Potência por convolução da função característica do intervalo $[0, 1]$

Praciano-Pereira, T. *

2 de dezembro de 2020
preprints da Sobral Matemática
no. 2020.13
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

O cálculo das potências por convolução das funções características se beneficia duma propriedade básica da derivada do mesmo produto envolvendo a medida de Dirac. Esta propriedade pode ser usada para facilmente calcular uma nova potência por convolução, é o que vou mostrar neste artigo.

palavras chave: derivada do produto por convolução, função característica, potências por convolução,

Convolution power of characteristic functions have a nice derivative property, putting Dirac measure in line, which turns easy the calculus of the next power, this is the point in this paper.

keywords: characteristic function, convolution power, derivative of convolution power.

* tarcisio@sobralmatematica.org

1 Propriedade básica da potência por convolução

Neste artigo eu vou designar por $\chi = \chi_{[0,1]}$, a função característica do intervalo $[0, 1]$ cujas potências por convolução vou também calcular até a sexta potência. O método usado pode ser facilmente expandido para potências maiores e espero que como consequência deste trabalho eu consigo obter uma metodologia mais simples para este cálculo. Eu já obtive um algoritmo bem genérico, [2], para o cálculo duma potência qualquer, mas o resultado contém arredondamentos porque foi produzido com um programa em linguagem do tipo `C`. O meu objetivo aqui é obter as expressões algébricas para pedaços de polinômios que compõem o *splines*. A enésima potência por convolução de χ é $(n-1)-$splines.

Vou usar a notação de potência significando sempre *potência por convolução*. A propriedade seguinte das potências por convolução da função característica do intervalo $[0, 1]$ será seguidamente usada neste artigo

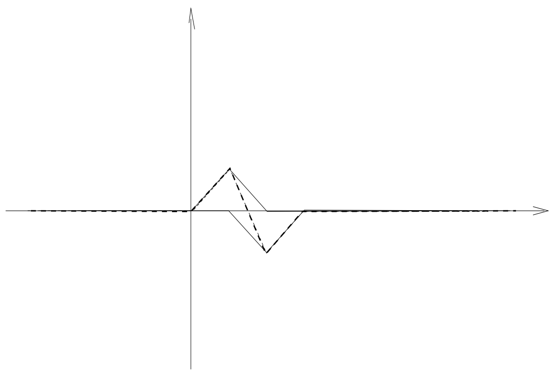
$$f = \chi^n = \chi * \chi^{n-1}; \tag{1}$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{d\chi}{dx} * \chi^{n-1} = \chi * \frac{d\chi^{n-1}}{dx}; \tag{2}$$
$$\frac{df}{dx} = (\delta_0 - \delta_1) * \chi^{n-1} = \chi_0^{n-1} - \chi_1^{n-1} = \chi^{n-1} - \chi_1^{n-1}; \tag{3}$$

Por exemplo, se $T = \chi^2$

$$T = \chi^2; supp(T) = [0, 2] \tag{4}$$
$$\frac{dT}{dx} = \frac{d\chi}{dx} * \chi = (\delta_0 - \delta_1) * \chi = \chi_0 - \chi_1; \tag{5}$$
$$f = \chi^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = (\delta_0 - \delta_1) * T = T_0 - T_1; \tag{6}$$
$$f(x) = \begin{cases} x < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \\ x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^x t dt = \frac{x^2}{2}; \\ x \in [1,2] \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} + 3x - x^2; \\ x \in [2,3] \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-6x+9}{2} \\ x > 3 \quad \Rightarrow \quad 0; \end{cases} \tag{7}$$

e como estas duas translações têm uma pequena interseção nos suportes, o calculo da integral de $\frac{df}{dx}$ fica muito simples como está exemplificado na figura (fig. 1), página 1.

Usando a mesmo método eu vou calcular $f = \chi^4$. Os suportes de χ^3, χ_1^3 têm por interseção todos os subintervalos de definição de χ^3 exceto o primeiro e o último. Então vou calcular as diferenças nos intervalos do meio e finalmente vou calcular a integral sempre usando o valor no final do intervalo anterior como condição inicial da integral no intervalo seguinte. No último é se aplica apenas a diferença e No primeiro vou apenas calcular a integral, sem nenhuma diferença, e no último é se aplica apenas a diferença usando também o valor da integral do penúltimo inter-



`Figura 1:`

valo. Esta é a regra a ser utilizada em todas as potências sucessivas.

$$f(x) = \chi^4(x); supp(f) = [0,4]; \tag{8}$$

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & \Rightarrow & 0; \\ x \in [0,1] & \Rightarrow & \frac{x^3}{6}; \\ x \in [1,2] & \Rightarrow & -\frac{x^3}{2} + 2 * x^2 - 2x + \frac{4}{6}; \\ x \in [2,3] & \Rightarrow & \frac{x^3}{2} - 4x^2 + 10x - \frac{22}{3}; \\ x \in [3,4] & \Rightarrow & \frac{x^3}{6} + 2x^2 - 8x + \frac{32}{3}; \\ x > 4 & \Rightarrow & 0; \end{cases} \tag{9}$$

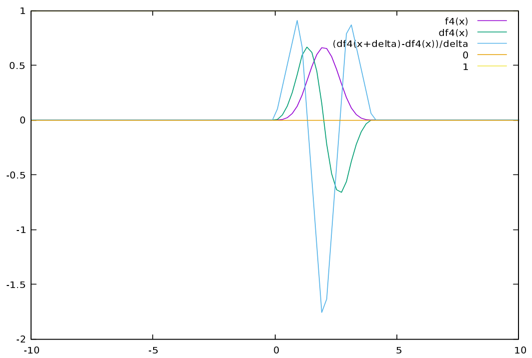
(10)

Destes exemplos se deduz uma regra algorítmica para o cálculo da enésima potência de χ a partir da potencia $n-1$ e vou me referir as duas funções como $f = \chi^n$ e f',

- Calcula-se $f' - f_1'$ que é a derivada de f e isto se faz calculando a diferença entre as equações de f' tendo o cuidado de subtrair as equações pulando um nível no sistema de equações mas considerando a próxima equação substituindo-se x por $x-1$, o que corresponde a translação f_1'.
- Há uma "*defasagem*" de um item na lista das equações de f' e f_1', pela translação. Eu vou estar somando $f' - f_1'$ portanto na primeira soma f_1' é zero, e na última soma f' é zero.
- Eu testo estes cálculos usando `gnuplot`, ou melhor, eu faço todos os cálculos usando `gnuplot` e verificando após cada passo se o gráfico está correto.
- Cálculo da integral de $f' - f_1'$, observando que na equação seguinte devem entrar duas constantes, (1) o valor da integral da linha anterior, como condição inicial para a próxima integral, e se houver sido feito uma simplificação da expressão, o que é aconselhável para reduzir o número de termos, e a verificação com `gnuplot` feita linha por linha me garante contra eventuais erros, ao calcular a integral usando a expressão do teorema fundamental do Cálculo, a diferença entre os pontos de integração do intervalo $[a, x]$ que corresponder ao pedaço de polinômio que estiver sendo integrado.

O programa [3, `ConvolucaoPotencia01.gnuplot`] mostra estes cálculos e representa um bom ponto de partida para o cálculo da quinta potência por convolução de χ.

A figura (fig. 2), página 2,



`Figura 2:`

mostra f, f', f'', o gráfico foi feito com o programa citado acima.

Índice Remissivo

Referências

[1] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[2] A.J. Neves and T. Praciano-Pereira. Convolutions power of a characteristic function. *arxiv.org*, 2012, April, 22:16, 2012.

[3] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/, 2009.

[4] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[5] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.