O teorema de Tales

Praciano-Pereira, T *

30 de dezembro de 2020
preprints da Sobral Matemática
no. 2020.12
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Reuno aqui dois dos teoremas devidos a Tales de Mileto e o teorema da comparação entre volumes que aparece dentro da lei dos cossenos que se deve a Desargues, Os conceitos usados fazem parte das relações entre figuras semelhantes, lados homólogos e suas proporcionalidades com comprimento, área e volume.

palavras chave: proporcionalidades, teorema de Desargues, teoremas de Tales,

I am putting together two of the theorems of Thales of Mileto joining here also the theorem which establishes the proportionality among volumes and one dimensional homologous line segments taken in each of the manifolds whose measure we are comparing which is a theorem due to Desargues.

keywords: proportionalities, theorem of Desargues, theorems of Thales.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 Plano do trabalho

Se me ocorreu uma simples demonstração para o teorema de Tales do triângulo retângulo que também me levou a refazer uma antigo resultado sobre a classificação dos triângulos do plano que acho que agora ficou mais precisa.

Como complemento estou anexando o teorema de Tales para proporcionalidade de segmentos de reta entre figuras semelhantes que é uma ideia naturalmente puxada pela classificação dos triângulos.

A generalização deste segundo teorema de Tales, para volumes, é o teorema de Desargues que é central na *lei do cosseno* para o cálculo de volumes, mas eu omiti a demonstração porque acho que ela ficaria perfeita dentro do espirito da demonstração do teorema fundamental dos morfismos e fica como um desafio para a leitora, [1].

2 Primeiro teorema de Tales

Um dos teoremas devidos a Tales de Mileto, estabelece que se um triângulo inscrito num círculo tiver como um dos seus lados, o maior lado, o diâmetro, então ele é um *triângulo retângulo*, a figura (fig. 1), página 1,

mostra um triangulo inscrito numa circunferência de modo que o maior lado coincide com o diâmetro. A soma dos três ângulos, $\alpha + \beta + \gamma$ correspondem ao total da circunferência do círculo, se eu tomar para isto a soma dos correspondentes segmentos do círculo que eles determinam, portanto 2π e um outro teorema da Geometria nos garante que esta soma na verdade é π disto eu posso deduzir que a medida de cada um dos ângulos é a metade do arco que eles subentendem e assim $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

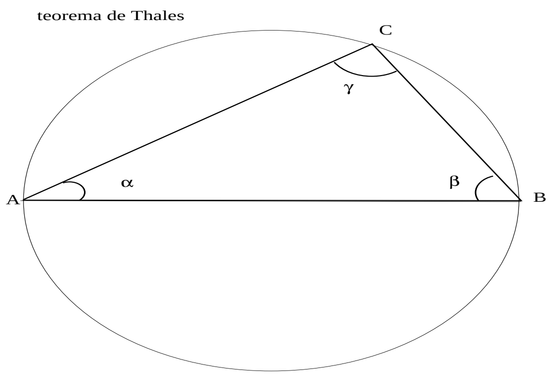


Figura 1:

Consequência, se um triângulo retângulo estiver inscrito num círculo, então, um dos seus lados, o maior, é o diâmetro do círculo. É a recíproca do teorema de Tales.

Posso obter uma variante deste teorema de Tales fazendo uma pequena alteração na posição do vértice A, movendo-o para a posição E ou para a posição D. Vou obter dois outros triângulos que têm um lado em comum com primeiro, $\overline{BC}$, é imediato que os ângulos de cada um destes triângulos, *no vértice* C são, respectivamente,

- no caso D agudo, quer dizer, o ângulo em C mede *menos do que* $\frac{\pi}{2}$
- e no caso E obtuso, quer dizer, o ângulo em C mede *mais do que* $\frac{\pi}{2}$.

O resultado desta *variação* é que agora posso estabelecer de forma muito simples uma relação de equivalência entre todos os triângulos do plano e uma seleção dos triângulos inscritos num círculo e mais precisamente no *círculo trigonométrico* $\mathbf{S}^1$.

Com isto eu tenho *todos os possíveis tipos de triângulos* representados como triângulos inscritos num círculo, *uma classificação para todos os triângulos do plano*.

Cada um destes triângulos é um representante de classe para a relação de equivalência entre triângulos.

- Qualquer triângulo *obtusângulo*, com um ângulo que meça mais do que $\frac{\pi}{2}$ estará representado escolhendo o terceiro ponto, E, no *semicírculo* superior do círculo na figura (fig. 2), página 2.

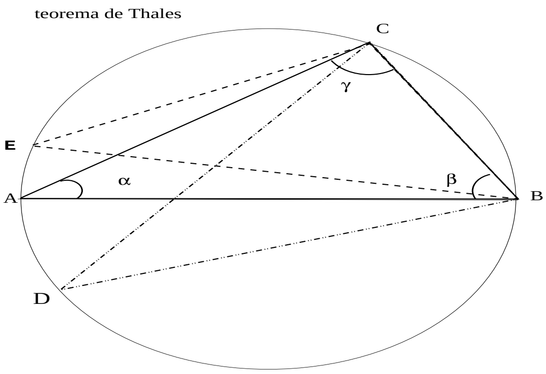


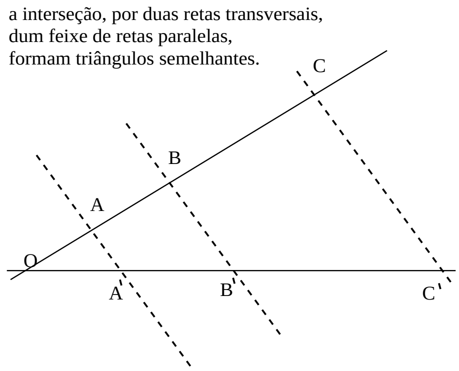
Figura 2:

- Qualquer triângulo *acutângulo*, cujos ângulos tenham todos medidas inferiores a $\frac{\pi}{2}$, todos os ângulos sejam agudos, estará representado escolhendo o ponto D no *semicírculo* inferior do círculo na figura (fig. 2), página 2.
- Qualquer triângulo retângulo é equivalente a um triângulo obtido selecionando o vértice C no *semicírculo* superior deixando A, B fixos determinando o diâmetro. Se $C = A$ ou $C = B$ ainda vale o teorema de Pitágoras e se tem um *triângulo retângulo degenerado* que se reduz a um segmento de reta quando um dos catetos é nulo e o outro coincide com a hipotenusa. Eliminei a possibilidade de selecionar C no *semicírculo inferior* porque assim haveria dois representantes de classe para cada classe de equivalência.

3 Segundo teorema de Tales

Um outro teorema que se deve a *Tales de Mileto* estabelece

Teorema **1 (das transversais)** *e um feixe de paralelas*
A interseção, por duas retas transversais, dum feixe de retas paralelas formam triângulos semelhantes.



Dem :
A figura (fig. 1), página 2, mostra geometricamente os triângulos equivalentes e a demonstração aproveita a figura (fig. 1) mas, por indução, vale para um número qualquer de retas paralelas.

Os dois primeiros triângulos são semelhantes porque têm um ângulo comum e o segundo ângulo em A' e B' são iguais porque as duas retas paralelas cortam uma terceira reta, a reta horizontal. Então o terceiro ângulo é igual nos dois primeiros triângulos. A demonstração é a mesma para qualquer outra combinação dos triângulos dois a dois.

q.e.d .

É interessante a generalização tridimensional deste teorema, que um *teorema de Desargues* que permite calcular volumes a partir de outro que lhe seja equivalente. Este teorema contém a mesma ideia do teorema de Tales de Mileto, mas agora envolvendo volumes. Ele é usado na *lei do cosseno* para volumes.

4 Uma generalização dum teorema de Tales

A afirmação agora é

Teorema 2 (de Desargues) *Volumes e seções cônicas Considere um cone qualquer e um feixe de planos paralelos que cortem este cone com ângulo diferente de zero relativamente à diretriz do cone (ou as diretrizes do). Os volumes das interseções dos cone determinadas por dois dos planos paralelos são proporcionais.*

Dem :

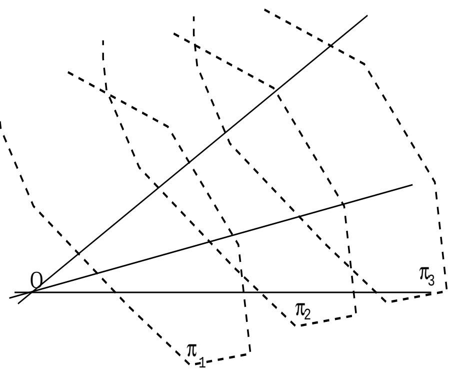
Se o feixe de planos paralelos cortar o cone com ângulo zero relativamente à diretriz se produzirão figuras com volume nulo, o que não interessa. Se cone for gerado por uma única geratriz seguindo uma curva que fique num onde a geratriz não se encontre, esta curva caracteriza o cone. Se for um círculo, será um cone circular. Se for um polígono, e este polígono que vai caracterizar o cone. Na figura (fig. 2) eu "desenhei" *um cone triangular, a diretriz percorre um triângulo.*

Na figura (fig. 2), página 3,
você pode "ver" *os três planos paralelos*

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3; \tag{1}$$

e dois a dois eles determinam volumes que são rombos *do cone, quer dizer pedaços do cone determinados por dois planos que não sejam paralelos com qualquer geratriz, e na figura (fig. 2) há três geratrizes que na verdade é qualquer das retas que se originam no ponto O e percorra o triângulo de base do cone que pode ser qualquer um dos triângulos determinados pelo cone e por um dos planos π_i.*

A razão de proporcionalidade é dada por quaisquer dois segmentos de reta, homólogos, *contidos na superfície que contém as geratrizes. Este conceito,* homólogo, *é o mesmo usado na referência dos lados de triângulos, ou polígonos semelhantes. São segmentos que tenham a mesma função em dois objetos semelhantes, por exemplo, as hipotenusas. em dois triângulos retângulos semelhantes, ou* um dos catetos *e o seu* homólogo. *O valor da razão de proporcionalidade é a razão entre os cubos das medidas dos segmentos* homólogos *escolhidos porque estou comparando volumes. Compare com a* lei do cosseno *que estabelece a proporcionalidade entre áreas de figuras planas, mesmo que elas se encontrem num espaço de dimensão maior do que dois... então a razão de proporcionalidade se calcula usando o quadrado das medidas dos* segmentos homólogos *escolhidos.*



O texto do teorema ficou incompleto apenas mencionando que a razão de proporcionalidade seria determinada usando segmentos homólogos e agora eu posso terminar a redação.

Deixe-me designar por V_2 o volume determinado pelos planos π_1, π_2 e V_3 o volume determinado pelos planos π_2, π_3, algo assim como se o plano π_2 fosse a base de V_2 e o plano π_3 fosse a base de V_3, para justificar a notação.

Então a formulação do teorema seria:

- *Considere dois segmentos homólogos nas superfícies externas de V_2 e de V_3 cujas medidas sejam*

$$\rho_2, \rho_3 \in \mathbf{R}^{++}; \tag{2}$$

dois números reais estritamente positivos.

- *Para não entulhar demasiado a notação, permita-me uma* metonímia*, vou trocar o objeto geométrico, V_2 pelo número real que representa o seu volume chamando este último de V_2. Agora vem a proporção entre os dois números reais V_2, V_3*

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{\rho_2^3}{\rho_3^3}; \tag{3}$$

A razão de proporcionalidade entre os volumes é a segunda fração na equação (eq.3).

Apenas para comparar, veja como ficaria a relação de proporcionalidade entre dois triângulos semelhantes T_2, T_3 se eu escolher os dois segmentos homólogos sendo as alturas h_2, h_3 aplicando a mesma figura literária para agora designar-lhes as áreas como T_2, T_3, eu teria

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{h_2^2}{h_3^2}; \tag{4}$$

porque a dimensão das variedades comparadas agora é dois, e no caso dos volumes a dimensão é três. Se estiver comparando lados homólogos l_2, l_3 dos dois triângulos, e agora usando l_2, l_3 para representar as medidas destes lados, dois números reais, eu teria

$$\frac{l_2}{l_3} = \frac{h_2}{h_3}; \tag{5}$$

porque estou comparando os volumes de variedades de dimensão 1.

q.e.d .

Se você for perspicaz terá notado que eu não apresentei nenhuma demonstração do último teorema, apenas fiz uma descrição do resultado. Envie-me a demonstração que eu corrijo o texto dando-lhe o crédito. Entretanto a demonstração pode seguir apenas usando relação de equivalência possivelmente usando a ideia contida da demonstração que fiz do *teorema fundamental dos morfismos*, [1].

Conceitos relacionados:

- Soma dos ângulos dum triângulo.
- Triângulo inscrito numa circunferência.
- Medida do ângulo que subentende o arco dum círculo.
- Relação de equivalência entre triângulos do plano.
- Proporcionalidade entre comprimentos, áreas e volumes.

Índice Remissivo

Referências

[1] Tarcisio Praciano-Pereira. Teorema fundamental dos morfismos. Technical report, Sobral Matemática, 2020.