Curva de Um Cabo Suspenso

Rios, João Vianey Vasconcelos* Silva, Maria Ilsangela† Praciano - Pereira, T‡

13 de novembro de 2008

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA
Pré-Prints do Curso de Matemática em Sobral

no. 2008.07

Editor Tarcisio Praciano-Pereira, tarcisio@member.ams.org

Resumo

Neste trabalho pretendemos deduzir a equação da catenária, que descreve a curva de um cabo flexível, não elástico e homogêneo suspenso nas extremidades. Vamos estudar o problema de um cabo preso em seus dois extremos como os que empregados nas companhias elétricas para levar a corrente de alta tensão entre as centrais elétricas e os centros de consumo. A catenária como a ciclóide são duas curvas importantes na Física e na Matemática.

A curva que descreve um cabo que está fixo por seus dois extremos e não está submetido a outras forças diferentes do seu próprio peso(gravidade) é uma catenária. A catenária foi confundida a princípio com a parábola(por Galileu Galilei) até que o problema foi resolvido pelos irmãos Bernoulli simultaneamente com Leibniz e Huygens.

palavras chave: curvas, catenária, equações diferenciais.

*vianeymatematico@gmail.com
†milsangela@gmail.com
‡tarcisio@member.ams.org

1 Introdução

A **catenária**(do latim *catena*, corrente) é um tipo de suporte para os cabos de uma rede elétrica. É conhecida como uma curva que descreve o aspecto de um cabo suspenso por suas extremidades submetido apenas à força da gravidade.

O problema de descrever matematicamente a forma da curva formada por um fio suspenso entre dois pontos e sob a ação exclusiva da gravidade foi proposto por Galileu Galilei, mencionando a conjectura de que a curva fosse uma parábola. Aos 17 anos de idade, o matemático e físico holandês Christiaan Huygens(1629-1695) mostrou, em 1647, com argumentos físicos, que a conjectura era falsa sem, contudo descobrir a expressão analítica da curva. Em 1669, um outro matemático, Joachim Jungius (1587-1657), publicou um trabalho também refutando a idéia de Galileu, de que a Catenária seria uma parábola.

Em 1690, Johann Bernoulli relançou o problema à comunidade científica. A solução do problema foi publicada independentemente em 1691 por John Bernoulli, Leibniz e Huygens.

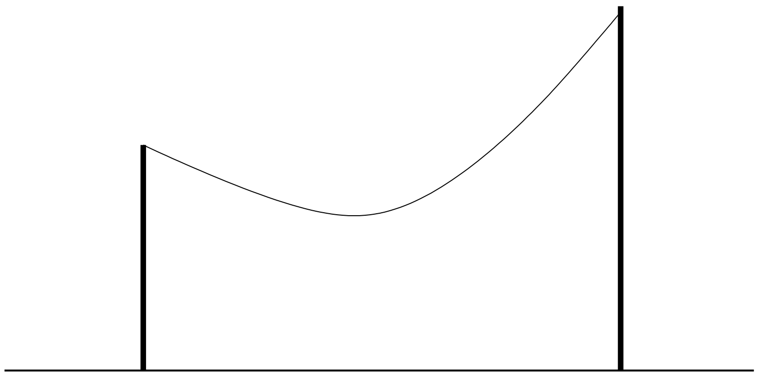

Figura 1: **O Cabo Suspenso**

No site Wikipédia, a enciclopédia livre, há referências para esse tema.

Você poderá encontrar uma citação em português aqui [2].

E em inglês aqui [3].

2 Modelando a Curva do Cabo Suspenso

Suponhamos um cabo perfeitamente flexível(para que possa formar uma curva), suspenso nas extremidades A e B, sob a ação do seu próprio peso.

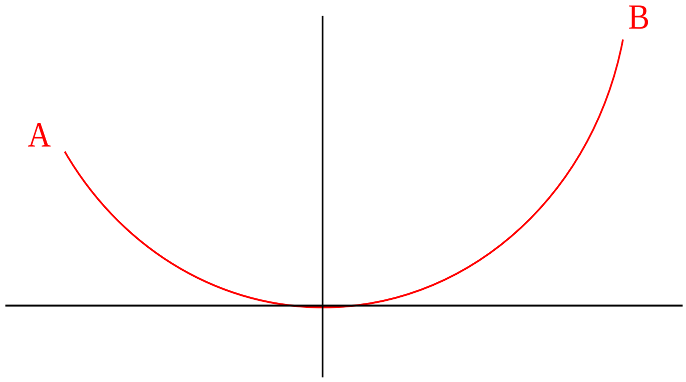

Figura 2: **Sistema Cartesiano**

Vamos considerar que **G** seja o módulo da força peso por unidade de comprimento e suponhamos **s** o comprimento total do cabo. Com isso, podemos dizer que o módulo da força peso total será **Gs**.

Agora tomemos um ponto C do cabo.

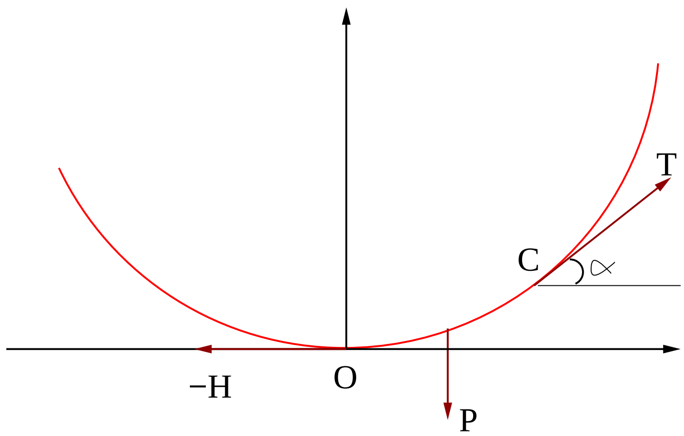

Figura 3: **Um Trecho OC do Cabo**

Se o cabo estiver em repouso, ou seja, se houver um equilíbrio entre as forças então

$$\vec{T} + (-\vec{H}) + \vec{P} = 0$$

onde $\vec{T}$ é a tensão no ponto C, $\vec{H}$ é a tensão no ponto mais baixo do cabo(o ponto O) e $\vec{P}$ é o peso do trecho OC.

2.1 Podemos notar aqui uma Observação

Há equilíbrio de forças quando o cabo estiver suspenso, sem ruptura, sendo esta a situação que iremos estudar. E a força atuante em todo e qualquer corpo presente na atmosfera é a principal força atuante no Cabo, a força da Gravidade.

`Porque este é um problema descrito por uma Equação diferencial, sendo uma questão de estática?`

Diferentes cabos (feitos com material distinto, distintos comprimentos, distintas dimensões) irão produzir curvas distintas, são estas curvas, as soluções da equação diferencial que estamos estudando. Um cabo, uma solução!

Equações diferenciais necessitam de condições iniciais para podermos descrever àquela determinada solução, o determinado cabo. Assim, para diferentes condições iniciais, como as descritas anteriormente, teremos então diferentes curvas, diferentes soluções para o Cabo Suspenso.

Aqui está a dinâmica descrita pela equação diferencial procurada.

Isso justifica a questão como Equação diferencial.

Assim, pelo equilíbrio podemos obter as equações

$$\begin{cases} -\vec{H} \;+\; \vec{T}\;.\;cos\;\alpha = 0 \\ \vec{P} \;+\; \vec{T}\;.\;sen\;\alpha = 0 \end{cases}$$

Como P é o peso do trecho OC do cabo(ver Figura 3) e considerando G a força peso por unidade de comprimento e **s** o comprimento do cabo, temos que $\vec{P} = Gs$. Assim, da Figura 3, podemos calcular o seguinte esquema

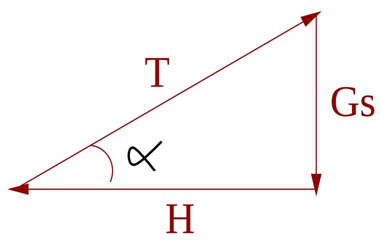

Figura 4: **Atuação das Forças**

Como $\vec{\mathbf{T}}$ é tangente à curva $y = f(x)$ então podemos ter que

$$tg\;\alpha = f'(x)$$

e pela Figura 4 temos que

$$tg\;\alpha = \frac{\vec{G}s}{\vec{H}} \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \frac{\vec{G}s}{\vec{H}} \tag{1}$$

2.2 Dedução do comprimento do Cabo

Tomemos a curva

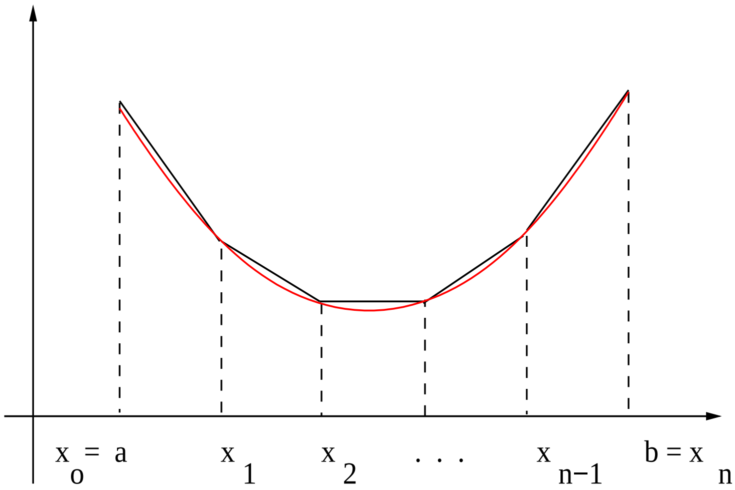

Figura 5: **Cabo Suspenso como uma Poligonal**

Sendo a curva acima contínua no intervalo $[a, b]$, vamos definir seu comprimento nesse intervalo considerando os pontos

$$P_0 = (a, f(a)) \quad e \quad P_n = (b, f(b))$$

Observando o gráfico da curva, temos uma poligonal determinada pelo pontos

$$P_i \ : \ 1 \leq \ i \ \leq \ n \quad ; \ \texttt{onde cada} \ \ P_i = (x_i, f(x_i))$$

podemos então definir seu comprimento como

$$C = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \tag{2}$$

onde

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

e que podemos fazer

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_1 - x_{i-1})^2 \left[1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_1 - x_{i-1})^2}\right]} \tag{3}$$

Como f é contínua com derivada contínua, pelo Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial, temos que

$$(f(x_i) - f(x_{i-1})) = f'(\overline{x}_i).(x_1 - x_{i-1})$$

`para algum` $\overline{x}_i$ `tal que` $x_{i-1} \leq \overline{x}_i \leq x_i$

E assim, pela equação (3), teremos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_1 - x_{i-1})^2 \ . \ (\ 1 + [f'(\overline{x}_i)^2]\ )}$$

e ainda podemos ter

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\ 1 + [f'(\overline{x}_i)]^2\ )}\ .\ \Delta x_i$$

em que $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Retomemos a equação (2).
Temos o seguinte

$$C = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )}\ .\ \Delta x_i$$

e assim teremos

$$C = \int_a^b \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )}\ dx$$

Como **s** é o comprimento do Cabo, então temos que

$$s(x) = \int_a^b \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )}\ dx \tag{4}$$

derivando teremos

$$s'(x) = \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )} \tag{5}$$

Agora retomemos a expresão (1).
Temos que

$$f'(x) = \frac{\vec{G}s}{\vec{H}}$$

vamos derivar novamente essa expressão

$$f''(x) = \frac{\vec{G}}{\vec{H}}\ s'(x) \tag{6}$$

Como $\dfrac{\vec{G}}{\vec{H}}$ é uma constante, que é denominada **Constante de especificidade do Cabo**, podemos chamar

$$\frac{\vec{G}}{\vec{H}} = c$$

e pelas equações (5) e (6) teremos que

$$f''(x) = c\ \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )} \tag{7}$$

Portanto, pode-se concluir que a resolução da equação (7), uma **equação diferencial ordinária do segundo grau, de segunda ordem, não linear** nos fornecerá a equação da **Curva**(Cabo Suspenso).

2.3 A Equação Encontrada

Ao realizarmos alguns cálculos, chegamos à equação

$$f''(x) = c\ \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )}$$

Uma equação diferencial de segunda ordem, do segundo grau incompleta que portanto é não-linear.

Temos nessa expressão, uma constante $c = \dfrac{\vec{G}}{\vec{H}}$ *denominada* `Constante de especificidade do Cabo` *e como se trata de uma Equação diferencial, essa constante é uma* `condição inicial` *para a determinação da Equação do Cabo.*

Uma outra `condição inicial` *é o comprimento* $\mathtt{s} = \mathtt{s}(x)$ *do cabo, que foi deduzido aqui e ficou determinado por*

$$s(x) = \int_a^b \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )}\ dx$$

cuja derivada é

$$s'(x) = \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )}$$

que se aplicou na expressão (6), *ficando assim determinada a Equação*

$$f''(x) = c\ \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )}$$

2.4 Uma avaliação do Resultado obtido

Observe que na solução aparece o comprimento da curva

$$s'(x) = \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )} \quad \Longrightarrow \quad s(x) = \int_a^b \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )}$$

que é uma das condições iniciais - produz diferentes curvas.

Como também aparece uma constante

$$c = \frac{\vec{G}}{\vec{H}}$$

que está ligada ao material do cabo - outra condição inicial.

Isto é próprio de uma equação diferencial de segunda ordem

`Duas(02) constantes(condições iniciais) que irão determinar uma curva(solução).`

Portanto, a curva[1] *procurada será obtida através da resolução da Equação diferencial de segunda ordem, do segundo grau incompleta expressa por*

$$f''(x) = c\ \sqrt{(\ 1 + [f'(x)]^2\ )}$$

[1] o Cabo Suspenso

Referências

[1] RODRIGUES, Laís Bássame. VIEIRA, Flaviano Bahia P. AGUSTINI, Edson. *O Problema do Cabo Suspenso.* UFU, Minas Gerais, 2005.

[2] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Catenária*

[3] *http://en.wikipedia.org/wiki/Catenary*