

Dois exemplos de Álgebra Linear

Praciano-Pereira, Tarcisio *

2 de dezembro de 2019

preprints da Sobral Matemática

no. 2019.10

Editor Tarcisio Praciano-Pereira

tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Neste artigo estou apresentando dois exemplos do cálculo das coordenadas dum vetor relativamente a uma certa base. O primeiro exemplo é o *polinômio de Taylor* e o segundo exemplo é o *polinômio de trigonométrico*. O primeiro caso não aparece na literatura com esta formatação, já o segundo caso é apresentado desta forma mas não habitualmente um caso de projeção dum vetor relativamente aos vetores da base dum espaço vetorial. São dois casos comuns de espaço vetorial de dimensão infinita. Mas há um erro que ainda pretendo corrigir.

palavras chave: polinômio de Taylor, polinômio de trigonométrico, projeção dum vetor na direção dum vetor básico

In this paper I am presenting two examples of projection of a vector in the direction of base vectors of a vector space. The first is the Taylor polynomial which is not usually seen that way. The other is a trigonometrical polynomial which is usually seen that way but not exactly the way I will present here. They are two examples of infinite dimensional vector spaces. There is an error which I intend to correct.

keywords: projection of a vector along the direction of a basis vector, Taylor polynomial, trigonometrical polynomial.

*tarcisio@sobralmatematica.org

Este artigo ainda está sendo redigido e quando atingir a sua versão final, esta observação irá desaparecer. E porque publicar uma *versão em produção*? Porque esta página é de préprints portanto contém trabalhos com os quais os autores almejam uma publicação futura e nos quais os autores se expõem na esperança de encontrar uma colaboração.

Uma outra razão desta observação inicial é de organização da página, estou neste momento apenas reservando um número de publicação, um aviso para os que visitarem a página que este artigo está sendo escrito. Quando pronto, este aviso desaparecerá.

Este artigo contém um erro que observei quando estava prestes a fazer a publicação, e decidi publicar o erro colocando aqui esta observação para alertar a leitora. Achar o erro e oferecer-me uma solução que eu não consegui encontrar se transforma no objetivo deste artigo. O erro se encontra no desenvolvimento do primeiro exemplo.

1 O projeto

Eu vou descrever dois exemplos de espaço vetorial com o foco na projeção dum vetor na direção dos vetores básicos. O primeiro exemplo é o *polinômio de Taylor* que não é habitualmente apresentado como um caso da *Álgebra Linear* e vou descrever este item do Cálculo como um exemplo de cálculo da projeção dum vetor na direção dos vetores básicos numa base do espaço de polinômios $\mathbf{R}[x]$.

Para desenvolver este exemplo eu construí um produto escalar em $\mathbf{R}[x]$ relativamente ao qual os coeficientes dum polinômio qualquer são as projeções na direção dos vetores básicos $x \mapsto x^n$ de tal forma que estes vetores formem uma base ortogonal para o espaço vetorial $\mathbf{R}[x]$. Ficou divertido e nunca vi nenhum texto com esta apresentação embora não haja nenhuma novidade neste processo. Há uma certa novidade na forma de apresentar o *polinômio de Taylor* dum certa função diferenciável que usei como introdução para criar uma conexão pedagógica entre o que é um *polinômio de Taylor*, o que ele significa para finalmente mostrar uma forma de calcular os seus coeficientes que é diferente da habitual. Também pude deixar claro que o operador “*polinômio de Taylor*” é um operador linear do espaço $\mathbf{R}[x]$ nele mesmo.

O segundo exemplo é *um caso habitual*, mas em que não se expressa, ou estressa, que se está calculando a projeção dum vetor na direção numa certa base do espaço das funções contínuas definidas referenciadas a um intervalo que vai ser para mim aqui o intervalo $[0, 2\pi]$.

2 Como o Cálculo mostra o polinômio de Taylor

O polinômio de Taylor dum função diferenciável f é um polinômio cujo gráfico é tangente ao gráfico dum função diferenciável. O caso mais simples é a *reta tangente* que é um polinômio do primeiro grau cujo gráfico é o da reta tangente ao gráfico dum função num ponto dado, confira o gráfico na figura (fig. 1), página 2.

Observe esta forma de escrever a equação da reta que vou transformar sucessivamente até obter a equação que me interessa:

$$y = b + m(x - a); \tag{1}$$

$$y = f(a) + m(x - a); \tag{2}$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a); \tag{3}$$

A equação (eq.1) é a da reta que passa no ponto (a, b) com coeficiente angular m , e cheguei, na equação (eq.3) à equação que passa no ponto $(a, f(a))$ com coeficiente angular $f'(a)$.

Então você pode se perguntar: não seria possível obter-se a equação da parábola tangente? e seria uma equação mais realista, porque se um corpo se desliga de outro que o carrega ao se desligar parte pela tangente que será uma parábola porque corpo ejetado agora entra no domínio da gravidade da Terra se transformando num *corpo que cai em queda “livre”*, quer dizer: segue pela parábola tangente. Vou fazer as mesmas transformações, apenas vou deixar um erro que vou corrigir em seguida, mas você terá tempo para pescar o erro antes de ler a resposta:

uma pedra rodando presa a um cordão

$$y = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{4}$$

$$y = b + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{5}$$

$$y = b + m(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{6}$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{7}$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2; \tag{8}$$

e na equação (eq.8) estou lhe dizendo que tenho a equação da parábola tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. E qual é o erro?

Os cálculos nas equações (eq.4) (eq.8) pecaram por excesso de ingenuidade! Vou refazê-las, agora, da forma correta, usando a equação dum polinômio do segundo grau ao qual vou impor à condição de tangência e cópia da aceleração no ponto de separação dos dois corpos que estavam viajando juntos:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2; \tag{9}$$

$$P(a) = a_0; a_0 = f(a); \tag{10}$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - a); a_1 = P'(a); a_1 = f'(a); \tag{11}$$

$$P''(x) = 2a_2; P''(a) = 2a_2 = f''(a) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(a)}{2}; \tag{12}$$

$$y = P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2; \tag{13}$$

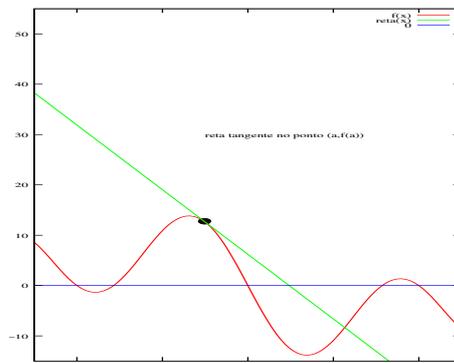


Figura 1:

e você tem na equação (eq.13) a equação correta da parábola que descreveria o movimento em queda livre depois que o objeto se tenha desprendido do seu carregador no ponto $(a, f(a))$, partindo do ponto $(a, f(a))$, copiando a velocidade $f'(a)$ e a aceleração que agora é a da gravidade somada a eventual força acionadora $f''(a)$ que lhe tenha sido dada no momento do lançamento.

E como seria a equação dum polinômio do terceiro grau, tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$? Novamente, vou responder com uma resposta *ingenuamente errada*:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3}(x - a)^3 \tag{14}$$

deduzindo direto da equação (eq.13).

Se você repetir o método que usei para encontrar a equação da parábola tangente, agora para o caso do polinômio do terceiro grau tangente, você vai encontrar::

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3; \tag{15}$$

e estou de acordo com você que parece que ficou feio! Aparentemente não tem lógica, e o *correto* em Matemática é determinado pela *beleza*. Se estiver feio, está errado! ou deve estar errado!

Neste segundo caso não há erro, apenas tem algo escondido:

$$P(x) = \frac{f(a)}{1} + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3; \quad (16)$$

$$P(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3; \quad (17)$$

Você pode encontrar na página [4, programas] uma cópia do programa para fazer alguns gráficos de polinômios de Taylor com `gnuplot`. Divirta-se.

O polinômio de Taylor de uma função univariada e que tenha derivadas até a ordem n , conhecidas, num ponto $x = a$ é a expressão polinomial

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n \quad (18)$$

com $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Os coeficientes são determinados pelo conjunto de equações

$$\begin{cases} P(a) = f(a) & \Rightarrow a_0 = f(a); \\ P'(a) = f'(a) & \Rightarrow a_1 = f'(a); \\ P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) & \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}; \end{cases} \quad (19)$$

Como $0! = 1!$ e $2! = 2$ então esta fórmula pode ser escrita de forma concisa como

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k; \quad a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}; \quad (20)$$

Há dois exemplos importantes da fórmula de Taylor, chamadas de McLaurin quando o desenvolvimento se faz relativamente ao ponto $a = 0$, é quando aplicamos a Fórmula de Taylor ao *seno* ou ao *coseno*. Nós conhecemos as derivadas de qualquer ordem destas funções em alguns pontos, na origem por exemplo.

As derivadas do *seno* na origem são

$$0, 1, 0, -1, \dots, 0, 1, 0, -1, \dots, \quad (21)$$

$$dsen(n)(n\%4 == 0)?0 : (n\%4 == 1)?1 : (n\%4 == 2)?0 : -1; \quad (22)$$

em que foi usado `if-else-compacto`, com a sintaxe da linguagem `C`, e o símbolo `%`, em `C`, é a função congruência módulo-2 resto dos inteiros na divisão por dois. Na equação (eq. 22), você tem uma função inteira de período 4, então o polinômio de Taylor (ou de McLaurin) do seno é

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{dsen(k)(0)}{k!} x^k; \quad (23)$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad n \geq 0; \quad (24)$$

em que as derivadas são todas calculadas na origem, $a = 0$. O desenvolvimento de McLaurin é a fórmula de Taylor no ponto zero.

Usando a linguagem `calc`, usualmente distribuída com os sistemas Debian/Gnu/Linux, você pode implementar este algoritmo para obter o seno com alta precisão, porque `calc` é de precisão infinita (inteira) como também o são `Python` e em geral os dialetos da linguagem `LISP`. Não é necessário usar polinômios de grau muito alto, basta definir o *seno* ou o *coseno*, usando a fórmula de Taylor módulo π . Por exemplo, com um polinômio de grau 17, a aproximação rivaliza com a que você pode obter numa calculadora científica.

Na figura (2) página 4, você pode ver o gráfico da função seno, definida por algoritmo dentro do `gnuplot` e de um polinômio de Taylor de grau 17, do seno, no intervalo $[-6, 6]$. e na mesma figura (2) página 4, também usando a expressão algorítmica do coseno de `gnuplot` e do polinômio de Taylor de grau 17, coseno, no intervalo $[-6, 6]$.

Observe que isto é o suficiente para definir *seno*, *coseno* para qualquer número real, com um algoritmo computacional, quero fizer, *um programa*, usando a periodicidade.



Figura 2:

3 produto escalar em $\mathbf{R}[x]$

A integral é muito usada em *Álgebra Linear* para definir *produto escalar* em espaços de funções, e a fórmula que vou usar *inicialmente* é

$$P, Q \in \mathbf{R}[x]; \quad (25)$$

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx; \quad (26)$$

$$\int_{-1}^1 x^n x^{n-1} dx = \quad (27)$$

$$= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 f(x) f'(x) dx = \frac{1}{n} \int_{f(-1)}^{f(1)} u du = \quad (28)$$

$$\text{se } n \text{ for par} = \frac{1}{n} \int_1^1 u du = 0; \quad (29)$$

$$\text{se } n \text{ for par} = \frac{1}{n} \int_{-1}^1 u du = 0; \quad (30)$$

$$\int_{-1}^1 x^n x^n dx = x^{2n+1} \Big|_{-1}^1 = 2; \quad (31)$$

Observe que disse “*inicialmente*” porque logo vou verificar que não é a melhor fórmula e que precisa duma correção.

3.1 Outro método para obter a fórmula de Taylor

Vou definir um produto escalar no conjunto dos polinômios $\mathbf{R}[x]$ usando a expressão da equação (eq.26). Estes cálculos da equação (eq.27) até a equação (eq.30) se alongaram inutilmente para provar que a integral é nula. As duas funções

$$x \mapsto x^n; x \mapsto x^{n-1}; \quad (32)$$

são ortogonais relativamente ao produto escalar definido na equação (eq.25), porque na equação (eq.27) eu tenho um produto de duas funções, uma das quais é ímpar e a outra par, logo o produto é uma função ímpar e o intervalo de integração sendo $[-1, 1]$ a integral é zero. A equação (eq.31) sugere uma alteração na definição do produto escalar. Eu vou multiplicá-lo por $\frac{1}{2}$ o que vai tornar

os vetores básicos $x \mapsto x^n$ em vetores unitários. Então corrigindo a definição

$$P, Q \in \mathbf{R}[x]; \quad (33)$$

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx; \quad (34)$$

$$e_n(x) = x^n; \langle e_n, e_k \rangle = \delta_{n,k}; \quad (35)$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k; \langle P, e_j \rangle = a_j; \quad (36)$$

mostrando que eu defini uma *base ortonormal de vetores* para o espaço vetorial $R[x]$. A equação (eq.36) mostra que a projeção do vetor P na direção do vetor e_j é o coeficiente a_j . Isto está errado!

Agora, considere uma função qualquer diferenciável continuamente até a ordem $n + 1$, pelo menos, e definida num intervalo que contenha $[-1, 1]$ então f tem um polinômio de Taylor de grau n e assim

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j + R_n(x); a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}; \quad \langle f, e_j \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)x^j dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_k x^k x^j dx = a_j \quad (37)$$

mostrando que a projeção de f na direção do vetor e_j é o coeficiente de ordem j da expansão de Taylor de f .

3.2 Aproveitando o erro

Os vetores da família

$$(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbf{N}} \quad (38)$$

formam uma base, é um conjunto de vetores linearmente independentes, e a forma de prová-lo usa o teorema fundamental da Álgebra:

Teorema 1 (fundamental) da Álgebra

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \equiv 0 \Rightarrow (\forall k) a_k = 0 \quad (39)$$

Dem: É o teorema fundamental da Álgebra!

q.e.d.

então os vetores $x \mapsto x^n$ compõem uma base para o espaço dos polinômios, $\mathbf{R}[x]$. Assim eu posso escrever *qualquer polinômio* como uma combinação linear destes vetores. Mas ainda eu precisaria de mais argumentos para garantir que toda função bastante diferenciável tenha um polinômio de Taylor. Um outro teorema completa esta história, o *teorema de Stone-Weirstrass* que garante que toda *função contínua* tem uma aproximação arbitrária, uniforme, em cima de intervalos fechados, por uma sucessão de polinômios. Então apesar de que eu tenha usado um método errado, vale a afirmação de que o operador *Fórmula de Taylor* é linear e produz uma imagem aproximada de f na base dos vetores

$$x \mapsto x^n$$

É uma imagem aproximada, quer dizer que há um erro em substituir f por seu polinômio trigonométrico, por esta razão existe um erro da fórmula de Taylor.

Vou discutir logo em seguida porque a *Fórmula de Taylor* é um *operador linear*.

Construí o exemplo usando um erro, mas fica o erro como um desafio para quem quiser corrigir o artigo, que assim se torna o objetivo do artigo. O que me salva é que $A \Rightarrow B$ é verdadeira mesmo que A seja falsa!

4 Formula de Taylor é um operador linear

Num espaço das funções diferenciáveis considere a definição

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)(x^k)}{k!}; \quad (40)$$

A linearidade da derivada, de qualquer ordem, repercute para a soma que define \mathcal{P} de modo que é verdade

$$\mathcal{P}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{P}(f) + \beta \mathcal{P}(g) \quad (41)$$

A equação (eq.41) define \mathcal{P} como um operador linear no espaço de funções que em que ele estiver definido com valores no mesmo espaço. A fórmula de Taylor é um operador linear.

5 Produto escalar em $\mathcal{C}([0, 2\pi])$

A *transformada de Fourier discreta* traz o nome de Joseph Fourier que entre 1807 e 1822 escreveu alguns trabalhos publicados nos anais da Academia Francesa de Ciências sobre a propagação do calor usando somas de senos e cossenos *acelerados* e *amplificados* para aproximar as ondas térmicas conseguindo assim descrever com grande precisão a propagação do calor. Estas somas de senos e cossenos acelerados e amplificados, hoje chamadas de *séries de Fourier* [1, Fourier], já vinham sendo utilizadas por Euler e alguns dos irmãos Bernouilli na solução de equações diferenciais. O que marca a visão de Fourier é que ao usar *séries trigonométricas* ele observou que se tratava duma metodologia que tinha valor intrínseco e tendo ele inclusive feito uma afirmação muito generalista que se verificou depois que precisava ser corrigida ou colocada num contexto mais apropriado: *qualquer função periódica pode ser expressa como uma série de senos e cossenos*. Na figura (fig 3), página 6, você vê o gráfico duma parábola “aproximada” por um polinômio trigonométrico.

De onde se conclui, por exemplo, que as funções podem ser combinação de funções pares e ímpares!

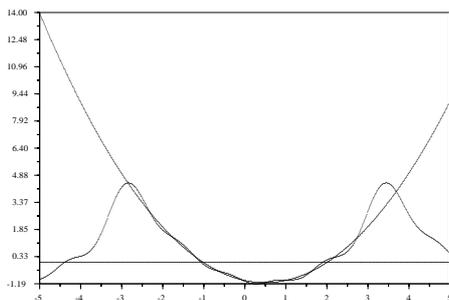


Figura 3:

Fourier para finalmente se chegar às *wavelets* que se tornaram as substitutas dos polinômios trigonométricos nas telecomunicações.

Esta *aproximação* merece uma crítica que me vai permitir introduzir um pouco da história recente das pesquisas em Matemática.

Um polinômio trigonométrico é uma função periódica porque é uma soma de funções periódicas, então a aproximação se perde fora dum dos intervalos de periodicidade! Os polinômios trigonométricos foram, até a década de 60 do século 20, o método usado pelas telecomunicações, telefonia, e o erro que fica visível na figura (fig 3) era um problema que foi sucessivamente resolvido, primeiro, *enjanelando* a transformada de

multiplicando-a por uma função a suporte compacto.

Fourier apresentou seguidamente, à Academia Francesa de Ciências, as monografias *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* e *Théorie analytique de la chaleur*, tendo encontrado críticas uma vez que ele estava antecipando uma teoria que levaria mais cem anos para ser razoavelmente escrita, por exemplo, em 1922, Andrey Kolmogorov publicou o artigo “Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout” em que apresentou uma série trigonométrica divergindo em quase todos os pontos dum intervalo.

Pode-se dizer que Fourier estimulou cem anos de pesquisas que produziram grande parte do que hoje se chama de Análise Funcional. Em particular deixou evidente que a integração no sentido de Riemann é insuficiente para tratar das funções que podem ser escritas como séries de senos e cossenos conduzindo á criação da integral de Lebesgue. Desde os seus críticos, na Academia Francesa de Ciências, onde os seus dois trabalhos sobre a teoria do Calor foram recebidos com reservas, seguindo pelas naturais questões sobre convergência das séries trigonométricas, estes dois trabalhos de Fourier forçaram a Matemática a florescer em muitas direções.

Os predecessores de Fourier, Euler, os chamados *irmãos* Bernouilli, Jean le Rond d’Alembert, haviam percebido que combinações lineares de senos e cossenos aceleradas e amplificadas representam soluções de algumas equações diferenciais. Esta *percepção* terminaria sendo compreendida de uma forma que abriu caminhos significativos para a Álgebra Linear dentro do capítulo de *auto vetores*: os senos e cossenos acelerados eram os *auto vetores* de alguns *operadores diferenciais*, aqui, outra vez, uma outra forma de compreender as equações diferenciais. Os *auto vetores* também são chamados de *vetores próprios*. Neste contexto os coeficientes duma série trigonométrica são os *auto valores*, ou *valores próprios* dum operador linear cuja equação é a própria série trigonométrica e da qual os senos e cossenos acelerados,

$$\langle e_k, f_k \rangle = \langle \sin(kt), \cos(kt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \cos(kt) dt = 0; \quad (42)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin(nt) dt = 0; \quad (43)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \cos(nt) dt = 0; \quad (44)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin(kt) = 2\pi; \quad (45)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(kt) = 2\pi; \quad (46)$$

em que $\sin(kt), \cos(kt)$ são os *auto vetores*. Os “coeficientes” de aceleração são as frequências destas ondas, e não é por casualidade que eu escrevi os *auto vetores* como funções de t pensando no tempo, na equação (eq.42). Você vai sempre encontrar a afirmação de a transformada discreta de Fourier transforma sinais *no domínio do tempo* nas suas imagens *no domínio da frequência*, representada na equação (eq.42) pela “variável” k .

É o resultado do produto escalar, estou calculando a projeção do vetor f , que é um sinal, ou uma onda, na direção de cada vetor básico que identifica um tipo de frequência. As ondas

$$\sin(kt), \sin(jt), \cos(nt), \cos(mt)$$

são os modelos mais simples que temos de ondas, Euler e seus contemporâneos perceberam isto e compreenderam que a combinação linear destas ondas reproduziam outras ondas. Fourier é que disse que “*todas as ondas poderiam ser obtidas por estas combinações lineares*” inaugurando a Álgebra Linear, que somente foi *inventada* algum tempo depois.

As transformadas de Fourier (as séries ou a integral) descrevem uma onda em termos das ondas mais simples, \sin , \cos que são assim os vetores próprios de um subespaço (medido) de funções sendo os coeficientes desta transformação os valores próprios que caracterizam uma determinada equação diferencial que esteja sendo estudada.

Desta forma a *transformada de Fourier* põe em correspondência dois tipos de espaços:

- um espaço em que os objetos são funções do tempo :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \quad (47)$$

- e cuja imagem está no espaço das frequências,

$$\hat{f} = (a_k, b_k)_{k=0, \dots, \infty} \quad (48)$$

que são as duas variáveis desta transformada. As variáveis, na imagem, são índices da sucessão dos coeficientes de Fourier. Nesta forma de ver se está trabalhando com espaços vetoriais de dimensão infinita o que, por um lado, abre uma vasta gama de espaços e ao mesmo tempo confina os objetos em espaços específicos onde é possível falar de convergência das séries de forma apropriada. Confira os espaços de Lebesgue $l^p(\mathbf{N})$, $L^p([0, 2\pi])$.

Há duas formas de definir a transformada de Fourier, a discreta que é esta que acabei de descrever, e a contínua em que aparece a *integral de Fourier*

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(-tx) + if(x) \sin(-tx) dx; \quad (49)$$

$$\hat{f}(k) = (a_k, b_k)_{k=0, \dots, \infty}; a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx; b_k = \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx; \quad (50)$$

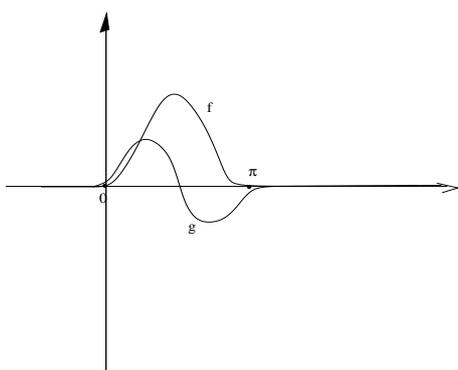


Figura 4: f é um sinal positivo

o escuta é uma função que se anula fora dum intervalo compacto, alguma coisa do tipo dos *sinais* que aparecem na figura (fig. 4), página 8 onde você pode ver dois exemplos de “*sinais*”, um positivo e outro que não é positivo, ambos se anulando fora dum intervalo compacto. É óbvio que o som se propaga indefinidamente e não seria uma *função a suporte compacto*, mas do ponto de vista de quem o escuta, sim, é uma *função à suporte compacto* cujas imagens aparecem na figura (fig. 4) e o que interessa, para as comunicações, é aquilo que você fala, vê ou ouve é o que interessa na transmissão. Experimente o programa [4, `fourier.gnuplot`], observando que ele é um *programa didático* que faz acontecer *alguma coisa* para ser discutida em sala de aula.

ou qualquer
onde de
energia.

Até a metade do século passado, as transformadas discretas de Fourier foram o instrumento central das telecomunicações e por razões óbvias: *elas são as ondas magnéticas básicas*, a codificação natural para expressar um fenômeno eletromagnético. Desde a década de 50, entretanto, começou uma revolução que encontrou o seu ponto alto na década de 80 quando as *wavelets* destronaram as transformadas discretas de Fourier no uso das comunicações e em muitas outras aplicações. Mas, em essência a ideia é a mesma, apenas mudou o tipo de onda. . . Uma das responsáveis por esta transição é uma mulher, Ingrid Daubechies, que descobriu uma *wavelet* que é bem adequada para o ouvido humano.

Esta história não aconteceu de repente, primeiro houve uma tentativa de *enjanelar* os sinais multiplicando-os por uma função que os cortassem fora dum intervalo compacto para melhor o resultado nas transmissões, daí à invenção da *wavelets* foi um passo. Confira *wavelets*.

Alguns tópicos foram mencionados em que houve pesquisa matemática como consequência da teoria do calor de Fourier, cada um deles corresponde a centenas de livros escritos. Vou terminar esta breve descrição com algumas destas consequências. Confira cada uma delas, em outro local do dicionário, use o índice remissivo.

- Observe que na integral de Cauchy apareceu a fórmula de Euler, ela também pode aparecer na integral discreta de Cauchy transformando o espaço de frequência de \mathbf{N} para \mathbf{Z} . Basta para isto forçar a fórmula dos coeficientes da série de trigonométrica para que apareça a fórmula de Euler. Deixo o trabalho para a leitora curiosa, e afinal basta uma pesquisa em volta do assunto para encontrar a fórmula pronta.
- Uma das consequências do salto mencionado no item anterior é que agora a *transformada discreta* de Fourier relaciona dois grupos: \mathbf{Z} , das frequências, e do tempo $[0, 2\pi)$. O segundo grupo é isomorfo ao grupo \mathbf{S}^1 dos complexos de módulo 1, é a razão do uso do intervalo aberto. Também deixo os detalhes para a leitora curiosa que se não quiser construir a teoria vai poder encontrá-la num dos muitos livros em que a transformada de Fourier é encontrada, ou na *Wikipedia*, [1].
- O melhor mesmo é que os coeficientes de Fourier podem ser definidos para um grupo comutativo qualquer onde eles assumem a identidade de *caracteres* do grupo o que dá uma outra teoria dentro da teoria dos grupos. Os detalhes ficam também para leitora curiosa. . . e tem um livro do Rudin exclusivamente sobre este assunto, e ele não é o único autor que se dedicou a teoria dos caracteres dos grupos.
- A teoria das *wavelets* é outra teoria copiada da teoria das séries trigonométricas, com as séries de wavelets em seu lugar. O que se fazia com as séries trigonométricas, hoje se faz, também, com as séries wavelets. A ideia é simples, se substituem as ondas \sin, \cos por uma outra onda, uma *onda mãe*, que é uma função a suporte compacto e você pode ver um exemplo na figura (fig. 4), página 8 onde se encontra uma “onda” e sua derivada. As ondas mãe são funções à suporte compacto e há algumas que foram descobertas experimentalmente satisfazendo algumas propriedades que se verificaram interessantes, como é o caso daquela descoberta por Ingrid Daubechies já mencionada acima. Da mesma forma como \sin, \cos vão determinar as frequências sonoras num sinal, uma determinada onda mãe irá encontrar alguns outros aspectos que foram considerados *interessantes* e para isto são usados dois métodos, *translações* e *concentração do suporte*. Confira *wavelets* para maiores detalhes.

é aqui você o primeiro passo, o enjanelamento, que se fez com senos e cossenos.

A teoria que unifica tudo isto é a Álgebra Linear, e aqui você tem dois exemplos de famílias de funções linearmente independentes

$$t \mapsto \sin(nt), t \mapsto \cos(nt); n \in \mathbf{N} \quad (51)$$

$$t \mapsto w(a + nt); a \in \mathbf{R}; n \in \mathbf{Z}; \quad (52)$$

que geram espaços vetoriais onde se vai projetar a imagem da transformada de um sinal que se quer estudar. Na equação (eq.52) você verá as duas operações mencionadas, *translações*, *concentração do suporte* que criam uma família de vetores l.i. formando a base do espaço em que se vai encontrar a transformada wavelet dum sinal usando a onda mãe w .

Confira também a transformada integral de Fourier.

Índice Remissivo

- auto
 - valor, 7
 - vetor, 7
- Bernouilli, 6
- correto
 - é belo, 2
- cosseno, 3
- Daubechies, Ingrid, 9
- diferenciais, equações, 6
- diferencial
 - equação, 7
 - operador, 7
- equação diferencial, 6
- erro
 - erro aqui, 3
- Euler, 6
- feito
 - está errado, 2
- fórmula
 - de McLaurin, 3
- figura
 - , 2
 - Polinômio de Taylor, 4
 - sinais, 8
 - trigonométrico
 - polinômio, 6
- Formula de McLaurin, 3
- Fourier
 - caracteres dum grupo, 9
 - coeficientes, 8
 - frequência
 - tempo, 7
 - transformada
 - discreta, 6
 - integral, 10
 - transformada discreta, 9
- Fourier, séries de, 6
- Fourier, transformada de, 6
- frequência, 7
- infinita
 - precisão, inteira, 3
- integral
 - de Fourier, 8
- inteira
 - precisão infinita, 3
- Lebesgue
 - integral de, 7
- LISP, 3
- McLaurin
 - fórmula, 3
 - Formula de, 3
- onda mãe, 9
- polinômio de Taylor, 1
- próprio
 - valor, 7
 - vetor, 7
- produto escalar, 4
- Python, 3
- Riemann
 - integral de, 7
- seno, 3
- séries de Fourier, 6
- Taylor
 - polinômio, 1
 - transformada de Fourier, 6
 - transformada discreta
 - de Fourier, 9
- vetor próprio, 6
- wavelets, 6, 9

Referências

- [1] Wikimedia Foundation. Wikipedia, enciclopédia livre na internet. <http://www.wikipedia.org>.
- [2] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, <http://www.isthe.com/chongo/>, 2011.
- [3] T Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, <http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/>, 2009.
- [4] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i. 2013.
- [5] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, <http://www.gnuplot.info>, 2010.