

Equação diferencial da esfera

Praciano-Pereira, T. *

7 de abril de 2021

preprints da Sobral Matemática
no. 2021.05

Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Partindo da equação diferencial do círculo que tem uma expressão gráfica simples, calculo a equação diferencial da esfera mostrando que o gradiente é perpendicular à superfície no ponto em que ele é calculado. Estou usando derivada implícita, a fração de Leibniz e critico os infinitésimos.

palavras chave: equação diferencial da esfera, equação diferencial do círculo, fração de Leibniz, gradiente, infinitésimos.

Starting from the differential equation of the circle whose graphic expression is simple, I derive the differential equation of the sphere showing that the gradient is perpendicular to the surface at the point of calculus. I am using implicit derivation, the fraction of Leibniz and making a critic of infinitesimals

keywords: differential equation of the circle, differential equation of the sphere, fraction of Leibniz, gradient, infinitesimals.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 O meu objetivo

Vou obter a equação diferencial da esfera partindo da equação diferencial do círculo porque neste caso eu consigo dar uma interpretação geométrica. O uso da *derivada implícita* vai dar-me a oportunidade para discutir a *notação de Leibniz* que costumo chamar de *fração de Leibniz* e a confusão que Leibniz criou com 250 anos de tentativas para explicar uma fração em que tanto o numerador como o denominador tinham limites nulos para o que foi criada uma entidade, os *infinitesimais*, sem que nunca se tenha podido dar-lhe conteúdo exato, mas muita dor de cabeça para as alunas de *Cálculo Infinitesimal*. São contas simples, mas acho que as estou fazendo duma forma diferente e o meu objetivo é justificar *porque se dá o fluxo máximo duma onda energética encerrada numa região na direção do gradiente*, por exemplo, do calor encerrado numa garrafa.

Preciso da propriedade “o raio é perpendicular à tangente”, considerada por muitos como um *teorema* cuja demonstração usual, afirmo, não é uma *demonstração* mas simples reformulação da equação do círculo ou da esfera, [2]. Ela se aplica a qualquer região convexa do espaço que é o formato habitual de qualquer bolha energética se não houver pontos críticos atuando. Então a direção de maior intensidade de expansão da energia se dá na direção do gradiente. Os pontos críticos criam descontinuidades na derivada e justificam um estudo mais acurado em volta dos mesmos, que não é o meu objetivo aqui. Vai ser interessante estudar o que acontece na *superfície da garrafa nos pontos em que não houver gradiente*, onde falhar a diferenciabilidade.

2 Equação diferencial do círculo

Uma forma de “provar” que a tangente é perpendicular ao raio vem pela derivação implícita da equação do círculo

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad (1)$$

$$2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad (2)$$

$$\langle (x, y), (dx, dy) \rangle = 0 \Rightarrow \langle (x, y), (x_0 - a, y_0 - b) \rangle = 0; \quad (3)$$

Isto não é *prova* mas é um meio simples de convencer da veracidade desta relação a quem possa usar equações diferenciais, e serve até para mostrar porque no círculo a direção positiva é a contrária dos ponteiros do relógio. Aliás são exemplos de que a Matemática mais avançada torna a Matemática elementar complicada! Não é prova porque usa o teorema de Pitágoras para escrever a equação do círculo e indiretamente a própria definição do círculo, [2].

Confira a figura (fig. 1), página 1.

em que posso exibir tangente e raio.

Na equação (eq.2) eu calculei a derivada implícita que conduz direto à *fração de Leibniz* e a equação diferencial do círculo que mostra que a tangente é perpendicular ao raio. Na equação (eq.3) eu posso usar derivada implícita como um modelo para escrever as coordenadas dum vetor tangente ao círculo no ponto (x, y) e desta forma superar o problema confuso dos *infinitesimais* que representou uma praga nos curso de Cálculo durante todo o século 20. Devemos a Cartan, [1] a solução deste problema mostrando que a *fração de Leibniz* é apenas um modelo de onde se podem obter expressões das variedade tangentes.

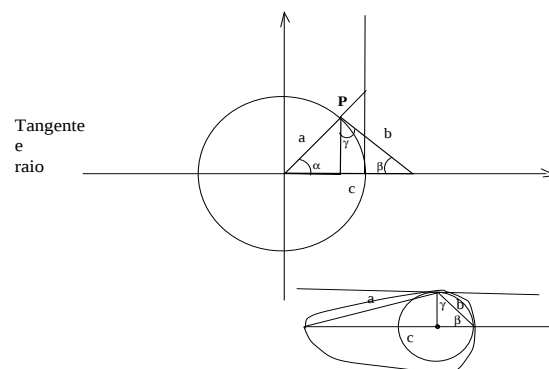


Figura 1:

3 Equação diferencial da esfera

Passsei pela equação do círculo por causa da figura (fig. 1), página 1 porque não vou ter oportunidade semelhante com superfícies como é o caso da esfera.

$$P = (x, y, z), C = (a, b, c), r > 0; \quad (4)$$

$$d(P, C) = r; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r; \quad (5)$$

$$w = Q(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2; w = r^2; \quad (6)$$

$$dw = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz; \quad (7)$$

$$dw = 2(x-a)dx + 2(y-b)dy + 2(z-c)dz = 0 \quad (8)$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \Rightarrow (x_0 - a)dx + (y_0 - b)dy + (z_0 - c)dz = 0 \quad (9)$$

$$\begin{cases} A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0; \\ A = \frac{\partial Q}{\partial x}|(a, b, c); B = \frac{\partial Q}{\partial y}|(a, b, c); C = \frac{\partial Q}{\partial z}|(a, b, c); \end{cases} \quad (10)$$

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = 0; \quad (11)$$

A equação (eq.10) exhibe a equação do plano tangente deduzida do modelo que a derivada implícita produz com o vetor (A, B, C) que é perpendicular ao plano tangente, o gradiente.

Estas contas valem para qualquer superfície $w = Q(x, y, z)$ e me interessam aquelas que determinem uma região convexa do espaço como é o caso da esfera porque elas representam um recipiente contendo uma fonte de energia em seu interior e o gradiente representa a direção *ótima de fuga* da energia irradiada do recipiente.

4 A fração de Leibniz

No sistema de equações (eq.4)- (eq.11) aparece a *fração de Leibniz* para formalizar a expressão das derivadas da superfície $w = Q(x, y, z)$ como um modelo da derivada que em cada ponto da superfície produz a *variedade linear tangente* quando forem as substituições na equação (eq.8), como um primeiro passo, escrevendo os valores das derivadas parciais para um ponto dado $P = (a, b, c)$ que se supõe que pertença à superfície e onde ela seja derivável. Em seguida, na equação (eq.9) eu calculei os valores numéricos, A, B, C das derivadas parciais no ponto P produzindo na equação (eq.10) a expressão da variedade linear tangente à superfície no ponto P .

Usando esta metodologia eu obtive a expressão da variedade linear tangente sem precisar fazer uso duma entidade fictícia que são os *infinitésimos* indefinidos e desnecessários. É a *derivada implícita* que me dá este poder junto com a interpretação de que se trata dum modelo que produz a *variedade linear tangente*.

Índice Remissivo

- circulo
 - raio
 - tangente, 1
- derivada
 - implícita, 1, 2
- direção
 - de fuga
 - ótima, 2
- figura, 1
- gradiente
 - maior intensidade, 1
- infinitesimais, 1
- infinitésimos, 2
- Leibniz
 - fração de, 1, 2
 - notação de, 1
- notação
 - de Leibniz, 1
- tangente
 - variedade linear, 2
- variedade
 - linear tangente, 2

Referências

- [1] Henri Cartan. *Calcul Différentiel*. Herman - Paris, 1967.
- [2] T. Praciano-Pereira. O raio e a tangente são perpendiculares no círculo. *preprints da Sobral Matemática - 2021*, 2021.