Números Complexos
Os números

Praciano-Pereira, T [*]

18 de maio de 2020
preprints da Sobral Matemática
no. 2020.07
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Este artigo sobre os números complexos faz parte do meu projeto de livro de Cálculo cujo primeiro capítulo se propõe a descrever os números duma forma que eu possa depois definir as funções sobre os números e não vejo nenhuma razão para omitir no Cálculo as funções complexas junto com as funções reais uma ver que as contas são as mesmas inclusive para os dois métodos fundamentais do Cálculo, derivada e integral, embora haja uma *semântica* diferente nos dois casos de que vou fazer uso logo no início. Na última seção eu vou mostrar como Euler definiu a exponencial complexa e o logarimo complexo.

palavras chave: exponencial complexa, logaritmo complexo, números complexos.

This paper is about complex numbers as part of my plan of writing a book on Calculus and the first chapter will be about numbers following another chapter about functions and I cannot see why I should omit complex functions as the calculations are exactly the same for real functions and this true for the two main points of Calculus, derivatives and integrals though the sense changes from one case to the other and I will grasp this opportunity to move between the two senses. In the last section I will show how Euler has given a definition to the complex exponential and to the complex logarithm.

keywords: complex exponential, complex logarithm. complex numbers.

[*]tarcisio@sobralmatematica.org

1 Como apareceram os números complexos

Não sou historiador, mas a História vive sendo violada pelos interesses dos que pretendem dominar os outros quando a distorcem e na verdade a *editam* para dobrá-la aos seus interesses muitas vezes nefastos. Não quero igualar-me a tais monstros, mas o fato é que é uma dura pesquisa esta de descobrir como a ciência foi construída, inclusive porque ela teve que enfrentar os objetivos dos poderosos como foi o caso de Galileu, que aceitou se retratar, mas falou baixinho, que na verdade era a Terra que circulava à volta do Sol. A História estava sendo editada para atender os interesses dos poderosos do dia.

No caso dos *números complexos*, parece-me que foi uma consequência natural da descoberta da fórmula de Baskhara. Um *número complexo* é um número da forma $a + bi$

$$a + bi; \tag{1}$$
$$a, b \in \mathbf{R}; i = \sqrt{-1} \tag{2}$$

Estes números surgem naturalmente como soluções de equações do segundo grau quando o *determinante de equação* é negativo então a *fórmula de Bhaskara* produz os *números complexos*. Confira o exemplo,

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x = \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{3}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \;\;\Rightarrow\;\; x \notin \mathbf{R} \tag{4}$$
$$x = \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \tfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac; \tag{5}$$
$$\Delta < 0 \;\;\Rightarrow\;\; \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{|\Delta|} = \pm id; d = \sqrt{|\Delta|}; i = \sqrt{-1} \tag{6}$$
$$\Delta < 0 \;\;\Rightarrow\;\; x = \tfrac{-b \pm id}{2a} = \tfrac{-b}{2a} \pm i\tfrac{d}{2a} = a + bi; \tag{7}$$
$$x^2 - 3x + 5 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \Delta = -11 \;\;\Rightarrow\;\; \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{11}; \tag{8}$$
$$x^2 - 3x + 5 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x \in \{\tfrac{3+i\sqrt{11}}{2}, \tfrac{3-i\sqrt{11}}{2}\}; \tag{9}$$
$$a + bi \in \{\tfrac{3}{2} + i\tfrac{\sqrt{11}}{2}, \tfrac{3}{2} - i\tfrac{\sqrt{11}}{2}\}; \tag{10}$$

Quando $\Delta < 0$ se define $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$ confira equação (eq.6) fazendo aparecer os números com o formato $a + bi; a, b \in \mathbf{R}$, na equação (eq.8) ou ainda na equação (eq.9).

Foi feita uma invenção: $\sqrt{-1} = i$. Até então, antes desta invenção, se tinha uma regra com *uma exceção*:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \;\;\Leftarrow\;\; a > 0; b > 0; \tag{11}$$

Mas uma observação de *Leandro Bellicanta* derrubou a régra,

$$a = -1; b = -1; \tag{12}$$
$$\sqrt{ab} = \pm\sqrt{1} = \pm 1 = \pm\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \pm i^2 = \pm 1; \tag{13}$$
$$a, b < 0 \;\;\Rightarrow\;\; \sqrt{ab} = \pm\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \pm\sqrt{ab}; \tag{14}$$

Na verdade *não há unicidade* no valor de $\sqrt{a}$ que é sempre duplo, mesmo no caso em que $a, b > 0$. O defeito na equação (eq.11) se encontra basicamente em estabelecer uma regra sem exceções quando esqueci-me de que não havia unicidade na definição de $\sqrt{x}$ nem mesmo no caso de números reais positivos.

A exceção sendo que "a regra deixava de valer se algum dos números, a ou b, fosse negativo". Agora a regra é, simplesmente,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \tag{15}$$

para quaisquer que sejam os os números reais, mas o resultado pode ser um "*número*" que não pertença ao conjunto $\mathbf{R}$ e assim apareceu um novo conjunto de números. Por exemplo,

$$\sqrt{-3} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{3} = \pm i\sqrt{3}; \sqrt{-4} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{4} = \pm 2i; \tag{16}$$

Não existe mais exceção, a regra vale sempre.

Esta invenção, $i = \sqrt{-1}$ foi mal aceita e até recentemente os números complexos eram considerados *imaginários...*

Na verdade, *imaginário* é o nome que se deu ao $i = \sqrt{-1}$, a *unidade imaginária*, desta forma o preconceito fica sendo repassado de geração em geração.

Posso resolver a equação abaixo usando a fórmula de Bhaskara, mas também posso fazê-lo diretamente:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm i \tag{17}$$

a solução é um *número imaginário puro*. E aqui estou *cedendo* ao preconceito, mas não há como alterar a História, apenas se deve vencer o preconceito dando-se conta de que se trata dum preconceito e se divertir com os nomes errados com que a Ciência tem que conviver.

Ainda um outro exemplo

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{6\pm\sqrt{36-40}}{2} = \tfrac{6\pm\sqrt{-4}}{2} = \tfrac{6\pm 2i}{2} = 3 \pm i \tag{18}$$

$$x \in \{3 + i; 3 - i\} \tag{19}$$

em que se vêm os números $a \pm bi; a = 3; b = 1$ aparecendo como soluções de uma equação do segundo grau. Você pode criar uma infinidade de exemplos deste tipo partindo do final da questão:

Escreva

$$(x - a - bi); (x - a + bi) = (x - a)^2 - (bi)^2 = (x - a)^2 + b^2 = 0 \quad \text{selecione: } a, b; \tag{20}$$

monte de volta uma equação do segundo grau que terá os números complexos $a+bi; a-bi$ como solução, para todos os pares de números a, b que você tiver selecionado.

Com a criação dos números complexos *as equações do segundo grau* passam a ter *sempre* solução apesar de que, cuidadosamente, se acrescente a observação, "*raízes imaginárias*" quando $\overline{\Delta < 0}$.

Isto mostra que a invenção do i tem sentido e que nada têm de imaginários os números complexos que, além do mais, aparecem em fórmulas de eletricidade.

O teorema fundamental da Álgebra, no caso real, dizia que toda equação do grau n tinha no máximo n raízes, agora o teorema fundamental da Álgebra fica completo, toda equação do grau n tem n raízes, mas permanece a limitação concreta de *achar as raízes* quando $n > 4$.

Nas próxima seções eu vou desenvolver a estrutura algébrica, e geométrica deste novo conjunto.

2 C não é imaginário e nem complexo

E para caracterizar este novo conjunto eu vou dar-lhe um nome que é o conjunto dos "números complexos", **C**.

Sem querer manifestei o meu preconceito colocando *aspas* em torno da expressão, *números complexos*, traduzindo um sentimento de que não são "números" como os outros, *naturais*, *racionais* ou *reais*.

Preciso agora mostrar que posso fazer operações aritméticas com estes números para que se possa aceitá-los como "*números*".

Dados $u = a + bi; v = c + di$ posso somá-los usando as regras da álgebra de polinômios como eu faria com polinômios, somando os *termos semelhantes*.

$$u(x) = a + bx; v(x) = c + dx \tag{21}$$

resultando em

$$u(i) + v(i) = (a + c) + (b + d)i; \tag{22}$$

Está no momento da dar um nome adequado às componentes do "número complexo" $u(i) = a + bi$. Observe que a soma se processo da mesma forma como se faz com polinômios considerando aqui "i" como se fosse uma variável. Se somam os "termos independentes" de cada um deles, e depois se somam os coeficientes de i. A definição é a seguinte:

Definição 1 *Parte real e parte imaginária Dado um número complexo* $u = a + bi = (a, b)$ *se designa*

- *parte imaginária* $Im(u) = b \in \mathbf{R}$
- *parte real* $Re(u) = a \in \mathbf{R}$

Observe que Re, Im são duas funções definidas em $\mathbf{C}$ e tomando valores em $\mathbf{R}$.

De forma semelhante ao caso da adição, sempre usando as regras operatórias das expressões algébricas, agora usando o caso da multiplicação de polinômios, posso efetuar:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = \tag{23}$$
$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = ac - bd + (ad + bc)i \tag{24}$$

que você pode ver, esquematicamente, na figura figura (fig 5), página 7,

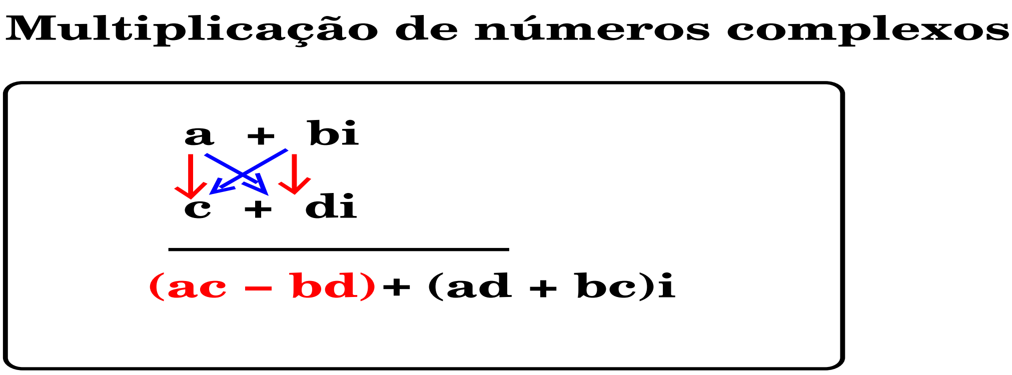

Figura 1: produto $(a + bi)(c + di)$

O interessante é que posso fazer *interpretação geométrica* dos números complexos mostrando que eles nada tem de imaginário e, muito pelo contrário, até são geométricos.

Os números complexos se infiltraram em nosso sistema cultural com duas apresentações:

$$\text{expressão algébrica } \mathbf{C} \ni a + bi \equiv (a, b) \in \mathbf{R}^2 \text{ entidade geométrica.} \tag{25}$$

eles podem ser *um número*, $u = a + bi$ ou um *ponto do plano* $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

A última parte na equação (eq. 25), $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, é uma *representação geométrica* para o número complexo, uma vez que estou dizendo que existe um ponto do plano,

$$(a, b) \in \mathbf{R}^2 \tag{26}$$

que é equivalente ao número complexo

$$a + bi \in \mathbf{C}. \tag{27}$$

A descoberta da *representação geométrica* para os números complexos, representa um *salto qualitativo*. Como eles têm uma *representação geométrica*, não podem ser tão estranhos como no começo pareciam. Observe a figura (fig. 2), página 4, nela há alguns números complexos representados no plano.

Eu vou retornar à multiplicação na próxima seção fazendo uso intensivo da representação geométrica e mostrando como, possivelmente, Euler poderá ter descoberto a sua famosa fórmula.

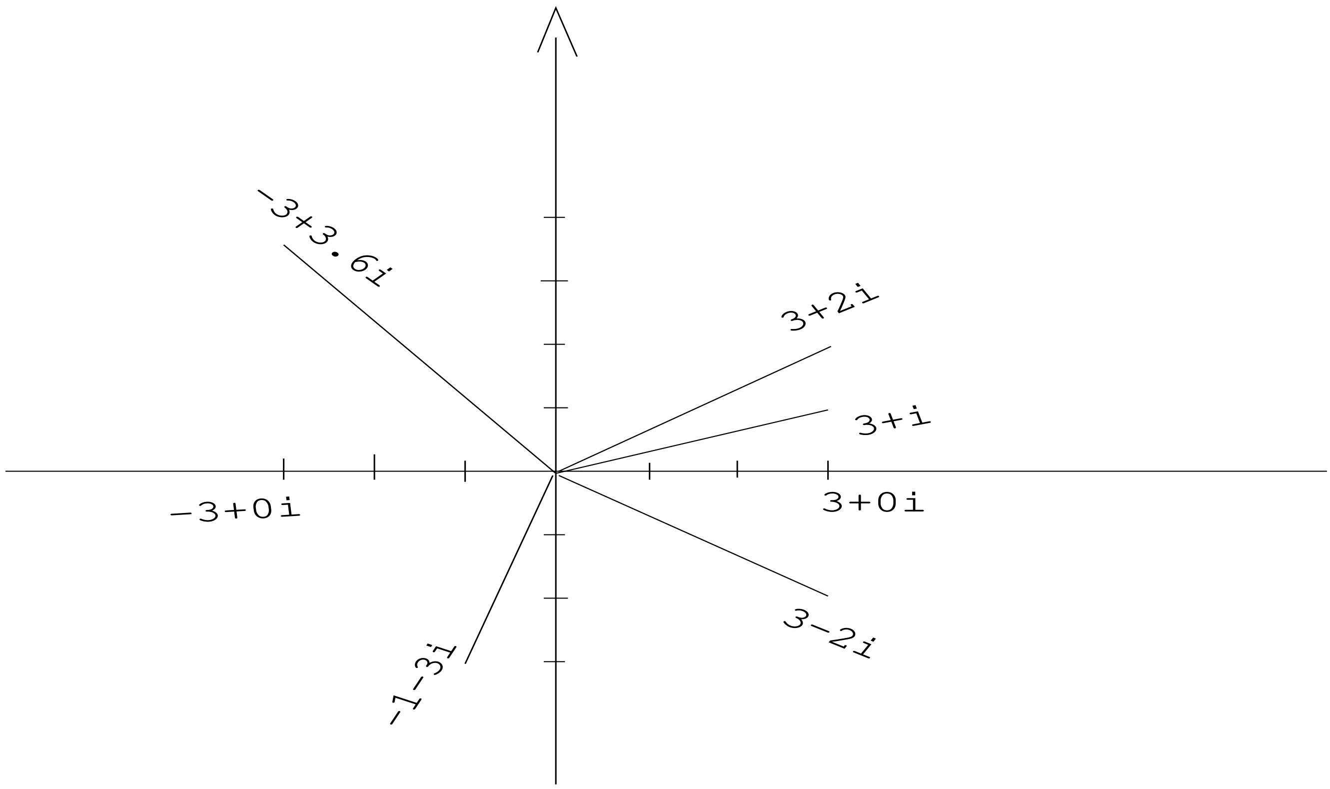

Figura 2: Representação geométrica dos complexos

3 Dois gigantes separados de 50 anos

Vou avançar mais a fundo na representação geométrica dos números complexos para *redescobrir* a *fórmula de Euler* e mostrar outro método para calcular o produto de números complexos que é mais simples do que a definição apresentada acima com a interpretação polinomial. A *fórmula de Euler* deveria ser chamada *fórmula de Euler-De Moivre* porque De Moivre a descobriu de outra maneira bem mais complicada

Esta representação geométrica é mais simples e mais computacional muito fácil de ser enfiada num programa de computador para construir uma *calculadora para números complexos* que também entenderia os números naturais, racionais e reais. Uma grande unificação dos números. Experimente a minha `calculadora`, [2, calculadora].

Você deve ter achado estranho que para a *adição* apresentei uma definição formal não o fazendo para o *produto de números complexos*, a razão disto é que, avançando na interpretação geométrica mais um pouco, vou poder apresentar uma fórmula para o produto muito simples que vai merecer o destaque de uma definição.

O primeiro passo nesta direção é que os números tem módulo, como os reais, apenas muito mais significativo. Como é um ponto do plano, o módulo de um número complexo sai direto como aplicação do *teorema de Pitágoras*.

Na (eq. 25) você viu a equivalência entre a forma algébrica e a geométrica dum número complexo.

$$\mathbf{C} \ni v = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2, \tag{28}$$

o par (c, d) é um ponto do plano e assim eu estou *representando* um número complexo com uma entidade geométrica, um ponto.

Desta forma os números complexos trouxeram, para o reino dos números, os conceitos da geometria: ângulo, módulo, direção e sentido, e a Física, desde cedo, lançou mão deles, com muito sucesso, por exemplo, na eletricidade.

A figura (fig. 3), página 5 descreve vários dos aspectos geométricos dos números complexos.

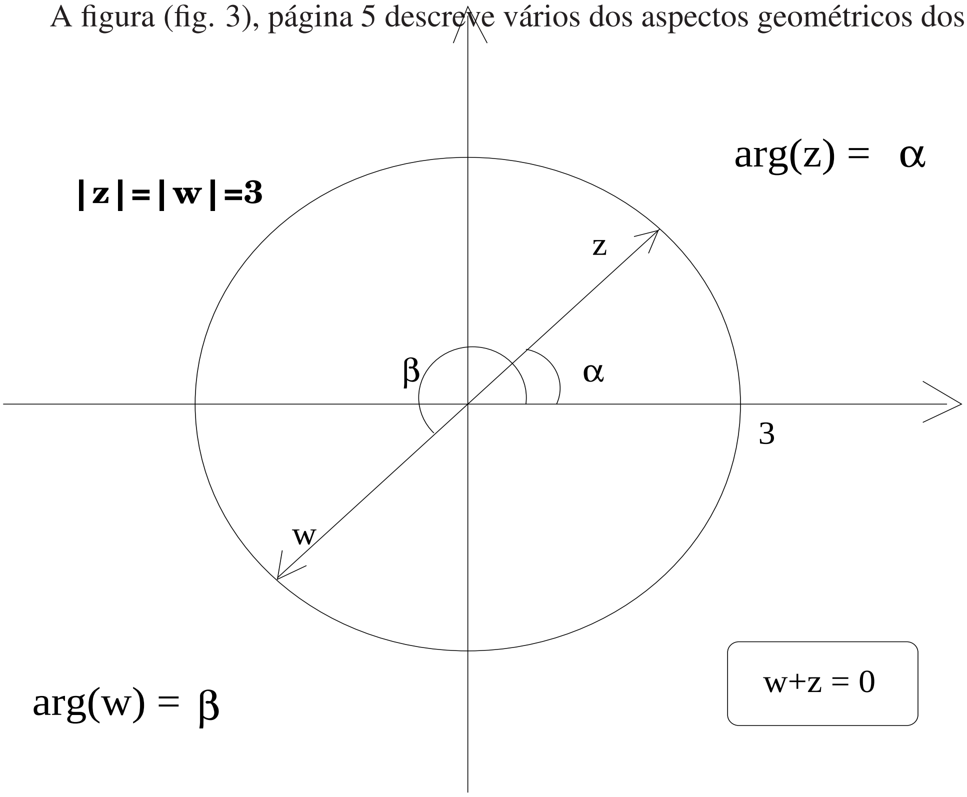

Figura 3:

- Os dois números complexos, z, w têm mesmo módulo, no plano complexo isto significa que eles se encontram num mesmo círculo de raio 3, na figura (fig. 3). Para os números reais (ou racionais, ou inteiros) isto se resume à troca de sinais. Os números complexos oferecem mais opções na expressão $|z| = 3 \dots$

- Os dois números complexos, z, w, tem sinais contrários e como nos reais, um é o inverso aditivo do outro. Nos complexos isto significa estarem diametralmente opostos.

- Um número complexo tem um ângulo, relativamente ao eixo OX, na figura (fig. 3), o ângulo de z é α e o ângulo de w é β. Não se chama "ângulo", a palavra que se usa é *argumento* e a notação é a que aparece na figura (fig. 3), $arg(z) = \alpha, arg(w) = \beta$

- Deixe-me trocar de círculo, suponha que na figura (fig. 3) se tenha um círculo de raio 1, faça um esforço de abstração, suponha que está vendo o círculo trigonométrico, então:

$$z = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)); \ w = (\cos(\beta), \sin(\beta)); \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \tag{29}$$

  Na figura (fig 4), página 6, você pode ver o cálculo feito com uma `calculadora` que eu escrevi em `C++`, [2, calculadora], com saída de dados para `gnuplot`. É possível editar a saída de dados do `gnuplot` para incluir num texto como eu fiz aqui. Com a `calculadora` eu obtive um desenho básico que depois eu editei acrescentando mais informações.

Retornando à equação (eq. 29) deixe-me convidá-la para mais um exercícios de abstração, esqueça-se de que $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Considere dois *argumentos* quaisquer e deixe-me escrever esta equação assim:

$$z = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)); \ w = (\cos(\beta), \sin(\beta)); \tag{30}$$

$$z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e(\alpha); w = \cos(\beta) + i\sin(\beta) = e(\beta); \tag{31}$$

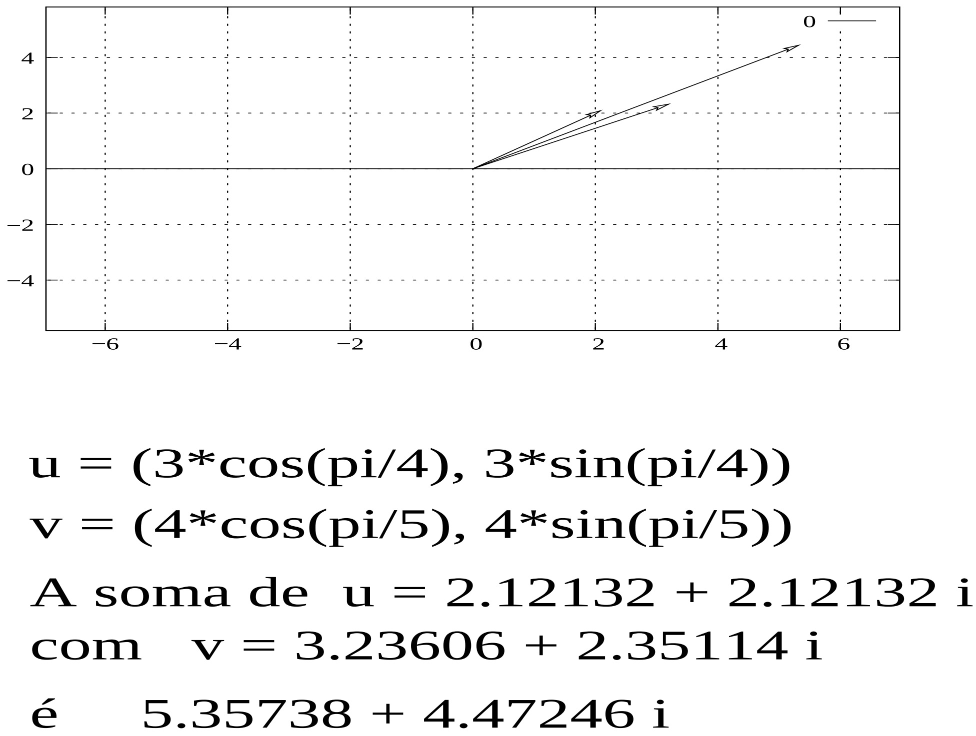

Figura 4: A regra do paralelogramo em ação

em que estou exercendo o meu direito de entender um número complexo ora como um número, ora como um ponto do plano. Estou também incluindo uma nova notação: $z = e(\alpha); w = e(\beta)$, associando cada um dos números z, w com o ângulo que eles terminaram sobre o círculo unitário. Euler deve ter trilhado este caminho quando descobriu a sua famosa fórmula e eu estou seguindo a trilha de Euler. Mas neste momento

$$e(\alpha); e(\beta); \tag{32}$$

é "*pura notação*", um *símbolo conveniente*, e muita Matemática é feita, e *foi feita*, criando símbolos convenientes. Depois muitos se perdem e *ficaram os que deram certo*. O de Euler ficou, deu certo.

Deixe-me multiplicar os dois números, procure entender as contas, elas estão um pouco resumidas, mas estou dizendo tudo:

$$e(\alpha)e(\beta) = zw = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\,(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\beta)\sin(\alpha)) \tag{33}$$

$$zw = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e(\alpha+\beta) \tag{34}$$

Eu ainda não fiz uma definição formal da multiplicação, mas supere a dificuldade psicológica da *coisa nova* e verifique que eu apenas apliquei as regras para multiplicar expressões algébricas. Agora leve em conta a *invenção*

$$i = \sqrt{-1} \;\;\Rightarrow\;\; i^2 = -1; \tag{35}$$

É esta *invenção* que justifica uma "*certa troca de sinal* que aparece na equação (eq. 34).

Também fiz na equação (eq. 33) a soma dos termos semelhantes. Depois eu reconheci o significado da *parte real* e da *parte imaginária* de acordo com as fórmulas de *soma de arcos do cosseno e do seno* que é o que aparece na equação (eq. 34) em que no final eu usei a notação que eu inventei. quem a inventou foi Euler!

Euler viu isto e identificou com a exponencial refazendo os cálculos da fórmula:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha); \quad (36)$$
$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta); \quad (37)$$
$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)}; \quad (38)$$

que permitiu-lhe escrever a famosa fórmula que é também identificada como fórmula de Euler:

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0; \quad (39)$$

envolvendo os números, $e, i, \pi, 0, 1$ numa única fórmula, que é realmente uma obra de arte.

Observe o que disse, Euler, *inventou uma definição para a exponencial dos números complexos*, ele começou identificando os números complexos do círculo trigonométrico porque ele sabia da *fórmula da soma de arcos*.

A Matemática é um conhecimento em que *inventamos fórmulas* associando fórmulas antigas com fórmulas novas. As invenções que dão certo, ficam!

Vou lhe propor uma *aplicação prática* dos números complexos, na memorização ou determinação das *fórmula de somas de arcos*. Se você quiser lembrar-se das fórmulas $\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta), \tan(\alpha+\beta)$, use o produto de $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$. Depois traduza para as funções trigonométricas o resultado do produto.

Se eu multiplicar por um número positivo ρ um número complexo que se encontre no círculo trigonométrico vou obter qualquer outro número que se encontre no plano complexo, basta que ambos tenham o mesmo argumento. Na figura (fig. 5), página 7, você pode identificar o círculo unitário, quer dizer, o conjunto dos números complexos de módulo 1, nele você pode ver o arco α determinando o número complexo

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha); \quad (40)$$

que foi multiplicado pelo número real positivo r determinando em algum ponto do plano complexo o número complexo

$$r(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)) = r\cos(\alpha)+ir\sin(\alpha) = re^{i\alpha}; \quad (41)$$

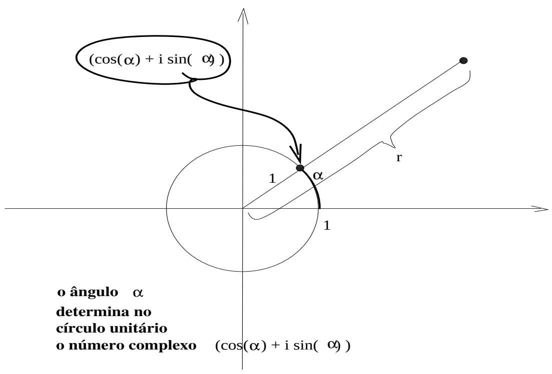

Figura 5:

e eu vou acompanhar Euler e completar a fórmula de Euler com um detalhe que vou mostrar mais adiante que foi uma das invenções mais significativas de Euler expandindo a definição da função exponencial ao conjunto dos números complexos

$$z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = re^{i\alpha}; z \in \mathbf{C}; \quad (42)$$
$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha); \quad (43)$$

Estas equações traduzem o que está expresso na figura (fig. 5) em que eu tracei um segmento de reta da origem até um *ponto* do plano, cortando o círculo trigonométrico.

Esta figura e as equações (eq.42) e (eq.43) mostram que qualquer número complexo pode ser expresso com esta fórmula, $z = re^{i\alpha}$, que é chamada a *forma polar* dum número complexo e que também é usada no plano $\mathbf{R}^2$ chamada então de *coordenadas polares* para um ponto do plano.

O número real positivo r é o módulo do número complexo. Mas esta descrição tem um defeito que observei agora: e se o *ponto* estiver dentro do círculo trigonométrico? Neste caso trace o segmento de reta da origem até este ponto no interior do círculo trigonométrico e depois prolongue o segmento até "*cortar*" o círculo trigonométrico. Agora $r \leq 1$ e vale a igualdade se o ponto estiver sobre o círculo trigonométrico.

Então, agora é verdade que qualquer ponto P, do plano, determina de maneira única um *representante* no círculo trigonométrico da forma $e^{i\alpha}$ e desta maneira ficam determinadas duas "*coordenadas*" de P: r, α que são

- r o módulo de P,
- α o argumento de P.

Vou reescrever o parágrafo acima:

Agora é verdade que qualquer *número complexo* z, do plano, determina de maneira única um *representante* no círculo trigonométrico da forma $e^{i\alpha}$ e desta maneira ficam determinadas duas "*coordenadas*" de z: r, α que são

- r o módulo de z,
- α o argumento de z.

Se é verdade que há uma identidade entre pontos do plano e os números complexos, também é verdade que pensar em *números complexos* tem um poder maior. Os números complexos são *números*, tem propriedades algébricas e este o meu objetivo aqui.

Eu não sei da história desta invenção de Euler que leva o nome de *fórmula de Euler*. Mas certamente Euler, e aqui eu estou inventando a história na forma como me parece provável, verificou que as duas fórmulas da trigonometria para $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta)$ justificavam com perfeição a invenção desta fórmula

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = \tag{44}$$
$$= (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \tag{45}$$
$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)) = \tag{46}$$
$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)}; \tag{47}$$

Eu voltar mais a frente a esta descoberta de Euler, e ele não esteve sozinho nesta descoberta. Um francês, *De Moivre*, que se refugiou na Inglaterra protestante fugindo da perseguição religiosa na França, onde viveu dando aulas particulares de Matemática em Londres, também descobriu esta fórmula apenas de uma maneira *extremamente complicada*. E por favor, não coloque um tom pejorativo na invenção de *De Moivre*. Ele apenas seguiu um caminho diferente do trilhado por Euler, ele pensou no binômio de Newton e deve ter feitos horas e horas de contas até verificar que sua fórmula estava certa.

$$(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha); \tag{48}$$

4 Forma polar, uma identificação geométrica

Saindo da *fórmula de Euler* se obtém facilmente a fórmula de *De Moivre*. Ambas repousam na expressão da soma de arcos do $\cos, \sin$.

Estas duas formas é que dão nascimento a expressão chamada polar de um número complexo:

$$u = \rho e^{i\alpha} = a + bi; a = \rho\cos(\alpha); b = \rho\sin(\alpha); \tag{49}$$
$$\rho = \|u\| = \sqrt{a^2+b^2}; \cos(\alpha) = \tfrac{a}{\rho}; \sin(\alpha) = \tfrac{b}{\rho} \tag{50}$$

E posso agora escrever a definição do produto de números complexos:

Definição 2 (Produto de números complexos) *Produto de números complexos*
Dados dois números complexos $u = a + bi = \|u\|e^{i\alpha}; v = c + di = \|v\|e^{i\beta}$; *então* $uv = \|u\|\|v\|e^{i(\alpha+\beta)}$ *O produto de* u *por* v *é obtido com o* produto dos módulos e a soma dos argumentos.

que pode ser expresso numa frase simples, como eu fiz com a adição,

Há livros com centenas de páginas sobre números complexos e um dicionário não pode concorrer com esta extensão de informação, portanto aqui falta muita coisa que pode ser dita sobre estes números. Mas seria uma grande falta não mencionar uma importante operação com números complexos que é o *conjugado*:

Definição 3 (Conjugado de z) *Conjugado de* z
Se $z = a + bi = \rho e^{i\alpha}$ *então* $\overline{z} = a - bi = \rho e^{-i\alpha}$

Na figura (fig 6), página 9,
você encontra o círculo unitário, e um número complexo de módulo maior do que 1 assim como seu conjugado. O conjugado de $z = (1 + 3i)$ é $\overline{z} = (1 - 3i)$.

A importância do conjugado se vê neste cálculo:

$$z\overline{z} = \rho e^{i\alpha}\rho e^{-i\alpha} = \rho^2 \tag{51}$$
$$\|z\| = \sqrt{z\overline{z}} \tag{52}$$

o produto de z pelo seu conjugado é o quadrado do módulo de z permitindo uma fórmula prática para módulo de z.

$$\|\|z\|\| = \sqrt{z\overline{z}} \tag{53}$$

Como todo número real diferente de zero, todo número complexo diferente de zero tem um inverso multiplicativo, os cálculos seguintes mostram como obter a fórmula para o inverso de z.

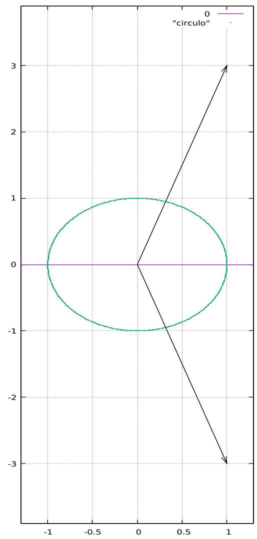

Figura 6: $z, \overline{z}$

$$z = a + bi = \rho e^{i\alpha}; w = c + di = \lambda e^{i\beta}; \tag{54}$$
$$1 = e^{i0}; \tag{55}$$
$$zw = \rho e^{i\alpha}\lambda e^{i\beta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \tfrac{1}{\rho}; \beta = -\alpha \tag{56}$$
$$w = \tfrac{1}{\rho}e^{-i\alpha} \tag{57}$$
$$\tfrac{1}{z} = \tfrac{e^{-i\alpha}}{\rho} = \tfrac{\rho e^{-i\alpha}}{\rho^2} = \tfrac{\overline{z}}{\|z\|^2} \tag{58}$$

Dado $zz = a + bi$ posso calcular $\rho e^{i\alpha}$ e consequentemente também $-\alpha, \frac{1}{\rho}$ com o que escrevo o inverso

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2} \tag{59}$$

Para os números reais diferentes de zero é verdade que se $\|z\| < 1$ então $\|\frac{1}{z} > 1$ e facilmente deduz-se da fórmula do inverso que esta relação continua verdadeira para números complexos, apenas agora a frase fica mais imponente: "*se um número complexo* z*, diferente de zero, estiver dentro do círculo trigonométrico então o seu inverso* $\frac{1}{z}$ *estará fora do círculo trigonométrico*".

Na próxima seção vou voltar à fórmula de Euler para mostrar a sua importância maior: a definição da exponencial complexa.

5 Euler fez a extensão da exponencial a C

Foi neste ponto que Euler excedeu a De Moivre. Enquanto De Moivre descobriu a propriedade complicadíssima das potências do números complexo de módulo 1

$$(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)); \tag{60}$$

Euler viu que esta propriedade transformava somas em produtos que é o papel da exponencial e experimentou, definiu e deu certo:

$$e^{iy} = (\cos(y) + i\sin(y)); \tag{61}$$

depois foi somente multiplicar por um número real e^{ρ} para obter

$$e^{iy} = (\cos(y) + i\sin(y)); \tag{62}$$
$$e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)); \tag{63}$$
$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)); \tag{64}$$
$$z = x + iy; e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y); \tag{65}$$
$$|e^z| = |e^x(\cos(y) + i\sin(y))| = |e^x||(\cos(y) + i\sin(y))| = e^x; \tag{66}$$
$$arg(e^z) = arg(e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)) = y; \tag{67}$$
$$|e^z| = e^x; arg(e^z) = y; \tag{68}$$
$$z = x + iy; e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)); \tag{69}$$

e Euler definir a *exponencial complexa*.

Agora, o que é z em e^z? Resposta:

$$z = x + iy; \tag{70}$$
$$w = e^z = e^x e^{iy} \quad \Rightarrow \quad z = ln(w); \tag{71}$$
$$ln(w) = e^x e^{iy} = \rho e^{iy}; \tag{72}$$
$$|ln(w)| = e^x; arg(ln(w)) = y; \tag{73}$$

e Euler também definiu o *logaritmo complexo*.

Observe que provavelmente Euler estava um passo à frente de De Moivre, mas também viveu cincoenta anos mais a frente do seu colega francês. Quando De Moivre morreu, e tendo predito o momento de sua morte, Euler deveria estar com 40 anos.Muito provavelmente não se conheceram, De Moivre foi um explorado pela sociedade inglesa, vivia em Londres como professor particular e se conta que alguém fez uma pergunta a Newton que teria respondido, "*pergunte ao De Moivre que ele sabe disto melhor do que eu*" e Newton poderia ter obtido uma posição de professor para De Moivre numa universidade inglesa tirando-o da dura vida de professor particular.

O logaritmo complexo merece um artigo a parte embora tudo esteja dito aqui, tem algumas sutilezas geométricas e topológicas que merecem ser destiladas à parte. Por exemplo, porque o logaritmo real não está definido para os números reais negativos? Tem uma bonita resposta quando se estuda o logaritmo complexo e vou fazer isto em outro artigo.

Índice Remissivo

Referências

[1] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[2] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/, 2009.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[4] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.