Raízes dos números complexos

Praciano-Pereira, Tarcisio *

22 de abril de 2021
preprints da Sobral Matemática
no. 2021.06
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Vou fazer uma breve introdução dos números complexos, apresentar a fórmula de Euler-De Moivre e calcular a raiz quarta do número complexo $a + bi$. Termino comparando este cálculo fazendo uso da fórmula de Euler-De Moivre que é a forma polar dum número complexo.

palavras chave: fórmula de Euler-De Moivre, números complexos, raiz quarta do número complexo $a + bi$.

I will briefly introduce complex numbers together with Euler-De Moivre's formula and then calculate the 4th root of the complex number $a + bi$, using Cartesian formulation. I will finish by comparing the use of Euler-De Moivre's formula to have the same root calculated.

keywords: 4th root of the complex number $a + bi$, Euler-De Moivre's formula, complex numbers.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 Números complexos

Número complexo é um número da forma

$$a + bi;\ a, b \in \mathbf{R} \tag{1}$$

Estes número surgem quando se tenta resolver uma equação do segundo grau usando a *fórmula de Bhaskara*.

Os números complexos são uma construção relativamente fácil como pares ordenados de números reais, na verdade são a construção algébrica que consiste em adjuntar um elemento a um corpo, no caso o elemento i com a propriedade

$$i^2 = -1 \text{ ou equivalentemente que } i = \sqrt{-1}; \tag{2}$$

um tal elemento não existe no corpo dos números reais mas eu posso criar uma nova estrutura com elementos da forma

$$a + bi; a, b \in \mathbf{R}; i^2 = -1 \tag{3}$$

e agora trabalhar com os objetos com esta forma como se fossem polinômios. O resultado é um novo *corpo* e sua propriedade fundamental é que todo polinômio de grau n tem exatamente n raízes consideradas as multiplicidades das raízes.

Na próxima seção eu vou descrever este novo conjunto, o conjunto dos números complexos e nas seções seguintes vou discutir algumas propriedades terminando com o cálculo das raízes dos *números complexos*.

O que me inspirou neste trabalho foi a fórmula da raiz quadrada de $a + bi$ que encontrei em [2, página 103]. É um cálculo simples que está feito na última seção, mas o que é interessante é comparar a dificuldade que existe de passar da fórmula de Euler-De Moivre, que são as coordenadas polares dum número complexo para as coordenadas cartesianas como Penrose formula a raiz quadrada sem dar uma pista de como se a calcula. Claro, [2] está cheio de *exercícios*, como Penrose caracteriza.

2 O conjunto dos números complexos

Os **números complexoa** é um número da forma

$$a + bi;\ a, b \in \mathbf{R} \tag{4}$$

Estes número surgem quando se tenta resolver uma equação do segundo grau usando a *fórmula de Bhaskara*.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad x \notin \mathbf{R} \tag{6}$$

$$x = \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \tfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac; \tag{7}$$

$$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad -\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{|\Delta|} = \pm id; d = \pm\sqrt{|\Delta|}; i = \sqrt{-1} \tag{8}$$

$$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{-b \pm id}{2a} = \tfrac{-b}{2a} \pm i\tfrac{d}{2a} = a + bi; \tag{9}$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -11 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{11}; \tag{10}$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{\tfrac{3 + i\sqrt{11}}{2}, \tfrac{3 - i\sqrt{11}}{2}\}; \tag{11}$$

$$a + bi \in \{\tfrac{3}{2} + i\tfrac{\sqrt{11}}{2}, \tfrac{3}{2} - i\tfrac{\sqrt{11}}{2}\}; \tag{12}$$

Quando $\Delta < 0$ se define $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$ confira equação (eq.8) fazendo aparecer os números com o formato $a + bi; a, b \in \mathbf{R}$, na equação (eq.11) ou ainda na equação (eq.12).

Ainda um outro exemplo

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i \tag{13}$$

$$x \in \{3 + i; 3 - i\} \tag{14}$$

em que se vêm os números $a \pm bi; a = 3; b = 1$ aparecendo como soluções de uma equação do segundo grau. Você pode criar uma infinidade de exemplos deste tipo partindo do final da questão: escreva

$$(x - a - bi); (x - a + bi) = (x - a)^2 - (bi)^2 = (x - a)^2 + b^2 = 0 \quad \text{selecione: } a, b; \tag{15}$$

monte de volta uma equação do segundo grau que terá os números complexos $a + bi; a - bi$ como solução, para todos os pares de números a, b que você tiver selecionado.

Foi feita uma *invenção* em cima das contas que eu fiz na equação (eq.6), $\sqrt{-1} = i$. Até então, antes desta *invenção*, se tinha uma regra com *uma exceção*:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \Leftarrow a > 0; b > 0; \tag{16}$$

A exceção sendo que "a regra deixava de valer se algum dos números, a ou b, fosse negativo". Agora a regra é, simplesmente,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \tag{17}$$

para quaisquer que sejam os os números reais mas o resultado pode ser um "*número*" que não pertença ao conjunto $\mathbf{R}$ e assim apareceu um novo conjunto de números. Por exemplo,

$$\sqrt{-3} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{3} = \pm i\sqrt{3}; \sqrt{-4} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{4} = \pm 2i; \tag{18}$$

Não existe mais exceção, a regra vale sempre.

Observe que mesmo para os "*novos números* existem duas raízes pelo que se costuma escrever

$$\pm\sqrt{ab} \tag{19}$$

Esta invenção, $i = \sqrt{-1}$ foi mal aceita e até recentemente os números complexos eram considerados *imaginários*... Segundo Roger Penrose, em *Road to Reality*,[2] foi preciso chegarmos ao século 20 para que a Física *se encontrasse com os números complexos*, ou como ele diz, seguindo o objetivo do seu livro, *que a Física encontrou uma aplicação para os números complexos.*

Na verdade, *imaginário* é o nome que se deu ao $i = \sqrt{-1}$, a *unidade imaginária*, desta forma o preconceito foi sendo repassado de geração em geração.

Posso resolver a equação abaixo usando a fórmula de Bhaskara, mas também posso fazê-lo diretamente:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i \tag{20}$$

a solução é um *número imaginário puro*. E aqui estou *cedendo* ao preconceito, mas não há como alterar a História, apenas se deve vencer o preconceito dando-se conta de que se trata dum preconceito e se divertir com os nomes errados com que a Ciência tem que conviver.

Ainda um outro exemplo

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i \tag{21}$$

$$x \in \{3 + i; 3 - i\} \tag{22}$$

em que se vêm os números $a \pm bi; a = 3; b = 1$ aparecendo como soluções de uma equação do segundo grau. Você pode criar uma infinidade de exemplos deste tipo partindo do final da questão: escreva

$$\begin{cases} (x-a-bi);(x-a+bi) = (x-a)^2 - (bi)^2 = (x-a)^2 + b^2 = 0; \\ \text{selecione: } a, b; \end{cases} \tag{23}$$

monte de volta uma equação do segundo grau que terá os números complexos $a+bi; a-bi$ como solução, para todos os pares de números a, b que você tiver selecionado.

Com a criação dos números complexos *as equações do segundo grau* passam a ter *sempre* solução apesar de que, cuidadosamente, se acrescente a observação, "*raízes imaginárias*" quando $\Delta < 0$. que é quando a solução **escapa** do caso real para o caso complexo.

Isto mostra que a invenção do i tem sentido e que nada têm de imaginários os números complexos que, além do mais, aparecem em fórmulas de eletricidade.

O teorema fundamental da Álgebra, no caso real, dizia que toda equação do grau n tinha no máximo n raízes, agora o teorema fundamental da Álgebra fica completo, toda equação do grau n tem n raízes, mas permanece a limitação concreta de *achar as raízes* quando $n > 4$.

E para caracterizar este novo conjunto eu vou dar-lhe um nome que é o conjunto dos "números complexos", **C**.

Sem querer manifestei o meu preconceito colocando *aspas* em torno da expressão, *números complexos*, traduzindo um sentimento de que não são "números" como os outros, *naturais*, *racionais* ou *reais*.

3 Operações com os números complexos

Preciso agora mostrar que posso fazer operações aritméticas com estes números para que se possa aceitá-los como "*números*".

Dados $u = a + bi; v = c + di$ posso somá-los usando as regras da álgebra de polinômios, como eu faria com polinômios, somando os *termos semelhantes*.

$$u(x) = a + bx; v(x) = c + dx; \tag{24}$$

$$u(x) + v(x) = (a + c) + (b + d)x; \tag{25}$$

$$x := i \quad \Rightarrow \quad a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i; \tag{26}$$

resultando na regra para somar números complexos que é uma direta aplicação das regras usadas para as expressões algébricas. Você poderá ver que fazer operações algébricas com os números complexos nada mais é do que fazer operações com *expressões do tipo*

$$a + bi; c + di; \tag{27}$$

Está no momento da dar um nome adequado às componentes do "número complexo" $a + bi$. Observe que a soma se processou da mesma forma como se faz com polinômios considerando aqui "i" como se fosse uma variável. Se somam os "termos independentes" de cada um deles, e depois se somam os coeficientes de i. A definição é a seguinte:

Definição 1 *Parte real e parte imaginária*
Dado um número complexo $u = a + bi = (a, b)$ se designa

- *parte imaginária* $Im(u) = b \in \mathbf{R}$
- *parte real* $Re(u) = a \in \mathbf{R}$

Observe que Re, Im são duas funções definidas em $\mathbf{C}$ e tomando valores em $\mathbf{R}$ são *projeções* do $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ em $\mathbf{R}$.

De forma semelhante ao caso da adição, sempre usando as regras operatórias das expressões algébricas, agora usando o caso da multiplicação de polinômios, posso efetuar:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = \tag{28}$$

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci - bd = ac - bd + (ad+bc)i \tag{29}$$

que você pode ver, esquematicamente, na figura figura (fig 5), página 8,

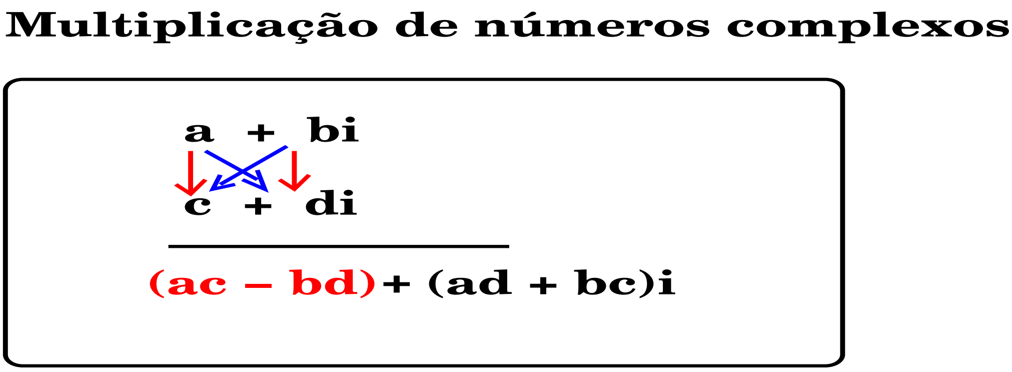


Figura 1: produto $(a+bi)(c+di)$

O interessante é que posso fazer *interpretação geométrica* dos números complexos mostrando que eles nada tem de imaginário e, muito pelo contrário, até são geométricos.

Os números complexos se infiltraram em nosso sistema cultural com duas apresentações:

$$\text{expressão algébrica } \mathbf{C} \ni a+bi \equiv (a,b) \in \mathbf{R}^2 \text{ entidade geométrica.} \tag{30}$$

eles podem ser *um número*, $u = a + bi \in \mathbf{C}$ ou um *ponto do plano* $u = (a,b) \in \mathbf{R}^2$.

A última parte na equação (eq. 30), $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, é uma *representação geométrica* para o número complexo, uma vez que estou dizendo que existe um ponto do plano,

$$\begin{cases} (a,b) \in \mathbf{R}^2; \\ a+bi \in \mathbf{C}. \end{cases} \tag{31}$$

que é equivalente a um número complexo. Os dois objetos matemáticos (a,b) e $a+bi$ são equivalentes. Um número complexo é equivalente a um ponto do plano.

A descoberta da *representação geométrica* para os números complexos, representa um *salto qualitativo*. Como eles têm uma *representação geométrica*, não podem ser tão estranhos como no começo pareciam. Observe a figura (fig. 7), página 13, nela há alguns números complexos representados no plano.

4 Multiplicação de números complexos

Eu definir a multiplicação fazendo uso intensivo da representação geométrica e mostrando como, possivelmente, Euler poderá ter descoberto a sua famosa fórmula.

Vou avançar mais a fundo na representação geométrica dos números complexos para *redescobrir* a *fórmula de Euler* e mostrar outro método para calcular o produto de números complexos que é mais simples do que a definição apresentada na equação (eq. 28) (eq. 29) com a interpretação polinomial.

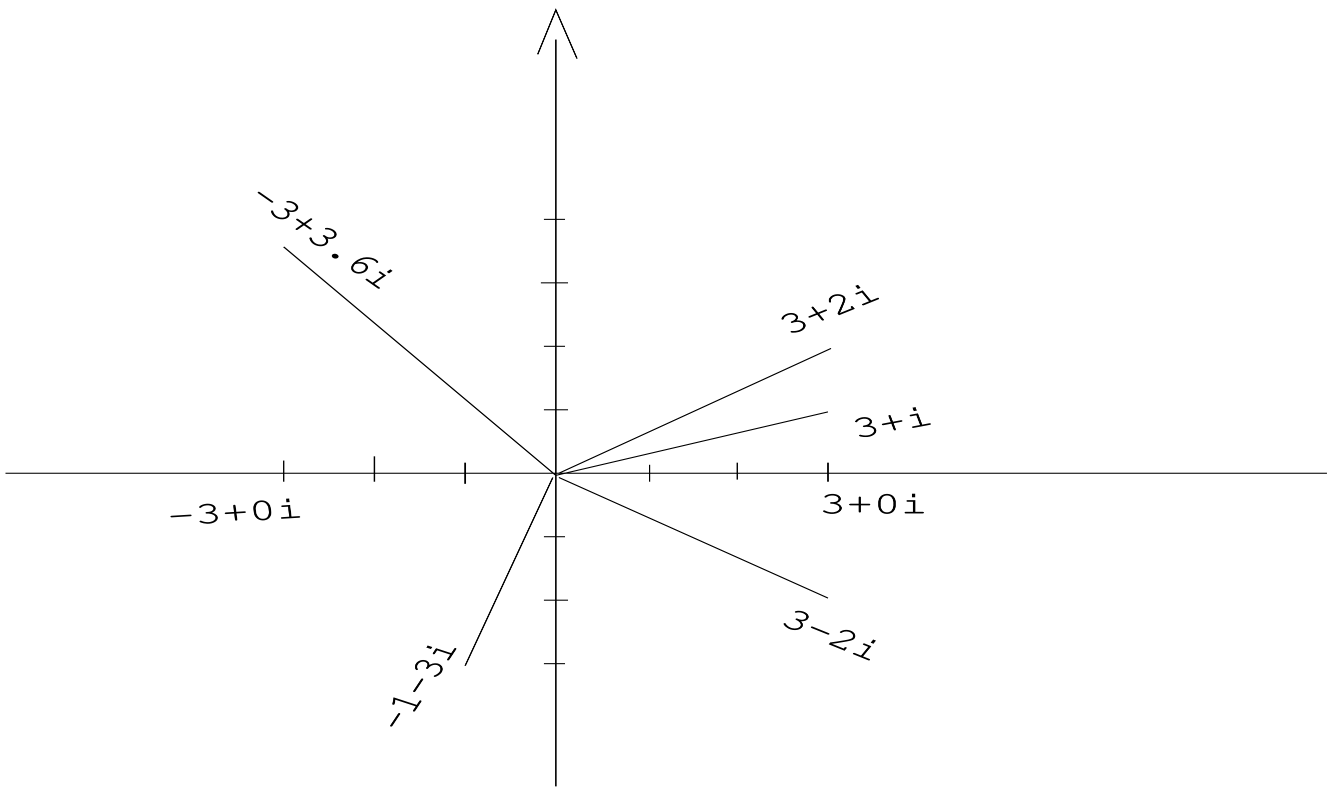


Figura 2: Representação geométrica dos complexos

Mais simples e mais computacional muito fácil de ser enfiada num programa de computador para construir uma *calculadora para números complexos* que também entenderia os números naturais, racionais e reais. Uma grande unificação dos números. Experimente a minha `calculadora`, [3, calculadora].

Você deve ter achado estranho que para a *adição* apresentei uma definição formal não o fazendo para o *produto de números complexos*, a razão disto é que, avançando na interpretação geométrica mais um pouco, vou poder apresentar uma fórmula para o produto muito simples que vai merecer o destaque de uma definição.

O primeiro passo nesta direção é que os números tem módulo, como os reais, apenas muito mais significativo. Como é um ponto do plano, o módulo de um número complexo sai direto como aplicação do *teorema de Pitágoras*.

$$\mathbf{C} \ni a + bi \mapsto (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \sqrt{a^2 + b^2} = \|a + bi\|; \tag{32}$$

Na (eq. 31) você viu a equivalência entre a forma algébrica e a geométrica dum número complexo:

$$\mathbf{C} \ni v = a + bi \equiv (a, b) \in \mathbf{R}^2, \tag{33}$$

o par (a, b) é um ponto do plano e assim eu estou *representando* um número complexo com uma entidade geométrica, um ponto.

Desta forma os números complexos trouxeram, para o reino dos números, os conceitos da geometria: ângulo, módulo, direção e sentido, e a Física do século 20 lançou mão deles, com muito sucesso, mas já vinha usando na eletricidade de uma forma *subversiva*.

A figura (fig. 3), página 6 descreve vários dos aspectos geométricos dos números complexos.

- Os dois números complexos, z, w têm mesmo módulo, no plano complexo isto significa que eles se encontram num mesmo círculo de raio 3, na figura (fig. 3). Para os números reais (ou racionais,

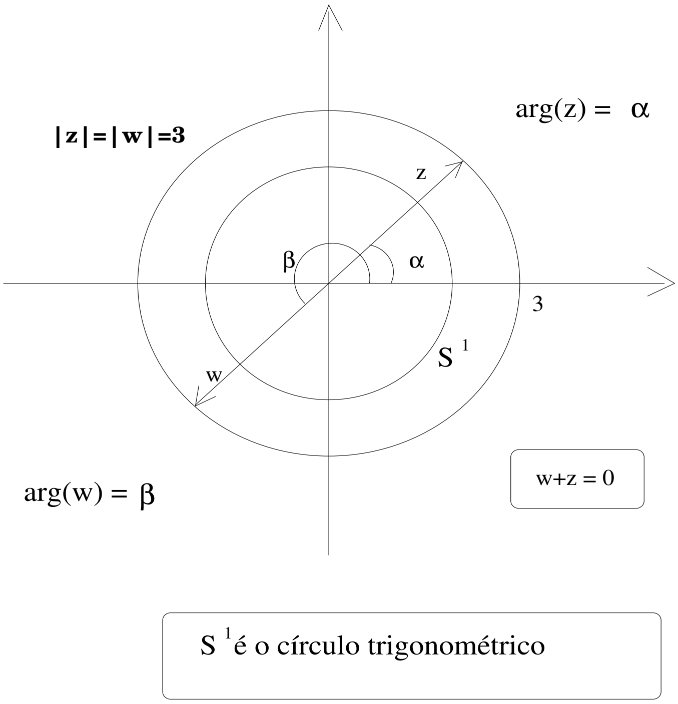


Figura 3:

ou inteiros) isto se resume à troca de sinais. Os números complexos oferecem mais opções na expressão $|z| = 3 \ldots$

- Os dois números complexos, z, w, tem sinais contrários e como nos reais, um é o inverso aditivo do outro. Nos complexos isto significa estarem diametralmente opostos.
- Um número complexo tem um ângulo, relativamente ao eixo OX, na figura (fig. 3), o ângulo de z é α e o ângulo de w é β. Não se chama "ângulo", a palavra que se usa é *argumento* e a notação é a que aparece na figura (fig. 3), $arg(z) = \alpha, arg(w) = \beta$
- Deixe-me trocar de círculo, considere na figura (fig. 3) o círculo $\mathbf{S}^1$ de raio 1, o círculo trigonométrico. Faça um esforço de abstração, suponha que *escala esteja correta*, que você esteja vendo o círculo trigonométrico, então:

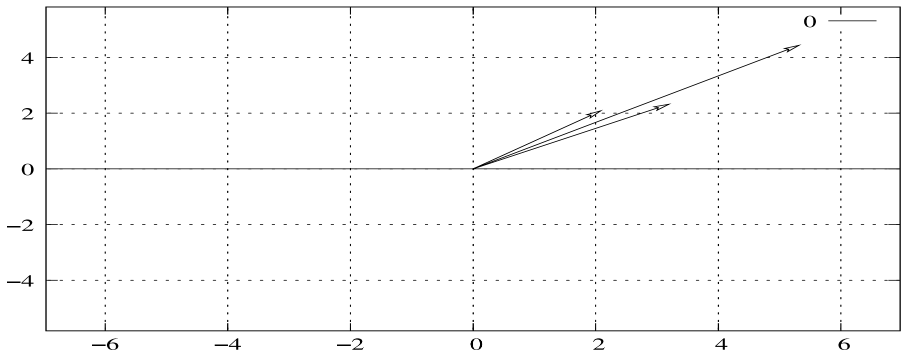
$$z = (\cos(\alpha), \sin(\alpha));\ w = (\cos(\beta), \sin(\beta)); \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \tag{34}$$

Na figura (fig 4), página 7, você pode ver o cálculo feito com uma `calculadora` que eu escrevi em `C++`, [3, calculadora], com saída de dados para `gnuplot`. É possível editar a saída de dados do `gnuplot` para incluir num texto como eu fiz aqui. Com a `calculadora` eu obtive um desenho básico que depois eu editei acrescentando mais informações.

Retornando à equação (eq. 34) deixe-me convidá-la para mais um exercícios de abstração, esqueça-se de que $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Considere dois *argumentos* quaisquer e deixe-me escrever esta equação assim:

$$z = (\cos(\alpha), \sin(\alpha));\ w = (\cos(\beta), \sin(\beta)); \tag{35}$$

$$z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e(\alpha); w = \cos(\beta) + i\sin(\beta) = e(\beta); \tag{36}$$



u = (3*cos(pi/4), 3*sin(pi/4))
v = (4*cos(pi/5), 4*sin(pi/5))
A soma de u = 2.12132 + 2.12132 i
com v = 3.23606 + 2.35114 i
é 5.35738 + 4.47246 i

Figura 4: A regra do paralelogramo em ação

em que estou exercendo o *meu direito* de entender um número complexo ora como um número, ora como um ponto do plano. Estou também incluindo uma nova notação:

$$z = e(\alpha); w = e(\beta)$$

associando cada um dos números z, w com o ângulo que eles terminaram sobre o círculo unitário. Euler deve ter trilhado este caminho quando descobriu a sua famosa fórmula e eu estou seguindo a trilha de Euler. Mas neste momento

$$e(\alpha); e(\beta); \tag{37}$$

é "*pura notação*", um *símbolo conveniente*, e muita Matemática é feita, e *foi feita*, criando símbolos convenientes. Depois muitos se perdem e *ficaram os que deram certo*. O de Euler ficou, deu certo.

Deixe-me multiplicar os dois números, procure entender as contas, elas estão um pouco resumidas, mas estou dizendo tudo:

$$e(\alpha)e(\beta) = zw = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\,(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\beta)\sin(\alpha)) \tag{38}$$
$$zw = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e(\alpha+\beta) \tag{39}$$

Eu ainda não fiz uma definição formal da multiplicação, mas supere a dificuldade psicológica da *coisa nova* e verifique que eu apenas apliquei as regras para multiplicar expressões algébricas. Agora leve em conta a *invenção*

$$i = \sqrt{-1} \;\; \Rightarrow \;\; i^2 = -1; \tag{40}$$

É esta *invenção* que justifica uma "*certa troca de sinal* que aparece na equação (eq. 38).

Também fiz na equação (eq. 38) a soma dos termos semelhantes. Depois eu reconheci o significado da *parte real* e da *parte imaginária* de acordo com as fórmulas de *soma de arcos do cosseno e do seno* que é o que aparece na equação (eq. 39) em que no final eu usei a notação que eu inventei. quem a inventou foi Euler!

Euler viu isto e identificou com a exponencial refazendo os cálculos da fórmula:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha); \tag{41}$$
$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta); \tag{42}$$
$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)}; \tag{43}$$

que permitiu-lhe escrever a famosa fórmula que é também identificada como fórmula de Euler:

$$e^{i\pi} = -1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0; \tag{44}$$

envolvendo os números, $e, i, \pi, 0, 1$ numa única fórmula, que é realmente uma obra de arte.

Observe o que eu disse, Euler *inventou uma definição para a exponencial dos números complexos*, ele começou identificando os números complexos do círculo trigonométrico porque ele sabia da *fórmula da soma de arcos*.

A Matemática é um *conhecimento* em que *inventamos fórmulas* associando fórmulas antigas com fórmulas novas. As invenções que dão certo, ficam!

Vou lhe propor uma *aplicação prática* dos números complexos, na memorização ou determinação das *fórmula de somas de arcos*. Se você quiser lembrar-se das fórmulas $\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta), \tan(\alpha+\beta)$, use o produto de $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$. Depois traduza para as funções trigonométricas o resultado do produto.

Vou lhe propor uma *aplicação prática* dos números complexos, na memorização ou determinação das *fórmula de somas de arcos*. Se você quiser lembrar-se das fórmulas $\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta), \tan(\alpha+\beta)$, use o produto de $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$. Depois traduza para as funções trigonométricas o resultado do produto.

Se eu multiplicar por um número positivo ρ um número complexo que se encontre no círculo trigonométrico vou obter qualquer outro número que se encontre no plano complexo, basta que ambos tenham o mesmo argumento.

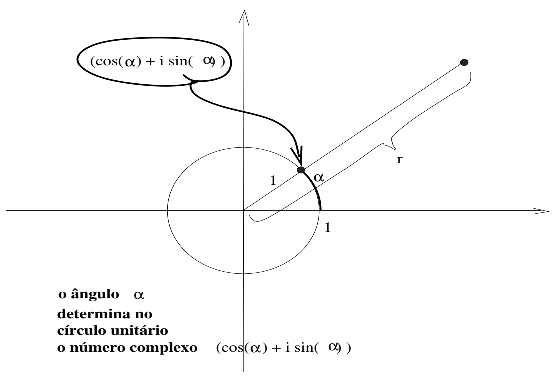


Figura 5:

Na figura (fig. 5), página 8, você pode identificar o círculo unitário, quer dizer, o conjunto dos números complexos de módulo 1, nele você pode ver o arco α determinando o número complexo

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha); \tag{45}$$

que foi multiplicado pelo número real positivo r determinando em algum ponto do plano complexo o número complexo

$$r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = r\cos(\alpha) + ir\sin(\alpha) = re^{i\alpha}; \tag{46}$$

e eu vou acompanhar Euler e completar a fórmula de Euler com um detalhe que vou mostrar mais adiante que foi uma das invenções mais significativas de Euler expandindo a definição da função exponencial ao conjunto dos números complexos

$$z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = re^{i\alpha}; z \in \mathbf{C}; \tag{47}$$
$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha); \tag{48}$$

Estas equações traduzem o que está expresso na figura (fig. 5) em que eu tracei um segmento de reta da origem até um *ponto* do plano, cortando o círculo trigonométrico.

Esta figura e as equações (eq.47) e (eq.48) mostram que qualquer número complexo pode ser expresso com esta fórmula, $z = re^{i\alpha}$, que é chamada a *forma polar* dum número complexo e que também é usada no plano $\mathbf{R}^2$ chamada então de *coordenadas polares* para um ponto do plano.

O número real positivo r é o módulo do número complexo. Mas esta descrição tem um defeito que observei agora: e se o *ponto* estiver dentro do círculo trigonométrico? Neste caso trace o segmento de reta da origem até este ponto no interior do círculo trigonométrico e depois prolongue o segmento até "*cortar*" o círculo trigonométrico. Agora $r \leq 1$ e vale a igualdade se o ponto estiver sobre o círculo trigonométrico.

Então, agora é verdade que qualquer ponto P, do plano, determina de maneira única um *representante* no círculo trigonométrico da forma $e^{i\alpha}$ e desta maneira ficam determinadas duas "*coordenadas*" de P: r, α que são

- r o módulo de P,
- α o argumento de P.

Vou reescrever o parágrafo acima:

Agora é verdade que qualquer *número complexo* z, do plano, determina de maneira única um *representante* no círculo trigonométrico da forma $e^{i\alpha}$ e desta maneira ficam determinadas duas "*coordenadas*" de z: r, α que são

- r o módulo de z,
- α o argumento de z.

5

Se é verdade que há uma identidade entre pontos do plano e os números complexos, também é verdade que pensar em *números complexos* tem um poder maior. Os números complexos são *números*, tem propriedades algébricas e este o meu objetivo aqui. Estive sugerindo que $\mathbf{C}$ é equivalente a $\mathbf{R}^2$ e isto não é verdade embora eu não vá entrar nesta questão aqui, mas fica a observação e lhe posso sugerir que leia a respeito de *funções complexas* para encontrar onde o plano fica diferente dos números complexos.

Eu não sei da história da invenção de Euler que leva o nome de *fórmula de Euler-De Moivre*. Mas certamente Euler, e aqui eu estou inventando a história na forma como me parece provável, verificou que as duas fórmulas da trigonometria para $\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta)$ justificavam com perfeição a invenção desta fórmula

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = \tag{49}$$
$$= (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \tag{50}$$
$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)) = \tag{51}$$
$$\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) = e^{i(\alpha+\beta)}; \tag{52}$$

Eu voltar mais a frente a esta descoberta de Euler, e ele não esteve sozinho nesta descoberta. Um francês, *De Moivre*, que se refugiou na Inglaterra protestante fugindo da perseguição religiosa na França, onde viveu dando aulas particulares de Matemática em Londres, também descobriu esta fórmula apenas de uma maneira *extremamente complicada*. E por favor, não coloque um tom pejorativo na invenção de *De Moivre*. Ele apenas seguiu um caminho diferente do trilhado por Euler, ele pensou no binômio de Newton e deve ter feitos horas e horas de contas até verificar que sua fórmula estava certa.

$$(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha); \tag{53}$$

De Moivre calculou a enésima potência de

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

possivelmente usando *binômio de Newton* e uma sucessão de complicadas identidades trigonométricas. Sua fórmula sai de graça a partir da "*formula de Euler*".

Saindo da *fórmula de Euler* se obtém facilmente a fórmula de *De Moivre*. Ambas repousam na expressão da soma de arcos do $\cos, \sin$.

Estas duas formas é que dão nascimento a expressão chamada polar de um número complexo:

$$u = \rho e^{i\alpha} = a + bi; a = \rho\cos(\alpha); b = \rho\sin(\alpha); \tag{54}$$

$$\rho = \|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}; \cos(\alpha) = \frac{a}{\rho}; \sin(\alpha) = \frac{b}{\rho} \tag{55}$$

E posso agora escrever a definição do produto de números complexos:

Definição 2 (Produto de números complexos) *Produto de números complexos*
Dados dois números complexos $u = a + bi = \|u\|e^{i\alpha}; v = c + di = \|v\|e^{i\beta}$; então $uv = \|u\|\|v\|e^{i(\alpha+\beta)}$ O produto de u por v é obtido com o produto dos módulos e a soma dos argumentos.

que pode ser expresso numa frase simples, como eu fiz com a adição,

Há livros com centenas de páginas sobre números complexos e um artigo não pode concorrer com esta extensão de informação, portanto aqui falta muita coisa que pode ser dita sobre estes números. Mas seria uma grande falta não mencionar uma importante operação com números complexos que é o *conjugado*:

Definição 3 (Conjugado de z) *Conjugado de z*
Se $z = a + bi = \rho e^{i\alpha}$ então $\overline{z} = a - bi = \rho e^{-i\alpha}$

Na figura (fig 6), página 10,

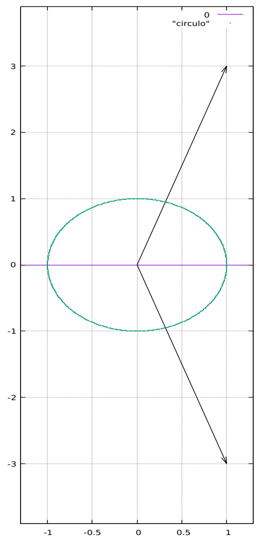


Figura 6: $z, \overline{z}$

você encontra o círculo unitário, e um número complexo de módulo maior do que 1 assim como seu conjugado. O conjugado de $z = (1 + 3i)$ é $\overline{z} = (1 - 3i)$.

A importância do conjugado se vê nestes cálculos:

$$z\overline{z} = \rho e^{i\alpha}\rho e^{-i\alpha} = \rho^2 \tag{56}$$

$$\|z\| = \sqrt{z\overline{z}} \tag{57}$$

o produto de z pelo seu conjugado é o quadrado do módulo de z permitindo uma fórmula prática para módulo de z.

$$\|\|z\|\| = \sqrt{z\overline{z}} \tag{58}$$

Como todo número real diferente de zero, todo número complexo diferente de zero tem um inverso multiplicativo, os cálculos seguintes mostram como obter a fórmula para o inverso de z.

$$z = a + bi = \rho e^{i\alpha}; w = c + di = \lambda e^{i\beta}; \tag{59}$$

$$1 = e^{i0}; \tag{60}$$

$$zw = \rho e^{i\alpha}\lambda e^{i\beta} = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{\rho}; \beta = -\alpha \tag{61}$$

$$w = \frac{1}{\rho}e^{-i\alpha} \tag{62}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{e^{-i\alpha}}{\rho} = \frac{\rho e^{-i\alpha}}{\rho^2} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2} \tag{63}$$

Dado $z; z = a + bi$ posso calcular $\rho e^{i\alpha}$ e consequentemente também $-\alpha, \frac{1}{\rho}$ com o que escrevo o inverso

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2} \tag{64}$$

Para os números reais diferentes de zero é verdade que se $\|z\| < 1$ então $\|\frac{1}{z}\| > 1$ e facilmente deduz-se da fórmula do inverso que esta relação continua verdadeira para números complexos, apenas agora a frase fica mais imponente: "*se um número complexo z, diferente de zero, estiver dentro do círculo trigonométrico então o seu inverso* $\frac{1}{z}$ *estará fora do círculo trigonométrico*" e vale a recíproca, "*se um número complexo diferente de zero, estiver fora do círculo trigonométrico então o seu inverso* $\frac{1}{z}$ *estará dentro do círculo trigonométrico*".

Euler definiu a exponencial complexa depois do que definiu o logaritmo complexo e foi neste ponto que Euler excedeu a De Moivre. Enquanto De Moivre descobriu a propriedade complicadíssima das potências do números complexo de módulo 1

$$(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)); \tag{65}$$

Euler viu que esta propriedade transformava somas em produtos que é o papel da exponencial e experimentou, definiu e deu certo:

$$e^{iy} = (\cos(y) + i\sin(y)); \tag{66}$$

depois foi somente multiplicar por um número real e^ρ para obter

$$e^{iy} = (\cos(y) + i\sin(y)); \tag{67}$$
$$e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)); \tag{68}$$
$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)); \tag{69}$$
$$z = x + iy; e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y); \tag{70}$$
$$|e^z| = |e^x(\cos(y) + i\sin(y))| = |e^x||(\cos(y) + i\sin(y))| = e^x; \tag{71}$$
$$arg(e^z) = arg(e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)) = y; \tag{72}$$
$$|e^z| = e^x; arg(e^z) = y; \tag{73}$$
$$z = x + iy; e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)); \tag{74}$$

e Euler definiu a *exponencial complexa*.

Agora, o que é z em e^z? Resposta:

$$z = x + iy; \tag{75}$$
$$w = e^z = e^x e^{iy} \Rightarrow z = ln(w); \tag{76}$$
$$ln(w) = e^x e^{iy} = \rho e^{iy}; \tag{77}$$
$$|ln(w)| = e^x; arg(ln(w)) = y; \tag{78}$$

e Euler também definiu o *logaritmo complexo*.

Euler, provavelmente, estava um passo à frente de De Moivre, mas também viveu cinquenta anos mais a frente do seu colega francês. Quando De Moivre morreu, e tendo predito o momento de sua morte, Euler deveria estar com 40 anos. Muito provavelmente não se conheceram, De Moivre foi um explorado pela sociedade inglesa, vivia em Londres como professor particular e se conta que alguém fez uma pergunta a Newton que teria respondido, "*pergunte ao De Moivre que ele sabe disto melhor do que eu*" e Newton poderia ter obtido uma posição de professor para De Moivre numa universidade inglesa tirando-o da dura vida de professor particular.

O logaritmo complexo merece um artigo a parte embora tudo esteja dito aqui, tem algumas sutilezas geométricas e topológicas que merecem ser destiladas à parte. Por exemplo, porque o logaritmo real não está definido para os números reais negativos? Tem uma bonita resposta quando se estuda o logaritmo complexo e vou fazer isto em outro artigo.

6 Raízes dos números complexos

Mas deixe-me retornar a $i = \sqrt{-1}$ e indagar se qualquer número complexo ou real tem raiz quadrada, como agora é o caso de -1. Uma forma simples de obter esta resposta consiste em expressá-la usando a *forma polar* dum número complexo:

$$z = \rho e^{i\alpha}; \tag{79}$$
$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\sqrt{e^{i\alpha}} = \pm\sqrt{\rho}e^{i\frac{\alpha}{2}} \tag{80}$$

E deixe-me fazer um comentário, se z estiver no círculo de raio ρ as suas raízes quadradas estarão no círculo de raio $\sqrt{\rho}$ e se *opõem diametralmente*, a partir do ângulo $\frac{\alpha}{2}$. No caso dos reais acontece o mesmo, porém tudo acontece dentro da reta, e a *oposição diametral* é simples troca de sinal.

Mais divertido é calcular a raiz cúbica dum número complexo z

$$z = \rho e^{i\alpha}; \tag{81}$$
$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho}\sqrt{e^{i\alpha}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\alpha}{3}}; \tag{82}$$
$$\tag{83}$$

E agora vem um segredo escondido dentro da geometria dos números complexos, o número $\sqrt[3]{z}$ está no círculo de raio $\sqrt[3]{\rho}$ e tem *argumento*, o ângulo, $\frac{\alpha}{3}$, e confira figura (fig 7), página 13, que obtive editando uma figura anterior onde marquei o ângulo $\frac{\alpha}{3}$ e desenhei um triângulo equilátero inscrito no circulo de raio $\sqrt[3]{\rho}$

De onde eu tirei que o argumento, $arg(\sqrt[3]{z})$ é $\frac{\alpha}{3}$? Foi da fórmula de Euler na qual eu apliquei a operação raiz cúbica que a inversa da terceira potência então o expoente na fórmula de Euler é $\frac{\alpha}{3}$. Depois desenhei um triângulo equilátero inscrito no circulo de raio $\sqrt[3]{\rho}$ com um dos vértices no ângulo $\frac{\alpha}{3}$ deste círculo. Este triângulo determina mais dois outros ângulos que são

$$\frac{\alpha + 2\pi}{3}, \frac{\alpha + 4\pi}{3}$$

Agora os cálculos finais, depois dos quais vou fazer comentários.

$$z = \rho e^{i\alpha}; \tag{84}$$
$$\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\alpha+2\pi}{3}, \frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\alpha+4\pi}{3}; \tag{85}$$
$$r = \sqrt[3]{\rho}; \tag{86}$$
$$re^{i\frac{\alpha}{3}}, re^{i\frac{\alpha+2\pi}{3}}, re^{i\frac{\alpha+4\pi}{3}}; \tag{87}$$
$$(re^{i\frac{\alpha}{3}})^3 = r^3e^{i\alpha} = \rho e^{i\alpha} = z; \tag{88}$$
$$(re^{i\frac{\alpha+2\pi}{3}})^3 = r^3e^{i\alpha+2\pi} = z; \tag{89}$$
$$(re^{i\frac{\alpha+4\pi}{3}})^3 = r^3e^{i\alpha+4\pi} = z; \tag{90}$$

E deixe-me explicar cada uma destas equações.

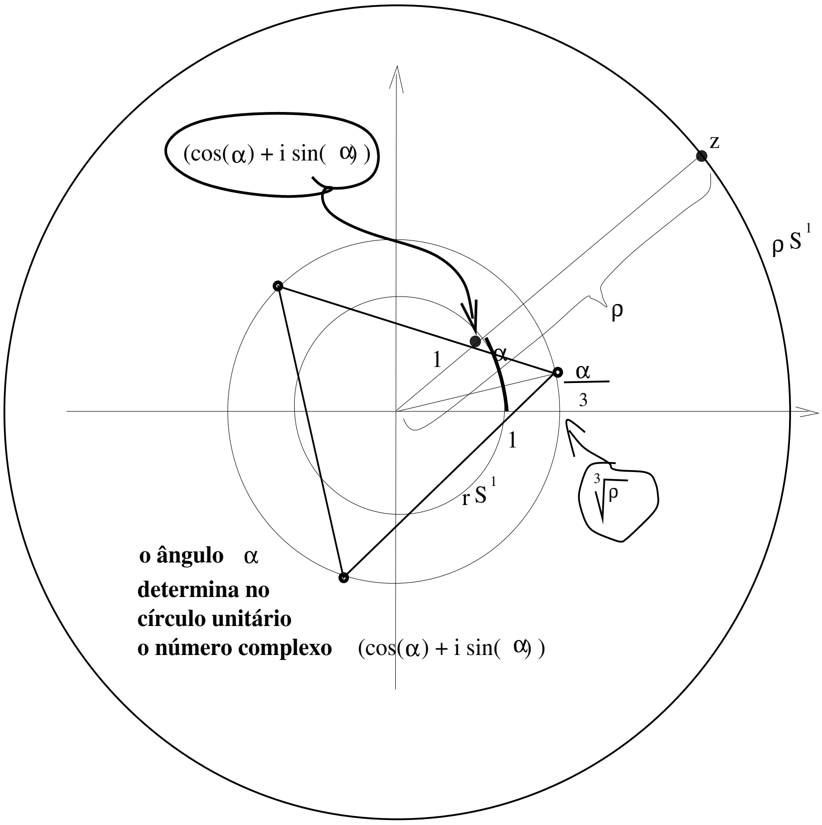


Figura 7: raízes cúbicas

1. Na equação (eq.84) eu escrevi o valor de z, na expressão da forma polar,

2. Na equação (eq.85) eu escrevi os ângulos que o triângulo equilátero determina no círculo de raio $\sqrt[3]{\rho}$ com um vértice determinando o ângulo $\frac{\alpha}{3}$. Os demais vértices são somas a este ângulo do ângulo $\frac{2\pi}{3}$ que é a medida comum para os ângulos dum triângulo equilátero.

3. Na equação (eq.86) eu escrevi o raio do círculo que vai conter as raízes cúbicas dum número que tenha por módulo ρ, é o círculo de raio $r = \sqrt[3]{\rho}$.

4. Na equação (eq.87) estão os vértices do triângulo equilátero, escritos como números complexos. São as três raízes do número complexo, z, dado.

5. Nas equações (eq.88), (eq.89), (eq.90) eu calculei a terceira potência das raízes encontrada na equação (eq.87) o que resultou em z.

Você vê assim que as raízes cúbicas num número complexo z qualquer são obtidas no círculo que tem por raio a raiz cúbica do módulo de z, $\sqrt[3]{\rho}$. Neste círculo eu identifico a primeira raiz que determina o ângulo $\frac{\alpha}{3}$ em que $\alpha = arg(z)$. Um triângulo equilátero tendo um vértice em cima desta primeira raiz determina as outras duas.

O método é exatamente o mesmo para calcular qualquer que seja a raiz $n-$ésima do número complexo $z = \rho e^{i\alpha}$:

1. achar primeira raiz no círculo com o raio $r = \sqrt[n]{\rho}$.

2. inscrever um polígono regular convexo com n lados neste círculo com o primeiro vértice determinando o ângulo $\frac{\alpha}{n}$.

3. os demais vértices deste polígono são as $n-1$ raízes restantes de z.

Um tópico bem interessante é o cálculo das raízes da unidade, mas agora se trata de $z = e^{i0}$, o argumento de z é $\alpha = 0$ e basta aplicar o algoritmo descrito acima. Mas neste caso é melhor começar com $z = e^{2i\pi}$ que é idêntico a $z = e^{i0} = 1$, mas vou querer dividir o *argumento* de z por n... As raízes da unidade vão ser os vértices dum polígono regular convexo inscrito no círculo trigonométrico $\mathbf{S}^1$ com o primeiro vértice posicionado em $z = e^{2i\pi} = 1$. O número de lados é índice da radiciação.

E agora, em vez de n use qualquer número real e você pode calcular as raízes t dum número complexo z qualquer, e t pode ser outro número complexo $\sqrt{]t]z}$... o que mostra o poder dos números complexos e também da fórmula de Euler-De Moivre.

Vou terminar calculando a raiz quadrada dum número complexo escrito na forma cartesiana $a + bi$. Depois da sequência de cálculos farei comentários. É esta a sugestão que peguei de Penrose, [2, página 103].

$$z = a + bi \mapsto \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}; \tag{91}$$

$$w = c + di = \sqrt{a + bi}; \tag{92}$$

$$w^2 = (c + di)^2 = c^2 - d^2 + 2icd = a + bi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c^2 - d^2 = a; \\ 2cd = b; \end{cases} \tag{93}$$

$$\begin{cases} d = \frac{b}{2c} \quad \Rightarrow \quad c^2 - d^2 = c^2 - \frac{b^2}{4c^2} = a; \\ c = \frac{b}{2d} \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{4d^2} - d^2 = a; \end{cases} \tag{94}$$

$$\frac{4c^4 - b^2}{4c^2} = a \quad \Rightarrow \quad 4c^4 - b^2 - 4ac^2 = 0 = 4c^4 - 4ac^2 - b^2 = 0; \tag{95}$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{4a + \sqrt{16a^2 + 16b^2}}{8}} = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})}; \tag{96}$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(Re(z) + \|z\|)}; \tag{97}$$

$$\frac{b^2}{4d^2} - d^2 = a \quad \Rightarrow \quad b^2 - 4d^4 = 4ad^2 \quad \Rightarrow \quad 4d^4 + 4ad^2 - b^2 = 0; \tag{98}$$

$$d = \pm\sqrt{\frac{-4a + \sqrt{16a^2 + 16b^2}}{8}} = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}; \tag{99}$$

$$d = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-Re(z) + \|z\|))}; \tag{100}$$

- Nas equações (eq.91) e (eq.92) eu coloquei o problema em termos da *expressão cartesiana* dos números complexos $z = a + bi$ e a sua raiz quadrada, $w = c + di$.
- Na equação e (eq.93) calculei o quadrado de w estabelecendo a igualdade com z o que me dá um sistema de equações para determinar a parte real e imaginária de w.
- Na equação e (eq.94) eu eliminei, alternadamente d ou c. Obtendo formas quadráticas numa única variável, que são equações biquadradas.
- Nas demais equações eu resolvi as equações biquadradas encontrando a expressão das raízes quartas de $a + bi$.

Deixo que você faça você mesma os cálculos com a fórmula de Euler-De Moivre para se verificar que é muito mais simples ver um número complexo $z = \rho e^{i\theta}$. Em particular a fórmula na equação (eq.97) ou na equação (eq.100) não me dão nenhuma pista sobre o módulo da raiz $w = c + di$, ao passo que a fórmula de Euler-De Moivre me diz que uma das 4 raízes se encontra no círculo de raio $\sqrt[4]{\rho}$ determinando nele o ângulo $\frac{\theta}{4}$ e as demais raízes são os vértices do quadrado tendo o primeiro vértice em $\sqrt[4]{\rho}e^{i\frac{\theta}{4}}$. Mas também é trabalhoso retornar deste ponto para a expressão cartesiana das raízes.

Conceitos relacionados:

- Logaritmo complexo.
- forma polar dum número complexo.
- raízes da unidade.

Índice Remissivo

Referências

[1] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[2] Roger Penrose. *The Road to Reality - A complete Guide to the Laws of the Universe*. 2004.

[3] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/, 2009.

[4] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[5] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.