O raio e a tangente são perpendiculares no círculo

Praciano-Pereira, T. *

18 de março de 2021
preprints da Sobral Matemática
no. 2021.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Há várias demonstrações que encontrei na Internet, todas semelhantes a [1] usando que o comprimento do segmento de reta que parte dum ponto para uma reta, perpendicularmente, é a distância do ponto à reta e logo que o raio é perpendicular à tangente, mas a "demonstração" se aplica a qualquer curva diferenciável e convexa entre as quais o círculo é única porque o centro é o ponto equidistante da curva convexa que é a sua fronteira e isto é a definição do círculo. Então não há o que demonstrar nesta propriedade, ela é a própria definição do círculo. Falo de *variedades, hiperplanos* e chego na expressão do raio tangente à esfera.

palavras chave:
definição do círculo, hiperplano, tangente e raio, variedade.

I found a proof, [1], which is repeatedly presented in several pages of the Internet to the property "*the tangent line is perpendicular to the radio*". The proof uses the fact that the distance of a point P to a right line is the length of the segment of right line perpendicular from the point P to the right line. But this proof applies to every convex and differentiable curve to which class the circle belongs to and is singled out as the one for which the center is the unique point equidistant to the boundary and thus the radius is perpendicular to any tangent line. This is the very definition of the circle and there is nothing to prove here. This is the same with the sphere and its radius and this motivates me to talk about *manifold, hyperplane*.

keywords: hiperplane, manifold, tangent and radius are perpendicular, the definition of circle, the case of the sphere

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 Plano do trabalho

A tangente e o raio são perpendiculares no círculo, confira a figura (fig. 1), página 1.

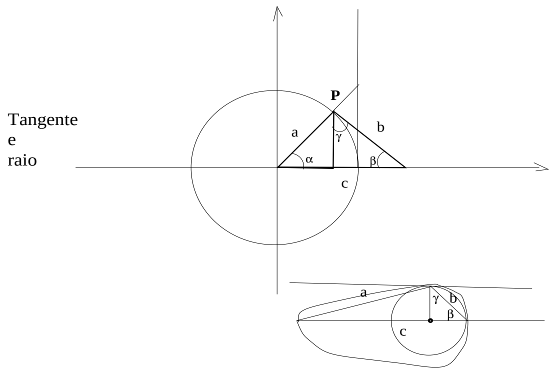

Figura 1:

Tentei demonstrar esta propriedade do círculo e da tangente, sem sucesso. Fiz uma busca por uma demonstração e achei uma, [1], que se repetia em diversos sites se baseando na distância mínima dum ponto a uma reta, entretanto o método que ela encerra se aplica a qualquer curva diferenciável convexa.

Dado um ponto C interior a uma *curva convexa diferenciável* γ, confira o detalhe na parte inferior da figura (fig. 1), existe um circulo de raio máximo $(\mathcal{O}, r)$, que seja tangente à curva contido no interior de γ tal que a fronteira de $\mathcal{O}$ seja tangente também a γ no ponto P.

O caso dos polígonos regulares inscritos no círculo, que são curvas convexas teria que ter um tratamento diferente, mas eles não me interessam aqui e elimino os polígonos deste caso porque os polígonos são *quase sempre diferenciáveis*, falhando a diferenciabilidade exatamente nos vértices.

O raio r de $\mathcal{O}$ é a distância do ponto C à curva. A curva γ admite em P uma reta tangente que é também tangente à fronteira de $\mathcal{O}$ e como r é a distância de C ao ponto P então o raio, por ser a distância à reta tangente tem que ser perpendicular à tangente à γ no ponto P, pela definição de distância dum ponto a uma reta que é o menor caminho do ponto à reta. A tangente à γ também é tangente à fronteira do círculo $\mathcal{O}$ neste ponto P então o raio é perpendicular à tangente, no círculo.

Este raciocínio mostra que a demonstração de que o raio é perpendicular à tangente no círculo se aplica a qualquer *curva convexa diferenciável* mas o círculo, por definição tem um ponto privilegiado chamado *centro* que equidistante de todos os pontos da fronteira sendo esta distância o raio.

O que torna diferente o círculo de qualquer outra curva convexa é que o centro C é único para todos os pontos da fronteira, é o ponto que fica equidistante de todos pontos da fronteira do círculo. A propriedade de que raio e tangente são perpendiculares é uma simples reformulação da definição geométrica do círculo.

A definição do círculo diz que a distância do centro ao ponto de tangência duma reta à fronteira do círculo é a menor possível portanto que o raio é perpendicular à reta tangente sendo o menor caminho por um segmento de reta dum ponto a uma reta é pela via dum segmento perpendicular à reta.

2 Existe algum outro tipo de *esfera*

E existe algum outro tipo de *esfera* que não seja a tridimensional? Vou mostrar-lhe sim e vou inclusive romper a barreira tridimensional em que vivemos. Vou fazer isto através duma série de exemplos porque estarei falando de novos conceitos. Procure se liberar de preconceitos próprios da prisão tridimensional em que vivemos, confira [2].

A nossa linguagem geomérica é uma herança cultural da Geometria Euclidiana a que estivemos presos até o século 17 quando Lobachevsky, um matemático russo e János Bolyai, um matemático húngaro, desenvolveram, independente um do outro, a geometria hiperbólica que seria base da *teoria da relatividade*, confira *teoria da relatividade*. Lobachevsky e Bolyai mostraram que a concepção geométrica euclidiana era restritiva e assim criaram o ramo das *geometrias não euclianas*. O conceito de *dimensão* também evoluiu junto com uma das ideias que sairam do Cálculo Diferencial e Integral para a criação da *Geometria Diferencial*.

Ao longo do processo para nos libertar da prisão tridimensional surgiu um conceito importante, *variedade* que você pode considerar como sinônimo de *objeto* e vou fazer algumas afirmações para conduzí-la a compreender este novo conceito. Vou deixar algumas repetições no texto com o objetivo de ser didático e lhe permitir de fazer comparações.

1. O círculo é uma figura plana e sua definição é *o conjunto dos pontos do plano que equidistam dum ponto fixo chamado centro*. O círculo é a fronteira do *disco*, que é uma *bola* plana. A definição do *disco* é " *o conjunto dos pontos do plano que cuja distância dum ponto fixo chamado centro* é menor ou igual a um número dado chamado raio, r. É definida por um desigualdade. As tangente ao *círculo plano* são as retas que são *variedades lineares* de dimensão 1. Como as retas são tangentes aos círculos, e a tangência é uma *relação de equivalência*, então os *círculos planos* são variedades de dimensão 1, e não são *variedades lineares*. As retas são *variedades lineares*.

2. A reta é um espaço de dimensão 1, e um ponto um espaço de dimensão zero. O *disco* de dimensão 1 é um segmento de reta e ponto médio deste segmento de reta é o centro do *disco*, ou o centro da *bola* de dimensão 1. Por exemplo o intervalo $[a, b]$ é uma bola cuja centro é $\frac{a+b}{2}$. A fronteira desta bola é formada de dois pontos $\{a, b\}$ é uma *variedade* de dimensão zero, um conjunto de pontos isolados é uma *variedade* de dimensão zero. E quais seriam as tangentes dum disco de dimensão 1?

3. Aquilo que se chama habitualmente *esfera* é um *circulo* de dimensão dois, é a fronteira duma *bola* de dimensão três. As tangentes da *esfera tridimensional* são *planos*, que são *variedades lineares* de dimensão 2. Pela *relação de equivalência* a *esfera* da dimensão 3 é uma variedade de dimensão 2, que não é linear.

4. Com este novo vocabulário eu fico livre para pensar em qualquer dimensão. Na dimensão 4 tem-se uma *bola quadridimensional* cuja fronteira é uma *esfera* da dimensão 4 sendo uma *variedade* de dimensão 3. Observe os casos acima para verificar que da *bola* para a *esfera*, que é a fronteira da bola houve uma queda de uma dimensão. As tangentes duma *esfera de dimensão 4* são *variedades lineares* de dimensão 3, são os *hiperplanos* da quarta dimensão. Pela *relação de equivalência*, como a fronteira da *bola de dimensão 4*, que é a *esfera* da quarta dimensão, é uma *variedade* de dimensão 3, não é uma *variedade linear*.

5. Ainda tem mais um conceito a mencionar, são os *hiperplanos*. Deixe-me introduzi-los também usando exemplos. No plano, que é uma variedade linear de dimensão dois, os *hiperplanos* são as retas que são variedades de dimensão 1. Quer dizer que um *hiperplano* é a *variedade linear* de dimensão imediatamente inferior ao espaço que estivermos referenciado. É um *conceito relativo*! Quando eu me referir a um hiperplano tenho que dizer qual é a dimensão do espaço.

   - Numa reta, que é um espaço de dimensão 1, os *hiperplanos* são pontos, eles têm dimensão zero. As retas são *variedades lineares* de dimensão 1, os seus *hiperplanos* têm dimensão zero.
   - Num plano, que é um espaço de dimensão 2, os *hiperplanos* são as retas, eles têm dimensão 1. Os planos são *variedades lineares* de dimensão 2, os seus *hiperplanos* têm dimensão 1.
   - Num *espaço tridimensional*, os *hiperplanos* são os planos, eles têm dimensão 2. A Geometria Euclidiana apenas reconhecia a existência de um *espaço tridimensional*, que chamava simplesmente de *espaço*. Mas um *espaço tridimensional* da Geometria Euclidiana é um *hiperplano* dum espaço de dimensão 4. E da mesma forma como num plano tem uma infinidade de hiperplanos, retas, também num espaço de dimensão 4 tem uma infinidade de hiperplanos, os *espaços* da Geometria Euclidiana.

> Observe que para exemplificar o conceito de *hiperplano* eu me vi forçado a usar os conceitos da Geometria Euclidiana, *ponto, reta, plano, espaço*. Mas fiquei livre da *prisão tridimensional* em que Geometria Euclidiana me encerra, [2].

Agora não há nada mais para demonstrar, o raio da *bola* de dimensão três é perpendicular ao plano tangente, é a própria definição da *esfera* tridimensional.

O raio da *bola* de dimensão n determinado pelo ponto P na sua esfera, é perpendicular ao hiperplano tangente neste ponto. A dimensão da esfera é $n - 1$.

Índice Remissivo

Referências

[1] khanacademy. Prova: o raio é perpendicular à reta tangente. *https://pt.khanacademy.org/*, 2021.

[2] T. Praciano-Pereira. *Prisioneiros da terceira dimensão*. Chiado Editora, 2017.