmos mais pontos na partição de $[a, b]$ teremos uma aproximação cada vez melhor do comprimento do traço de α. Assim, denotando o comprimento do traço de α por $L(\alpha)$ podemos dizer que

$$L(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} d(P_{i+1}, P_i)$$

Sendo α diferenciável, então pelo Teorema do Valor Médio, para cada subintervalo (t_i, t_{i+1}) existe $\lambda_i \in (t_i, t_{i+1})$ tal que

$$x'(\lambda_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

[1]Uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto de elementos de $[a, b]$ tais que $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$

ou seja,

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\lambda_i).(t_{i+1} - t_i) \tag{1}$$

Pela mesma razão, existe $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$ tal que

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\xi_i).(t_{i+1} - t_i) \tag{2}$$

Como

$$d(P_{i+1}, P_i) = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

segue das Equações (1) e (2) que:

$$\begin{aligned} d(P_{i+1}, P_i) &= \sqrt{(x'(\lambda_i).(t_{i+1} - t_i))^2 + (y'(\xi_i).(t_{i+1} - t_i))^2} \\ &= \sqrt{[(x'(\lambda_i))^2 + (y'(\xi_i))^2].(t_{i+1} - t_i))^2} \\ &= |t_{i+1} - t_i|.\sqrt{x'(\lambda_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \end{aligned}$$

Como $t_{i+1} > t_i$ o módulo é desnecessário, assim

$$d(P_{i+1}, P_i) = (t_{i+1} - t_i).\sqrt{x'(\lambda_i))^2 + (y'(\xi_i))^2}$$

Repare ainda que quando $n \longrightarrow +\infty$ temos que $\lambda_i \longleftrightarrow \xi_i$ e portanto:

$$n \longrightarrow +\infty \Longrightarrow d(P_{i+1}, P_i) = (t_{i+1} - t_i).\sqrt{x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} = (t_{i+1} - t_i).||\alpha'(c_i)||$$

Daí

$$L(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i).||\alpha'(c_i)||$$

ou seja, temos o limite da soma de Riemann da função $f(t) = ||\alpha'(t)||$ com relação a partição $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ e os números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ com $c_i \in (t_{i+1}, t_i)$, ou seja, temos

$$L(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||dt \tag{3}$$

Desta forma, a Equação (3) nos dá a maneira de encontrar o comprimento do traço de α. Por exemplo, no caso da curva $\alpha(t) = (t, t^2)$ com $t \in [0, 1]$, temos que $\alpha'(t) = (1, 2t)$ e portanto $||\alpha'(t)|| = \sqrt{1 + 4t^2}$. Assim, o comprimento de seu traço é:

$$L(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\ dt$$

usando o fato que

$$\int \sqrt{1 + x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left[x.\sqrt{1 + x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right] + k$$

temos que

$$L(\alpha) = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})}{4} \cong 1.4789$$

Considerando a curva $\beta(t) = (t^2, t^3)$ com $t \in [-1, 1]$ vimos que $||\alpha'(t)|| = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$ e portanto

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{4t^2+9t^4}\ dt \\ &= \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{4+9t^2}\ dt \\ &= \int_{-1}^{0} (-t)\sqrt{4+9t^2}\ dt + \int_{0}^{1} t\sqrt{4+9t^2}\ dt \\ &= -\int_{-1}^{0} 2t\sqrt{1+\frac{9}{4}t^2}\ dt + \int_{0}^{1} 2t\sqrt{1+\frac{9}{4}t^2}\ dt \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $1 + \frac{9}{4}t^2 = u$, teremos

$$L(\beta) = \frac{2}{9}\int_{1}^{13/4} \sqrt{u}\ du \cong 2.8794$$

Veja que esses exemplos mostram que fazer o cálculo do comprimento do traço de uma curva α pode ser algo muito trabalhoso. Se tivéssemos uma maneira de deixar a integral mais simples, seria mais fácil o cálculo do comprimento. Se conseguirmos *reparametrizar* [2] a curva de modo que a velocidade seja constante, nossa conta se resume em integrar uma função constante[3] $||\overline{\alpha}'(s)|| = k$.

Considere uma curva $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Vamos obter uma nova parametrização para o traço de α de modo que agora tenhamos velocidade constante. Mais ainda, vamos fazer com que a velocidade escalar seja igual a 1. Relembrando a saga dos seres que andam sobre os objetos "intervalo" e "traço" é de se esperar, então, que o novo parâmetro, digamos s, esteja num intervalo de igual tamanho ao comprimento do traço da curva, ou seja, $s \in [0, L(\alpha)]$. De fato, pela Equação (3), temos que

$$L(\alpha) = \int_{a}^{b} ||\alpha'(t)||\ dt$$

Assim, podemos definir a função $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \int_{a}^{t} ||\alpha'(z)||\ dz$$

[2] Obter uma "outra" aplicação que tenha o mesmo traço de α.

[3] Aqui usamos $\overline{\alpha}$ e s para indicar a mudança de parâmetro e portanto da parametrização

Observe que g é uma função crescente, uma vez que $g'(t) = ||\alpha'(t)|| > 0$ [4]. Vemos ainda que g é derivável e que g é uma bijeção do intervalo $[a, b]$ no intervalo $[0, L(\alpha)]$. Assim, g é um *difeomorfismo*[5]de $[a, b]$ em $[0, L(\alpha)]$.

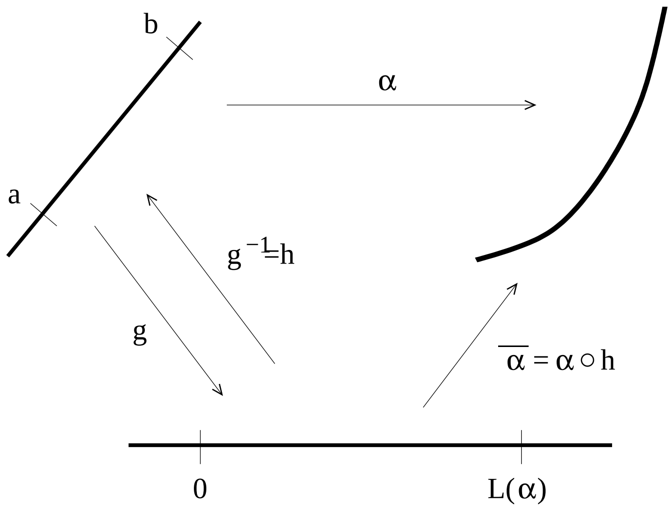

Figura 12: Reparametrização do traço de α.

Seja $h = g^{-1}$. Assim, fazendo $\overline{\alpha} = \alpha \circ h$ temos uma nova parametrização (diferenciável[6]) para o traço de α. Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ para cada $t \in [a, b]$, então

$$\overline{\alpha}(s) = \alpha(h(s)) = (x(h(s)), y(h(s))) \text{ para cada } s \in [0, L(\alpha)]$$

e daí

$$\overline{\alpha}'(s) = \alpha'(h(s)).h'(s)$$

que implica em

$$||\overline{\alpha}'(s)|| = ||\alpha'(h(s))||.|h'(s)| = ||\alpha'(t)||.\frac{1}{|g'(t)|} = \frac{||\alpha'(t)||}{||\alpha'(t)||} = 1$$

Quando uma curva estiver parametrizada de tal forma que sua velocidade escalar seja constante e igual a 1, dizemos que tal curva está parametrizada pelo *comprimento de arco*. As contas acima mostram que é sempre possível reparametrizar uma curva (regular diferenciável suave) pelo comprimento de arco.

[4]Lembre que estamos lidando com curvas regulares.

[5]g é derivável e sua inversa também é derivável, uma vez que $(g^{-1})' = \dfrac{1}{g'} \neq 0$

[6]Composta de aplicações diferenciáveis

Referências

[1] DO CARMO, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976, New Jersey.

[2] ARAÚJO, P. V. Geomtria Diferencial, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998, Rio de Janeiro.

[3] O'NEILL, B. Elementary Differential Geometry, Academic Press, 1997, San Diego.