Raízes dos números reais ou complexos

Praciano-Pereira, T *

16 de outubro de 2022
preprints da Sobral Matemática
no. 2022.04
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

A fórmula de Euler, que também foi descoberta, provavelmente, alguns anos antes por Abraham De Moivre, mas de forma muito mais complicada, permitiu que Euler definisse a exponencial complexa de onde se pode definir a raiz de qualquer ordem dum número real ou complexo. Estou me concentrando na expressão da raiz $n$ésima dum número real ou complexo.

palavras chave: Fórmula de Euler-De Moivre, método geométrico, Raiz n-ésima.

In this paper I am using Euler's formula to obtain the nth root of a number, real or complex. We refer to Euler for this formula but De Moivre has found it in a rather cumbersome way which prevented him to expand the exponential to the complex numbers which Euler did.

Euler-De Moivre formula, geometric method, nth root of a number.

keywords:

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 O plano do trabalho

Um polinômio do grau n tem n raízes então o polinômio

$$y = P(x) = x^n \tag{1}$$

tem n raízes mas a função $\sqrt[n]{-}$, que seria a função inversa de P é uma função multivaluada e isto fere a definição de função. Então não posso dizer que $\sqrt[n]{-}$ é inversa de P, mas eu posso falar das raízes n de um número real ou complexo.

A fórmula de Euler-De Moivre é instrumento que me permite construir as raízes usando um método geométrico que vou expor neste artigo.

2 Porque a potência não tem operação inversa

Raiz é a operação inversa da Potência, quer dizer,

$$y = x^n \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{y} = x; \tag{2}$$

É uma operação com múltiplos resultados, como é bem sabido, a raiz quadrada tem dois resultados com sinais contrários. Aparentemente as raízes ímpares oferecem um único resultado porque os demais ficam escondidos no plano complexo. Eu vou lhe mostrar aqui como exibir as raízes complexas que completam o resultado.

É o Teorema Fundamental da Álgebra que estabelece que um polinômio do grau n tem n raízes que podem ser repetidas ou, como se as chama, *raízes múltiplas*. Aqui eu vou me ater ao polinômio

$$P(x) = x^n;$$

exclusivamente.

Na figura (fig 1), página 1, você pode ver as raízes quintas da unidade, elas são os vértices do

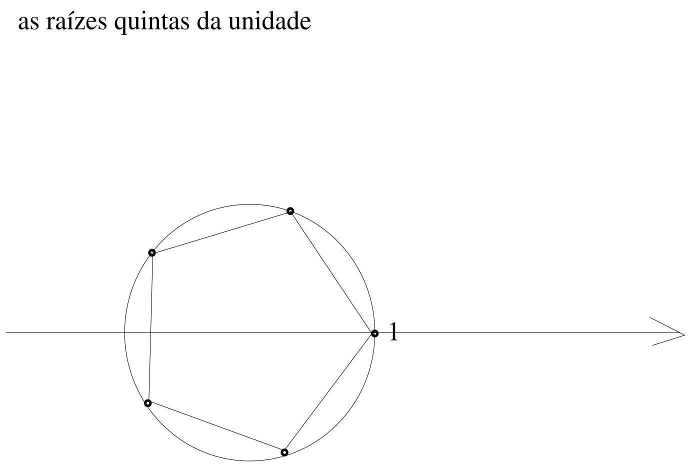

Figura 1:

pentágono regular convexo inscrito no círculo unitário $\mathbf{S}^1$ de modo que um dos vértices coincide com a unidade. Os demais vértices são os números complexos

$$e^{i\pi/5},\ e^{2i\pi/5},\ e^{3i\pi/5},\ e^{4i\pi/5},\ e^{i5\pi/5} = 1; \tag{3}$$

Qualquer destes números complexos elevados à $5^{\underline{a}}$potência reproduz o número 1 e assim qualquer um deles é uma das raízes quinta de 1. Desta forma $\sqrt[5]{1}$ tem uma raiz real e quatro raízes complexas o que dá a impressão que as raízes ímpares têm apenas um valor, porque as outras são números complexos, ficam escondidas no plano complexo.

3 Método geométrico

Na secção anterior eu construí a raiz quinta da unidade e o método geométrico é o mesmo para qualquer uma raiz da unidade, passando pela inserção dum polígono regular convexo com n lados no círculo unitário. Deixe-me agora generalizar isto para um número real $a > 0$. Depois você vai ver que eu posso eliminar a restrição $a > 0$ e falar apenas do número real a, quer dizer que eu vou calcular raízes mesmo de números negativos.

Qualquer raiz pode ser obtida por este método geométrico. Se você quiser calcular as raízes $\sqrt[n]{a}; \in \mathbf{R}; a > 0$, desenhe um círculo de centro na origem com raio $\sqrt[n]{|a|}$ e nele insira um polígono regular convexo de modo que um dos vértices coincida com o número real $\sqrt[n]{|a|}$. Os demais vértices irão determinar todas as outras raízes enésimas de a. Eu fiz isto na figura figura (fig 1), página 1 usando um pentágono para calcular as raízes quintas da unidade.

Na próxima seção vou lhe mostrar que o método se aplica a um número complexo qualquer e que o caso real é apenas um caso particular.

4 Raiz de um número complexo

Se você quiser calcular as raízes enésimas do número complexo $a + bi$, o método é o mesmo.

1. Calcule $r = |a + bi|$ e desenhe um círculo com centro na origem com raio r.
2. Trace a reta passando pela origem e pelo ponto $a + bi$, ela vai determinar sobre o círculo o arco θ que é o argumento de $a + bi$,
3. divida este arco θ em n pedaços iguais, esta é a parte difícil do processo, determinando o ângulo $\frac{\theta}{n}$.
4. trace o círculo de centro na origem tendo por raio $\sqrt[n]{|a + bi|}$ e projete nele o arco $\frac{\theta}{n}$.
5. Insira neste último círculo círculo um polígono com n lados de modo que um dos vértices fique sobre $\frac{\theta}{n}$. Os demais vértices são as n-raízes de $a + bi$. Observe que estou usando o mesmo símbolo, $\frac{\theta}{n}$ para o arco determinado nos dois círculos, o $arg(a + bi)$.

Como caso particular $\sqrt{a}$, um número real ou complexo, aceite um segmento de reta como sendo um polígono regular com dois vértices. Trace o círculo de raio $\sqrt{|a|}$ e nele marque o diâmetro partindo do arco $\frac{\theta}{2}$ em que $\theta = arg(a)$, o argumento do número a. Os dois extremos do diâmetro são as duas raízes quadradas do número a e elas tem sinais contrários.

Se $a \in \mathbf{R}; a \geq 0$ você cai no caso habitual uma vez que $\theta = arg(a) = 0$ e ao desenhar o círculo de raio $\sqrt{|a|}$ o diâmetro fica sobre o eixo OX e as duas raízes do número real a têm sinais contrários como de hábito. Isto mostra que os números complexos generalizam muito bem os números reais com as raízes de números reais caindo no plano complexo.

Se $a \in \mathbf{R}; a < 0$ os números complexos começam por tornar válida a fórmula

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

que para os números reais vale apenas quando $a, b \geq 0$. Com os números complexos esta fórmula sempre é válida com a invenção do número i.

Como as raízes de índice par vão determinar polígonos com um número par de vértices, no caso das raízes do número real $a > 0$ irão aparecer sobre o eixo OX as duas raízes reais, com sinais contrários, como habitual, e as demais raízes ficarão distribuídas sobre os vértices do polígono que tiver sido inscrito no círculo que tenha por raio $\sqrt[n]{|a|}$.

A figura (fig 2), página 3, lhe mostra as raízes sextas de 64 em que aparecem sobre o eixo

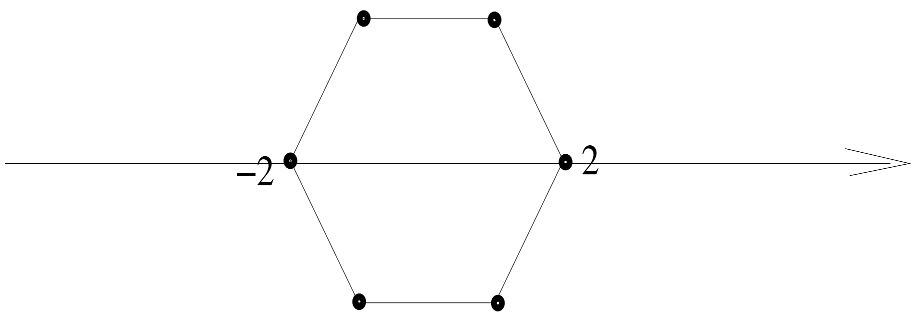

Figura 2: raízes sextas de 64

OX as duas raízes reais ± 2 e as demais determinam os ângulos $2k\pi/6; k \in \{1, 2, 4, 5\}$. Com $k \in \{0, 3\}$ você obtém as duas raízes reais com sinais contrários.

5 Raiz dum número complexo

Na figura (fig 3), página 3, você pode ver as raízes sextas do número complexo $a + bi$. Para

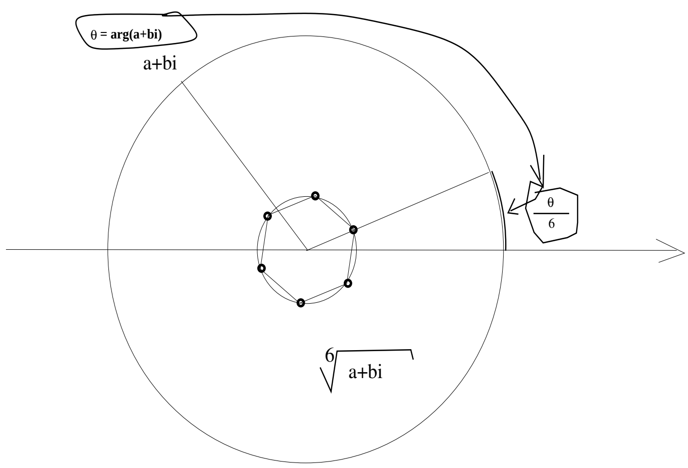

Figura 3: Raízes sextas

obtê-las, eu dividi o argumento $\theta = arg(a + bi)$ por 6 e projetei sobre o círculo de centro na origem com raio $\sqrt[6]{|a + bi|}$ e em seguida inscrevi neste círculo um hexágono convexo regular cujos vértices são as seis raízes sextas de $a + bi$. As expressões algébricas destas raízes são

$$\gamma = \frac{\theta}{6}; r = \sqrt[6]{|a+bi|}; re^{i\gamma}, re^{2i\gamma}, re^{3i\gamma}, re^{4i\gamma}, re^{5i\gamma}, re^{6i\gamma}; \tag{4}$$

Qualquer um destes números, elevado a $6^{\underline{a}}$potência reproduz $a + bi$.

Aqui você encontra a brilhante formula de Euler que inventou a exponencial complexa apenas definindo [1]

$$e^{i\gamma} = \cos(\gamma) + i\sin(\gamma); \tag{5}$$

com que ele teve a coragem de definir a exponencial para qualquer número complexo completando

$$z = a + bi; r = |a+bi|; \gamma = arg(z);\ e^z = e^r e^{i\gamma} \tag{6}$$

Abraham de De Moivre seguiu por cálculos muito mais complicados chegando ao mesmo resultado, mas, aparentemente, não teve a coragem de expandir a exponencial aos números complexos que estavam ali na ponta do lápis com que ele calculava. Euler foi lá e fez uma invenção.

Índice Remissivo

Referências

[1] William Dunham. *Euler: The Master of us all*. The Mathematical Association of America, 1999.