Noções Elementares Sobre Derivadas

da Silva, M.Ilsangela

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
7 de dezembro de 2007
milsangela@gmail.com
pré-prints do Curso de Matemática de Sobral
no.2007.08
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org
Revisão Técnica: Luiz Diniz de Araújo,
Nilton J. Neves Cordeiro

Resumo

Neste artigo estou apresentando as noções de derivadas com a utilização de programas como o aplicativo *gnuplot* e o *xfig* para a visualização de alguns gráficos. O objetivo é se direcionar a neófitos neste estudo, analisando a interpretação geométrica da derivada, sua definição como limite e a derivada de algumas funções elementares.
palavras chave: coeficiente angular, reta tangente, declive

1. A Interpretação Geométrica da Derivada

O problema das tangentes - calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto P - é considerado o problema básico do cálculo diferencial e que, encontrando a reta tangente a uma curva num ponto, muitos problemas de cálculo podem ser solucionados.

1.1 - A Reta Tangente

Para uma noção de reta tangente a uma curva, tem-se alguns conceitos da geometria plana que devem ser relembrados, pois será útil a este estudo. Supondo que a curva, a qual queremos uma reta tangente em um ponto específico, seja uma circunferência. Então, ela é interpretada como a reta que intercepta a circunferência em um único ponto, digamos P, o qual chamamos *ponto de tangência*. Se a reta tocar em dois pontos diferentes da circunferência temos então uma reta secante. Na Figura 1, a reta r é tangente no ponto P enquanto que a reta s é secante que toca os pontos M e N.

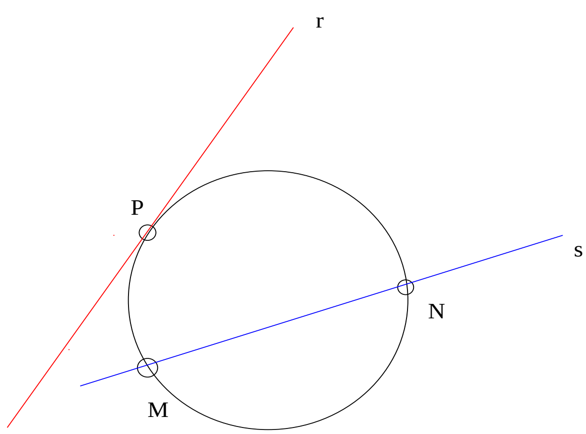

Figura 1: Representação de uma reta tangente e uma reta secante na circunferência.

Para uma curva em geral, às vezes, não é tão simples assim, e a definição de reta tangente que temos para uma circunferência é insuficiente, sendo apenas uma idéia que intuitivamente temos de reta tangente a uma curva num ponto, como sendo aquela reta que intercepta a curva somente num ponto.
Temos na Figura 2 um exemplo. A reta r não é tangente a curva, mas pela definição acima diríamos que sim, enquanto que a reta s tem uma tangente aceitável, mas pela definição não seria tangente.

Portanto, temos uma melhor interpretação para uma reta tangente ao gráfico de uma função num ponto que iniciarei da seguinte forma: seja $y=f(x)$ uma curva e P um ponto fixo sobre essa curva. Considere também um outro ponto que chamaremos de Q próximo de P sobre a curva, com isto podemos desenhar uma

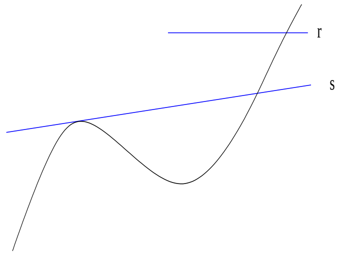

Figura 2:

reta que passe por estes dois pontos, ou seja, uma reta secante PQ. Uma reta que toca apenas o ponto P, ou seja, tangente em P pode ser considerada como a posição-limite da reta secante variável quando o ponto Q se aproxima cada vez mais de P. Na Figura 3, temos esta interpretação.

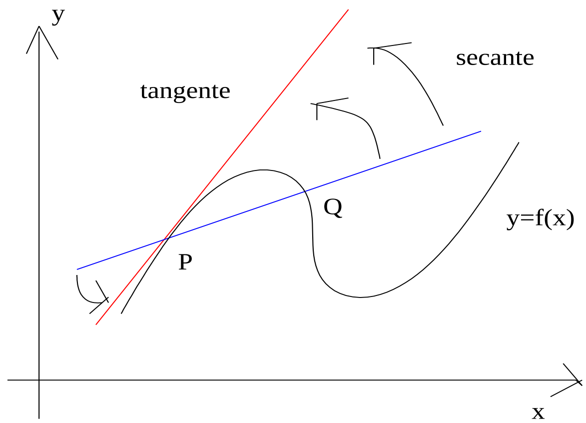

Figura 3: Representação de uma reta tangente e uma reta secante no gráfico de uma função.

O próximo passo é calcular o coeficiente angular exato da tangente, ou seja, a declividade da tangente num ponto específico, pois sabemos da geometria analítica que se conhecemos a declividade de uma reta e um ponto sobre a mesma, a reta esta determinada.

1.1.1 - Cálculo do Coeficiente Angular - Inclinação da Tangente

Sabemos que se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são dois pontos distintos quaisquer que sejam em uma reta r, sendo a mesma não-paralela ao eixo dos y, o coeficiente angular ou declividade é denotado por m e definido pela seguinte razão

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Ver Figura 4

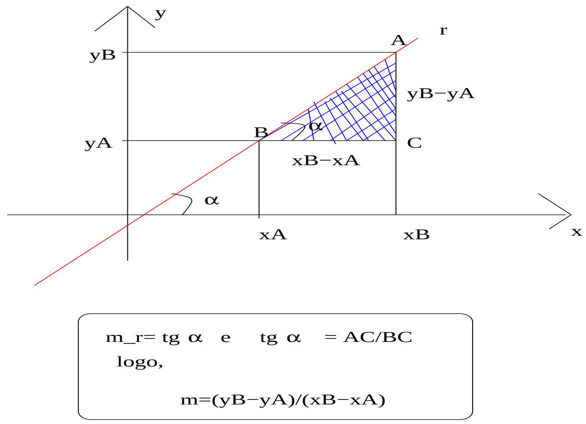

Figura 4: Definição do coeficiente angular de uma reta.

Notamos que $x_B \neq x_A$, pois a reta r não é paralela ao eixo dos y. Se $x_B = x_A$ teríamos uma reta perpendicular ao eixo y e não teríamos coeficiente angular, uma vez que, neste caso, os dois pontos têm coordenadas x iguais com denominador em $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ igual 0. Vamos nos referir agora ao coeficiente angular da reta tangente a um gráfico de uma função em um ponto arbitrário. Seja então, $A(x_A, y_A)$ um ponto que fixamos sobre uma curva $y = f(x)$ contínua em x_A e $B(x_B, y_B)$ um segundo ponto sobre o gráfico da função passando por eles uma reta secante. A diferença das abscissas de B e A é dada por $\Delta x = x_B - x_A$. Podemos deduzir que a declividade da reta secante AB é dfinida por
$m_{AB} = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{\Delta x}$
Considerando que $x_B = x_A + \Delta x$ podemos escrever a equação acima da seguinte forma:
$m_{AB} = \frac{f(x_A+\Delta x)-f(x_A)}{\Delta x}$.
Sendo o ponto A fixo, fazemos com que o ponto B deslise ao longo da curva ao encontro de A, de modo que a distância entre x_A e x_B vá diminuindo naturalmente enquanto que o ponto B se aproxima do ponto A. Essa distância entre x_A e x_B, ou melhor a diferença das abscissas de B e A representada por $\Delta x = x_B - x_A$ vai tendendo a zero. Quando tal coisa ocorre dizemos que a reta secante faz um giro sobre o ponto fixo, no caso, o ponto A como sendo a reta tangente sua posição-limite neste ponto. Temos representado na Figura 5.

Se a reta secante tem como posição-limite a reta tangente, podemos dizer, intuitivamente, que o coeficiente angular m da tangente é o valor-limite aproximado pelo coeficiente angular m_{AB} da secante quando Δx tende a zero. Conclui-se que se uma função é contínua em x_A, então a reta tangente ao gráfico da função no ponto $A(x_A, f(x_A))$ é: a reta que passa por A, tendo declividade m_{x_A} que é dado por

$$m_{x_A} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

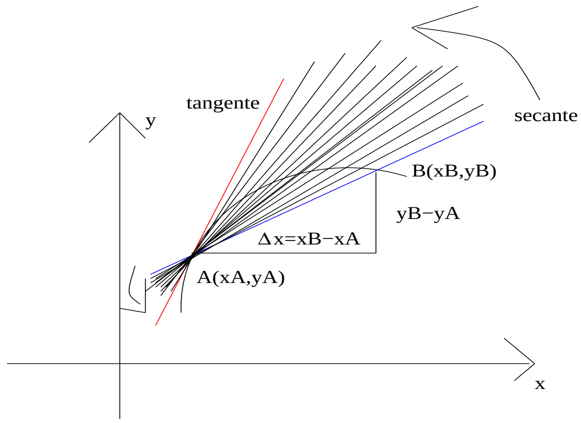

Figura 5: Posição limite da reta secante.

caso o limite exista.

1.2 - Representação gráfica

Depois desta pequena introdução podemos entender e analisar alguns gráficos de curvas com uma reta tangente num ponto qualquer. Podemos deduzir o que realmente acontece ao variarmos um ponto sobre uma curva em direção de outro considerando-o fixo. Para um simples exemplo, sabemos que com dois pontos A e B conseguimos desenhar uma reta secante sobre a curva, pois por dois pontos passa uma única reta, e em seguida calcular a sua inclinação.
Vamos nos concentrar na fução quadrática mais simples que conhecemos que é x^2 para compreendermos melhor a interpretação que vimos anteriormente da reta tangente a uma curva num dado ponto, sendo a mesma contínua neste ponto.

O coeficiente da reta tangente ao gráfico da função $y = x^2$ em um ponto (x_A, y_A) qualquer é:

$$m(x_A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

$$m(x_A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_A + \Delta x)^2 - x_A^2}{\Delta x}$$

$$m(x_A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_A^2 + 2x_A\Delta x + \Delta x^2 - x_A^2}{\Delta x}$$

$$m(x_A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_A + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$m(x_A) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_A + \Delta x$$

$$m(x_A) = 2x_A$$

Temos na Figura 6 o gráfico desta função com uma reta secante passando pelos pontos $(-4, 16)$ e $(6, 36)$. O primeiro ponto será considerado móvel ao encontro do segundo que será fixo, para que possamos encontrar a reta tangente ao gráfico desta função no ponto fixo considerado. Com o *script* abaixo podemos, usando

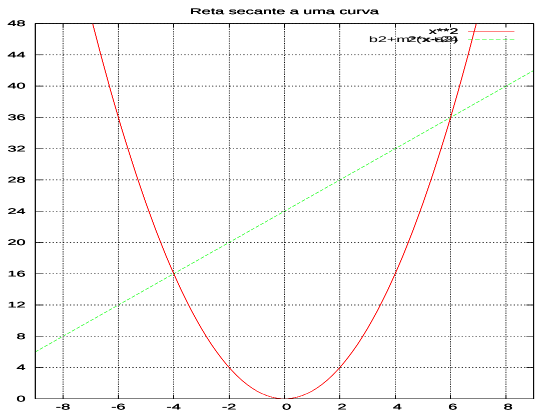

Figura 6: Reta secante sobre uma curva.

o *gnuplot*, calcular o coeficiente da reta secante que se encontra na Figura 6 como também a equação desta reta. Quando a reta se move, ou seja, quando o ponto (-4,16) se desloca em direção ao ponto fixo (6,36) a inclinação da reta varia até uma posição limite que chamamos de reta tangente. O *script* abaixo também calcula estas inclinações e mostra o gráfico ver Figura 7 da função x^2, assim como, o giro da reta secante até a posição limite.

```
set grid
set xticsq 2
set ytics 4
set key bottom right
set xrange [-9:9]
set yrange [0:55]
set title "Reta tangente a curva x**2 no ponto (6,36)"
a1=-4
b1=16
a2=6
b2=36
m=(b2-b1)/(a2-a1)
a11=-2
b11=4
m1=(b2-b11)/(a2-a11)
a12=0
b12=0
m2=(b2-b12)/(a2-a12)
a13=2
```

```
print m
 2
print m1
 4
print m2
 6
print m3
 8
print m4
 10
print m5
 11.5
print m6
  11.95
 print m7
  11.9699999999998
 print m8
  11.9900000000004
```

```
 b13=4
 m3=(b2-b13)/(a2-a13)
 a14=4
 b14=16
 m4=(b2-b14)/(a2-a14)
 a15=5.5
 b15=30.25
 m5=(b2-b15)/(a2-a15)
 a16=5.95
 b16=35.4025
 m6=(b2-b16)/(a2-a16)
 a17=5.97
 b17=35.6409
 m7=(b2-b17)/(a2-a17)
 a18=5.99
 b18=35.8801
 m8=(b2-b18)/(a2-a18)
set terminal postscript portrait color linewidth 0.5
set output "gnup02.eps"
plot x**2 ,\
b2+m*(x-a2)   2  ,\
b2+m1*(x-a2)  3  ,\
b2+m2*(x-a2)  3  ,\
b2+m3*(x-a2)  3  ,\
b2+m4*(x-a2)  3  ,\
b2+m5*(x-a2)  3  ,\
b2+m6*(x-a2)  3  ,\
b2+m7*(x-a2)  3  ,\
b2+m8*(x-a2)  3  ,\
12*x-36  2
```

Vimos acima que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = x^2$ em um ponto (x_A, y_A) qualquer é

$$m(x_A) = 2x_A$$

logo, no ponto (6,36) é

$$m_6 = 2(6)$$

$$m_6 = 12$$

Então a equação da reta tangente aplicando a forma ponto-declividade, é:

$$y = 36 + 12(x - 6)$$

$$y = 36 + 12x - 72$$

$$y = 12x - 36$$

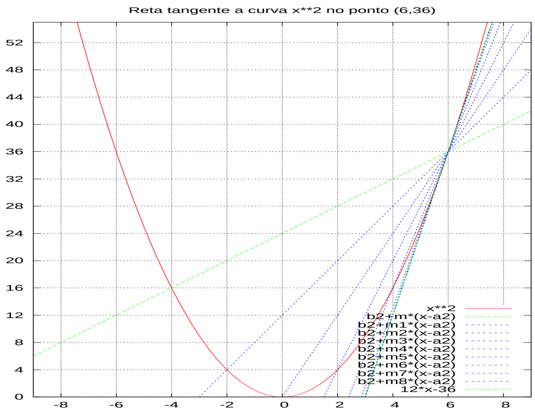

Figura 7: Reta tangente sobre à função x^2 no ponto (6,36).

2. Derivada de uma função

Vimos anteriormente, que a declividade de uma reta tangente ao gráfico de uma função num ponto (xA, yA) é definida por:

$$m(x_A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

Este tipo de limite aparece em outros problemas, como por exemplo em Física, para calcularmos a velocidade instantânea de uma partícula em uma unidade de tempo, digamos t_1, como está expresso abaixo

$$v(t_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

A derivada de uma função num dado ponto nos fornece a declividade da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ nesse ponto. Em outras palavras, podemos dizer que calcular a derivada de uma função num ponto é determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Portanto, seja $f(x)$ uma função, cuja derivada será denotada pela função $f'(x)$(lê-se f linha de x) para qualquer valor de x no domínio de f é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se este limite existir e for finito.
Supondo x_A um número específico do domínio de f, então a derivada da função neste ponto é dado por:

$$f'(x_A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_A + \Delta x) - f(x_A)}{\Delta x}$$

caso este limite exista.

Exemplo:

Como exemplo ilustrativo temos a função $f(x) = x^2 - x + 4$ para encontrarmos a derivada no ponto $x = 4$.

Solução:

Sendo x um número qualquer no domínio de f temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 4] - (x^2 - x + 4)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x - \Delta x + 4 - x^2 + x - 4}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 1)$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

Agora, a derivada para $x = 4$ é:

$$f'(4) = 2(4) - 1$$

$$f'(4) = 7$$

Podemos observar na Figura 8 o gráfico da função $f(x) = x^2 - x + 4$ e a reta tangente ao gráfico no ponto (4,16), pois quando a abscissa do ponto for 4 temos como ordenada 16, veja

$$f(4) = 4^2 - 4 + 4$$

$$f(4) = 16$$

Temos então um ponto e o coeficiente angular que calculamos usando a definição de derivada de uma função logo, podemos encontrar a equação da reta tangente, assim:

$$y = 16 + 7(x - 4)$$

$$y = 16 + 7x - 28$$

$$y = 7x - 12$$

O *script* usado no *gnuplot* para fazer o gráfico da Figura 8 foi:

```
reset
set grid
set key bottom right
set xtics 2
set ytics 4
```

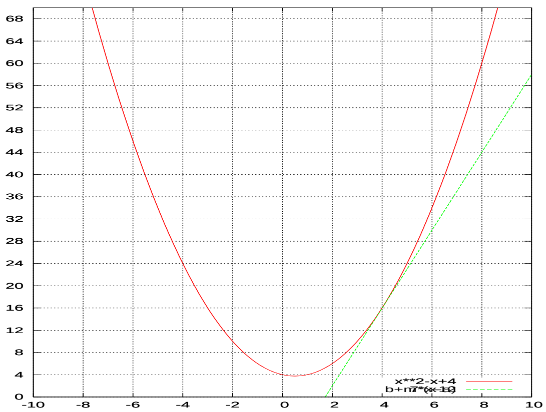

Figura 8: gráfico da função $f(x) = x^2 - x + 4$ e da reta $y = 7x - 12$.

```
set yrange [0:70]
a=4
b=16
m=7
reta(x)=b+m*(x-a)
set terminal postscript portrait color linewidth 0.5
set output "gnup03.eps"
plot x**2-x+4 ,\
b+m*(x-a)
```

Neste exemplo, a derivada da função $f(x) = x^2 - x + 4$ foi calculada usando a definição de derivada. Na prática, não é necessário recorrer a esta definição para derivarmos uma função, pois existem regras de derivação que foram obtidas através da definição para facilitar nossa vida. No entanto, não custa nada calcularmos uma ou outra derivada usando apenas a definição. È um ótimo exercício!

2.1 - Derivada de algumas funções elementares

Dizemos que uma função é *diferenciável* em um ponto se sua derivada existir e for finita nesse ponto. Se uma função não é contínua em x_A, dizemos que não existe uma inclinação em x_A e como consequência, temos uma função não diferenciável em x_A. Há casos em que, mesmo a função sendo contínua em um ponto, pode ocorrer que não seja diferenciável nesse ponto. Agora, se temos uma função que é diferenciável em um ponto x_A podemos afirmar, sem dúvida, que ela é contínua em x_A.

Chamamos de diferenciação o processo pelo qual calculamos a derivada de uma função, que pode ser calculada aplicando a definição. Para as funções elementares que conhecemos temos regras para calcular a derivada, que foram demostradas aplicando a definição. Temos abaixo algumas dessas funções elementares.

♣ Seja k uma constante, a derivada de uma função constante é zero.
Se $f(x) = k$ então, $f'(x) = 0$

Demostração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k - k}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 0$$
$$f'(x) = 0$$

Exemplos:

* $f(x) = 3 \longrightarrow f'(x) = 0$

* $f(x) = 6 \longrightarrow f'(x) = 0$

Na Figura 9 temos o gráfico da função $f(x) = 3$, cuja declividade é zero para qualquer valor de x.

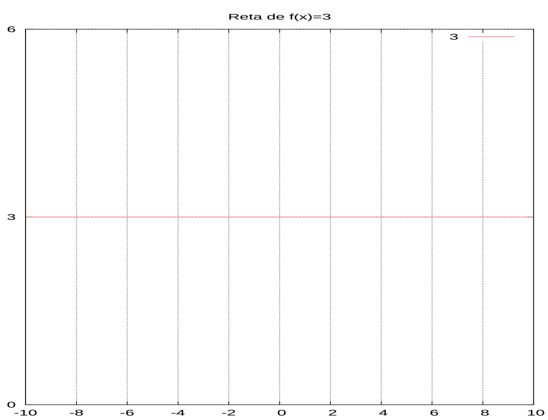

Figura 9: Reta da função $f(x) = 3$.

♣ Se $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ então, $f'(x) = a$

Demostração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[a(x + \Delta x) + b] - (ax + b)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax + a\Delta x + b - ax - b}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} a$$

$$f'(x) = a$$

Exemplos:

* $f(x) = x + 1 \longrightarrow f'(x) = 1$

* $f(x) = 2x - 1 \longrightarrow f'(x) = 2$

Temos o gráfico da $f(x) = x + 1$ na Figura 10, qualquer que seja o valor de x, a inclinação da reta é a mesma, igual a 1.

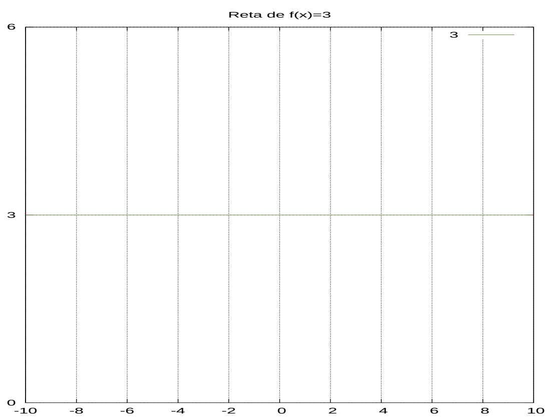

Figura 10: Reta da função $f(x) = x + 1$.

♣ Se $f(x) = x^n$ com $n \in N^*$ então, $f'(x) = nx^{n-1}$

Demostração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Aplicando o teorema binomial em $(x + \Delta x)$ temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n] - x^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Dividindo o numerador e o denominador por Δx, fica

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + ... + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}]$$

Como Δx tende a zero, obtemos

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Exemplos:

* $f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$

* $f(x) = x^6 \longrightarrow f'(x) = 6x^5$

Temos o gráfico da $f(x) = x^2$ na Figura 11, com declividade da reta igual a 6 em $(3, 9)$. Se considerarmos outro ponto diferente de $(3, 9)$ a declividade também mudaria (observe na Figura 12 a declividade da reta em $(-3, 9)$), ou seja, para cada ponto temos uma declividade diferente dada por $2x$. Qualquer que seja o valor de x, a inclinação da reta é a mesma, igual a 1.

```
set grid
set key bottom right
set xtics 3
set ytics 3
set xrange [-9:9]
set yrange [0:40]
a=3
b=9
m=6
plot x**2 ,\
b+m*(x-a)
```

```
set grid
set key bottom right
set xtics 3
set ytics 3
set xrange [-9:9]
```

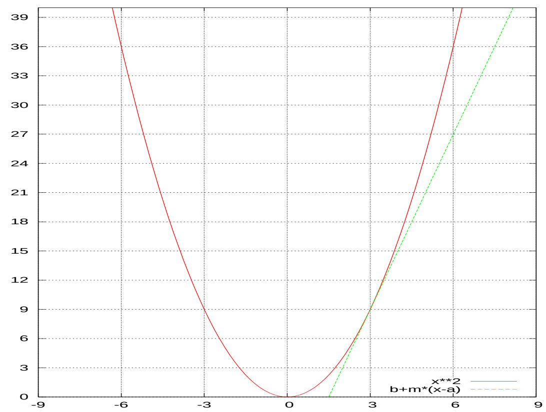

Figura 11: Parábola da função $f(x) = x^2$ e da reta tangente em $(3, 9)$.

```
set yrange [0:40]
a=-3
b=9
m=-6
plot x**2 ,\
b+m*(x-a)
```

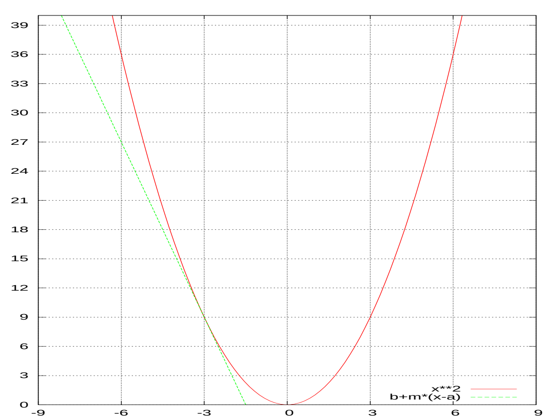

Figura 12: Parábola da função $f(x) = x^2$ e da reta tangente em $(-3, 9)$.

Referências Bibliográficas

[1] Leithold,Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 1. 2^o ed. São Paulo. Ltda,1982.

[2] Simmons,George F. Cálculo com geometria analítica.Volume 1. São Paulo. McGraw-Hill,1987.

[3] http://pt.wikipedia.org/wiki/derivadas