Cálculo 1	**Lista numero 1**
números complexos	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**
alun@:	
9 de maio de 2017	**Universidade**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	www.calculo.sobralmatematica.org/

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Em cada questão da lista, os itens são numerados usando-se, sequencialmente, os números primos $2, 3, 5, 7, 11$.

Ao final da lista de itens, você encontra a palavra "*gabarito*", ao lado qual você deve escrever o produto dos números primos que identificarem os que você tiver selecionado, [V], como *verdadeiros*. Por exemplo

- Se todas as opções forem verdadeiras, registre gabarito: 2310

  que é o produto $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$
- Se forem verdadeiros os itens 3 e 7, registre gabarito: 21
- Se todas forem falsas registre gabarito: 1, que é o *produto duma lista vazia de números*, exatamente a mesma razão pela qual $0! = 1$, o produto duma lista vazia de números naturais em ordem descrescente.

Exercícios 1 *números complexos*
objetivo: *Esta lista vai conduzí-la às derivadas das funções trigonométricas* seno, cosseno.
palavras chave: *fórmula de Euler, número complexo, derivada das funções trigonométricas.*

1. *número complexo*

   Considere a equaçao

$$x^2 + 3x + \frac{25}{4} = 0 \tag{1}$$

(2) (V)[ ](F)[ ] *O radical é um número positivo e duas raízes reais existem.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *as raízes existem mas não são reais, são os dois números complexos*

$$z_1 = \frac{-3+4i}{2}; z_2 = \frac{-3-4i}{2}; \tag{2}$$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Um número complexo é apenas* um número real mais "complexo".

(7) (V)[ ](F)[ ] *Um número complexo é um novo tipo de número, um elemento dum novo conjunto,* **C**, *e com eles podemos fazer as mesmas operações habituais, soma e multiplicação.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *Não podemos fazer as contas habituais, soma e multiplicação com números complexos.*

gabarito:

2. *álgebra dos números complexos* *Um número complexo é um par de números reais,* $(a, (3)$*, entretanto fica mais fácil pensar neles como a expressão algébrica* $a + bi$ *em que* $i = \sqrt{-1}$.

   Este novo conjunto formados dos pares $(a, (3); a, b, \in \mathbf{R}$ *é o conjunto* $\mathbf{C}$ *dos números complexos.*

   A primeira coordenado do par $(a, (3)$*, se chama* parte real*,* a*, e a segunda se chama* parte imaginária*,* b.

===

(2) (V)[ ](F)[ ] $3, 4, 5, 5 + 2i$ *são quatro números complexos sendo que os três primeiros são números reais.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *Um número real não é um número complexo.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Todo número real é um número complexo em que* parte imaginária *é nula, em outras palavras* $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

(7) (V)[ ](F)[ ] i *é um número complexo cuja parte imaginária é zero.*

(11) (V)[ ](F)[ ] i *é um número complexo cuja parte imaginária é* 1 *e a parte real é zero.*

gabarito:

3. *álgebra dos números complexos*

   As operações com os números complexos se fazem como na álgebra da quarta série do Ensino Fundamental, como se você tivesse

$$a + bx = a + bi; \tag{3}$$

então

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2; \tag{4}$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + b(5)i; \tag{5}$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + (5) + (b + (7)i \tag{6}$$

valem as regras da aritmética, mas, com a extensão $i = \sqrt{-1}$*;*

Consequentemente a equação (eq. 4) pode ser simplificada, ficando:

$$ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = ac - bd + adi + bci = ac - bd + i(ad + b(5) \tag{7}$$

===

(2) (V)[ ](F)[ ]

$$(3 + 4i)(4 + 2i) = 12 - 8 + 6i + 16i = 4 + 22i; \tag{8}$$

(3) (V)[ ](F)[ ]

$$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 - 8 + -6i + 16i = 4 + 10i; \tag{9}$$

(5) (V)[ ](F)[ ]

$$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 + 8 - 6i + 16i = 20 + 10i = 2(10 + 5i); \tag{10}$$

(7) (V)[ ](F)[ ] $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$ *é impossível de ser calculado.*

(11) (V)[ ](F)[ ] $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$*, e o zero tanto é um número real como complexo.*

gabarito:

4. *fórmula de Bashara*

A fórmula de Baskhara agora vale mesmo quando o discriminante *da equação do segundo grau for negativo, neste caso resulta num número complexo não real.*

==

(2) (V)[ ](F)[ ] *Nem toda equação do segundo grau tem uma solução, no conjunto dos números complexos, não vale mais a fórmula de Baskhara.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *No conjunto dos números complexos toda equação do segundo grau tem uma solução, sempre vale a fórmula de Baskhara.*

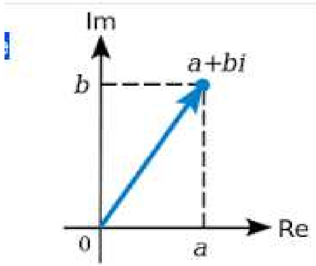
(5) (V)[ ](F)[ ] *Não é mais possível fazermos uma interpretação geométrica simples, como as raízes duma parábola, no plano, para uma solução duma equação do segundo grau.*

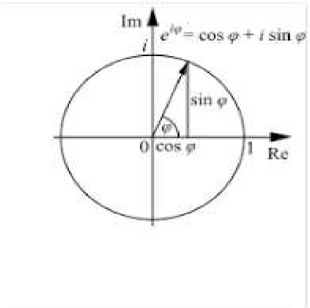
(7) (V)[ ](F)[ ] *A solução duma equação do segundo grau é um ponto no plano complexo.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *A equação $x^2 + 1 = 0$ tem como solução $\pm i$.*

gabarito:

5. *número complexo, interpretação geométrica* *Como um número complexo é uma expressão da forma $a + bi$, em que a e b são números reais, então podemos vê-los, de forma equivalente a que a Física usa, agora $j = 1, i = \sqrt{-1}$. Então um numero complexo é um vetor do plano complexo. Confira a figura (fig 5), página 3,*





As figuras que aparecem nesta questão foram copiadas da Wikipedia, [2, números complexos] onde você pode encontrar mais informações sobre os números complexos.

*O número complexo 1 = (1,0) = 1 + 0*i é chamado de* origem do círculo trigonométrico. *Observe porque, ele é o elemento neutro da multiplicação.*

Todo arco do círculo trigonométrico *é determinado pela* origem *junto com outro ponto do círculo.*

==

(2) (V)[ ](F)[ ] *Se $a^2 + b^2 = 1$ então não é possível representar o número complexo $a + bi$.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se $a^2 + b^2 = 1$ então o número complexo $a + bi$ é um ponto do círculo trigonométrico no plano complexo.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *A figura (fig 5), página 3, mostra o círculo trigonométrico que é o conjunto dos números reais de módulo 1.*

(7) (V)[ ](F)[ ] *A figura (fig 5), página 3, mostra o círculo trigonométrico, um subconjunto dos números complexos, daqueles que têm módulo 1.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *A figura (fig 5), página 3, mostra o círculo trigonométrico onde o número complexo*

$$(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

determina, com a origem do círculo, $(1, 0)$, o arco de tamanho ϕ. O maior arco que pode assim ser determinado mede 2π e esta figura sugere que $\phi < 2\pi$.

gabarito:

6. *Fórmula de Euler*

Dado um número complexo $z = a + bi$ se chama de conjugado *ao número complexo $\overline{z} = a - bi$. Alguns autores usam a notação $z^* = \overline{z} = a - bi$. Eu vou usar exclusivamente a notação $\overline{z} = a - bi$.*

==

(2) (V)[ ](F)[ ] *Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas $(\sin(\theta), \cos(\theta))$ em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *A* identidade fundamental da trigonometria

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \tag{11}$$

é a própria definição do círculo trigonométrico.

(7) (V)[ ](F)[ ] *A* identidade fundamental da trigonometria

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \tag{12}$$

identifica o conjunto dos números complexos de módulo 1.

(11) (V)[ ](F)[ ] *O número complexo $a - bi$ é chamado de* conjugado *do número complexo $a + bi$ e o produto deles é o número real positivo $a^2 + b^2$.*

gabarito:

7. *conjugado dum número complexo*

O número complexo $a - bi$ é chamado de conjugado *do número complexo $a + bi$ e o produto deles é o número real positivo $a^2 + b^2$.*

==

(2) (V)[ ](F)[ ] *$a + bi$ é simétrico com $a - bi$ relativamente ao eixo OX.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *$a + bi$ é simétrico com $a - bi$ relativamente ao eixo OY.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Os números complexos não possuem inverso multiplicativo.*

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se $a^2 + b^2 \neq 0$ então o número complexo $z = a + bi$ tem inverso multiplicativo que é*

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}z} \tag{13}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Com exceção do número complexo* $0+0i = 0$ *todo número complexo* $a+bi$ *tem inverso multiplicativo dado pela fórmula*

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}z} \tag{14}$$

gabarito:

8. *fórmula de Euler* *Considere a identidade como uma definição*

$$e^{it} = (\cos(t) + i\sin(t)) \tag{15}$$

Por enquanto aceite que o símbolo e^{it} *seja apenas uma* etiqueta *designado um ponto no círculo trigonométrico que determina o arco de medida* t. *Lembre-se que a origem do círculo é o ponto* $(1,0) = e^{i0} = 1 \in \mathbf{R}$.

=====================================

(2) (V)[ ](F)[ ] e^{it} *designa um único ponto sobre o círculo trigonométrico para cada número real* $t \in [0, 2\pi)$.

(3) (V)[ ](F)[ ] $e^{it}e^{-it} = 0$

(5) (V)[ ](F)[ ] $e^{it}e^{-it} = 1$ *e como* $\overline{z} = e^{-it}$ *é o conjugado de* $z = e^{it}$ *então, no círculo trigonométrico, o conjugado de* z *é o seu inverso multiplicativo:* $z\overline{z} = 1$.

(7) (V)[ ](F)[ ] *Considere um número complexo* z *qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto* z *e a origem determinam uma reta passando por*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = e^{i\theta}; \tag{16}$$
$$(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = e^{-i\theta}; \tag{17}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Dado um número complexo* z *qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto* z *e a origem determinam uma reta passando por*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = e^{i\theta}; \tag{18}$$
$$-(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = -e^{i\theta}; \tag{19}$$

que é um par números que são inversos, *aditivamente.*

gabarito:

9. *função complexa*

Considere a função

$$f(z) = z^2 - 1; \tag{20}$$

Uma forma equivalente de escrever a equação da função f *é*

$$z = x + iy; \tag{21}$$
$$f(z) = z^2 - 1 = x^2 - y^2 + 2xyi - 1; \tag{22}$$
$$f(x,y) = (x^2 - y^2 - 1, 2xy); \tag{23}$$

Na equação (eq.23) a função f *foi escrita* interpretando *um número complexo como um par de pontos do plano, ou um vetor do plano.*

==

(2) (V)[ ](F)[ ] $f(0) = 1$

(3) (V)[ ](F)[ ]$f(0) = -1$

(5) (V)[ ](F)[ ] $f'(z) = 2z$;

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se* $F(z) = \frac{z^3}{3} - z + 1$ *então* $F'(z) = f(z)$;

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se* $F(z) = \frac{z^3}{3} - z$ *então* $F'(z) = f(z)$;

gabarito:

10. *números complexos*

Considere as funções f, g *definidas pelas equações:*

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t))\,; \tag{24}$$
$$g(t) = (\cos(t) + i\sin(t)) = e^{it}; \tag{25}$$
$$t \in [0, 2\pi); \tag{26}$$

As duas funções associam um número real t *com um ponto do círculo trigonométrico. São duas funções idênticas apenas escritas com formatos diferentes:* f *é uma* função vetorial *enquanto que* g *é uma* função complexa.

==

(2) (V)[ ](F)[ ] $f(t)$ *é um vetor qualquer do plano* $\mathbf{R}^2$.

(3) (V)[ ](F)[ ] $g(t)$ *é um vetor unitário do plano complexo* $\mathbf{C}$.

(5) (V)[ ](F)[ ]

$$f'(t) = (\cos(t), \sin(t))' = \big(\cos'(t), \sin'(t)\big) \tag{27}$$

(7) (V)[ ](F)[ ] *Como* i *é uma constante então a derivada de* $t \mapsto e^{it}$ *é* $t \mapsto ie^{it}$ *então*

$$g'(t) = i(\cos(t) + i\sin(t)) = (-\sin(t) + i\cos(t))\,;$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Como as imagens das duas funções,* $f(t), g(t)$, *coincidem então suas derivadas também são iguais portanto*

$$\begin{cases} \cos'(t) = & -\sin(t); \\ \sin'(t) = & \cos(t); \end{cases} \tag{28}$$

gabarito:

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Richard Courant. Gauss and the present situation of the exact sciences. In *The Spirit and the uses of the Mathematical Sciences*. McGraw-Hill, 1969.

[2] Wikimedia Foundation. Wikipedia, enciclopédia livre na internet. http://www.wikipedia.org.

[3] Tarcisio Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira. *Cálculo diferencial e integral com apoio computacional Vol I*. Departamento de Matemática da UEM, 1991.

[4] Tarcisio Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional Vol II*. Pre-publicação do Dep. de Matemática - UEM - Maringá Pr, 1991.

[5] Tarcisio Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional Vol III*. Pre-publicação do Dep. de Matemática - UEM - Maringá Pr, 1991.

[6] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[7] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo com apoio computacional*. Biblioteca da Universidade Federal de Goiás, 1985.

[8] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Avançado*. Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS, 1998.

[9] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional - Introdução à programação*. Publicações da UVA - Sobral - Ce, 2000.