A fórmula de Euler

Praciano-Pereira, Tarcisio *

21 de fevereiro de 2021
preprints da Sobral Matemática
no. 2019.05
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

A fórmula de Euler nada mais é do que uma descrição do círculo trigonométrico que foi notável na época em que foi descoberta porque $\mathbf{S}^1$ é um subgrupo multiplicativo de $\mathbf{C} - 0$ e a teoria dos grupos ainda não havia sido inventada. O artigo termina com o cálculo das derivadas de seno e do cosseno.

palavras chave: derivadas do seno e do cosseno, fórmula de Euler, números complexos, subgrupo.

Euler's formula is nothing but the equation of trigonometric circle, a subgroup of $\mathbf{C} - 0$ under multiplication. What makes it notable is that at time of its discovery the group theory was not developed. The paper finish with the calculus of the derivatives of sin and cos using Euler's formula.

keywords: complex numbers, derivative of sin and cos Euler's formula, group.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 O subgrupo multiplicativo dos complexos de módulo 1

Tenho duas formas de mostrar que $\mathbf{S}^1$ é um subgrupo multiplicativo de $\mathbf{C}$, uma delas eu devo a um texto do SMSG que está descrito na Wikipedia[1] no passado, possivelmente não mais existe mas certamente seus documentos devem estar guardados nalguma biblioteca. Eu tive acesso a uma coleção dos volumes do SMSG quando era aluno de graduação na UFC e lembro-me da ardilosa demonstração geométrica de que $(\mathbf{S}^1, \cdot)$ era um grupo multiplicativo sem mencionar a palavra grupo, na verdade fazia uma demonstração geométrica das fórmulas da soma de arcos.

1.1 Fórmulas dos arcos soma

Esta demonstração foi feita pelo professor Ozório que eu repito aqui com autorização do mesmo. Considere a figura (fig. 1), página 1,
na qual os dois arcos β, α se sucedem, nesta ordem e as perpendiculares baixadas de cada extremo de arco medem, respectivamente $\sin(\beta), \sin(\alpha), \sin(\alpha+\beta)$ a última é a perpendicular ao ponto P mede $\sin(\alpha+\beta)$, confira a figura (fig 1).

O retângulo em linhas pontilhadas tem como medida do maior lado $\cos(\alpha)\sin(\beta)$, é a projeção do cateto que mede $\cos(\alpha)$ que se encontra sobre a hipotenusa do triângulo determinado por $e^{i\beta}$.

O triângulo retângulo sobreposto ao retângulo mencionado, tem por hipotenusa $\sin(\alpha)$ e é semelhante ao triângulo que define o arco β sendo assim o cateto vertical mede $\sin(\alpha)\cos(\beta)$ finalizando a soma desejada:

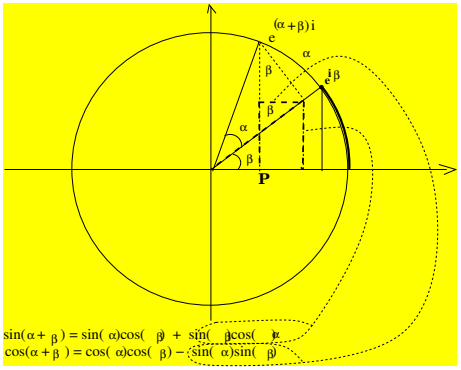

Figura 1:

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha+\beta); \tag{1}$$

A mesma figura mostra o cálculo de $\cos(\alpha+\beta)$, nela você pode ver $\cos(\alpha)$ marcado com linha pontilhada como hipotenusa dum triângulo retângulo que tem o ângulo β de onde a projeção no eixo OX é $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ da que se deve subtrair o lado horizontal do retângulo que aparece com lados pontilhados, neste caso o menor lado que vale $\sin(\alpha)\sin(\beta)$ com o que se conclui que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta); \tag{2}$$

Eu vou partir das fórmulas da soma de arcos na próxima seção.

2 O grupo multiplicativo dos complexos unitários

Euler escreveu uma fórmula e eu não sei a história de como ele a obteve e vou seguir da conhecida fórmula e certamente inventar uma história para inseri-la no contexto. Oxalá algum crítico corrija a minha maneira de ver e recomponha a parte histórica que vou deixar de lado. A magnífica fórmula é

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0; \tag{3}$$

Escrevendo o número complexo da equação (eq.2.3) como um par de números reais se tem um ponto sobre o círculo trigonométrico como consequência da fórmula fundamental da trigonometria. Mas à esquerda na equação (eq.2.3) se encontra uma operação de exponenciação envolvendo o *número de Néper* o que torna a fórmula de Euler realmente intrigante.

Vou tomar inicialmente a *exponenciação* da fórmula como uma *notação concisa* para o que se encontra à direita, a referência a um ponto do círculo trigonométrico determinando o arco α considerando o ponto $(1,0)$ como *origem do círculo trigonométrico*, $\mathbf{S}^1$, e então $e^{i0} = (1,0)$.

Na verdade a fórmula de *Euler-De Moivre-Abel* é apenas a expressão das coordenadas polares dum número complexo unitário. Se a multiplicarmos pelo módulo ρ dum número complexo qualquer, se tem a expressão em coordenadas polares deste número.

Considere agora dois números reais positivos α, β então eles determinam pela *convenção* estabelecida na equação (eq.2.3) dois pontos do círculo trigonométrico

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha), e^{-i\beta} = \cos(\beta) - i\sin(\beta); \tag{4}$$

cujo produto é

$$e^{i\alpha}e^{-i\beta} = \tag{5}$$
$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)) = \tag{6}$$
$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) - i(\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta)) = \tag{7}$$
$$= \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta); \tag{8}$$

pela fórmula da soma de arcos da trigonometria. Como a equação (eq.2.4) representa pontos sobre o círculo trigonométrico, as contas nas equações (eq.2.7) (eq.2.8) junto o teorema da teoria dos grupos,

Teorema 1 (caracterização de) *subgrupo Se num dado grupo G, multiplicativo, se tiver um subconjunto S tal que $a, b \in S \;\Rightarrow\; ab^{-1} \in S$ então S é um subgrupo de G.*

garantem que o subconjunto $\mathbf{S}^1$ de $\mathbf{C} - \{0\}$ é um subgrupo do grupo multiplicativo dos números complexos sem o zero. Com isto a *notação concisa* descreve este grupo dos números complexos de módulo 1 ou descreve, melhor, um *morfismo de grupo* do *grupo aditivo dos números reais* sobre o *grupo multiplicativo dos números complexos de módulo 1.*

Mas $e \approx 2.71828182845904523536\ldots$ é um número transmental do qual obtive os primeiros vinte dígitos depois da vírgula com auxílio do `calc` e naturalmente $e^{i\alpha}$ é um número complexo, mas, porque, exatamente, de módulo 1?

Nas equações

$$2.71828182845904523536\cdots \approx 2.(71828182845904523536); \tag{9}$$
$$2.(71828182845904523536) = 2718281828459045235 34/9999999999999999999 = A; \tag{10}$$
$$2.(71828182845904523536) = 2718281828459045235 35/9999999999999999999 = B; \tag{11}$$
$$A < e < B; \tag{12}$$

eu escrevi dois números racionais, dízimas periódicas, que me fornecem duas aproximações para o número de Néper que obtive usando `calc` e o algoritmo para determinação de geratrizes obtido em [3].

Calculei A^{2i}, B^{2i} obtendo dois números complexos cujos módulos eu calculei obtendo os seguintes resultados:

$$\text{define modulo(a,b)\{return } sqrt(power(a,2)+power(b,2)); \}; \tag{13}$$

$$i = sqrt(-1); \tag{14}$$

$$power(271828182845904523535/9999999999999999999, i*2); B^{2i}; \tag{15}$$

$$B^{2i} = -0.41614683654714238701 + 0.90929742682568169539i; \tag{16}$$

$$modulo(-0.41614683654714238701, 0.90929742682568169539) \to 1; \tag{17}$$

$$power(271828182845904523534/9999999999999999999, i*2); A^{2i}; \tag{18}$$

$$A^{2i} = -0.416146836547142387 + 0.90929742682568169539i; \tag{19}$$

$$modulo(-0.416146836547142387, 0.90929742682568169539) \to 0.(9); \tag{20}$$

Nestas equações eu calculei B^{2i}, A^{2i} para uma aproximação por excesso e outra por falta, $A^{2i} < e^{2i} < B^{2i}$ e calculei em cada caso o módulo do número complexo obtido tendo como resultado

$$|A^{2i}| = 0.99999999999999999 < |B^{2i}| = 1; \tag{21}$$

Eu poderia agora varrer o domínio $[0, 2\pi]$, $B^{it}, A^{it}; t \in [0, 2\pi]$ com um passo pequeno para encontrar resultados semelhantes aos que se podem ver na equação (eq.2.21) o que não provaria absolutamente nada mas produziria uma probabilidade alta de que $e^{it} \in \mathbf{S}^1$. Nas equações (eq.2.15) - (eq.2.20), eu estou usando $t = 2$.

Estou usando uma linguagem de computação `calc`, confira [2], que *entende de números complexos*, eu defini $i = sqrt(-1)$ e calculei

$$|A^{2i}| = 0.99999999999999999, |B^{2i}| = 1$$

A simulação computacional feita acima da qual inclusive você tem à sua disposição todos os dados para reproduzir, lhe dá uma *evidência computacional* de que a fórmula de Euler é uma operação matemática legal e resta explicar melhor como fazer tais operações envolvendo um número transcendental o que vou fazer na próxima seção colocando $e^{it} \in \mathbf{S}^1$ dentro de uma lógica caulatória, provavelmente reproduzindo o que Euler terá feito ao descobrir a fórmula.

3 e^{it} é um número complexo de módulo 1

O método para justificar que $|e^{it}| = 1$ vai seguir a trilha seguinte:

1. Definição do log e de sua inversa exp. O logaritmo tendo como domínio a reta estritamente positiva e como conjunto de valores todo o conjunto $\mathbf{R}$ e exp tendo por domínio $\mathbf{R}$ e assumindo valores em $\mathbf{R}^{++}$.

2. Extensão de ambas as funções ao conjunto dos números complexos em domínios adequados.

3. $e^{it} \in \mathbf{S}^1$.

O desenvolvimento será resumido uma vez que o assunto é muito conhecido, estou apenas construindo o terceiro item como consequência dos dois anteriores.

3.1 A função logaritmo

Este método foi possivelmente inaugurado por Courant em seu célebre livro de Cálculo. A função $f(t) = \frac{1}{t}$ é contínua em qualquer intervalo fechado que não contenha zero logo ela é integrável à Riemann e as *somas de Riemann uniformes* associadas a refinamentos das partições produzem uma sucessão de Cauchy que converge para $\int_1^a \frac{dt}{t}; a > 0$. A partir das *somas de Riemann* que convergem para

$$\int_a^b \frac{dt}{t}; ab > 0; \tag{22}$$

em que a condição $ab > 0$ garante que o zero não está no intervalo $[a, b]$, mas vou especializar mais exigindo que $0 < a < b$, eu posso obter a propriedade fundamental da integral na equação (eq.3.22) que é

$$\int_a^b \frac{dt}{t} = \int_1^{b/a} \frac{dt}{t} = \int_{a/b}^1 \frac{dt}{t}; \tag{23}$$

que permite calcular qualquer integral do tipo da equação (eq.3.22) sobre um intervalo se iniciando em 1. Desta propriedade se pode facilmente deduzir que

$$\int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_1^b \frac{dt}{t} \tag{24}$$

e finalmente a definição da função

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}; x > 0; \tag{25}$$

como uma função derivável, crescente, definida no domínio $(0, \infty)$ e portanto inversível.

Usando programas como `calc` se pode facilmente chegar a conclusão de que existe um número, e tal que

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1; e \approx 2.71828182845904523536 \tag{26}$$

Obter exatamente esta precisão pode ser complicado! Mas facilmente se mostra, usando uma sequência de somas de Riemann, que $2 < e < 3$.

3.2 A função exponencial

A inversa da função logaritmo, $\log^{-1}(x) = e^x$, tem por domínio a reta $\mathbf{R}$ e como conjunto de valores $(0, \infty)$, é uma função positiva, derivável e aplicando derivada implícita se conclui que

$$\frac{de^t}{dt} = e^t; \tag{27}$$

a única função que é derivada de si própria. E o valor de e vem em consequência da equação (eq.3.26).

3.3 $e^{it} \in \mathbf{S}^1$

Tentei descobrir como Euler chegou à sua fórmula mas não tive sucesso em minhas buscas e assim sou levado à uma construção da fórmula que resulte no que Euler viu. Nas duas seções anteriores eu simplesmente construí uma função bijetiva e sua inversa. Agora vou definir uma extensão da exponencial real aos números complexos de modo a obter uma função que tenha as mesmas propriedade que a exponencial real mesmo quando estendida ao conjunto dos números complexos.

Euler deve ter feito cálculos semelhantes ao que estou apresentando na seguinte sucessão de equações depois das quais vou tecer comentários explicando a passagem dentre elas:

$$e^{iy} = (\cos(y) + i\sin(y)); \tag{28}$$
$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)); \tag{29}$$
$$z_1 = x_1 + iy_1; z_2 = x_2 + iy_2; \tag{30}$$
$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = \tag{31}$$
$$= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)}e^{i(y_1+y_2)} = \tag{32}$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) = \tag{33}$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}\left(\cos(y_1)\cos(y_2) - \sin(y_1)\sin(y_2)\right) + i\left(\cos(y_1)\sin(y_2) + \sin(y_1)\cos(y_2)\right) = \tag{34}$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}(\cos(y_1) + i\sin(y_1)(\cos(y_2) + i\sin(y_2) = \tag{35}$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}e^{iy_1}e^{iy_2} = e^{x_1}e^{iy_1}e^{x_2}e^{iy_2} = \tag{36}$$
$$= e^{z_1}e^{z_2} \tag{37}$$

1. Na equação (eq.28) está a definição de Euler da expressão e^{iy} dada pela expressão que está à sua direita, é a definição que Euler fez para a exponencial de número *imaginário puro* baseado na soma de arcos das funções trigonométricas que vou deixar claro mais abaixo. Ele resumiu, ou associou, à propriedade da exponencial real com a propriedade da soma de ângulos, para a exponencial de número imaginário puro. É uma definição que se desse certo levaria à expansão da exponencial aos números complexos, e deu certo!

2. Na equação (eq.29) Euler supôs, e se trata duma definição, portanto, que vale a propriedade da soma de exponentes quando os expoentes são complexos e vou mostrar que esta suposição completa perfeitamente a extensão da exponencial ao conjunto dos números complexos nas próxima equações. É uma nova definição de Euler que complementa sua definição de exponencial dum número imaginário puro.

3. Na equação (eq.30) defini dois números complexos e na equação (eq.31) estou aplicando a exponencial à soma dos números complexos z_1, z_2 e neste momento vale a igualdade se for válida a definição da exponencial a um número complexo. Portanto aqui merecia haver uma observação do tipo, "deixe-me supor que seja válida a propriedade da soma expoentes no conjunto dos números complexos" que vai se verificar verdadeiro na última equação desta sequência de equações.

4. Na equação (eq.32) estou rearrumando a expressão anterior. Estou usando a propriedade comutativa e distributiva da multiplicação relativamente à soma no corpo dos números complexos, à esquerda, e usando a definição de Euler, à direita, da exponencial de um número imaginário puro, ainda sob a hipótese de que seja válida a definição da exponencial a um número complexo.

5. Na equação (eq.33) estou usando a propriedade aditiva da exponencial real e usando a definição de Euler para a soma de imaginários puros traduzida como soma de arcos.

6. Na equação (eq.34) apliquei a soma de arcos da trigonometria e na equação (eq.35) eu identifique a expressão da soma de arcos com um produto de números complexos, e este é o ponto central da descoberta de Euler, ele havia observado que com sua definição de e^{it} era possível ter um *método simples* para relembrar as fórmulas de soma de arcos do seno e do cosseno. É muito mais do que apenas isto, é o que justifica a extensão da exponencial ao conjunto dos imaginários puros. Aqui se vê a pura genialidade de Euler, ele estava escrevendo a expressão do morfismo de grupos, que não existia em sua época, entre o grupo aditivo $(R, +)$ com o grupo multiplicativo $(\mathbf{S}^1, \cdot)$.

7. A equação (eq.36) simplifica a anterior. Nela eu usei a propriedade associativa do produto de números complexos para arranjar de modo cômodo os produtos para recompor os números complexos z_1, z_2 como expoentes obtendo a equação (eq.37) como consequência.

Euler deve ter feito esta definição

Definição 1 (exponencial) *complexa*

$$z \in \mathbf{C}; z = x + iy; \tag{38}$$
$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}; e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y); \tag{39}$$

Agora

Teorema 2 (propriedades) *da exponencial complexa*

$$z = x + iy; e^0 = 1; \exp(z) = e^z; \tag{40}$$
$$w = z_1 + z_2 \quad \Rightarrow \quad e^w = e^{z_1} e^{z_2}; \tag{41}$$
$$z \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \exp(z) = e^z; \tag{42}$$
$$Log(z) = |z| + iarg(z) \quad \Rightarrow \quad z \in \mathbf{R}^+ Log(z) = \log(z); \tag{43}$$

A função exp *é periódica na parte imaginária com período* 2π *e a função Log tem um ramo principal definido na faixa* $\mathbf{R}^{++} \times [-\pi, \pi)$*. Portanto a exponencial complexa é um morfismo do grupo aditivo dos números complexos no grupo multiplicativo dos números complexos sem o zero.*

Dem *: As propriedades são imediatas a partir da definição. É preciso apenas mostrar se*

$$z \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \exp(z) = e^z$$

em que à esquerda está a exponencial complexa e à direita a exponencial real e que também é verdade que se

$$z \in \mathbf{R}^{++} \quad \Rightarrow \quad Log(z) = \log(z)$$

em que, novamente, à esquerda está o logaritmo complexo e à direita a logaritmo real, mostrando que estas funções complexas quando restritas ao caso real coincidem com as funções originais de quem elas são extensões.

q.e.d .

Em suma eu não provei que $e^{i\alpha} \in \mathbf{S}^1$ e sim eu construí, uma função com esta propriedade que estende a exponencial ao conjunto dos números complexos com as propriedades esperadas. É uma definição!

corrigindo, Euler construiu, eu estou repetindo a construção de Euler,

A estatística mencionada na seção anterior ficou agora superada, ainda assim ela é válida no sentido de oferecer uma *evidência computacional* de que e^{x+iy} é um cálculo real que pode ser efetuado por um programa de computador.

Vou terminar este artigo com o cálculo da derivada das funções $\sin, \cos$ que no meu entender justificam uma reengenharia do Cálculo tarefa em que estou atualmente empenhado. Confira a seguinte sucessão de equações com os comentários que farei em seguida:

$$h(t) = e^{it} = (\cos(t) + i\sin(t)) \approx (\cos(t), \sin(t)); \tag{44}$$

$$h'(t) = ie^{it} = i(\cos(t) + i\sin(t)) = (-\sin(t) + i\cos(t)) \approx (-\sin(t), \cos(t)); \tag{45}$$

$$\frac{d\cos(t)}{dt} = -\sin(t); \frac{d\sin(t)}{dt} = \cos(t); \tag{46}$$

Na equação (eq.3.44) eu defini uma curva do plano parametrizada na reta $\mathbf{R}$ definida pela função diferenciável e^{it} o que força que as funções $\sin, \cos$ sejam também diferenciáveis. Obtive assim com uma simples comparação entre vetores a derivada das funções $\sin, \cos$ de uma forma limpa e rápida e sem os artifícios cabulosos com que consegue calcular estas derivadas na maioria dos livros de Cálculo.

Obviamente que este texto está compacto e merece ser expandido, é o que estou atualmente fazendo no meu projeto *Reengenharia do Cálculo*.

Índice Remissivo

Cálculo
    Reengenharia, 7
computacional
    evidência, 3, 6

figura
    $\sin(\alpha + \beta)$, 1

Néper
    número de, 1

origem de $\mathbf{S}^1$, 2

Reengenharia
    do Cálculo, 7

somas de Riemann
    uniformes, 4
subgrupo
    caracterização, 2

Referências

[1] Wikimedia Foundation. Wikipedia, enciclopédia livre na internet. http://www.wikipedia.org.

[2] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. Dízima periódica. Technical report, Sobral Matemática, 2019.

[4] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.