O produto geométrico

Praciano-Pereira, Tarcisio [*]

18 de novembro de 2022
préprints da Sobral Matemática
no. 2022.05
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

As propriedades do produto saem facilmente da multiplicação geométrica, como o caso $a < 0, b > 0 \quad \Rightarrow \quad ab < 0$ ou $a < 0, b < 0 \quad \Rightarrow \quad ab > 0$. Ele está baseado na equivalência de triângulos. Aqui estou mostrando que

$$ac = ca; (ab)c = a(bc); (-a)(-b) = ab;$$

Usei o editor gráfico `xfig` que me permite gravar o gráfico em vários formatos. Na última seção mostro que o produto de números de módulo menor do que 1 tem também módulo menor do que 1.

palavras chave: módulo do produto, produto geométrico, propriedades do produto, `xfig`.

It is easy do prove the properties of the product, geometrically. Here you have the commutativity and associativity but is very easy to go ahead and prove that

$$ac = ca; (ab)c = a(bc); (-a)(-b) = ab;$$

At last I have proved that

$$|a| < 1, |b| < 1 \quad \Rightarrow \quad |ab| < 1;$$

I have used `xfig`, a graphical editor, which allows me to save in several formats.

keywords: absolute value of the product, geometric product, properties of the product, `xfig`.

[*] tarcisio@sobralmatematica.org

1 Detalhes do artigo

Eu publiquei, pela Universidad Austral de Chile, em 1972, a primeira versão do que é hoje *Introdução à Matemática Universitária*, [2], que foi o resultado de minha leitura do livro de Hilbert, [1] que me inspirou num curso que eu estava dando no CEUB, em Brasília, quando introduzi os números reais, geometricamente, para alunos da licenciatura em Matemática.

Neste artigo estou mostrando como provar a propriedade comutativa e a propriedade associativa da multiplicação geometricamente na primeira seção. Depois vou reutilizar o gráfico na figura (1), página 1, para provar a propriedade *controversa* que tanto é apresentada como uma dor de cabeça,

$$a < 0, b > 0 \quad \Rightarrow \quad ab < 0 \text{ ou } a < 0, b < 0 \quad \Rightarrow \quad ab > 0; \tag{1}$$

e que geometricamente fica simples. Na seção final eu provo que se dois números forem de módulo menor do 1 o produto deles também tem módulo menor do que 1, e mais, o produto tem módulo menor do que o módulo dos multiplicandos. Estou salvando, como biproduto, o ensino da geometria que assim pode se apresentar como oferecendo alguma coisa positiva!

2 Multiplicação geométrica segundo Hilbert

A multiplicação geométrica é baseada na equivalência de triângulos e ajuda muito usar o *círculo trigonométrico* com centro do cenário como mostra a figura (fig. 1), página 1,

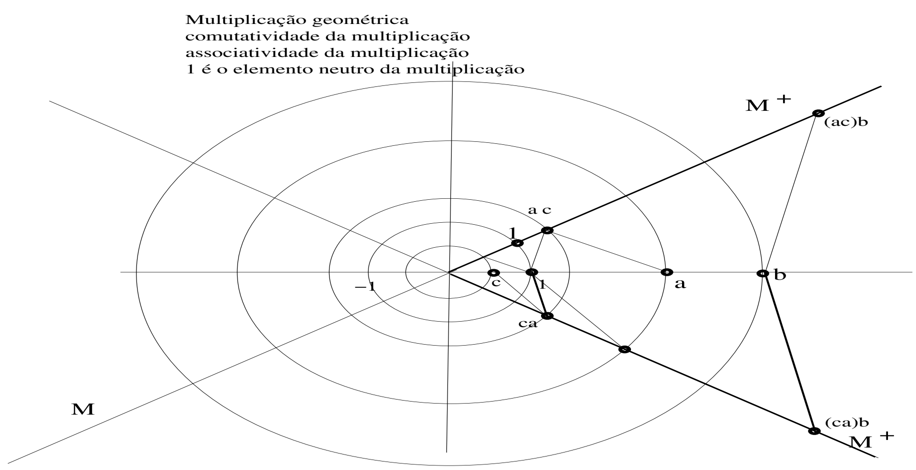

Figura 1: Círculo unitário e a multiplicação

Usando o *círculo trigonométrico* com centro do cenário torna as coisas mais fáceis e um pouco mais complicadas dentro dum editor gráfico porque nem sempre se consegue uma exata expressão da equivalência entre figuras, mas na figura (fig. 1) eu consegui bons resultados.

O *círculo trigonométrico* dá-me o número 1 disponível para todas as operações. Acompanhe a discussão a partir da figura (fig. 1).

Deixe-me começar com o produto ca que provei ser igual ao produto ac que usei depois com o produto $(ac)b$ para deixar tudo numa mesma figura.

Ligando c ao *círculo trigonométrico* e depois passando uma paralela a este segmento passando pelo número a marcado sobre o eixo OX eu vou atingir o círculo de raio ac. Usando simplesmente a simetria, e ligando c ao *círculo trigonométrico*, mas agora abaixo do eixo OX e novamente passando uma paralela a este segmento passando pelo número a encontro o circulo de raio ca o que prova que

$$ac = ca; \tag{2}$$

Agora, aproveitando que ca e ac já se encontram ligados ao 1 sobre *círculo trigonométrico*, e passando uma paralela a qualquer dos dois segmentos eu provei que

$$(ac)b = (ca)b = (ac)b \tag{3}$$

porque já havia provado antes a propriedade comutativa.

3 Quando os números forem negativos

Para o produto entre números negativos, eu editei a figura anterior para obter a figura (fig. 2), página 2,

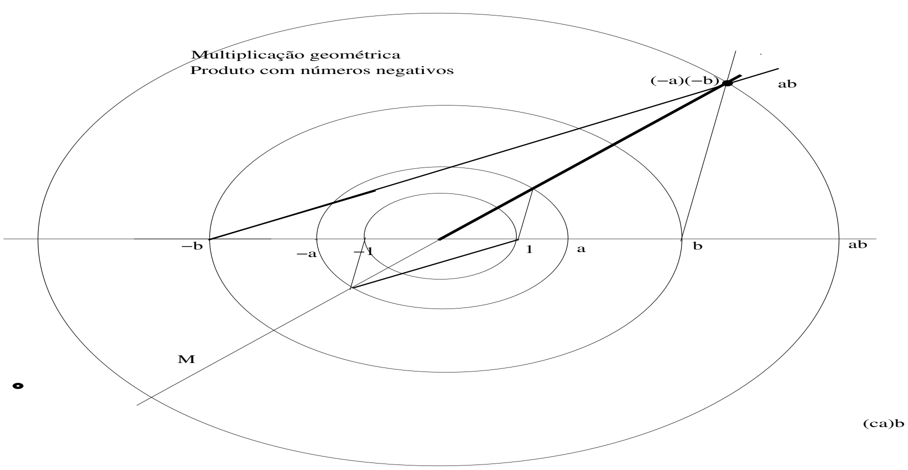

Figura 2: quando tem número negativo na jogada

Nesta figura eu desenhei a reta M que vai conter os resultados das multiplicações. Aliás, se torna mais fácil, e eu descobri quando editei a figura anterior, (fig. 1), selecionar uma reta, M, para nela registrar os resultados das multiplicações.

Eu preciso encontrar o valor de ab, geometricamente. Primeiro eu multipliquei ab, liguei 1 ao a na reta que vai conter os resultados da multiplicação que é a reta que está passando do primeiro quadrante para o terceiro que marquei com a letra M.

Agora vou multiplicar $(-a)(-b)$ e então liguei 1 ao $-a$ na reta M passando então uma paralela a este segmento por $-b$ que vai encontrar o círculo de raio ab no mesmo ponto em que já obtive o produto ab anteriormente com o que provei que

$$(-a)(-b) = ab; \tag{4}$$

geometricamente.

Também passando a paralela ao segmento que liga 1 com a na reta M e depois uma paralela a esta passando pelo -1 vou encontrar $-a$ sobre a reta M o que mostra que multiplicar um número positivo a por -1 retorna um número negativo de mesmo módulo que a porque os dois se encontram também sobre o mesmo círculo de raio a.

Observe que eu escolhi $a > 0, b > 0$ porque o eixo OX está orientado com escolha de 1 então a, b se encontram na semirreta positiva do eixo OX, consequentemente $-a, -b$ são dois números negativos. Finalmente o produto $(-a)(-b)$ se encontra na mesma semirreta em que está ab, a semirreta positiva de M, A figura (fig. 1) mostra que sendo $a > 0$ então o produto por -1 retorna um número que se encontra na semirreta negativa de M.

4 Uma propriedade da desigualdade

Vou demonstrar apenas uma propriedade entre desigualdade e multiplicação. Vou provar o caso em que se dois números tiverem módulo menor do que 1 então o produto deles também tem módulo menor do que 1. Este caso é bem interessante pelo uso que faz do *círculo trigonométrico*. Já ficou visível na figura (fig. 1) que se $|a| > 1, |b| > 1$ então $|ab| > 1$ porque todos os números foram escolhidos fora do círculo trigonométrico. Agora, na próxima figura, vou escolher $|a| < 1, |b| < 1$ colocando-os dentro do *círculo trigonométrico*.

A figura (3) página 4, vai lhe mostrar quando eu tiver $|a| < 1, |b| < 1$ então $|ab| < |a|, |ab| < |b|, |ab| < 1$. Por que o círculo de raio $|ab|$ tem por raio um número real menor do que $|a|, |b|, 1$.

Havia um erro aqui observado por um leitor anonimamente, "Por que o círculo de raio $|ab|$ tem por raio um número real menor do que $|ab|, |a|, |b|, 1$.", corrigido!

Como nos casos anteriores, eu tracei a reta ligando 1 ao b e passando por a uma paralela a esta obtendo ab que está dentro de todos os demais círculos sobre a reta M que contém os resultados da multiplicação.

Referências

[1] David Hilbert. *Grundlager der geometri.* B.G. Teubner, 1903.

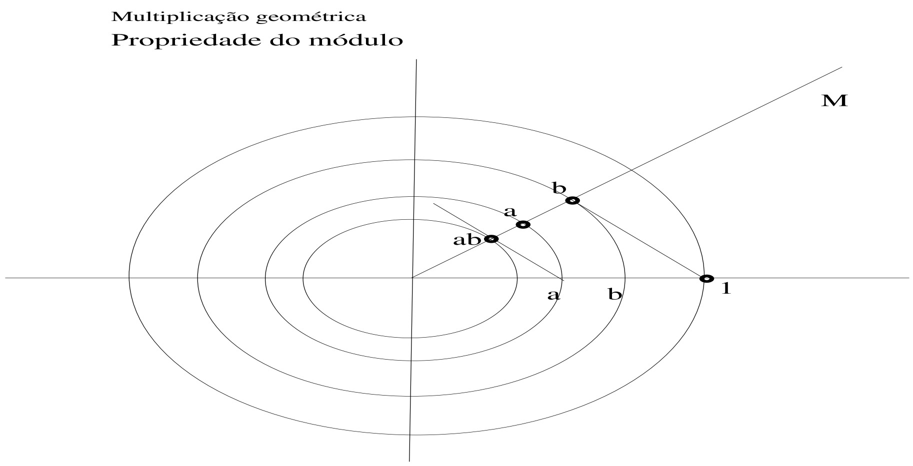

Figura 3: quando $|a| < 1, |b| < 1$

[2] Tarcisio Praciano-Pereira Stálio Rodrigues dos Santos. *Introdução à Matemática Universitária*. Sobral Matemática, 2009.