

Verbetes do dicionário de Matemática
T

Praciano-Pereira, Tarcisio ¹

26 de fevereiro de 2022
preprints da Sobral Matemática
no. 2022.01

Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

¹tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Estou começando a publicação do *dicionario de Matemática* que é trabalho que comecei em 2007, despretensiosamente, apenas preparando material para usar em minhas aulas. Ao me aposentar se transformou no *meu objetivo de vida* uma motivação para seguir aprendendo Matemática. Se despertar interesse agradeço críticas e colaborações. Deixo claro que consultei muito mais textos do que estes citados na bibliografia, e *que os erros são todos meus*, um estudante de Matemática.

Este artigo ainda está sendo redigido e quando atingir a sua versão final, esta observação irá desaparecer. E porque publicar uma versão em produção? Porque esta página é de préprints portanto contém trabalhos com os quais os autores almejam uma publicação futura e nos quais os autores se expõem na esperança de encontrar uma colaboração.

This paper is still been prepared and when ready this information will be dropped. And why publishing a production version? This is a p reprints page and this means the papers published here are expected to be published in a final form else were but in the mean time the authors are exposing a work in progress expecting to find a collaborator.

Uma outra razão desta observação inicial é de organização da página, estou neste momento apenas reservando um número de publicação, um aviso para os que visitarem a página que este artigo está sendo escrito. Quando pronto, este aviso desaparecerá.

Another reason for this is organizational, the page is reserving a number of publication and in addition to that an announcement that the paper is in production but about to be finished. When the paper is finished, this note will be dropped.

- **T_EX** é um programa feito por Donald Knuth, inicialmente para que ele pudesse produzir o seu livro (inacabado) *The art of computer programming* mas que terminou se tornando um objetivo em si próprio às custas do livro. . . O programa na verdade é uma linguagem *rudimentar* de programação que objetiva colocar texto em forma artística (no sentido que as Editoras entendem) em papel. Como Knuth, que assim é um dos pioneiros do *código aberto* deixou o seu programa em domínio público, uma grande coleção de outros programas e linguagens de programação de nível mais alto foram produzidas em cima do T_EX, como, por exemplo L^AT_EX que é possivelmente a forma mais comum de usar T_EX. Este dicionário está sendo redigido com L^AT_EX .

- **tabela verdade** Uma *tabela de verdade* é um algoritmo que permite comparar, e eventualmente demonstrar, a igualdade entre duas relações.

Dadas duas relações \mathcal{A}, \mathcal{B} existe, para cada uma delas, dois “*estados possíveis: verdade, falso*” o que produz um arranjo com repetição destes dois valores apresentados na tabela:

	\mathcal{A}	\mathcal{B}
	V	V
	V	F
	F	V
	F	F

São os arranjos com repetição 2-a-2, dos dois valores possíveis V, F, ou dois estados possíveis se estas relações puderem ser testadas contra estes dois valores e obviamente que existem relações que não respondem a nenhum destes valores porque não podem ser testadas, mas vou deixar de lado este caso. Considerar esta possibilidade consiste em adotar a chamada *lógica fuzzy*.

A *teoria dos conjuntos* é uma perfeita realização da Lógica Matemática uma vez que podemos expressar qualquer sentença de *lógica* usando uma expressão da *teoria dos conjuntos*. Aqui vou usar a seguinte notação:

$$\mathcal{A}(x) \equiv x \in A; \tag{1}$$

ou seja a sentença $\mathcal{A}(x)$ é realizada pela sentença da teoria dos conjuntos $x \in A$. Consequentemente terei:

$$\mathcal{A}(x) \text{ e } \mathcal{B}(x) \equiv x \in (A \cap B); \quad (2)$$

$$x \in (A \cap B) \equiv (x \in A) \text{ e } (x \in B); \quad (3)$$

$$\mathcal{A}(x) \text{ ou } \mathcal{B}(x) \equiv x \in (A \cup B); \quad (4)$$

$$x \in (A \cup B) \equiv (x \in A) \text{ ou } (x \in B); \quad (5)$$

Confira o exemplo analisando a figura (fig 1), página 2, em que você pode ver dois conjuntos A, B

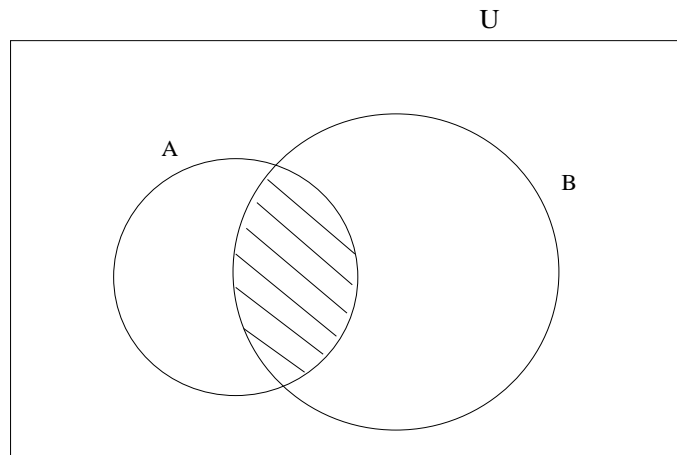


Figura 1: $x \in A \cup B, x \in A \cap B$

representados como subconjuntos do conjunto U .

Uma questão interessante, muito comum e relativamente difícil de ser demonstrada, é “qual seria o resultado da complementação $(A \cup B)_U^c$, o complementar de $(A \cup B)$ em relação ao universo U , traduzido em termos de A e de B .”

É o mesmo que decidir qual é a negação duma sentença do tipo “ou” em Lógica Matemática: “não ($A(x)$ ou $B(x)$)”.

A resposta pode ser facilmente obtida analisando uma tabela de verdade que envolva também estas relações.

Agora temos mais cinco relações a serem consideradas que nos permite expandir a tabela anterior para

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A_U^c$	$x \in B_U^c$	$x \in (A \cup B)$	$x \in (A \cup B)_U^c$	$x \in A_U^c \cap B_U^c$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

e podemos ver que os arranjos 4-a-4, ao longo das duas últimas colunas são idênticos: FFFV. O significado é que estas duas relações têm os mesmo estados e as podemos considerar idênticas.

Usando a expressão das sentenças de acordo com a convenção que estabeleci, $\mathcal{A}(x) \equiv x \in A, \mathcal{B}(x) \equiv x \in B$ posso representar a tabela anterior como:

$\mathcal{A}(x)$	$\mathcal{B}(x)$	$\neg\mathcal{A}(x)$	$\neg\mathcal{B}(x)$	$(\mathcal{A}(x) \text{ ou } \mathcal{B}(x))$	$\neg(\mathcal{A}(x) \text{ ou } \mathcal{B}(x))$	$\neg\mathcal{A}(x) \text{ e } \neg\mathcal{B}(x)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

em que $\neg\mathcal{A}(x)$ é a negação de $\mathcal{A}(x)$.

Demonstrei então que

$$\neg(\mathcal{A}(x) \text{ ou } \mathcal{B}(x)) = x \in (A \cup B)_U^c = x \in (A_U^c \cap B_U^c) = (\neg\mathcal{A}(x)) \text{ e } (\neg\mathcal{B}(x)); \quad (6)$$

O complementar da união de dois conjuntos é a interseção dos complementares destes conjuntos. Também mostrei que a negação duma relação do tipo “ou” é uma relação do tipo “e”:

$$\neg(\mathcal{A}(x) \text{ ou } \mathcal{B}(x)) = (\neg\mathcal{A}(x)) \text{ e } (\neg\mathcal{B}(x)); \quad (7)$$

Ou ainda, *trocando o estado da última equação*, posso concluir que

$$(\mathcal{A}(x) \text{ ou } \mathcal{B}(x)) = \neg((\neg\mathcal{A}(x)) \text{ e } (\neg\mathcal{B}(x))); \quad (8)$$

que conduz a definição de “ou” em termos de “e”. Assim se chega à conclusão de que as duas operações lógicas básicas são \neg , e , podendo “e” ser trocado por “ou” para que as operações básicas sejam \neg , ou , evidentemente.

Os símbolos usados em lógica matemática para as conjunções “e,ou”, são, respectivamente, \wedge , \vee . Então, eu deveria ter escrito:

$$\mathcal{A}(x) \text{ ou } \mathcal{B}(x) = \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x); \quad (9)$$

$$\mathcal{A}(x) \text{ e } \mathcal{B}(x) = \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x); \quad (10)$$

- **tangente** Duas funções f, g se dizem tangentes no ponto (a, b) sse

1. $f(a) = g(a)$, ou seja $(a, b) \in \text{graf}(f) \cap \text{graf}(g)$;
2. Existe uma função linear K do espaço vetorial onde f, g estiverem definidas, tal que $f(x) - g(x) = o(K(x - a))$ em que o é o *pequeno de Landau*, a ordem de grandeza de $f(x) - g(x)$ é menor do que a ordem de grandeza de $K(x - a)$ numa vizinhança de $x = a$, o limite do quociente pelo módulo de $x - a$ existe e é zero.

Por exemplo, se f for derivável, então em cada ponto do seu domínio existe uma função linear tangente ao gráfico de f . A relação de tangência num ponto P é uma relação de equivalência e a classe de f , se existir, é chamada de *germe* de f em P .

Como entre os elementos do germe de f em P tem que haver uma variedade linear, se f for diferenciável, e esta variedade linear é a mais simples de todas as que pertencem ao *germe* então as variedades lineares são os representantes de classe de todos os *germes* de funções diferenciáveis do espaço.

Por exemplo, uma função real f definida em (a, b) for diferenciável em $c \in (a, b)$ então ela pertence ao *germe* da função linear

$$y = f(c) + m(x - c); \quad (11)$$

para algum número real m e neste caso dizemos que $m = f'(c)$. Pela definição do o pequeno de Landau, então

$$\lim_{x \rightarrow c=0} \frac{f(x) - f(c) - m(x - c)}{x - c} = 0; \quad (12)$$

que é a definição do Cálculo para funções deriváveis.

No Cálculo multivariado, substitua $x - c$ na definição do o pequeno de Landau por $\|x - c\|$ para que a fração volte a ter sentido.

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ é diferenciável num ponto $c \in [a, b]$ se o seu gráfico tiver uma reta tangente ao ponto $(c, f(c))$.

- Se $c = a$ dizemos que é ela é diferenciável à direita.
- Se $c = b$ dizemos que é ela é diferenciável à esquerda.

No intervalo aberto (a, b) como domínio, estes dois conceitos de diferenciação à direita e à esquerda perdem sentido mas surge um conceito complementar: *reta assintota* ao gráfico de f no ponto c que é uma generalização do conceito de tangência.

Esta definição esconde o *conceito de limite* dentro do *conceito de tangência* que é uma classe de equivalência para curvas: duas curvas no espaço são tangentes no ponto P se elas tiverem uma reta tangente comum neste ponto P . Então conjunto das curvas tangentes no ponto P formam uma classe de equivalência relativamente ao conceito de tangência.

Mas o conceito de *germe* pode ser usado para definir classe de variedades que tenham um mesmo tipo de singularidade, por exemplo, a classe das variedades que sejam assintotas a uma determinada variedade linear. A forma de fazer é análoga. Aqui *germe* é um conceito da *topologia diferencial*.

Esta forma de falar permite uma *rápida* generalização da derivada para qualquer espaço de dimensão finita: uma função f definida num domínio Ω de \mathbf{R}^n e tomando valores em \mathbf{R} , é diferenciável no ponto $P \in \Omega$ se tiver uma variedade linear tangente de dimensão n , em $(P, f(P))$. Novamente aqui fica definido a relação de equivalência entre as variedades de dimensão n tangentes no ponto $(P, f(P))$ como aquelas que tenham uma variedade linear de dimensão n que seja lhes sejam tangente no ponto $(P, f(P))$.

- **tangente e raio** são perpendiculares no círculo, Confira a figura (fig. 2), página 4.

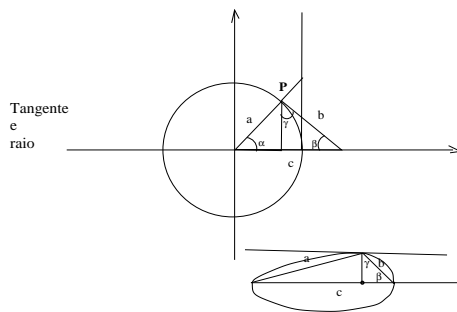


Figura 2:

Tentei demonstrar esta propriedade do círculo e da tangente, sem sucesso. Fiz uma busca por uma demonstração e achei uma, [26], que se repetia em diversos sites se baseando na distância mínima dum ponto a uma reta, entretanto o método que ela encerra se aplica a qualquer curva diferenciável convexa.

Dado um ponto C interior a uma *curva convexa diferenciável* γ , confira o detalhe na parte inferior da figura (fig. 2), existe um círculo de raio máximo (\mathcal{O}, r) , que seja tangente à curva contido no interior de γ tal que a fronteira de \mathcal{O} seja tangente também a γ no ponto P .

O caso dos polígonos teria que ter um tratamento diferente, mas ele não me interessa aqui e elimino os polígonos deste

caso porque os polígonos são *quase sempre diferenciáveis*, falhando a diferenciabilidade exatamente nos vértices.

O raio r de \mathcal{O} é a distância do ponto C à curva. A curva γ admite em P uma reta tangente que é também tangente à fronteira de \mathcal{O} e como r é a distância de C ao ponto P então o raio, por ser a distância à reta tangente tem que ser perpendicular à tangente à γ no ponto P , pela definição de distância dum ponto a uma reta que é o menor caminho do ponto à reta. A tangente à γ também é tangente à fronteira do círculo \mathcal{O} neste ponto P então o raio é perpendicular à tangente, no círculo.

Este raciocínio mostra que a demonstração de que o raio é perpendicular à tangente no círculo se aplica a qualquer *curva convexa diferenciável* mas o círculo, por definição tem um ponto privilegiado chamado *centro* que equidistante de todos os pontos da fronteira sendo esta distância o raio.

O que torna diferente o círculo de qualquer outra curva convexa é que o centro C é único para todos os pontos da fronteira, é o ponto que fica equidistante de todos pontos da fronteira do círculo. A propriedade de que raio e tangente são perpendiculares é uma simples reformulação da definição geométrica do círculo.

A definição do círculo diz que a distância do centro ao ponto de tangência duma reta à fronteira do círculo é a menor possível portanto que o raio é perpendicular à reta tangente sendo o menor caminho por um segmento de reta dum ponto a uma reta é pela via dum segmento perpendicular à reta.

O caso da esfera tridimensional

E existe algum outro tipo de *esfera* que não seja a tridimensional? Vou mostrar-lhe sim e vou inclusive romper a barreira tridimensional em que vivemos. Vou fazer isto através duma série de exemplos porque estarei introduzindo novos conceitos. Procure se liberar de preconceitos próprios da prisão tridimensional em que vivemos, [25].

A nossa linguagem geométrica é uma herança cultural da Geometria Euclidiana a que estivemos presos até o século 17 quando Lobachevsky, um matemático russo e János Bolyai, um matemático húngaro, desenvolveram, independente um do outro, a geometria hiperbólica que seria base da *teoria da relatividade*, confira *teoria da relatividade*. Lobachevsky e Bolyai mostraram que a concepção geométrica euclidiana era restritiva e assim criaram o ramo das *geometrias não euclidianas*. O conceito de *dimensão* também evoluiu junto com uma das ideias que saíram do Cálculo Diferencial e Integral para a criação da *Geometria Diferencial*.

Ao longo do processo para nos libertar da prisão tridimensional surgiu um conceito importante, *variedade* que você pode considerar como sinónimo de *objeto* e vou fazer algumas afirmações para conduzi-la a compreender este novo conceito. Vou deixar algumas repetições no texto com o objetivo de ser didático e lhe permitir de fazer comparações.

1. O círculo é uma figura plana e sua definição é *o conjunto dos pontos do plano que equidistam dum ponto fixo chamado centro*. O círculo é a fronteira do *disco*, que é uma *bola* plana. A definição do *disco* é “ *o conjunto dos pontos do plano que cuja distância dum ponto fixo chamado centro é menor ou igual a um número dado chamado raio, r* . É definida por um desigualdade. As tangente ao *círculo plano* são as retas que são *variedades lineares* de dimensão 1. Como as retas são tangentes aos círculos, e a tangência é uma *relação de equivalência*, então os *círculos planos* são variedades de dimensão 1, e não são *variedades lineares*. As retas são *variedades lineares*.
2. A reta é um espaço de dimensão 1, e um ponto um espaço de dimensão zero. O *disco* de dimensão 1 é um segmento de reta e ponto médio deste segmento de reta é o centro do *disco*, ou o centro da *bola* de dimensão 1. Por exemplo o intervalo $[a, b]$ é uma *bola* cuja centro é $\frac{a+b}{2}$. A fronteira desta *bola* é formada de dois pontos $\{a, b\}$ é uma *variedade* de dimensão zero, um conjunto de pontos isolados é uma *variedade* de dimensão zero. E quais seriam as tangentes dum disco de dimensão 1?
3. Aquilo que se chamam habitualmente *esfera* é um *círculo* de dimensão dois, é a fronteira duma *bola*

de dimensão três. As tangentes da *esfera tridimensional* são *planos*, que são *variedades lineares* de dimensão 2. Pela relação de equivalência a *esfera* da dimensão 3 é uma variedade de dimensão 2, que não é linear.

4. Com este novo vocabulário eu fico livre para pensar em qualquer dimensão. Na dimensão 4 temos uma *bola quadridimensional* cuja fronteira é uma *esfera* da dimensão 4 sendo uma *variedade* de dimensão 3. Observe os casos acima para verificar que da *bola* para a *esfera*, que é a fronteira da bola houve uma queda de uma dimensão.

As tangentes duma *esfera de dimensão 4* são *variedades lineares* de dimensão 3, são os *hiperplanos* da quarta dimensão. Pela *relação de equivalência*, como a fronteira da *bola de dimensão 4*, que é a *esfera* da quarta dimensão, é uma *variedade* de dimensão 3, não é uma *variedade linear*.

5. Ainda tem mais um conceito a mencionar, são os *hiperplanos*. Deixe-me introduzi-los também usando exemplos. No plano, que é uma variedade linear de dimensão dois, os *hiperplanos* são as retas que são variedades de dimensão 1. Quer dizer que um *hiperplano* é a variedade linear de dimensão imediatamente inferior ao espaço que estivermos referenciado. É um *conceito relativo*! Quando eu me referir a um hiperplano tenho que dizer qual é a dimensão do espaço.

- Numa reta, que é um espaço de dimensão 1, os *hiperplanos* são pontos, eles têm dimensão zero. As retas são *variedades lineares* de dimensão 1, os seus *hiperplanos* têm dimensão zero.
- Num plano, que é um espaço de dimensão 2, os *hiperplanos* são as retas, eles têm dimensão 1. Os planos são *variedades lineares* de dimensão 2, os seus *hiperplanos* têm dimensão 1.
- Num *espaço tridimensional*, os *hiperplanos* são os planos, eles têm dimensão 2. A Geometria Euclidiana apenas reconhecia a existência de um *espaço tridimensional*, que chamava simplesmente de *espaço*. Mas um *espaço tridimensional* da Geometria Euclidiana é um *hiperplano* dum espaço de dimensão 4. E da mesma forma como num plano tem uma infinidade de hiperplanos, retas, também num espaço de dimensão 4 tem uma infinidade de hiperplanos, os *espaços* da Geometria Euclidiana.

Observe que para exemplificar o conceito de *hiperplano* eu me vi forçado a usar os conceitos da Geometria Euclidiana, *ponto*, *reta*, *plano*, *espaço*. Mas fiquei livre da *prisão tridimensional* em que Geometria Euclidiana me encerra, [25].

Agora não há nada mais para demonstrar, o raio da *bola* de dimensão três é perpendicular ao plano tangente, é a própria definição da *esfera* tridimensional.

O raio da *bola* de dimensão n determinado pelo ponto P na sua esfera, é perpendicular ao hiperplano tangente neste ponto. A dimensão da esfera é $n - 1$.

Conceitos relacionados:

- *Geometria Diferencial*
- *geometria hiperbólica*
- *geometria não euclidiana*
- *hiperplano*
- *teoria da relatividade*

- *variedade*

- **Taylor, polinômio** É um polinômio cujo gráfico é tangente ao gráfico duma função diferenciável. O caso mais simples é a *reta tangente* que é um polinômio do primeiro grau cujo gráfico é o da reta tangente ao gráfico duma função num ponto dado, confira o gráfico na figura (fig. 3), página 7.

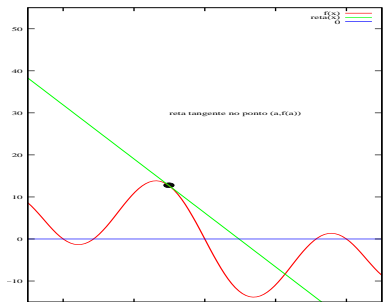


Figura 3:

a equação da parábola tangente? e seria uma equação mais realista, porque se um corpo se desliga de outro que o carrega ao se desligar parte pela tangente que será uma parábola porque corpo ejectado agora entra no domínio da gravidade da Terra se transformando num *corpo que cai em queda "livre"*, quer dizer: segue pela parábola tangente. Vou fazer as mesmas transformações, apenas vou deixar um erro que vou corrigir em seguida, mas você terá tempo para pescar o erro antes de ler a resposta:

uma pedra ro-
dando presa a
um cordão

Observe esta forma de escrever a equação da reta que vou transformar sucessivamente até obter a equação que me interessa:

$$y = b + m(x - a); \quad (13)$$

$$y = f(a) + m(x - a); \quad (14)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a); \quad (15)$$

A equação (eq.13) é a da reta que passa no ponto (a, b) com coeficiente angular m , e cheguei, na equação (eq.15) à equação que passa no ponto $(a, f(a))$ com coeficiente angular $f'(a)$.

Então você pode se perguntar: não seria possível obter-se

$$y = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (16)$$

$$y = b + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (17)$$

$$y = b + m(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (18)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (19)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2; \quad (20)$$

e na equação (eq.20) estou lhe dizendo que tenho a equação da parábola tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. E qual é o erro?

Os cálculos nas equações (eq.16) (eq.20) pecaram por excesso de ingenuidade! Vou refazê-las, agora, da forma correta, usando a equação dum polinômio do segundo grau ao qual vou impor à condição de tangência e cópia da aceleração no ponto de separação dos dois corpos que estavam viajando juntos:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \quad (21)$$

$$P(a) = a_0; a_0 = f(a); \quad (22)$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - a); a_1 = P'(a); a_1 = f'(a); \quad (23)$$

$$P''(x) = 2a_2; P''(a) = 2a_2 = f''(a) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(a)}{2}; \quad (24)$$

$$y = P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2; \quad (25)$$

$$y = Q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2; \quad (26)$$

e você tem na equação (eq.25) a equação correta da parábola que descreveria o movimento em queda livre depois que o objeto se tenha desprendido do seu carregador no ponto $(a, f(a))$, partindo do ponto $(a, f(a))$,

copiando a velocidade $f'(a)$ e a aceleração que agora é a da gravidade somada a eventual força acionadora $f''(a)$ que lhe tenha sido dada no momento do lançamento. A equação (eq.26) é a equação do polinômio de Taylor do segundo grau *desenvolvido* no ponto x_0 .

E como seria a equação dum polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$? Novamente, vou responder com uma resposta *ingenuamente errada*:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3}(x - a)^3 \quad (27)$$

deduzindo direto da equação (eq.25).

Se você repetir o método que usei para encontrar a equação da parábola tangente, agora para o caso do polinômio do terceiro grau tangente, você vai encontrar::

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3; \quad (28)$$

e estou de acordo com você que parece que ficou feio! Aparentemente não tem lógica, e o *correto* em Matemática é determinado pela *beleza*. Se estiver feio, está errado! ou pode estar mal escrito! A equação (eq.28) *está mal escrita!*

Neste segundo caso não há erro, apenas tem algo escondido:

$$P(x) = \frac{f(a)}{1} + \frac{f'(a)}{1}(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3; \quad (29)$$

$$P(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3; \quad (30)$$

Você pode encontrar na página [13, programas] uma cópia do programa para fazer alguns gráficos de polinômios de Taylor com gnuplot. Divirta-se.

O polinômio de Taylor de uma função univariada e que tenha derivadas até a ordem n , conhecidas, num ponto $x = a$ é a expressão polinomial

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n \quad (31)$$

com $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Os coeficientes são determinados pelo conjunto de equações

$$\begin{cases} P(a) = f(a) & \Rightarrow a_0 = f(a); \\ P'(a) = f'(a) & \Rightarrow a_1 = f'(a); \\ P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) & \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}; \end{cases} \quad (32)$$

Como $0! = 1!$ e $2! = 2$ então esta fórmula pode ser escrita de forma concisa como

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k; \quad (33)$$

Há dois exemplos importantes da fórmula de Taylor, chamadas de McLaurin é quando aplicamos a Fórmula de Taylor ao *seno* ou ao *coseno*. Nós conhecemos as derivadas de qualquer ordem destas funções em alguns pontos, na origem por exemplo.

As derivadas do *seno* na origem são

$$0, 1, 0, -1, \dots, 0, 1, 0, -1, \dots, \quad (34)$$

$$dsen(n)(n\%4 == 0)?0 : (n\%4 == 1)?1 : (n\%4 == 2)?0 : -1; \quad (35)$$

em que foi usado `if-else-compacto`, com a sintaxe da linguagem C, e o símbolo `%`, em C, é a função congruência módulo-2 resto dos inteiros na divisão por dois. Na equação (eq. 35), você tem uma função inteira de período 4, então o polinômio de Taylor (ou de McLaurin) do seno é

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d\text{sen}(k)(0)}{k!} x^k; \quad (36)$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; n \geq 0; \quad (37)$$

em que as derivadas são todas calculadas na origem, $a = 0$. O desenvolvimento de McLaurin é a fórmula de Taylor no ponto zero.

Usando a linguagem `calc`, usualmente distribuída com os sistemas Debian/Gnu/Linux, você pode implementar este algoritmo para obter o seno com alta precisão, porque `calc` é de precisão infinita (inteira) como também o são Python e em geral os dialetos da linguagem LISP. Não é necessário usar polinômios de grau muito alto, basta definir o *seno* ou o *coseno*, usando a fórmula de Taylor módulo π . Por exemplo, com um polinômio de grau 17, a aproximação rivaliza com a que você pode obter numa calculadora científica.

Na figura (4) página 9, você pode ver o gráfico da função seno, definida por algoritmo dentro do `gnuplot` e de um polinômio de Taylor de grau 17, do seno, no intervalo $[-6, 6]$. e na figura (5) página 9,

também usando a expressão algorítmica do cosseno de `gnuplot` e do polinômio de Taylor de grau 17, cosseno, no intervalo $[-6, 6]$.

Observe que isto é o suficiente para definir *seno*, *coseno* para qualquer número real, com um algoritmo, usando a periodicidade.

Outro método para obter a fórmula de Taylor

Vou definir um produto escalar no conjunto dos po-

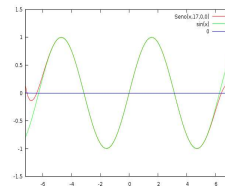


Figura 4:

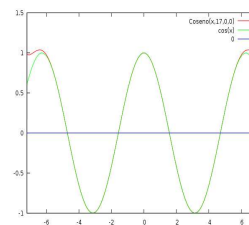


Figura 5:

linômios $\mathbf{R}[x]$ da seguinte maneira

$$P, Q \in \mathbf{R}[x]; \quad (38)$$

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx; \quad (39)$$

$$\int_{-1}^1 x^n x^{n-1} dx = \quad (40)$$

$$= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 f(x)f'(x)dx = \frac{1}{n} \int_{f(-1)}^{f(1)} udu = \quad (41)$$

$$\text{se } n \text{ for par} = \frac{1}{n} \int_1^1 udu = 0; \quad (42)$$

$$\text{se } n \text{ for par} = \frac{1}{n} \int_{-1}^1 udu = 0; \quad (43)$$

$$\int_{-1}^1 x^n x^n dx = x^{2n+1} \Big|_{-1}^1 = 2; \quad (44)$$

Estes cálculos da equação (eq.40) até a equação (eq.43) se alongaram inutilmente para provar que a integral é nula. As duas funções

$$x \mapsto x^n; x \mapsto x^{n-1}; \quad (45)$$

são ortogonais relativamente ao produto escalar definido na equação (eq.38), porque na equação (eq.40) eu tenho um produto de duas funções, uma das quais é ímpar e a outra par, logo o produto é uma função ímpar e o intervalo de integração sendo $[-1, 1]$ a integral é zero. A equação (eq.44) sugere uma alteração na definição do produto escalar. Eu vou multiplicá-lo por $\frac{1}{2}$ o que vai tornar os vetores básicos $x \mapsto x^n$ em vetores unitários. Então corrigindo a definição

$$P, Q \in \mathbf{R}[x]; \quad (46)$$

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx; \quad (47)$$

$$e_n(x) = x^n; \langle e_n, e_k \rangle = \delta_{n,k}; \quad (48)$$

mostrando que eu defini uma base ortonormal de vetores para o espaço vetorial $R[x]$.

Agora, considere uma função qualquer diferenciável continuamente até a ordem $n + 1$, pelo menos, e definida num intervalo que contenha $[-1, 1]$ então f tem um polinômio de Taylor de grau n e assim

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j + R_n(x); \quad (49)$$

$$\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)x^k dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_k x^k x^k dx = a_k; \quad (50)$$

mostrando que a projeção de f na direção do vetor e_k é o coeficiente de ordem k da expansão de Taylor de f .

Conceitos relacionados:

- Erro na fórmula de Taylor.
- Fórmula integral do erro na fórmula de Taylor.

- **teorema de Tales** Um dos teoremas devidos a Tales de Mileto, estabelece que se um triângulo inscrito num círculo tiver como um dos seus lados, o maior lado, o diâmetro, então ele é um *triângulo retângulo*, a figura (fig. 6), página 11,

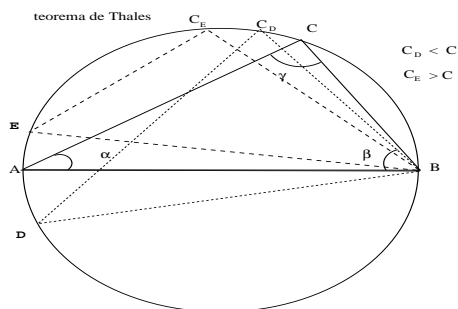


Figura 6:

maior, é o diâmetro do círculo. É a recíproca do teorema de Tales.

Posso agora obter uma variante deste teorema fazendo uma pequena alteração na posição do vértice A , movendo-o para a posição E ou para a posição D . Vou obter dois outros triângulos que têm um lado em comum com primeiro, \overline{BC} , é imediato que os ângulos de cada um destes triângulos, *no vértice C* são, respectivamente,

- no caso D , C_D agudo, quer dizer, o ângulo em C_D mede *menos do que* $\frac{\pi}{2}$
- e no caso E , C_E obtuso, quer dizer, o ângulo em C_E mede *mais do que* $\frac{\pi}{2}$.

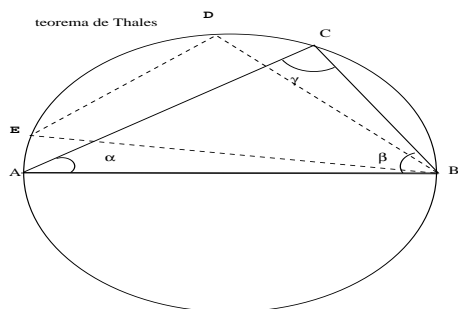


Figura 7:

- Qualquer triângulo *obtusângulo*, com um ângulo que meça mais do que $\frac{\pi}{2}$ estará representado escolhendo o terceiro ponto, E , no *semicírculo* superior do círculo na figura (fig. 7), página 11.
- Qualquer triângulo *acutângulo*, cujos ângulos tenham todas medidas inferiores a $\frac{\pi}{2}$, todos os ângulos sejam agudos, estará representado escolhendo o ponto D no *semicírculo* inferior do círculo na figura (fig. 7), página 11.

mostra um triângulo inscrito numa circunferência de modo que o maior lado coincide com o diâmetro. A soma dos três ângulos, $\alpha + \beta + \gamma$ correspondem ao total da circunferência do círculo, se eu tomar para isto a soma dos correspondentes segmentos do círculo que eles determinam, portanto 2π e um outro teorema da Geometria nos garante que esta soma na verdade é π disto eu posso deduzir que a medida de cada um dos ângulos é a metade do arco que eles subtendem e assim $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Consequência, se um triângulo retângulo estiver inscrito num círculo, então, um dos seus lados, o

O resultado desta *variação* é que agora posso estabelecer de forma muito simples uma relação de equivalência entre todos os triângulos do plano e uma seleção dos triângulos inscritos num círculo e mais precisamente no *círculo trigonométrico* S^1 .

Com isto eu tenho *todos os possíveis tipos de triângulos* representados como triângulos inscritos num círculo, *uma classificação para todos os triângulos do plano*.

Cada um destes triângulos é um representante de classe para a relação de equivalência entre triângulos.

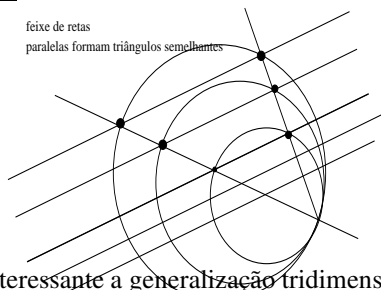
- Qualquer triângulo retângulo é equivalente a um triângulo obtido selecionando o vértice C no *semicírculo* superior deixando A, B fixos determinando o diâmetro. Se $C = A$ ou $C = B$ ainda vale o teorema de Pitágoras e se tem um *triângulo retângulo degenerado* que se reduz a um segmento de reta quando um dos catetos é nulo e o outro coincide com a hipotenusa. Eliminei a possibilidade de selecionar C no *semicírculo inferior* porque assim haveria dois representantes de classe para cada classe de equivalência.

Um outro teorema que se deve a *Tales de Mileto* estabelece

Teorema 1 (das transversais) e um feixe de paralelas

A interseção, por duas retas transversais, dum feixe de retas paralelas formam triângulos semelhantes. Na figura (fig. 1), página 12, os três círculos estão determinados por diâmetros de determinando com o terceiro ponto de interseção com as paralelas triângulos retângulos.

Dem: A figura (fig. 1), página 12,



a demonstração aproveita a figura (fig. 1) mas, por indução, vale para um número qualquer de retas paralelas. Os dois primeiros triângulos são semelhantes porque têm um ângulo comum e o segundo ângulo em A' e B' são iguais porque as duas retas paralelas cortam uma terceira reta, a reta horizontal. Então o terceiro ângulo é igual nos dois primeiros triângulos. A demonstração é a mesma para qualquer outra combinação dos triângulos dois a dois.

q.e.d.

É interessante a generalização tridimensional deste teorema, que um *teorema de Desargues* que permite calcular volumes a partir de outro que lhe seja equivalente. Este teorema contém a mesma ideia do teorema de Tales de Mileto, mas agora envolvendo volumes. Ele é usado na *lei do cosseno* para volumes.

A afirmação agora é

Teorema 2 (de Desargues) Volumes e seções cônicas Considere um cone qualquer e um feixe de planos paralelos que cortem este cone com ângulo diferente de zero relativamente à diretriz do cone (ou as diretrizes do). Os volumes das interseções dos cones determinadas por dois dos planos paralelos são proporcionais.

Dem:

Se o feixe de planos paralelos cortar o cone com ângulo zero relativamente à diretriz se produzirão figuras com volume nulo, o que não interessa. Se cone for gerado por uma única geratriz seguindo uma curva que fique num onde a geratriz não se encontre, esta curva caracteriza o cone. Se for um círculo, será um cone circular. Se for um polígono, e este polígono que vai caracterizar o cone. Na figura (fig. 2) eu “desenhei” um cone triangular, a diretriz percorre um triângulo.

Na figura (fig. 2), página 13,

você pode “ver” os três planos paralelos

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3;$$

(51)

e dois a dois eles determinam volumes que são rombos do cone, quer dizer pedaços do cone determinados por dois planos que não sejam paralelos com qualquer geratriz, e na figura (fig. 2) há três geratrizes que na verdade é qualquer das retas que se originam no ponto O e percorra o triângulo de base do cone que pode ser qualquer um dos triângulos determinados pelo cone e por um dos planos π_i .

A razão de proporcionalidade é dada por quaisquer dois segmentos de reta, homólogos, contidos na superfície que contém as geratrizes. Este conceito, homólogo, é o mesmo usado na referência dos lados de triângulos, ou polígonos semelhantes. São segmentos que tenham a mesma função em dois objetos semelhantes, por exemplo, as hipotenusas. em dois triângulos retângulos semelhantes, ou um dos catetos e o seu homólogo. O valor da razão de proporcionalidade é a razão entre os cubos das medidas dos segmentos homólogos escolhidos porque estou comparando volumes. Compare com a lei do cosseno que estabelece a proporcionalidade entre áreas de figuras planas, mesmo que elas se encontrem num espaço de dimensão maior do que dois... então a razão de proporcionalidade se calcula usando o quadrado das medidas dos segmentos homólogos escolhidos.

O texto do teorema ficou incompleto apenas mencionando que a razão de proporcionalidade seria determinada usando segmentos homólogos e agora eu posso terminar a redação.

Deixe-me designar por V_2 o volume determinado pelos planos π_1, π_2 e V_3 o volume determinado pelos planos π_2, π_3 , algo assim como se o plano π_2 fosse a base de V_2 e o plano π_3 fosse a base de V_3 , para justificar a notação.

Então a formulação do teorema seria:

- Considere dois segmentos homólogos nas superfícies externas de V_2 e de V_3 cujas medidas sejam

$$\rho_2, \rho_3 \in \mathbf{R}^{++}; \quad (52)$$

dois números reais estritamente positivos.

- Para não entulhar demasiado a notação, permita-me uma metonímia, vou trocar o objeto geométrico V_2 pelo número real que representa o seu volume chamando este último de V_2 . Agora vem a proporção entre os dois números reais V_2, V_3

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{\rho_2^3}{\rho_3^3}; \quad (53)$$

A razão de proporcionalidade entre os volumes é a segunda fração na equação (eq.53).

Apenas para comparar, veja como ficaria a relação de proporcionalidade entre dois triângulos semelhantes T_2, T_3 se eu escolher os dois segmentos homólogos sendo as alturas h_2, h_3 aplicando a mesma figura literária para agora designar-lhes as áreas como T_2, T_3 , eu teria

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{h_2^2}{h_3^2}; \quad (54)$$

porque a dimensão das variedades comparadas agora é dois, e no caso dos volumes a dimensão é três. Se estiver comparando lados homólogos l_2, l_3 dos dois triângulos, e agora usando l_2, l_3 para representar as medidas destes lados, dois números reais, eu teria

$$\frac{l_2}{l_3} = \frac{h_2}{h_3}; \quad (55)$$

porque estou comparando os volumes de variedades de dimensão 1.

q.e.d.

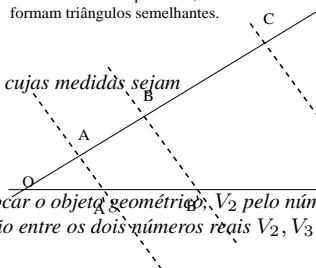
Se você for perspicaz terá notado que eu não apresentei nenhuma demonstração do último teorema, apenas fiz uma descrição do resultado. Envie-me a demonstração que eu corrijo o texto dando-lhe o crédito. Entretanto a demonstração pode seguir apenas usando relação de equivalência possivelmente usando a ideia contida da demonstração que fiz do *teorema fundamental dos morfismos*, [27].

Conceitos relacionados:

- Soma dos ângulos dum triângulo.
- Triângulo inscrito numa circunferência.
- Medida do ângulo que subentende o arco dum círculo.
- Relação de equivalência entre triângulos do plano.
- Proporcionalidade entre comprimentos, áreas e volumes.

- **teorema fundamental dos morfismos** estabelece que o núcleo dum morfimo é um grupo normal:

a interseção, por duas retas transversais, dum feixe de retas paralelas, formam triângulos semelhantes.



Teorema 3 (fundamental) dos morfismos O núcleo dum morfismo de grupo é um subgrupo normal.

Dem :

Considere um grupo G , um morfismo de grupos $G \xrightarrow{f} G'$ e $H = \ker(f)$ a imagem inversa por f do elemento neutro de G' . Então H é a classe de equivalência módulo f , a função que define o morfismo, dos elementos de G que têm por imagem o elemento neutro de G' .

Como a multiplicação por $g \in G$ é uma permutação de G então $(g * H)_{g \in G}$ descreve uma partição de G em que ocorre a repetição das classes, por exemplo,

$$g_1 \neq g_2, g_1, g_2 \in H \Rightarrow g_1 * H = g_2 * H = H; \quad (56)$$

Como G não é necessariamente abeliano, por isto estou usando a notação multiplicativa, então há dois sistemas de classes,

- classes à direita $(H * g)_{g \in G}$
- classes à esquerda $(g * H)_{g \in G}$

Pela propriedade já mencionado de que a multiplicação por um elemento do grupo é uma permutação, estas duas classes, à direita ou à esquerda são duas partições de G . e como

$$f(g * H) = f(g) * f(H) = f(g); f(H * g) = f(H) * f(g) = f(g) \quad (57)$$

porque a unidade comuta com todos os elementos, isto faz com que as classes laterais à esquerda coincidam com as classes à direita. As classes são as classes definidas por f como função e as classes à esquerda coincidem com as classes à direita:

$$(\forall g) (H * g = g * H) \quad (58)$$

o subgrupo H é normal e há um único sistema de classes.

q.e.d.

- **teorema de Lagrange para grupos** estabelece que a ordem dum subgrupo divide a ordem do grupo, para grupo finitos. O teorema tem uma extensão para grupos não finitos. Confira **Lagrange, teorema para grupos**.

O teorema é ua consequência simples do fato de que a tabela dum grupo finito é permutada quando seus elementos são multiplicados por qualquer elemento do grupo. Em outras palavras, cada elemento dum grupo atua como permutação sobre o grupo. Assim, se H for um subconjunto dum grupo G então os conjuntos $(gH)_{g \in G}$ são equipotentes, tem a mesma cardinalidade, o que também vale para um subgrupo H , então, se H for um subgrupo de G então $|H| \mid |G|$, a ordem de H divide a ordem de G .

Uma importante aplicação se dá quando H for um subgrupo normal de G então G/H é o grupo das classes quocientes de G por H e agora esta afirmação não está restrita aos grupos finitos mas perde sentido a afirmação de divisão da ordem.

Se H não for normal, $(gH)_{g \in G}$ é uma partição de G em classes equipotentes.

Uma consequência do teorema de Lagrange é que se um grupo G tiver como ordem um número primo, ele tem que ser cíclico. Porque, qualquer elemento dum grupo gera um subgrupo H e consequentemente $H = G$ ou $H = \{e\}$ em que e é o elemento neutro. Então qualquer elemento, diferente do elemento neutro, gera G que assim é o conjuntos das potências de qualquer elemento diferente do elemento neutro.

Um elemento de ordem p , um número primo, é um gerador dum subgrupo H ; $|H| = p$ do grupo G e então $|p| \mid |G|$. Esta propriedade leva a um resultado interessante. Considere num grupo finito G os elementos de ordem p , um número primo, então ele gera um subgrupo de H de G de ordem $p - 1$

$$H = \{1 = a^p, a, \dots, a^{p-1}\} \quad (59)$$

e qualquer outro elemento de G com ordem p , um número primo, vai gerar um subgrupo de ordem $p - 1$. Este resultado pode ser traduzido dizendo-se que num grupo G finito qualquer, a quantidade de elementos de ordem p , um número primo, é divisível por $p - 1$.

Este resultado lembra um teorema de Cauchy, Considere um divisor primo, p , da ordem de G , então G tem um elemento de ordem p , portanto um subgrupo de ordem p . Confira os *subgrupos de Sylow* dum subgrupo.

Conceitos relacionados:

- Grupo cíclico.
- *grupos de Sylow*
- Ordem dum grupo finito.

- **teorema de Stokes,**

Confira *Stokes, teorema de*, para a demonstração.

- **teorema de existência e unicidade** é um teorema da teoria das equações diferenciais ordinárias que garante a existência de soluções sob certas condições. Existe uma generalização desta teorema chamado *teorema de Picard*, confira. Confira também o verbete **equação diferencial** para um visão mais ampla sobre estas equações.

A ideia geométrica do teorema de existência e unicidade está apresentada na figura (fig. 8), página 15, e

$$y' = f(x,y)$$

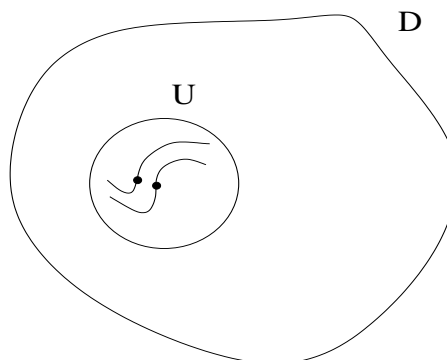


Figura 8: existência e unicidade da solução

confira também a figura (fig. 9) que tenta, com uma situação diferente, mostrar a importância das hipóteses do teorema.

Marcamos as soluções das equações diferenciais ordinárias com um ponto por onde passa uma *órbita* que é o nome que se dá às curvas solução. Este ponto é a condição inicial, confira também o verbete **equação diferencial**.

O teorema de existência e unicidade garante que por um ponto dado passa uma única solução, mas existem singularidades . . .

Num domínio \mathcal{D} em que a função f seja contínua e de classe \mathcal{C}^1 com respeito à variável y , se tem a unicidade das soluções:

Teorema 4 (de existência) e unicidade das EDOs

Dada uma equação diferencial ordinária $y' = f(x, y)$ tal que num domínio \mathcal{D} a função f seja contínua e de classe C^1 com respeito à variável y , então em cada condição inicial $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ passa uma única curva solução. **Dem:**

Suponha que hajam duas curvas solução passando numa condição inicial $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Então $y'(x_0)$ estaria indefinida o que contradiz o conceito de função porque f teria dois valores no ponto (x_0, y_0) . É aqui que entra a continuidade da derivada com respeito à y , num tal ponto há um salto na $\frac{\partial f}{\partial y}$ que deixa de ser contínua.

Se deduz daí, considerando a recíproca lógica, que a hipótese f seja de classe C^1 com respeito à variável y , implica na unicidade da curva solução na condição inicial $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

q.e.d.

Nada se pode dizer para domínios muito extensos, fora do domínio \mathcal{D} pode haver um ponto em que passe uma infinidade de soluções de uma equação diferencial, são pontos singulares, ou como se diz com maior frequência, *singularidades*, como pode ser vista na figura (fig. 9), página 16,

uma singularidade em ODE

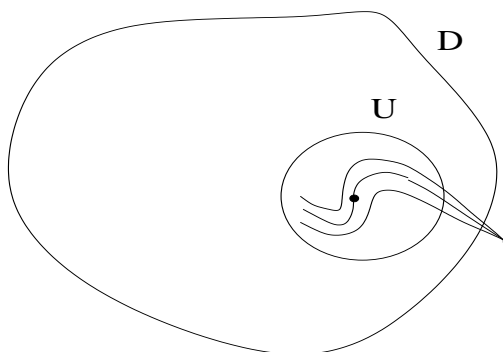


Figura 9: uma singularidade em ODE

E o estudo das singularidades é um tópico central da teoria das equações diferenciais ordinárias.

- **teorema espectral** É a generalização, na teoria dos operadores, do sistema de valores próprios e vetores próprios da Álgebra Linear no sentido de que um operador, T definido num espaço medido de funções, tem uma representação sob forma de integral num certo domínio Ω pode ser reparametrizado (mudança de variável) para ser representado como uma integral sob um domínio $spec(T)$ de tal modo que

$$T(f) = \int_{spec(T)} x d\mu(x) \quad (60)$$

a integral da função identidade deste espaço de funções. Isto é a forma como se consegue colocar uma matriz diagonalizada usando os seus vetores próprios como base para o espaço vetorial. No caso das matrizes aparecem os valores próprios como multiplicadores do vetores próprios que representam a escala do operador na direção de cada um dos vetores próprios, aqui, é a medida do espaço que faz este papel “distribuindo” a massa no espaço. Desta forma a medida é definida no espaço por T . A transformada de Fourier é um

exemplo de aplicação do teorema espectral e portanto uma versão da transformada de Gelfand. O operador linear definido na equação (60) se chama *operador integral*.

- **distribuição** um conceito da Análise Funcional que representa a linguagem básica das teorias das equações diferenciais parciais, EDP. Confira também *distribuição*, um conceito da Estatística.

Em 1945, aproximadamente, Laurent Schwartz, um matemático francês, conseguiu sintetizar, simultaneamente com um matemático português, Sebastião e Silva, a Teoria das¹ Distribuições, resolvendo uma situação incômoda criada pelo físico Paul Adrien Maurice Dirac, que, ao formular a *mecânica quântica* precisou de criar uma unidade para o produto de convolução que tinha que ser uma função nula em todos os pontos da reta, exceto na origem onde seria infinita, e com integral igual a 1, que durante muito tempo se chamou de “função de Dirac”.

A *função de Dirac*, com esta propriedades, não pode ser uma função sem colocar em cheque todas as teorias de integração existentes, mas Dirac respondia que isto não era seu problema, que os matemáticos corrigissem as teorias de integração porque para ele tudo funcionava perfeitamente bem.

A descoberta de Schwartz e de Sebastião e Silva, ambos pesquisadores de equações diferenciais parciais, resolveu o problema criado por Dirac criando um novo objeto matemático, a *distribuição* mostrando que a chamada *função de Dirac*, é uma distribuição que é a derivada da função de Rademacher H_0 , a função que é zero se $x \leq 0$ e 1 se $x > 0$

$$H_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (61)$$

No seu livro intitulado *Téorie des Distributions*, Laurent Schwartz, construiu uma generalização do Cálculo Diferencial e Integral usando as distribuições como elemento em lugar das funções e é em função deste livro que o trabalho de Sebastião e Silva ficou na sombra durante muito tempo.

Embora Laurent Schwartz tenha durante algum tempo carregado sozinho os louros da construção da teoria, e possivelmente ele tenha sido o “inventor” do nome, a ideia já estava latente desde o século 19 e a teoria recupera nomes como de Cauchy que já havia pensado em um objeto que atuasse sobre classes de funções, uma distribuição é um funcional linear, criando uma distribuição chamada *valor principal* que era o nome que Cauchy dava um certo de integral que não teria sentido usual de uma integral e que, como a “função de Dirac”, encontrou um lugar preciso dentro da teoria das distribuições.

A teoria das distribuições, durante algum tempo eletrizou todas as atenções dos que estudavam equações diferenciais parciais porque parece que se havia descoberto a teoria final... não foi, mas marcou profundamente toda a linguagem com que se falam hoje as equações diferenciais parciais, criando uma forma nova de resolvê-las, as *soluções fracas* que é uma solução do tipo distribuições.

- **grupo** É uma das estruturas algébricas da Matemática.

Definição 1 (grupo) $(G, *)$

Considere G um conjunto no qual esteja definida uma relação binária $*$ tal que

$$(\forall a, b \in G) a * b \in G \quad (62)$$

$$(\forall a, b, c \in G) a * (b * c) = (a * b) * c; \quad (63)$$

$$(\exists! e \in G) (\forall a \in G) a * e = e * a = a \quad (64)$$

$$(\forall a \in G) (\exists! b \in G) a * b = b * a = e; \quad (65)$$

¹Uma distribuição é também chamada de *função generalizada* e esta denominação remonta a Euler, Cauchy e outros.

Então $(G, *)$ é um grupo. A equação (62) significa que G é fechado para a relação binária $*$, que frequentemente se chama de operação. A equação (63) é a propriedade associativa que permite iterar a relação binária $*$. A equação (64) afirma que existe um elemento neutro relativamente a relação binária $*$. A equação (65) afirma que em G existe um elemento inverso para todos os elementos de G .

Com frequência os autores usam uma frase mais simples dizendo apenas "G é um grupo" quando é possível deixar implícito qual é a relação binária que está definida em G .

Vou usar na continuação a notação multiplicativa para a operação de G implicando na suposição de que G não é comutativo, como se faz usualmente. Quando um grupo for comutativo o hábito é indicar sua operação com o sinal de adição.

Exemplo 1 (Exemplos) Grupo Cada item desta lista de exemplos deverá aparecer como entrada própria no dicionário

1. O grupo dos inteiros, \mathbf{Z} com a operação adição, tem as quatro propriedades acima e mais uma quinta propriedade, a comutatividade: $x + y = y + x$ para quaisquer elementos $x, y \in \mathbf{Z}$ criando a categoria dos grupos comutativos. O próximo exemplo é dum grupo comutativo consequência de que a adição seja comutativa no conjunto dos inteiros. Quando um grupo for comutativo, ele é comumente chamado de abeliano.
2. da classe dos restos O grupo \mathbf{Z}_n da classe dos restos na divisão pelo inteiro positivo n , $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Este é um exemplo bem interessante, estou falando, da operação de adição de restos relativamente à operação de divisão do conjunto dos inteiros.
3. quando p for primo Os grupos, aditivos, \mathbf{Z}_p da classe dos restos na divisão pelo inteiro positivo p , e excluindo o zero, o grupo multiplicativo \mathbf{Z}_p^* . Na verdade este último é isomorfo ao grupo aditivo \mathbf{Z}_{p-1} , mas tem valor por si próprios uma vez que $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$ é um corpo.
4. \mathbf{S}^1 dos números complexos de módulo 1, o círculo trigonométrico, com a multiplicação é um grupo comutativo. Confira também a fórmula de Euler.
5. $\text{Sim}(n)$ o conjunto das funções bijetivas dum conjunto com n elementos nele mesmo. Uma tal função é uma permutação do domínio e estas funções bijetivas são as permutações do domínio e a notação $\text{Sim}(n)$ é padrão para referência a este tipo de grupos e todos, com exceção de $\text{Sim}(2)$, que tem apenas dois elementos e assim tem que ser comutativo, são grupos não comutativos. Confira $\text{Sim}(n)$.

O axioma expresso na equação (62) estabelece a existência de uma relação binária, $*$, e que G é fechado para a mesma. A equação (63) estabelece que $*$ é associativa. A equação (64) estabelece que para a operação $*$ existe um único elemento de G , chamado *identidade* e aqui designado com o símbolo e . A equação (65) estabelece a existência de um *inverso* para todo elemento de G relativamente à operação $*$.

A equação (65) também garante a existência de dois tipos de bijeção: para cada elemento $x \in G$, de uma solução única para a equação $x * b = e$ cuja demonstração é consequência das equações:

$$x \mapsto b * x \text{ é uma bijeção de } G; \quad (66)$$

$$x \mapsto x * c \text{ é uma bijeção de } G; \quad (67)$$

As duas propriedades nas equações (66), (67), transformam as linhas ou as colunas da tabela do grupo G , quando G for finito, em permutações do grupo, o que segue válido quando G não for finito, apenas não posso mais falar na *tabela do grupo*.

1. A sentença na equação (66) é verdadeira porque, por absurdo, falhando a sobrejetividade, $b*x = c$ não teria solução para algum elemento de G mas como b tem inverso chega-se ao absurdo: $x = b^{-1} * c$. Falhando a injetividade haveria duas soluções para $b * x = c$ o que contradiz a unicidade do inverso.
2. A sentença na equação (67) tem uma demonstração simétrica.

Estas duas equações (66) (67), implicam na existência de bijeções obtidas na multiplicação por um elemento fixo, à direita ou à esquerda. Uma das formas de trabalhar com grupos finitos consiste em analisar as tabelas operatórias, estas bijeções tem um efeito importante: em cada coluna ou linha da tabela se tem a presença de todos os elementos de G , (sobrejetividade) sem repetição (injetividade).

Uma outra forma de parafrasear a sentença acima é a seguinte: As equações (66) e (67), têm uma importância particular: elas criam permutações dos elementos de G indexadas pelo elemento multiplicador. Se G for finito a quantidade de tais permutações é $n = \text{card}(G) = \text{ordem}(G)$. Se $n > 2$ estas permutações formam um subconjunto próprio de todas as permutações dos elementos de G . Entenda,

Os operadores
multiplicação e
translação aparecem
em praticamente
todas as estruturas
em Matemática.

$$G \ni g \mapsto g \in \text{Sim}(n); g : G \ni h \mapsto gh \in G; n = |G| \text{ ordem de } G; \quad (68)$$

em que na equação estou identificando $g \in G$ com uma permutação dum conjunto com $n = \text{card}(G)$ elementos. Desta forma $G \subset \text{Sim}(n)$ com $n = \text{card}(G)$. É a *representação* de G no grupo $\text{Sim}(n)$.

Interpretando G como um conjunto, como as permutações são bijeções de G , portanto funções inversíveis cuja composição é outra permutação, então o conjunto das permutações de G tem também a estrutura de grupo designado com o símbolo $\text{Sim}(n)$ e a indexação mencionada acima identifica G como um subconjunto de $\text{Sim}(n)$.

Isto sugere pensar em *subgrupo*.

Definição 2 (subgrupo) Se $H \subset G$ for fechado para a transformação

$$(x, y) \in H \times H \mapsto x * y^{-1} \quad (69)$$

então $(H, *)$ é também um grupo, e se diz que H é subgrupo de G .

Em particular a equação (69) vale para G que é então um subgrupo de si próprio. Se H for subgrupo de G , diferente de G , se caracteriza isto dizendo que H é um *subgrupo próprio* de G .

Também posso usar a equação (69) considerando G como subconjunto de $\text{Sim}(n); n = \text{card}(G)$ o que prova que G pode ser identificado como um subgrupo das permutações de G .

Consequentemente, se vão encontrar *todos os grupos finitos* dentro dos *grupos de permutações*. A afirmação segue válida para grupos não finitos? Parece-me que não, não teria sentido em falar-se duma *permutação dum conjunto infinito de elementos* embora tenha sentido falar-se em *reordenação* dum conjunto infinito. Se G for um grupo infinito e $g \in G$ então gG é uma permutação de G que igual a G .

Há diversos desenvolvimentos que podem seguir esta trilha, num deles se associa ao grupo das matrizes quadradas inversíveis de ordem n (entradas reais, complexas ...) com a operação de multiplicação de matrizes, este é um grupo multiplicativo de matrizes que não é comutativo. As permutações das colunas da matriz identidade de ordem n produz uma imagem matricial de $\text{Sim}(n)$. O resultado é a *teoria da representação de grupos finitos*, com uso em codificação, por exemplo.

Existe interesse em considerar G como um subgrupo de si mesmo, em alguns problemas se consegue realçar propriedades significativas com auxílio da transformação $h : x \mapsto a * x * a^{-1}$, chamada *conjugação*, quando se considera um elemento fixo $a \in G$. Por exemplo, é possível descobrir pares de subgrupos que tem as mesmas propriedades, subgrupos conjugados e isomorfos. A conjugação é um endomorfismo de G .

Uma outra transformação importante é *inversão*

$$x \in G \mapsto x^{-1} \quad (70)$$

que é uma bijeção de G preservando todas as propriedades (62)-(65). Esta função é uma “reparametrização” de G sendo um *endomorfismo de G* .

Se G for *abeliano*, identificando sua operação com a adição, o conjunto de todos os *endomorfismo de G* tem naturalmente a estrutura de anel e posso identificar G como subconjunto deste anel. Notação: $End(G)$ é o anel de todos os endomorfismo de G em que a adição é definida ponto-a-ponto e a multiplicação é a composição de morfismos: $(End(G), +, o)$.

Existe um endomorfismo considerado *canônico* de G que é construído da seguinte forma.

- Considere a permutação dos elementos de G que equivale a multiplicação de G por um elemento dado $g \in G$

$$\phi_g \in (End(G); \phi_g(x) = xg; \quad (71)$$

- e obviamente também

$${}_g\phi \in (End(G); {}_g\phi(x) = gx; \quad (72)$$

- cabe discutir quando ${}_g\phi = \phi_g$ o que leva à definição de *centro*(G), que é o subgrupo de G dos elementos que comutam com todos os elementos de G . Mostro isto logo em seguida. Então as permutações de G são morfismo de grupo de G quando obtidas via um elemento do *centro*(G).

Mas ao definir-se

$$\phi \in End(G); \phi(x) = g^{-1}xg \quad (73)$$

então tem-se o endomorfismo canônico de G , sendo um simples cálculo a verificação de que valem as propriedades dos morfismo de grupo para ϕ .

Então, dado um elemento $g \in G$ ele identifica um endomorfismo de G , o endomorfismo canônico de G , dado pela equação (eq.73) e assim vemos uma imersão de G no anel $(End(G), +, o)$ o que produz o resultado surpreendente de que a estrutura de anel pode substituir em simplicidade a estrutura de grupo uma vez que todo grupo se identifica canonicamente com um anel.

Um questão que se pode levantar neste contexto é se a imagem de G seria o centro de $End(G)$ e a resposta é não o que aliás mostra que esta imersão preserva uma propriedade importante de G porque a imagem do centro de G está estritamente contida no centro de $End(G)$.

$$\phi(Z(G)) \subset Z(End(G)); \phi \text{ um endomorfismo de } G; \quad (74)$$

$$g \in Z(G) \phi_g \in End(G), \psi \in End(G); \quad (75)$$

$$(\phi_g o \psi)z = g\psi(z) = \psi(gz) = \psi(zg) = (\psi o \phi_g)(z); \quad (76)$$

$$\phi_g o \psi = \psi o \phi_g; \quad (77)$$

Centro dum grupo $Z(G)$

O centro dum grupo G é o conjunto dos elementos de G que comutam com todos os outros elementos. notação: $Z(G) \subset G$. Suponha que $x \in Z(G)$ então

$$x \in Z(G) \Rightarrow (\forall y \in G xy = gy; xyx^{-1} = y; \quad (78)$$

$$x^{-1}z = (z^{-1}x)^{-1} = (xz^{-1})^{-1} = zx^{-1}; x \in Z(G) \Rightarrow x^{-1} \in Z(G); \quad (79)$$

$$((xy)z)^{-1} = z^{-1}(xy)^{-1} = (z(xy))^{-1} \Rightarrow xy \in Z(G); \quad (80)$$

$$x, y \in Z(G) xy^{-1}z = xzy^{-1} = zxy^{-1} \Rightarrow xy^{-1} \in Z(G); \quad (81)$$

A equação (eq.78) formaliza a definição de centro dum grupo.

A equação (eq.79) conclui que o inverso dum elemento do centro também está no centro.

A equação (eq.80) mostra que $Z(G)$ é fechado para o produto, usando que o inverso é único. Ela usa a unicidade do inverso.

A equação (eq.81) usa um teorema da teoria dos grupos que caracteriza quando um subconjunto dum grupo é um subgrupo para mostrar que $Z(G)$ é um subgrupo de G . que garante que o subconjunto, $Z(G)$ seja um subgrupo de G quando for fechado para a operação do grupo, e é o caso de $Z(G)$.

Confira também *álgebra de grupo* que é uma álgebra de elementos indexados sobre um grupo G , *grupos especiais* que são grupos produzidos a partir dum anel com unidade, o grupo geral linear GL_n e SL_n .

Conceitos relacionados:

Uma lista pequena que penso atualizar em breve, porque, junto com a *teoria da probabilidades*, possivelmente a *teoria dos grupos* são as duas teorias mais *invasivas* da Matemática.

- Classes de equivalência módulo um subgrupo. Se H for um subgrupo do grupo G então se pode *particionar* G com as translações $gH|_{g \in G}$. A expressão não é única pois para todo $g \in H$ resulta em H mas os distintos elementos forma uma partição de G que se chamam classes laterais, neste caso *classes laterais à esquerda* porque eu escolhi multiplicar à esquerda. Elas podem ser as *classes laterais à direita*, mas em geral em me recuso a usar este tipo de *classes laterais*...
- Classes de equivalência módulo um subgrupo. Se H for um subgrupo do grupo G então

$$gh^{-1} \in H \text{ define a relação de equivalência } g \equiv h; \quad (82)$$

em G módulo H .

Primeiro que tudo é esta relação é trivialmente uma *relação de equivalência* uma vez g opera sobre o grupo G como uma *permutação*, $(gH)_{g \in G}$ e produz a *partição* de G com repetições da classes que são as *classes laterais*, as “*translações de*” de H . Por exemplo, $gH = H$ quando $g \in H$. Resta verificar se esta relação de equivalência é compatível com operação do grupo:

$$G = sim(3) = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}; H = \{I, (12)\}; \quad (83)$$

$$(13)H = \{(13), (132)\}; (123)H = \{(123), (23)\} = (23)H; \quad (84)$$

$$(13)(23)H = (123)H = \{(123), (23)\}; \quad (85)$$

$$(13)H(23)H = \{(13)(123), (13)(23), (132)(123), (132)(23)\} = \{(123), I, (12)\}; \quad (86)$$

$$(13)(23)H = \{(123), (23)\} \neq (13)H(23)H; \quad (87)$$

é um exemplo que mostra que não é verdade:

$$xyH = xHyH$$

Esta propriedade vale para subgrupos normais o que permite formar o grupo quociente por um grupo normal.

Se H for um *subgrupo normal* então $gH = Hg$, quer dizer que as classes laterais à esquerda e à direita coincidem e neste caso H é o núcleo dum morfismo de grupo que pode ser fatorado usando o grupo quociente G/H .

- subgrupo normal dum grupo.

- exemplos de grupos.

- **teoria da representação** vou apresentar a aqui a teoria da representação dos grupos e as ideias aqui descritas podem ser expandidas de diversas formas, como a *representação de álgebras*.

A teoria da representação é antiga mas adquiriu grande importância recentemente porque hoje temos programas que fazem álgebra linear que é a ideia básica da teoria da representação linear dos grupos, *transformar grupos em grupos de matrizes*, de que vou tratar aqui.

Antes de ler a definição que é uma peça abstrata, você pode saltar algumas linhas e ler o primeiro exemplo e talvez assim você venha a absorver melhor a definição, escolha o seu caminho.

Definição 3 (representação) linear de um grupo

Sejam G um grupo, um espaço vetorial V , e um isomorfismo de grupos

$$\phi : G \rightarrow GL(V); \quad (88)$$

em que $GL(V)$ é o grupo linear de V , quer dizer, o grupo das matrizes não singulares de V . $GL(V)$ é um grupo multiplicativo e não abeliano portanto se G for um grupo abeliano eu vou esquecer a propriedade comutativa no isomorfismo de grupos ϕ .

Então eu vou aqui pensar em G como um grupo não comutativo o que torna mais homogênea a linguagem porque o grupo $GL(V)$ é um grupo multiplicativo de matrizes, e a notação $GL(V)$ é típica para o grupo das matrizes não singulares que é um grupo multiplicativo, então para uniformizar a notação vou chamar a operação de G de multiplicação contrariando o hábito de usar adição para grupos comutativos porque aqui a comutatividade não interessa.

Exemplo 2 (representação) linear dum grupo finito. Considere $|G| = n$, $V = \mathbb{C}^n$, e a matriz identidade I como função linear de

$$I : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n; \quad (89)$$

Lembrando que todo elemento $g \in G$ representa uma permutação dos elementos de G quando considerados como uma operação sobre G , por exemplo, qualquer linha ou coluna da tabela do grupo G é uma permutação de G produzida pelo elemento que se encontra definindo a linha ou coluna. Nesta forma de pensar $g \in G$ é uma permutação σ de n elementos que vou designar como σ_g e posso aplicar esta permutação às colunas I obtendo n matrizes diferentes, $(I_{\sigma_g})_{g \in G}$. Defini assim uma aplicação injetiva de G num subconjunto da matrizes inversíveis definidas em \mathbb{C}^n .

Na continuação eu vou usar notação simplificada I_g subentendendo que o elemento $g \in G$ representa a permutação σ_g .

Teorema 5 (representação) linear dum grupo finito A função

$$\phi : G \rightarrow GL(V); g \ni G \mapsto I_g \in GL(V) \quad (90)$$

define um isomorfismo de grupos de G num subgrupo de $GL(V)$.

Dem :

Chamando de “ e ” o elemento neutro de G então $I_e = I$. Dados $g, h \in G$

$$I_{gh^{-1}} = I_g I_h^{-1} = I_g I_h^{-1}; \quad (91)$$

O que mostra que $(I_g)_{g \in G}$ é um subgrupo do grupo das matrizes inversíveis de $GL(V)$ e a função ϕ é um morfismo de grupo cujo núcleo é $\{e\}$ portanto um isomorfismo de grupos. **q.e.d.**

O exemplo (ex. 2) também chama atenção para três questões que merecem ser tomadas separadamente.

- Dentro do grupo das matrizes inversíveis se encontra a imagem do grupo $Sim(n)$ que pode ser colocado em lugar G no exemplo (ex. 2). A cardinalidade do grupo das matrizes inversíveis é pelo menos a cardinalidade de \mathbf{N} , com certeza é outra classe de cardinalidade, compare com \mathbf{C} como espaço vetorial e então o grupo das matrizes inversíveis é $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ que tem a mesma cardinalidade de \mathbf{C} . $Sim(n)$ contém todos os grupos finitos de ordem menor ou igual a n portanto apenas $GL(V)$ pode conter todos os grupos finitos. Para alguns aspectos a pesquisa sobre grupos finitos pode ficar contida no grupo geral linear. O último exemplo mostra que a questão de cardinalidade mencionada acima indica que o conjunto muito mais amplo das matrizes inversíveis, relativamente ao $Sim(n)$ pode esconder dados importantes.
- Levanta também a questão sobre se a dimensão do espaço do espaço V ,

$$\dim(V) = m; m \leq n = |G|; \quad (92)$$

A dimensão de V não pode ser menor do que a ordem de G para ainda obter uma representação linear dum grupo de ordem n . Em outras palavras pode existir um espaço de dimensão $m \leq n$ na definição de representação do grupo G . O menor valor de m define uma representação irredutível de G .

- Outra questão que abre caminho para um desenvolvimento diferente é que eu selecionei uma matriz no espaço vetorial V sem especificar uma base e isto abre caminho para várias discussões uma das quais se pode colocar na forma seguinte em que os elementos de G sirvam como *indexadores* para uma base de V o que automaticamente determinaria uma dimensão para a representação de G que não precisaria ser a *mínima possível*. Nestes termos eu teria $|G| = n$, $V = \mathbf{C}^G$, e a matriz identidade I como função linear de

$$I : \mathbf{C}^G \rightarrow \mathbf{C}^G \approx \mathbf{C}^n; \quad (93)$$

agora identificando o espaço de dimensão n em cujo grupo linear estou fazendo a representação de G . Isto leva direto ao conceito de *álgebra de grupo*, porque é possível definir um *produto de convolução* em \mathbf{C}^G para definir a álgebra $(\mathbf{C}^G, +, *)$. Confira *álgebra de grupo*.

Exemplo 3 (uma representação) irredutível

Considere o grupo $G = Sim(n)$ que tem $n!$ elementos e o espaço $V = \mathbf{C}^n$ que tem dimensão

$$n < |G|; n > 2 \quad (94)$$

Com a notação do exemplo (ex. 2) ϕ é um isomorfismo de G no grupo das matrizes que se podem obter da identidade $n \times n$ permutando suas colunas de todas as maneiras possíveis.

Se por um lado o exemplo (ex. 3) mostra uma representação irredutível, entretanto ele não me dá uma resposta sobre se dada um grupo G de ordem n eu posso encontrar uma sua representação irredutível e nem qual seria o método para obtê-la sendo isto possível.

Exemplo 4 (Representação do grupo) \mathbf{Z}_p

\mathbf{Z}_p é um grupo comutativo o que não me impede de seguir com notação multiplicativa com que comecei a definir a representação dum grupo.

Na verdade a representação de grupos se dá com uma imagem em $GL(V)$ de um determinado espaço vetorial V , que é um grupo de matrizes as quais em geral não tem a propriedade comutativa. E isto tem um

interesse particular porque se eu estiver representando um grupo comutativo então estou selecionando um subgrupo de matrizes que é comutativo.

Seguindo a linha de raciocínio acima, eu vou considerar a matriz identidade $p \times p, I$, para aplicar às colunas de I as permutações $\sigma_g; g \in \mathbf{Z}_p$ que os elementos de \mathbf{Z}_p representam sobre um conjunto de p elementos o que me dá uma representação linear de \mathbf{Z}_p .

Eis a representação matricial de \mathbf{Z}_5 no formato para o octave

$$\begin{aligned} J0 &= [1, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0, 1]; \\ J1 &= [0, 1, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0, 1; 1, 0, 0, 0, 0]; \\ J2 &= [0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0, 1; 1, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0, 0]; \\ J3 &= [0, 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0, 1; 1, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0]; \\ J4 &= [0, 0, 0, 0, 1; 1, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0]; \end{aligned}$$

com que obtive

$$J4 * J1 = J0 = J2 * J3 = J3 * J2; J4 * J3 = J3 * J4; J3 * J1 = J4; \quad (95)$$

repetindo a tabela da adição de \mathbf{Z}_5 como era esperado.

Para obter esta representação. eu usei um editor que opera com blocos, escrevi a matriz identidade com um arranjo retangular, fiz as permutações circulares das colunas da matriz identidade. Depois editei, apagando os fins de linha, para obter a expressão compacta, por linhas, das matrizes. Seria igualmente fácil editar para obter a expressão do \LaTeX .

Se eu for representar \mathbf{Z}_5 em um espaço de dimensão n a menor dimensão que eu vou obter será 5 com $\mathbf{Z}_5 \subset \text{Sim}(5)$ e seria impossível, por este meio obter dimensão inferior porque $\mathbf{Z}_5 \not\subset \text{Sim}(4)$ ou $\text{Sim}(n); n \leq 4$.

Entretanto todos os \mathbf{Z}_p estão representados no círculo unitário como p -raízes da unidade que são matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} \cos(i\alpha) & \sin(i\alpha) \\ -\sin(i\alpha) & \cos(i\alpha) \end{pmatrix}; \alpha = \frac{2i\pi}{p}; i \in \{0, 1, \dots, p-1\}; \quad (96)$$

o que mostra que todos os \mathbf{Z}_p tem uma representação matricial em $GL(\mathbf{C})$, de dimensão 1, p é um número inteiro positivo qualquer.

O resultado do exemplo (ex. 4) fica completamente fora do contexto e tem o sabor dum resultado “achado” porque eu não pude expressar uma linha de raciocínio que chegasse nele. O exemplo (ex. 4) é um alerta para uma alternativa de espaço onde encontrar grupos finitos que podem ser isomorfos a grupos construídos por métodos geométricos, algébricos ou topológicos.

A representação de \mathbf{Z}_p no círculo unitário que correspondem às matrizes da equação (eq.96) se chamam $SU(p)$, da sigla em inglês, *grupos unitários especiais*. São as raízes p -complexas da unidade.

- **termodinâmica**, leis da, ver *leis da termodinâmica*.

- **Topologia** é uma das grandes divisões da Matemática.

A *Topologia* consiste na busca das estruturas que permitam a definição de funções contínuas, neste caminho se procurou “limpar” o caminho na busca de uma melhor compreensão do que seria uma *função contínua* se chegando a relação entre “abertos” e a imagem inversa de funções destes “abertos” como forma

de estabelecer o que é uma função contínua. A *continuidade* é então um conceito relativo à estrutura topológica que estiver definida entre dois espaços, se o espaço de saída for suficientemente rico de abertos então as funções nele definidas tem mais “chance” de serem contínuas, e reciprocamente, quanto mais “pobre” em abertos for o espaço de chegada, maior “chance” têm as funções, que nele tomem valor, de serem contínuas.

Entretanto existem topologias “usuais” que de uma certa forma já foram aprovadas por uma certa prática, ao reduzir a quantidade de abertos se “enfraquece” a topologia (porque se diminui as chances de que uma função, definida nesta topologia, seja contínua). Este processo de análise do enfraquecimento de topologias conduz à descoberta de propriedades interessantes de algumas funções ou classes de funções, é esta a pesquisa central na *Topologia*. Desta forma a *Topologia* é vista como uma pesquisa de estruturas, as estruturas topológicas dos espaços.

Há um outra forma de ver a *Topologia* como o estudo das propriedades locais de um espaço, independente (de certa forma) de funções definidas nele, mas na verdade analisando as funções definidas nele, nele mesmo, Em particular a identidade ou a inclusão em espaços de dimensão maior. Isto conduz a descoberta de objetos com formatos muito interessante e a chamada *conjectura de Poincaré* cai neste caso. Um exemplo entre os mais simples é a fita de Moebius que é o símbolo do IMPA.

- **transcendente, número** se ele não for algébrico sobre o anel dos números racionais, ou em outras palavras se ele não for um número real algébrico. Por exemplo sabemos, não é fácil demonstrar mas existem demonstrações de que π, e são números reais transcendentos, o que significa que eles não algébricos.

O conceito de transcendência pode ser colocado de forma mais geral, contexto da teoria dos anéis, e me permitir o enunciado dum problema interessante que *não sei se já foi resolvido*.

Considere o anel A como um subanel do anel B , $A \subset B$. Podemos então construir um outro anel

$$R = A[x_1, \dots, x_n]; \quad (97)$$

$$P \in R; P \text{ é um polinômio em } n \text{ variáveis sobre } A; \quad (98)$$

Então R é o anel dos polinômios em n variáveis sobre A . Se A for um corpo, então R é um espaço vetorial de dimensão n sobre A . Podemos definir um morfismo de anel de R em B fixando um elemento $b \in B$ e considerando o morfismo de avaliação:

$$R \xrightarrow{\phi} B; \phi(P) = P(b); \quad (99)$$

Se o $\ker(\phi) = \{0\}$, o núcleo trivial, então este morfismo é uma imersão de R em B , um isomorfismo de R num subanel de B , porque podemos identificar todo polinômio $P \in R$ com sua única imagem $P(b) = P(b_1, \dots, b_n) \in B$, e não haverá nenhum polinômio com coeficientes em A tal que $P(b_1, \dots, b_n) = 0$. Neste caso $\{b_1, \dots, b_n\}$ são independentes sobre A^2 .

O problema: não sei se π, e são independentes sobre \mathbb{Q} , ou ainda se há algum polinômio em duas variáveis, não identicamente nulo, P , tal que $P(e, \pi) = 0$.

Basta agora considerar a redação do problema para $n = 1$ e não existe nenhum polinômio que não seja identicamente nulo, tal que $P(e) = 0$ ou $P(\pi) = 0$ que significa: e, π são números transcendentos.

- **transformação linear** é um morfismo de espaços vetoriais o que significa que se

$$E, F \text{ são espaços vetoriais, } T : E \rightarrow F; \quad (100)$$

$$T(\lambda x + \beta y) = \lambda T(x) + \beta T(y); \quad (101)$$

²A leitora deve reconhecer que este é o caminho para definir a dimensão dum espaço vetorial.

para quaisquer que sejam os escalares, λ, β e os vetores $x, y \in E$. Os espaços vetoriais E, F sendo de dimensão finita, a teoria se confunde com a teoria das matrizes.

As matrizes são os exemplos mais comuns de *transformações lineares* definidas como operações sobre os vetores do espaço de saída. Confira *sistema linear e matriz*.

Um instrumento importante para as *transformações lineares* é o *núcleo*, $Ker(T)$ que é imagem inversa do zero

$$Ker(T) = T^{-1}(0); \tag{102}$$

Se os espaços vetoriais E, F sendo de dimensão finita, $Ker(T)$ é a solução da equação algébrica $det(T) = 0$, e a teoria se confunde com a teoria das matrizes quadradas.

Teorema 6 (núcleo) *duma transformação linear* Seja $T : E \rightarrow F$ uma transformação linear. Se $Ker(T) = \{0\}$ então T é injetiva e também contínua. **Dem**:

Tome $v, w \in F$ e $x = T^{-1}(v), y = T^{-1}(w)$ então $T(\lambda x - \beta y) = \lambda v - \beta w$ e se $v = w$ então $T(\lambda x - \beta y) = 0$ o que implica que $x = y$ portanto tenho

$$T(x) = T(y) \Rightarrow x = y \tag{103}$$

que é a definição de injetividade. Para transformações lineares, a continuidade equivale a que ela seja contínua na origem como mostra a seqüência de equações:

$$s_n \rightarrow a \Rightarrow T(s_n) \rightarrow T(a); \tag{104}$$

$$s_n - a \rightarrow 0 \Rightarrow T(s_n - a) \rightarrow T(0); \tag{105}$$

As equações (eq.104) e (eq.105) são equivalentes. **q.e.d.**

- **Transformada de Fourier** Traz o nome de Joseph Fourier que entre 1807 e 1822 escreveu alguns trabalhos publicados nos anais da Academia Francesa de Ciências sobre a propagação do calor usando somas de senos e cossenos *acelerados* e *amplificados* para aproximar as ondas térmicas conseguindo assim descrever com grande precisão a propagação do calor. Estas somas de senos e cossenos acelerados e amplificados, hoje chamadas de *séries de Fourier* [28, Fourier], já vinham sendo utilizadas por Euler e alguns dos irmãos Bernouilli na solução de equações diferenciais. O que marca a visão de Fourier é que ao usar *séries trigonométricas* ele observou que se tratava dum metodologia que tinha valor intrínseco e tendo ele inclusive feito uma afirmação muito generalista que se verificou depois que precisava ser corrigida ou colocada num contexto mais apropriado: *qualquer função periódica pode ser expressa como uma série de senos e cossenos*. Na figura (fig 10), página 26,

De onde se conclui que as funções podem ser combinação de funções pares e impares!

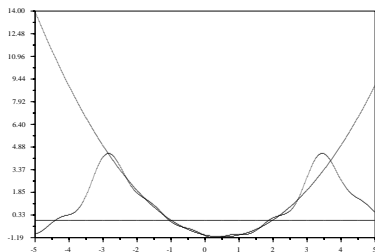


Figura 10:

nalmente se chegar às *wavelets* que se tornaram as substitutas dos polinômios trigonométricos nas telecomunicações.

você o gráfico dum parábola aproximada por um polinômio trigonométrico. Esta *aproximação* merece uma crítica que me vai permitir introduzir um pouco da história recente das pesquisas em Matemática.

Um polinômio trigonométrico é uma função periódica porque é uma soma de funções periódicas, então a aproximação se perde fora dum dos intervalos de periodicidade! Os polinômios trigonométricos foram, até a década de 60 do século 20, o método usado pelas telecomunicações, telefonia, e o erro que fica visível na figura (fig 10) era um problema que foi sucessivamente resolvido, primeiro, *enjanelando* a transformada de Fourier para fi-

multiplicando-a por uma função a suporte compacto.

Fourier apresentou seguidamente, à Academia Francesa de Ciências, as monografias *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* e *Théorie analytique de la chaleur*, tendo encontrado críticas uma vez que ele estava antecipando uma teoria que levaria mais cem anos para ser razoavelmente escrita, por exemplo, em 1922, Andrey Kolmogorov publicou o artigo “Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout” em que apresentou uma série trigonométrica divergindo em quase todos os pontos dum intervalo.

Pode-se dizer que Fourier estimulou cem anos de pesquisas que produziram grande parte do que hoje se chama de Análise Funcional. Em particular deixou evidente que a integração no sentido de Riemann é insuficiente para tratar das funções que podem ser escritas como séries de senos e cossenos conduzindo à criação da integral de Lebesgue. Desde os seus críticos, na Academia Francesa de Ciências, onde os seus dois trabalhos sobre a teoria do Calor foram recebidos com reservas, seguindo pelas naturais questões sobre convergência das séries trigonométricas, estes dois trabalhos de Fourier forçaram a Matemática a florescer em muitas direções.

Os predecessores de Fourier, Euler, os chamados *irmãos* Bernouilli, Jean le Rond d’Alembert, haviam percebido que combinações lineares de senos e cossenos aceleradas e amplificadas representam soluções de algumas equações diferenciais. Esta *percepção* terminaria sendo compreendida de uma forma que abriu caminhos significativos para a Álgebra Linear dentro do capítulo de *auto vetores*: os senos e cossenos acelerados eram os *auto vetores* de alguns *operadores diferenciais*, aqui, outra vez, uma outra forma de compreender as equações diferenciais. Os *auto vetores* também são chamados de *vetores próprios*. Neste contexto os coeficientes duma série trigonométrica são os *auto valores*, ou *valores próprios* dum operador linear cuja equação é a própria série trigonométrica e da qual os senos e cossenos acelerados,

$$\sin(kt), \cos(kt) \quad (106)$$

são os *auto vetores*. Os “coeficientes” de aceleração nada mais são dos que as frequência destas ondas, e não é por casualidade que eu escrevi os *auto vetores* como funções de t pensando no tempo, na equação (eq.106). Com frequência você vai encontrar a afirmação de a transformada discreta de Fourier transforma sinais *no domínio do tempo* nas suas imagens *no domínio da frequência*, representada na equação (eq.106) pela “variável” k .

As transformadas de Fourier (as séries ou a integral) reescrevem uma onda em termos das ondas mais simples, \sin , \cos que são assim os vetores próprios de um subespaço (medido) de funções sendo os coeficientes desta transformação os valores próprios que caracterizam uma determinada equação diferencial que esteja sendo estudada.

Desta forma a *transformada de Fourier* põe em correspondência dois tipos de espaços:

- um espaço em que os objetos são funções do tempo : $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$.
- e cuja imagem está no espaço das frequências, $\hat{f} = (a_k, b_k)_{k=0, \dots, \infty}$.

que são as duas variáveis desta transformada. As variáveis, na imagem, são índices da sucessão dos coeficientes de Fourier. Nesta forma de ver se está trabalhando com espaços vetoriais de dimensão infinita o que, por um lado, abre uma vasta gama de espaços e ao mesmo tempo confina os objetos em espaços específicos onde é possível falar de convergência das séries de forma apropriada. Confira os espaços de Lebesgue $l^p(\mathbf{N})$, $L^p([0, 2\pi])$.

Há duas formas de definir a transformada de Fourier, a discreta que é esta que acabei de descrever, e a

contínua em que aparece a *integral de Fourier*

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(-x) + if(x) \sin(-x) dx; \quad (107)$$

$$\hat{f} = (a_k, b_k)_{k=0, \dots, \infty}; a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) dx; b_k = \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) dx; \quad (108)$$

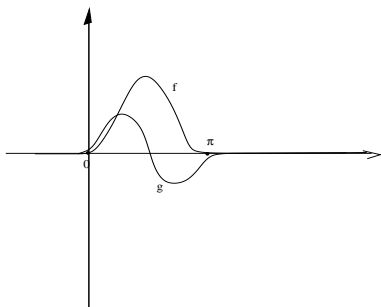


Figura 11: f é um sinal positivo

tipo dos *sinais* que aparecem na figura (fig. 11), página 28 onde você pode ver dois exemplos de “*sinais*”, um positivo e outro que não é positivo, ambos se anulando fora dum intervalo compacto. É óbvio que o som se propaga indefinidamente e não seria uma *função a suporte compacto*, mas do ponto de vista de quem o escuta, sim, é uma *função à suporte compacto* cujas imagens aparecem na figura (fig. 11) e o que interessa, para as comunicações, é aquilo que você fala, vê ou ouve. É o que interessa na transmissão. Experimente o programa [13, `fourier.gnuplot`], observando que ele é um *programa didático* que faz acontecer *alguma coisa* para ser discutida em sala de aula.

Até a metade do século passado, as transformadas discretas de Fourier foram o instrumento central das telecomunicações e por razões óbvias: *elas são as ondas magnéticas básicas*, a codificação natural para expressar um fenômeno eletromagnético. Desde a década de 50, entretanto, começou uma revolução que encontrou o seu ponto alto na década de 80 quando as *wavelets* destronaram as transformadas discretas de Fourier no uso das comunicações e em muitas outras aplicações. Mas, em essência a ideia é a mesma, apenas mudou o tipo de onda. . . Uma das responsáveis por esta transição é uma mulher, Ingrid Daubechies, que descobriu uma *wavelet* que é bem adequada para o ouvido humano.

Esta história não aconteceu de repente, primeiro houve uma tentativa de *enjanelar* os sinais multiplicando-os por uma função que os cortassem fora dum intervalo compacto para melhor o resultado nas transmissões, daí à invenção da *wavelets* foi um passo. Confira *wavelets*.

Alguns tópicos foram mencionados em que houve pesquisa matemática como consequência da teoria do calor de Fourier, cada um deles corresponde a centenas de livros escritos. Vou terminar esta breve descrição com algumas destas consequências. Confira cada um deles, em outro local do dicionário.

- Observe que na integral de Cauchy apareceu a fórmula de Euler, ela também pode aparecer na integral discreta de Cauchy transformando o espaço de frequência de \mathbf{N} para \mathbf{Z} . Basta para isto forçar a fórmula dos coeficientes da série de trigonométrica para que apareça a fórmula de Euler. Deixo o trabalho para a leitora curiosa, e afinal basta uma pesquisa em volta do assunto para encontrar a fórmula pronta.

e na equação (eq.108) eu escrevi a fórmula para o cálculo dos coeficientes da série de Fourier. Da mesma forma como a série que aparece na equação da transformada discreta, na equação (eq.108), a integral que define a transformada contínua, usualmente chamada de transformada integral, força a uma discussão sobre convergência: quando e para que funções as equações (eq.107) (eq.108) estão definidas. No caso da transformada discreta esta questão é menos dramática, basta que f seja integrável e as equações de a_k, b_k estão bem definidas. E isto foi essencial para as comunicações em que f é um sinal sonoro que se anula fora dum intervalo compacto, alguma coisa do

ou qualquer onde de energia.

- Uma das consequências do salto mencionado no item anterior é que agora a *transformada discreta* de Fourier relaciona dois grupos: \mathbf{Z} , das frequências, e do tempo $[0, 2\pi)$. O segundo grupo é isomorfo ao grupo \mathbf{S}^1 dos complexos de módulo 1, é a razão do uso do intervalo aberto. Também deixo os detalhes para a leitora curiosa que se não quiser construir a teoria vai poder encontrá-la num dos muitos livros em que a transformada de Fourier é encontrada, ou na [28].
- O melhor mesmo é que os coeficientes de Fourier podem ser definidos para um grupo comutativo qualquer onde eles assumem a identidade de *caracteres* do grupo o que dá uma outra teoria dentro da teoria dos grupos. Os detalhes ficam também para leitora curiosa... e tem um livro do Rudin exclusivamente sobre este assunto, e ele não é o único autor que se dedicou a teoria dos caracteres dos grupos.
- As wavelets são outra teoria copiada da teoria das séries trigonométricas, com as séries de wavelets em seu lugar. O que se fazia com as séries trigonométricas, hoje se faz, também, com as séries wavelets.

- **transformada de Laplace** é um operador linear definido no espaço das funções integráveis na reta tomando valores no espaço das funções complexas

$$\mathbf{C} \ni s \mapsto F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \in \mathbf{C} \quad (109)$$

- **triângulos semelhantes**, é uma relação de equivalência entre triângulos da Geometria Euclidiana. Como um triângulo é uma figura plana, se trata dum problema do plano.

Teorema 7 (semelhança de) triângulos

Todos os triângulos do plano tem uma representação semelhante no círculo trigonométrico.

Dem:

Considere que qualquer diâmetro divide o círculo trigonométrico em duas semiesferas então

- *todos os triângulos retângulos correspondem a um triângulo inscrito tal a hipotenusa coincida com o diâmetro e o terceiro vértice fique no arco do círculo trigonométrico $[0, \frac{\pi}{2})$. O intervalo é aberto porque o ponto $\frac{\pi}{2}$ iria repetir a classe do zero.*
- *todos os triângulos acutângulos correspondem a um triângulo com um dos vértices em zero, o outro fique no arco do círculo trigonométrico $[0, \frac{\pi}{2})$ e o terceiro seja um ponto médio do segmento do diâmetro $[0, -\pi)$. Observe que 0 é um ponto médio.*
- *todos os triângulos obtusângulos correspondem a triângulos em que um dos lado é o diâmetro da esfera \mathbf{S}^1 e o terceiro vértice esteja estritamente contido no primeiro quadrante de \mathbf{S}^1 excluída a fronteira, porque se estiver sobre a fronteira é um triângulo retângulo.*

Observe que apenas os representantes do triângulos retângulos são triângulos inscritos em \mathbf{S}^1 , as duas outras classes serão de triângulos sub-inscritos por que um dos vértices não estará na fronteira de \mathbf{S}^1 .

q.e.d.

Este teorema é obviamente um “*teorema de existência*”, porque não é construtivo. O método para obter um representante para um determinado triângulo consiste em obter uma sucessão de triângulos que se aproximem da imagem desejada.

Confira a figura (fig 12), página 30,

Entretanto o teorema 7 omite um fato importante que é a multiplicidade das representações. Mas é possível obter um único representante para cada triângulo do plano observando que a imagem dos triângulos isósceles é exatamente a que se obtém usando como vértice o ponto obtido com a perpendicular à corda

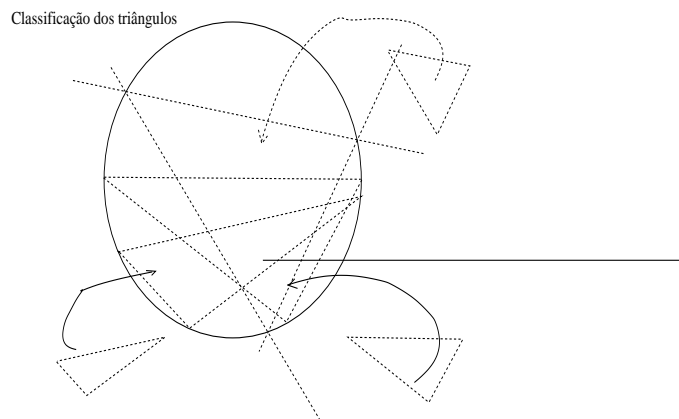


Figura 12: Representação dos triângulos em S

mencionada acima. Vou então introduzir uma linguagem que vai me levar de forma simples ao conjunto quociente desta relação.

Para encontrar a representação dum triângulo dado, selecione uma corda, e aqui começa a pluralidade de representações pois é possível escolher a corda de muitas maneiras. Então, no círculo trigonométrico, S^1 que existe uma infinidade de triângulos semelhantes a um dado triângulo do plano inscrito num círculo.

Vou expor uma forma de selecionar as distintas classes de equivalência para finalmente encontrar uma forma simples de representação dum triângulo no círculo trigonométrico S^1 .

Para justificar a linguagem, vou seguir mostrando a pluralidade e como contorná-la.

- aos triângulos retângulos correspondem à corda coincidindo com o diâmetro, e assim definindo dois vértices, que são pontos *antípodas* do círculo, ficando o terceiro vértice em uma das semiesferas em que o diâmetro divide o círculo trigonométrico. Temos assim duas possibilidades para escolher ou para eliminar uma delas.

Se o triângulo for isósceles, as duas imagens que lhe correspondem serão encontradas selecionando o terceiro vértice nos pontos em que a corda vertical ao diâmetro encontrar S^1 . Como há dois tais triângulos isósceles, eu preciso de um método para eliminar um deles. Se eu chamar o diâmetro escolhido de *equador* os dois pontos que determinam os triângulos isósceles, serão chamados naturalmente de *Sul* e *Norte*. O S está no hemisfério *Sul* e portanto vou sempre escolher o terceiro ponto no *Sul* com isto identifiquei de forma único o *triângulo isósceles*, confira a figura (fig. 13), página 31, onde aparece o *triângulo isósceles* separando dois triângulos retângulos equivalentes.

Se o triângulo não for isósceles, há dois triângulos equivalentes que podem ser obtidos escolhendo o terceiro vértice, no *Sul*, à direita ou à esquerda de S e assim eu poderei encontrar um único representante para qualquer triângulo retângulo. Mas para falar de *esquerda* ou *direita*, tenho que considerar o círculo S^1 orientado, o que farei como habitual considerando o sentido positivo, o anti horário, e então à *esquerda* significa *positivo*, porque, eu, o observador, encontro-me em pé no centro do círculo tendo à minha frente o ponto inicial: $e^{i0} = 1$, o que em particular me agrada!

Este *triângulo isósceles* único, vai estar presente em toda a análise e portanto preciso que esta expressão seja introduzida para fazer-lhe referência. Na construção do método observei que ao seleci-

O triângulo isósceles divisor de classes

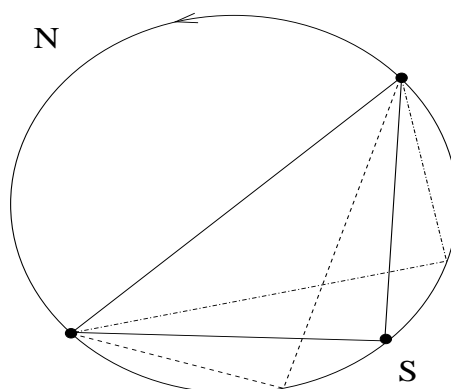


Figura 13: O triângulo isósceles

onar uma corda existe um caso particular do *triângulo isósceles* que irá dividir todos os triângulos em duas classes idênticas e fiz uma seleção por uma dessas classes para estabelecer a unicidade da representação, confira a figura (13) página 31, onde se podem ver dois triângulos retângulos equivalentes com o terceiro vértice à esquerda ou à direita do S que é o terceiro vértice do *triângulo isósceles*. Este “*triângulo isósceles*” vai ser importante em toda a construção a seguir.

- aos acutângulos correspondem à corda numa semiesfera, determinando dois vértices, com o terceiro vértice na outra semiesfera, desta forma o ângulo que se opõe à corda é menor do que $\frac{\pi}{2}$ sobrando a diferença para distribuir pelos dois outros ângulos. Fixando uma semiesfera para nela considerar a corda, o terceiro vértice estará na outra semiesfera. Vou sempre escolher o terceiro vértice no hemisfério Sul, a corda, no caso dos triângulos acutângulos será sempre escolhida no hemisfério Norte. Agora existe um único triângulo isósceles associado à corda atendendo à condição de que o terceiro vértice seja escolhido no Sul. Mas haverá duas escolhas para o terceiro vértice se triângulo não for isósceles. Logo veremos como decidir isto de forma única. Aqui também o “*triângulo isósceles*” irá dividir todos os triângulos em duas classes idênticas.

- aos obtusângulos correspondem à corda numa semiesfera, determinando dois vértices, com o terceiro vértice na mesma semiesfera. O ângulo que corresponde à corda mencionada mede mais do que $\frac{\pi}{2}$. Como sempre vou escolher o terceiro vértice no Sul, agora a corda também vai ser escolhida no Sul. Como no caso anterior, dos triângulos acutângulos, há uma única possibilidade de construção do *triângulo isósceles* mas haverá duas no caso dum triângulo que não seja isósceles pela existência das duas classes.

Do exposto nos itens anteriores, se vê que é preciso uma notação para obter uma classificação mais simples e mais efetiva uma vez que a cada triângulo no plano correspondem múltiplos triângulos que lhe são semelhantes inscritos no círculo trigonométrico.

As palavras que preciso, ou os símbolos, são

- Estarei a todo momento mencionando três triângulos, um que será escolhido aleatoriamente no plano, outro que é a projeção deste em S^1 , e o terceiro que é o *triângulo isósceles*. Vou denominá-los,

respectivamente, de o triângulo e a imagem do triângulo, este um triângulo inscrito em S^1 , e o terceiro é o triângulo isósceles que separa os triângulos associados a uma determinada corda em duas classes de triângulos equivalentes, vou referir-me a este triângulo como o triângulo isósceles.

- A origem de S^1 , $e^{i0} = 1$, e sua orientação positiva, o sentido anti horário.
- Ao escolher um diâmetro para S^1 o estarei dividindo em duas semiesferas que vou chamar de N e de S , sugerido pelos polos *norte e sul*, sem que o diâmetro pertença a nenhuma das semiesferas. Temos assim duas semiesferas abertas. Vou chamar, na continuação, este diâmetro escolhido de *equador* para continuar com a notação geográfica. A seleção do norte e do sul ficaram bem definidas pela orientação com S à direita da origem e N a esquerda da origem.

A relação de equivalência

1. retângulos Para obter o representante de qualquer *triângulo retângulo do plano*, tomamos o *equador*, como corda, paralelo à hipotenusa, e o terceiro vértice na semiesfera S .

Se o triângulo for isósceles sua imagem será o *triângulo isósceles*.

Se o triângulo não for isósceles, tome uma paralela ao cateto menor passando pela origem de S^1 . Esta paralela irá encontrar S no ponto $1 > P > S$, passe uma paralela ao outro cateto por P para encontrar o ponto Q . Com isto temos o *triângulo imagem* equivalente ao *triângulo* pelo método: *lado, ângulo, lado*.

Aqui vemos ressurgir o problema de invariância já citado acima, um problema, digamos, *epistemológico*, o triângulo, cuja representação estamos querendo encontrar em S^1 , e neste caso um triângulo retângulo, pode não ter a hipotenusa paralela ao equador, mas para isto, basta redesenhar S^1 e selecionar o equador paralelamente à hipotenusa. Este problema vai se repetir nos demais casos sem que eu me sinta obrigado a discuti-lo novamente. Esta questão também mostra a fragilidade de nossa comunicação oral ou escrita cuja solução passaria por uma linguagem extremamente sofisticada e difícil, e é melhor encontrar um meio termo entre o *bourbaquismo* e a imprecisão. . .

2. acutângulos Para obter o representante de qualquer *triângulo acutângulo*, selecione a corda, na semiesfera N , paralela ao lado menor do triângulo, assim como também ao *equador*. A seleção do lado menor é consequência da seleção do *triângulo isósceles*. Se o *triângulo* for isósceles, o lado menor é exatamente o que é diferente dos outros dois. Deixe-me agora designar por l_1, l_2 os dois outros lados com $\|l_1\| \leq \|l_2\|$, porque eles poderão ter mesmo comprimento no caso do triângulo isósceles.

O uso dum editor gráfico pode servir de forma magnífica nesta construção trazendo como exemplo um *problema de aproximação* e ilustração dum *teorema de existência*. Enquanto que na construção anterior, do triângulo retângulo, a simples escolha dum cateto paralelo encerrou o trabalho, aqui, a seleção da corda, paralela a um dos lados é insuficiente, mas é um *valor inicial dum problema iterativo de aproximação*.

Trace agora a paralela ao l_1 passando pelo menor dos vértices da corda³. Esta paralela encontra S^1 no ponto P_1 . Passe uma paralela a l_2 pelo ponto P_1 . Estas duas retas vão se encontrar no ponto Q_1 , confira a figura (fig. 14), página 33,

Ao fazê-lo acontecerão exatamente dois eventos exclusivos:

- (a) o ponto Q_1 cai sobre S^1 ou no exterior de S^1 ;

³Não esquecendo que S^1 está orientado portanto faz sentido falar no menor vértice.

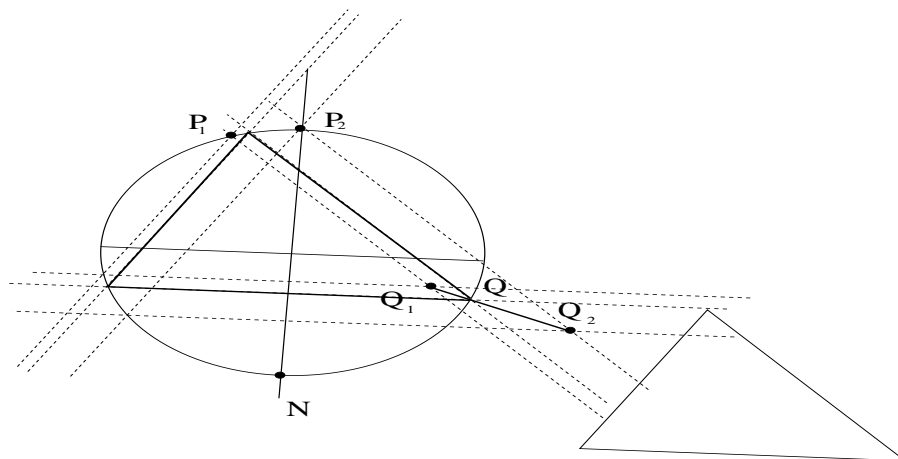


Figura 14: Primeira aproximação

(b) o ponto Q_1 cai sobre S^1 ou no interior de S^1 ;

e cada um destes eventos corresponde a uma corda mais distante ou mais próxima do *equador* associando

$$P_1 \mapsto Q_1; P_2 \mapsto Q_2; \quad (110)$$

o que prova que a solução existe. Confira a figura (fig. 14), página 33, onde se podem ver dois pontos P_1, P_2 escolhidos pela determinação de duas *cordas* associados às imagens Q_1, Q_2 .

A reta determinada por Q_1, Q_2 encontra S^1 no ponto Q que não precisa ser a solução que procuramos mas vai ser o segundo valor dum algoritmo do tipo binário, em que estaremos sempre escolhendo um ponto médio de outros recentemente obtidos, e este é o caso, Q é um ponto médio entre Q_1, Q_2 .

Na figura (fig. 14), página 33, ocorreu o evento “o ponto Q_1 cai sobre S^1 ou no interior de S^1 ”.

Trace agora a corda paralela ao lado menor do triângulo passando por Q . Ela estará entre as duas outras portanto, ao iterar o método iremos encontrar como limite o ponto Q em que deve passar o terceiro lado de modo que reconstruindo, no sentido reverso, o segundo lado e e o primeiro lado, encontramos, como um limite, a imagem do triângulo sobre S^1 .

Observe que a seleção do lado menor para construir a paralela nos leva a selecionar os pontos P_i à esquerda de S que seria o vértice do *triângulo isósceles* e portanto o método está consistente com o objetivo de usar o *triângulo isósceles* para delimitar o *conjunto quociente* da relação de equivalência.

método: ângulo, ângulo, ângulo.

3. obtusângulos Para obter o representante de qualquer triângulo obtusângulo, selecionamos a corda na semiesfera S , paralela ao lado maior do triângulo seguindo-se depois pelo método descrito para triângulos acutângulos para obter os dois outros vértices na semiesfera S . Na figura (15) página 34, você pode ver os pontos P_1, P_2 e suas imagens, Q_1, Q_2 assim como o ponto médio Q que foi usado no próximo passo do algoritmo iterativo. *método: ângulo, ângulo, ângulo.*

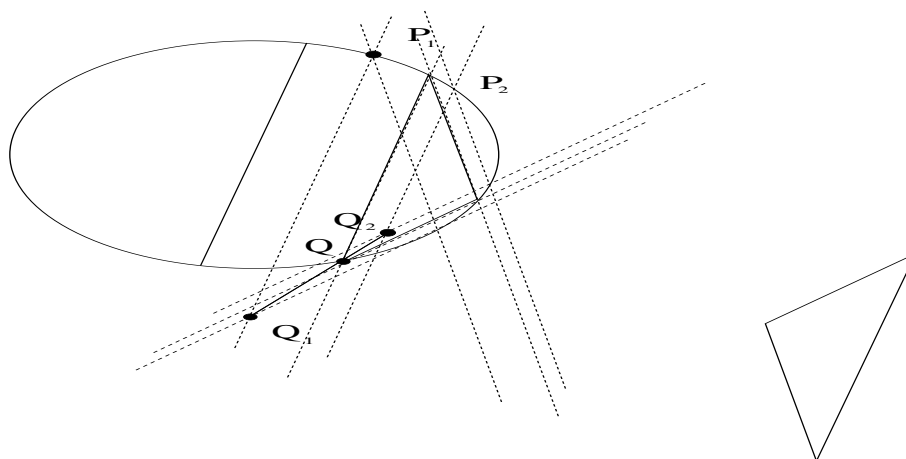


Figura 15: O algoritmo para obter imagem de obtusângulos

Como existem apenas três tipos de triângulos e todos foram estudados posso agora enunciar o *teorema das classes de equivalência dos triângulos do plano* cuja demonstração foi desenvolvida ao longo análise geométrica que fiz.

Teorema 8 (Conjunto quociente) *equivalência de triângulos*

Considere no círculo trigonométrico um diâmetro, chamado equador relativamente ao qual S^1 fica dividida em duas semiesferas chamada de norte e sul. Considere também em S^1 a orientação positiva, em que o ponto $e^{i0} = 1$ é a origem, então o polo sul S e o polo norte N são dois pontos antípodas sendo $S < 1$ e $N > 1$.

O conjunto quociente da relação de equivalência de triângulos do plano é o conjunto de todos os triângulos inscritos no círculo trigonométrico tendo um lado paralelo ao equador e o terceiro vértice no intervalo $[S, 1)$. No caso dos acutângulos o lado paralelo ao equador fica na semiesfera norte, para os retângulos este lado é exatamente o equador e os obtusângulos têm o lado paralelo na semiesfera sul.

A figura (fig 16), página 35, mostra três elementos do conjunto quociente, de cada um dos três tipos de triângulos. Em busca da figura de melhor qualidade estética terminei preferindo representar os *triângulos isósceles*, porque afinal são eles que determinam o início do intervalo que define o conjunto quociente.

Nestas condições para demonstrar que as bissetrizes num triângulo qualquer se encontram num mesmo ponto equidistante dos lados, basta fazê-lo para um triângulo qualquer inscrito no círculo trigonométrico, e verificar que a média dos pontos $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, $(\cos(\beta), \sin(\beta))$ e $(\cos(\gamma), \sin(\gamma))$ em que $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$ é o ponto de encontro das mediatrizes. É o que vou fazer na próxima seção.

É possível obter-se uma expressão mais simples para o teorema 8 observando que são apenas os vértices que interessa na descrição mas que é importante fixar um diâmetro para estabelecer uma referência. Precisamos então do *equador* e de cordas paralelas a este diâmetro com isto temos dois pontos. O terceiro irá se encontrar no intervalo $[S, 1)$. Assim temos, usando a linguagem estabelecida acima,

Teorema 9 (classes de) *equivalência dos triângulos*

Considere o equador como um diâmetro selecionado de S^1 . Qualquer triângulo do plano tem um único representante inscrito em S^1 determinado por três pontos, dois deles determinando uma corda paralela ao equador e outro escolhido no intervalo $[S, 1)$.

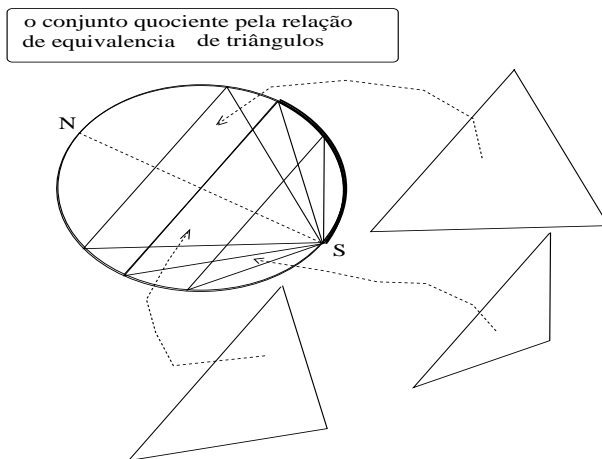


Figura 16: Três elementos do conjunto quociente

Não há nada a demonstrar, o teorema 9 é apenas uma reformulação mais simples do teorema 8. Nesta formulação simplificada está omissa que se a corda paralela ao *equador*, determinando dois pontos que se encontram na semiesfera *norte* o triângulo obtido representa um triângulo isósceles. Se estiverem na semiesfera *sul* é um triângulo acutângulo que está representado, e se forem os pontos L, O que determinam o *equador* é um triângulo retângulo que que estará sendo representado.

- **trigonometria** é a parte elementar da Matemática em que se relacionam os ângulos num triângulo retângulo com seus catetos e a hipotenusa, a figura (17) página 35, mostra o círculo trigonométrico, o

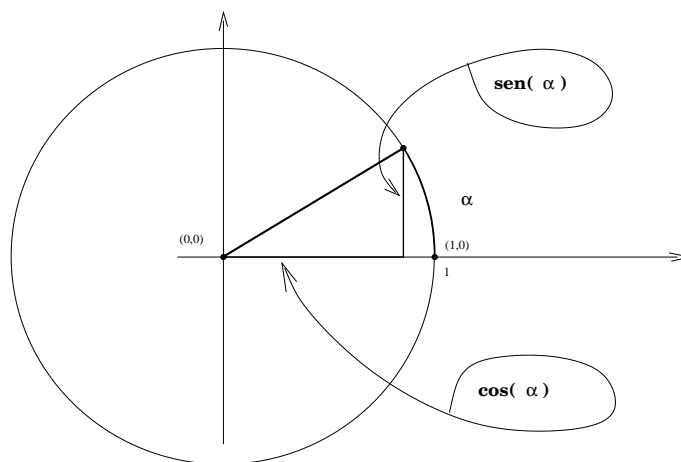


Figura 17: círculo trigonométrico S^1

ângulo α e as duas funções fundamentais, $\sin(\alpha), \cos(\alpha)$ que podem ser calculadas geometricamente se o círculo for desenhado em papel milimetrado, por contagem das subunidades. Como $\sin(\alpha), \cos(\alpha)$ são as

coordenadas de um ponto no círculo unitário determinado pela origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico, e a hipotenusa traçada da origem dos eixos $(0, 0)$, o teorema de Pitágoras nos fornece a relação fundamental da trigonometria

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (111)$$

a fórmula de *De Moivre-Euler-Abel*,

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \quad (112)$$

permite-nos descobrir rapidamente várias outras fórmulas fundamentais da trigonometria:

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) (\cos(\beta) + i \sin(\beta)); \quad (113)$$

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} = \quad (114)$$

$$= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = \quad (115)$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) + i (\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)); \quad (116)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta); \quad (117)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta); \quad (118)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta); \quad (119)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta); \quad (120)$$

A passagem da equação (116) para as equações (117) e (118), as chamadas equações do *coseno do ângulo soma* e *seno do ângulo soma*, é feita observando as partes real e imaginária na equação (116) comparada com a equação (115).

O nome de *De Moivre* está associado às potências de $e^{i\alpha}$ que nos permitem descobrir diversas variantes de expressões trigonométricas associando as potências de $\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ com sua expressão expandida usando o binômio de Newton:

$$e^{in\alpha} = (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\alpha) i^k \sin^k(\alpha); \quad (121)$$

$$e^{i3\alpha} = \cos^3(\alpha) + 3i \cos^2(\alpha) \sin(\alpha) - 3 \cos(\alpha) \sin^2(\alpha) - i \sin^3(\alpha) = \quad (122)$$

$$= \cos^3(\alpha) - 3 \cos(\alpha) \sin^2(\alpha) + i (3 \cos^2(\alpha) \sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)); \quad (123)$$

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3 \cos(\alpha) \sin^2(\alpha); \quad (124)$$

$$\sin(3\alpha) = 3 \cos^2(\alpha) \sin(\alpha) - \sin^3(\alpha); \quad (125)$$

Soma de cossenos: $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$

Esta é uma expressão interessante que permite escrevermos f como um múltiplo do $h(x) = \cos(x - \alpha)$. Observe como se faz.

Compare $f(x)$ com um produto escalar e aplique a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz:

$$f(x) = a \cos(x) + b \sin(x); \quad (126)$$

$$f(x) = \langle (a, b), (\cos(x), \sin(x)) \rangle; \quad (127)$$

$$|f(x)|^2 \leq a^2 + b^2; |(\cos(x), \sin(x))| = 1; \quad (128)$$

$$|f(x)| \leq R = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad (129)$$

então existe um número, $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, tal que $|f(x)| \leq R$, mais exatamente, R limita $|f|$ o gráfico de f ao intervalo $[-R, R]$.

Como a expressão do *coseno da soma* oferece uma combinação linear de seno e cosseno,

$$\cos(x - \alpha) = \cos(\alpha) \cos(x) + \sin(\alpha) \sin(x) = A \cos(x) + B \sin(x); \quad (130)$$

comparando com a expressão $R \cos(x - \alpha)$ tem-se

$$R \cos(x - \alpha) = R (\cos(x) \cos(\alpha) + \sin(x) \sin(\alpha)); \quad (131)$$

$$R \cos(x - \alpha) = R \cos(\alpha) \cos(x) + R \sin(\alpha) \sin(x); \quad (132)$$

$$R \cos(x - \alpha) = a \cos(x) + b \sin(x); \quad (133)$$

$$a = R \cos(\alpha); b = R \sin(\alpha); \quad (134)$$

$$\cos(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{R \sin(\alpha)}{R \cos(\alpha)} = \tan(\alpha); \quad (135)$$

$$\alpha = \text{Atan}\left(\frac{b}{a}\right); \quad (136)$$

que é uma expressão válida para uma grande variação de escolhas dos coeficientes a, b .

$$f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) = R \cos(x - \alpha); \alpha = \text{Atan}\left(\frac{b}{a}\right); \quad (137)$$

Com gnuplot você pode experimentar com vários valores para a, b , eis o código:

```
pow(x,n) = x**n;
a=2.0;b=-4.0;alpha = atan(b/a);R = sqrt(pow(a,2) + pow(b,2));
f(x) = a*cos(x) + b*sin(x);h(x) = R*cos(x-alpha);
plot h(x),f(x),0;
pause -2 "aperte enter para continuar";
a=5.0;b=-4.0;
plot h(x),f(x),0
```

- trigonométrica, série

Procure **séries**. Uma *série trigonométrica* é um dos formatos em que as *transformadas de Fourier* podem se apresentar é a chamada *transformação discreta de Fourier*.

- **trigonométrico, círculo** notação, \mathbf{S}^1 , significando a esfera de dimensão 1, é o conjunto dos números complexos de módulo 1 que é um grupo comutativo com a multiplicação.

Também notação, mais adiante mostro que é de fato uma exponencial, se $g \in \mathbf{S}^1$ então $g = e^{i\alpha}$ para algum número real α .

- $g = e^{i\alpha} = (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha));$
- $g = e^{i\alpha} = a + bi; a^2 + b^2 = 1;$
- $g, h \in \mathbf{S}^1$ então $gh \in \mathbf{S}^1$, para demonstrá-lo se prova que o módulo de gh é 1, então seja $h = (p + qi);$

$$h = (p + qi); p^2 + q^2 = 1; \quad (138)$$

$$gh = (ap - bq) + i(bp + aq); \quad (139)$$

$$(ap - bq)^2 + (bp + aq)^2 = I = (ap)^2 + (bq)^2 + (bp)^2 + (aq)^2 - 2apbq + 2bpaq; \quad (140)$$

$$I = p^2(a^2 + b^2) = q^2(b^2 + a^2); \quad (141)$$

$$I = p^2 + q^2 = 1 \Rightarrow \|gh\| = 1 \Rightarrow gh \in \mathbf{S}^1; \quad (142)$$

- Como $g, h, gh \in \mathbf{S}^1$ então $gh = e^{i\gamma}$. Melhor do que isto,

$$g = e^{i\alpha}, h = e^{i\beta}, gh = e^{i\gamma}; \gamma = \alpha + \beta; \quad (143)$$

Confira a figura (fig 18), página 38,

o que interessa é mostrar que as duas distâncias, $d(e^{i\gamma}, e^{i\beta})$ e $d(e^{i\alpha}, 1)$ são iguais, porque então, “à cordas iguais correspondem o mesmo arco” e portanto

$$\gamma - \beta = \alpha \Rightarrow \gamma = \alpha + \beta;$$

Como este cálculo é muito complicado, é interessante estabelecer uma notação que permita que a página consiga reter a “álgebra”, vou usar uma notação *estranha* à Matemática em que as “variáveis” são uma única letra, aqui estou usando duas letras para representar uma única variável o que justifica que eu escreva $(cb)^2$ para indicar o quadrado de cb .

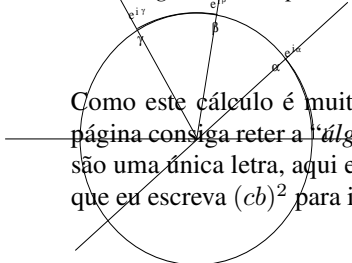


Figura 18:

$$g = e^{i\alpha} = ca + isa = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha); \quad (144)$$

$$h = e^{i\beta} = cb + isb = \cos(\beta) + i \sin(\beta); \quad (145)$$

$$gh = e^{i\gamma} = cg + isg = \cos(\gamma) + i \sin(\gamma); \quad (146)$$

$$cg = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\gamma); \quad (147)$$

$$sg = \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\gamma); \quad (148)$$

$$S = d(e^{i\gamma}, e^{i\beta}); \quad (149)$$

$$S = d(h, gh)^2 = (cb - cg)^2 + (sb - sg)^2; \quad (150)$$

$$S = (cb)^2 + (cg)^2 + (sb)^2 + (sg)^2 - 2(cb)(cg) - 2(sb)(sg); \quad (151)$$

$$(cb)^2 + (sb)^2 = 1; (cg)^2 + (sg)^2 = 1; \quad (152)$$

$$S = 2 - 2(cb)(cg) - 2(sb)(sg) = 2 - 2((cb)(cg) + (sb)(sg)); \quad (153)$$

$$(cb)(cg) = (\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)) \cos(\beta); \quad (154)$$

$$(cb)(cg) = \cos(\alpha) \cos^2(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta); \quad (155)$$

$$(sb)(sg) = (\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)) \sin(\beta); \quad (156)$$

$$(sb)(sg) = \cos(\alpha) \sin^2(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\beta); \quad (157)$$

$$(cb)(cg) + (sb)(sg) = \cos(\alpha); \quad (158)$$

$$S = 2 - 2 \cos(\alpha); \quad (159)$$

$$T = d(e^{i\alpha}, 1)^2 = (\cos(\alpha) - 1)^2 + \sin^2(\alpha); \quad (160)$$

$$T = \cos^2(\alpha) - 2 \cos(\alpha) + 1 + \sin^2(\alpha); \quad (161)$$

$$T = 2 - 2 \cos(\alpha) = S \Rightarrow d(e^{i\gamma}, e^{i\beta}) = d(e^{i\alpha}, 1); \quad (162)$$

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i\gamma} = e^{i(\alpha+\beta)}; \quad (163)$$

provando que as cordas têm mesmo comprimento portanto subtendem mesmos arcos, ou que os arcos $\gamma - \beta = \alpha$ ou ainda como desejava mostrar, que $\gamma = \beta + \alpha$. As expressões nas equações (eq.147) e (eq.148) se justificam pelo produto dos números complexos g, h e também porque já provei que $gh \in \mathbf{S}^1$ então se explica o terceiro membro em cada uma destas equações.

A teoria dos grupos permite reduzir parte desta demonstração a uma linha. Como $g, h, h^{-1} \in \mathbf{S}^1$ e \mathbf{S}^1 é um conjunto fechado para multiplicação do grupo multiplicativo dos números complexos então \mathbf{S}^1 é um

subgrupo do grupo multiplicativo dos números complexos, mas ainda resta provar que se tem um *morfismo* entre o grupo aditivo \mathbf{R} e \mathbf{S}^1 que garante a fórmula na equação (eq.153) e seja verdadeira.

- trigonométrica, série absolutamente convergente

Se uma série trigonométrica for absolutamente convergente, ela define uma função (se não for absolutamente convergente também define, mas pode não ser contínua e se enriquece a teoria com novos aspectos). Vamos usar a notação complexa porque ela nos permite um texto mais resumido.

$$f(x) = c_0 + \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikx} \quad (164)$$

podemos mostrar que a equação

$$\| \| f \| \|_1 = |c_0| + \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k| \quad (165)$$

é uma *norma* e portanto o conjunto das séries trigonométricas absolutamente convergentes é um espaço vetorial normado..

Se “esquecermos” as funções e^{ikx} na expressão podemos identificar, na expressão de uma série trigonométrica absolutamente convergente, a série de termo geral a_k , a série dos termos em módulo sendo convergente o que nos permite associação com um outro tipo de espaço vetorial, o das sucessões associadas à séries absolutamente convergentes que é o espaço vetorial normado l^1 e os dois espaço vetoriais normados em questão serão isomorfos, este é o conteúdo do Lema de Wiener. Um século se passou antes que este *detalhe* fosse descoberto. A importância deste detalhe aparece num fato simples: é “fácil” provarmos que no espaço l^1 das sucessões, existe mais uma operação: o produto de convolução das sucessões que neste caso é uma operação interna, o produto de duas sucessões cujas séries sejam absolutamente convergentes, é outra sucessão com uma série absolutamente convergente. Com o isomorfismo mencionado acima podemos retornar ao espaço das séries trigonométricas absolutamente convergentes e obter de forma relativamente simples que elas formam uma *álgebra de Banach*. O isomorfismo mencionado associa o produto de convolução do espaço l^1 com o produto ponto a ponto das funções que as séries trigonométricas definem. Porém com um problema extra a unidade no álgebra de Banach das séries trigonométrica é a função constante que não tem série de Fourier. Em l^1 é a sucessão δ_0 . Os *morfismos* são uma forma de descobrir problemas! Quer dizer os espaços de Banach são isomorfos mas não o são as álgebras de Banach, e não o deveriam?

É interessante como este problema, da falta de unidade na álgebra de Banach da séries trigonométricas absolutamente convergentes, a álgebra de Wiener, está associada com outras questões. Em teoria da informação e comunicações este problema é conhecido como a dualidade entre a limitação no *espaço da frequência vis a vis espaço do tempo*, ou, se uma das transformadas tiver suporte limitado a outra o terá não limitado. A resposta para existência da unidade seria uma imagem com suporte reduzido a um ponto, a distribuição de Dirac. Este é apenas um resumo, entretanto.

Índice Remissivo

- $GL(V)$
 - grupo linear, 22
- l^1 , 39
- l^1 , 39
- S^1 , 18
- $Sim(n)$, 19
- $SU(p)$
 - special unitary groups, 24
- Z_n , 18
- Z_p , 18
- álgebra
 - de grupo, 21
- álgebra de grupo, 23
- álgebra linear, 16
- ângulos
 - dum triângulo
 - soma, 13
- ângulo soma
 - cosseno, 36
 - seno, 36
- abeliano
 - grupo, 18
- absolutamente convergente
 - série, 39
- antípodas, 30
- arco dum círculo
 - ângulo, 13
- assíntota
 - reta, 4
- auto
 - valor, 27
 - vetor, 27
- Banach
 - álgebra, 39
- Bernouilli, 26
- Bolyai, 5
- Cauchy
 - teorema
 - grupo, 15
- Cauchy, Augustin-Louis, 17
- centro
 - dum grupo, 20
- círculo trigonométrico, 35
- código aberto, 1
- círculo
 - raio
 - tangente, 4
 - tangente
 - raio, 4
- circunferência
 - triângulo inscrito, 13
- classe de equivalência
 - módulo um subgrupo, 21
- contínua
 - transformação linear, 26
- convolução
 - produto de, 39
- convolução, produto de, 17
- correto
 - é belo, 8
- cosseno, 8
- cossenos
 - soma de, 36
- Daubechies, Ingrid, 28
- De Moivre, 36
- Desargues
 - teorema de, 12
- desigualdade
 - Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, 36
- diferenciais, equações, 26

- diferencial
 - equação, 27
 - operador, 27
- Dirac, Paul Adrien Maurice, 17
- distribuição, 17
- divisões da Matemática, 24
- EDP
 - distribuições, 17
- endomorfismo
 - canônico, 20
- equação diferencial, 26
- equivalência
 - módulo tangência, 3
 - relação de, 5, 13
- erro
 - erro aqui, 9
- espectral, teorema, 16
- espectro, 16
- esquecer
 - funtor, 39
- Euler, 26
 - formula, 18
- existência e unicidade
 - ODE, 15
- feio
 - está errado, 8
- fórmula
 - de McLaurin, 9
- fórmula de Taylor
 - erro, 11
 - integral, 11
- figura, 4, 11–13
 - , 7
 - círculo unitário, 35
 - equivalência de triângulos, 35
 - obtusângulo, 34
 - ODE
 - existência e unicidade, 15
 - singularidade, 16
 - Polinômio de Taylor, 9
 - sinais, 28
 - soma de arcos, 38
 - tabela
 - verdade, 2
 - trigonométrico
 - polinômio, 26
 - triângulo isósceles, 31, 33
 - triângulos
 - semelhança, 30
 - verdade
 - tabela, 2
- Formula de McLaurin, 8
- Fourier
 - caracteres dum grupo, 29
 - coeficientes, 28
 - frequência
 - tempo, 27
 - transformada discreta, 28
 - transformação discreta, 37
- Fourier, séries de, 26
- Fourier, transformada de, 26
- fraca
 - solução, 17
- frequência, 27
- fuzzy
 - lógica, 1
- Gelfand, transformada de, 17
- geometria
 - diferencial, 6
 - hiperbólica, 6
 - não euclidiana, 6
- germe, 3
- grupo, 17
 - $Sim(n)$, 19
 - centro, 20
 - cíclico, 15
 - codificação, 19
 - comutativo, 37
 - conjugação, 19
 - endomorfismo, 19, 20
 - exemplos, 22
 - isomorfismo, 19
 - normal, 14
 - ordem, 19
 - permutação, 19
 - permutações, 19
 - representação de grupos, 19
 - subgrupo, 19
 - próprio, 19
 - unitários

- especiais, 24
- grupo finito
 - ordem, 15
- hiperplano, 6
- IMPA, 25
- infinita
 - precisão, inteira, 9
- injetiva
 - transformação linear, 26
- integral
 - de Fourier, 28
- inteira
 - precisão infinita, 9
- inversão, 20
- inverso
 - elemento, 18
- isomorfismo, 39
- Knuth, Donald, 1
- Lagrange, teorema para grupos, 14
- Landau, 3
 - o pequeno de, 4
- latex, \LaTeX , 1
- Lebesgue
 - integral de, 27
- lei do cosseno
 - volume, 12
- leis da termodinâmica, 24
- lógica
 - fuzzy, 1
 - operações básicas, 3
- lógica matemática, 2
- LISP, 9
- Lobachevsky, 5
- Matemática
 - divisões, 24
- matriz
 - não singular, 22
- McLaurin
 - fórmula, 9
 - Formula de, 8
- mecânica quântica, 17
- Moebius, fita, 25
- morfismo, 39
 - espaço vetorial, 25
 - teorema fundamental, 14
- Newton
 - binômio de, 36
- núcleo
 - transformação linear, 26
- norma, 39
- normado
 - espaço vetorial, 39
- normal
 - subgrupo, 21
- operador
 - multiplicação, 19
- operador integral, 17
- operação
 - relação binária, 17
- Pitágoras
 - teorema, 36
- Poincaré
 - conjectura, 25
- polinômio de Taylor, 7
- próprio
 - valor, 27
 - vetor, 27
- principal
 - valor, 17
- problema, 25
- produto de convolução, 17, 39
- propriedade
 - associativa, 18
- Python, 9
- Rademacher, função de, 17
- relação binária
 - operação, 17
- relatividade
 - teoria, 6
- representação
 - \mathbf{Z}_p , 23
 - irredutível, 23
 - linear de grupo, 22
 - linear dos grupos
 - teoria da, 22

- linear dum grupo finito, 22
- teoria da, 22
- restos
 - classe dos, 18
 - inteiro primo, 18
- Riemann
 - integral de, 27
- rombos
 - dum cone, 12
- Schwartz
 - Laurent, 17
- seno, 8
- séries de Fourier, 26
- série trigonométrica, 37
- Silva
 - Sebastião e, 17
- Stokes
 - teorema de, 15
- Sylow
 - grupo, 15
- tabela
 - verdade, 1
- Tales
 - de Mileto, 12, 13
- tangente, 3
- Taylor
 - polinômio, 7
- teorema
 - de Desargues, 12
 - espectral, 16
 - fundamental dos morfismos, 13
- teorema de Lagrange
 - grupo, 14
- teorema de Tales, 11
- teoria
 - da representação, 22
- TeX, \TeX , 1
- topologia, 24
- transcendente, número, 25
- transformada de Fourier, 26
- transformada de Laplace, 29
- transformada discreta
 - de Fourier, 28
- transformação linear, 25
 - contínua, 26
 - injetiva, 26
- trigonometria, 35
 - ângulo soma, 36
 - círculo unitário, 35
 - cosseno
 - soma, 36
 - fórmulas, 36
- trigonométrica
 - série, 37
 - absolutamente convergente, 39
- trigonométrico
 - círculo, 18
- trigonométrico, círculo, 37
- triângulos
 - classificação, 29
 - semelhantes, 29
- variedade, 5, 7
 - linear, 5
- verdade
 - tabela, 1
- vetor próprio, 26
- wavelets, 26, 28, 29
- Wiener
 - álgebra de, 39
 - Lema de, 39

Referências Bibliográficas

- [1] R. Creighton Buck. *Advanced Calculus*. McGraw-Hill. Inc, 1978.
- [2] Yitang Zhang. Bounded gaps between primes. *Annals of Mathematics*, 2014.
- [3] American Mathematical Society. 2010 mathematics subject classification. <http://www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html>.
- [4] R. C. Boyce, William E e DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Editora: LTC - ISBN-13: 9788521614999, 2006.
- [5] J. Dieudonné. *Calcul Infinitésimal*. Herman Éditeurs, 1968.
- [6] S.V. Gelfand, I.M. e Fomin. *Calculus of variations*. Dover, 2000.
- [7] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus II*. Interscience Publishers Wiley classics library, 1988.
- [8] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus I*. Interscience Publishers Wiley classics library, 1988.
- [9] William Dunham. *Euler: The Master of us all*. The Mathematical Association of America, 1999.
- [10] Foundation for Free Software. Gpl - general public license. Technical report, <http://www.FSF.org>, 2011.
- [11] P.Smith D.W.Jordan. *Non Linear Ordinary Differential Equations*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1977.
- [12] Kai Lai Chung. *A course in probability theory*. Academic Press, INC. 1985, 2001.
- [13] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i. 2013.
- [14] V. I. Arnold. *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, chapter Poltmathematics: Is Mathematics a Single Science or a Set of Arts?, pages 1–403. American Mathematical Society, 1999.
- [15] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, <http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/>, 2009.
- [16] T Praciano-Pereira. Programando em gnuplot. Préprints da Sobral Matemática no 2008.1 - 2008 http://www.sobralmatematica.org/preprints/programando_gnuplot.pdf, 01 2008.

- [17] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.
- [18] Tarcisio Praciano-Pereira Stálio Rodrigues dos Santos. *Introdução à Matemática Universitária*. Sobral Matemática, 2009.
- [19] G.F. Simmons. *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. McGraw-Hill - Book Company, 1979.
- [20] G.F. Simmons. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill - Book Company, 1968.
- [21] Stephen Smale Morris W. Hirsch. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [22] Wikimedia Foundation. Wikipedia, enciclopédia livre na internet. <http://www.wikipedia.org>.
- [23] Wikipedia. *Wikipedia, a free encyclopedia*. <http://pt.wikipedia.org/wiki/>, 2003.
- [24] the free encyclopedia in the Internet Wikipedia. Wikipedia, the free encyclopedia in the internet. http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier.
- [25] T. Praciano-Pereira. *Prisioneiros da terceira dimensão*. Chiado Editora, 2017.
- [26] khanacademy. Prova: o raio é perpendicular à reta tangente. <https://pt.khanacademy.org/>, 2021.
- [27] Tarcisio Praciano-Pereira. Teorema fundamental dos morfismos. Technical report, Sobral Matemática, 2020.
- [28] Wikimedia Foundation. Wikipedia, enciclopédia livre na internet. <http://www.wikipedia.org>.