Dízima periódica

Praciano-Pereira, Tarcisio *

19 de abril de 2019
preprints da Sobral Matemática
no. 2019.04
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Alguns autores no Quora discutiram a geratriz duma dízima mas não encontrei na discussão o algoritmo. Na tentativa descobri que existe uma classificação das dízimas de que um algoritmo depende. Eu mostro aqui esta classificação e apresento algoritmos para determinar a geratriz

palavras chave: dízima periódica, geratriz, números racionais .

Reading some authors at Quora about recurring decimals I have seen that it cannot be a unique algorithm to solve the problem of finding a generating fraction to a recurring decimal. I discovered a classification of them upon which an algorithm depends and I present this classification together with algorithms.

keywords: generating fraction, rational numbers, recurring decimal.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 Números racionais são dízimas periódicas

Dizima periódica, é um caso particular de *dízima* que é uma sucessão de algarismos definindo um número. Dízima é sinônimo de *decimal* embora pouco usada com este significado.

As *dízimas periódicas* são os números racionais e as *dízimas não periódicas* são os números irracionais.

$$2 = 1.(9) \cdots \in \mathbf{Q} \tag{1}$$
$$1/3 = 0.(3) \ldots ; \in \mathbf{Q} \tag{2}$$
$$0.(1415) \cdots \in \mathbf{Q} \tag{3}$$
$$p = 3.(14159265358979323848) \cdots \in \mathbf{Q}; p \neq \pi; \tag{4}$$
$$\pi \approx 3.14159265358979323848 \ldots \notin \mathbf{Q}; \tag{5}$$

Nas equações (eq.1), (eq.2), (eq.3) e (eq.4) você vê dízimas periódicas e na equação (eq.5) você tem a *constante de Arquimedes* que é um *número irracional* não sendo uma dízima periódica.

As dízimas se classificam em três classes que você pode ver imediatamente correndo para o final deste artigo entretanto o tipo básico que aparece em todos os outros casos está na equação (eq.3) e vou começar a discussão por este caso mais simples produzindo ao final uma sua generalização para descrever todos os outros.

Existe um algoritmo simples para recuperar a forma $\frac{p}{q}$ que representa a mesma dízima. Vou mostrar-lhe um exemplo a partir do qual vou deduzir o algoritmo que vai ser ligeiramente diferente daquele que aparece comumente nos livros de Matemática do Ensino Médio. Este que estou apresentando aqui é bem intuitivo e sua demonstração obedece às regras da lógica expandido as regras da aritmética, eu vou fazer a apresentação fazendo alterações no exemplo.

A justificativa do algoritmo vem das *séries geométricas* que generalizam as *progressões geométricas* porque uma dízima periódica representa uma soma de potências negativas de 10, com tantos zeros quantos algarismos houver na *parte periódica* somada com a parte não periódica. Usando a linguagem das p.g. a *parte não periódica* é o *termo inicial* da p.g. a *parte periódica* é formada por um coeficiente constante que multiplica a razão. Resumindo esta descrição, uma *dízima periódica* é um *termo inicial* somado com uma p.g.

Confira o exemplo numérico que eu vou deduzir dele a regra geral.

$$M = 37345.(1415) \ldots \text{ valor inicial: } 37345; \text{ período } 1415; \tag{6}$$
$$S = 0.(1415) \ldots \text{ valor inicial: } 0; \text{ período } 1415; \tag{7}$$
$$\text{coeficiente da razão: } 1415; \text{razão: } \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}; \tag{8}$$
$$p_0 + a\sum_{k=0}^{n} r^k; p_0 = 0; a = \frac{1415}{10000}; r = \frac{1}{10^4}; S_n = p_0 + a\sum_{k=0}^{n} r^k = a\frac{1-r^n}{1-r}; \tag{9}$$
$$S = p_0 + a\sum_{k=0}^{\infty} r^k = p_0 + a\frac{1}{1-r}; 0 < r < 1; \tag{10}$$
$$S = 0.(1415) \cdots = \frac{1415}{10000}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10000^k} = \frac{1415}{10000}\frac{1}{1-r} = \tag{11}$$
$$= \frac{1415}{10000}\frac{1}{1-\frac{1}{10000}} = \frac{1415}{10000}\frac{10000}{9999} = \frac{1415}{9999}; \tag{12}$$

A *geratriz da dízima periódica* na penúltima equação, é uma fração cujo numerador é um período e o denominador uma *tira* com tantos 9's quantos forem os algarismos da parte periódica.

Estou introduzindo o conceito "*tira*" que vou usar ao longo do artigo. Uma *tira* é um conjunto de caracteres, as palavras da língua portuguesa são *tiras* formadas com os caracteres do nosso alfabeto. Os números naturais são *tiras* formadas com os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Você pode argumentar que estou inventando um nome e que eu poderia usar *arranjo com repetição*, entretanto os arranjos têm um tamanho especificado e seria difícil classificar as palavras da língua portuguesa como *arranjos* por que elas têm *tamanho* variado e não especificado. Em inglês, e em muitos textos de computação se usa a palavra *string*.

Da equação (eq.6) para a equação (eq.7) eu mudei o objetivo quando desprezei na equação (eq.7) o *valor inicial* considerando-o zero. Ele vai voltar de forma natural quando eu entrar na discussão das classes de *dízimas periódicas* no momento em que vou fazer uso desta discussão inicial.

Não há uma notação padrão para indicar a parte periódica. Alguns autores usam parenteses, como eu usei na equação (eq.7). Outros marcam a parte periódica com um barra acima da mesma e alguns usam uma barra inferior.

Na equação (eq.9) estou relembrando a *teoria* das progressões geométricas com uma adaptação da linguagem para o meu objetivo com as dízimas periódicas.

Na equação (eq.10) eu escrevi o limite da *série geométrica* que é a soma dos termos da p.g. que sendo uma p.g. com razão positiva menor do 1, tem limite, a série converge para um número racional $\frac{p}{q}$ que é a *geratriz da dízima periódica*. O *somatório* com o símbolo "∞" não é uma soma, é um limite, é apenas um símbolo que representa o limite que eu escrevi no final da equação (eq.10) e que vou usar nas equações seguintes para obter a fórmula da *geratriz* neste caso particular e que vai me permitir generalizar para um caso qualquer quando vou obter o algoritmo para obter a *geratriz* duma dízima periódica qualquer. É neste ponto que, com a lógica, usando limite, estou expandindo as regras da *aritmética* porque este somatório não representa uma *soma da aritmética*.

2 A geratriz

Vou descrever o algoritmo no caso particular exposto nas equações acima que é bem simples porque o *ponto decimal* já separa identificando as duas partes da dízima, a *não periódica*, antes do ponto e a *periódica*, depois do ponto.

1. Nas equações iniciais você viu que pode haver um *valor inicial* que logo ignorei caindo num caso mais simples, mas agora vou voltar a considerá-lo:

$$S = 123456789.14151415\cdots = 123456789.(1415)\ldots \text{ valor inicial: } 123456789; \qquad (13)$$

2. Identifique as partes: periódica e não periódica: $123456789, 1415$, são duas *tiras* de números que tem, respectivamente, os comprimentos $9, 4$, $|123456789| = 9, |1415| = 4$.

3. Crie uma fração, em cujo denominador esteja a *parte periódica* e no denominador uma *tira* de 9s com o comprimento da tira que define o período: 9999, com tantos 9s quantos forem os algarismos da *parte periódica*. Se você digitar esta fração numa folha de trabalho do `calc` ou do `python` vai aparecer a parte decimal da *dízima*:

   - Em `python` "1415/9999." e se você digitar "1415/9999" vai ter uma surpresa, experimente e procure entender! A divisão no `python` é inteira.
   - Em `calc`
     1415/9999

˜ 0.14151415141514151415141514151415141514151415
O sinal "˜ " é a forma como `calc` o adverte de que se trata duma aproximação porque *ele não sabe escrever*
0.14151415141514151415141514151415141514151415...

4. Agora deixe-me terminar as contas na equação (eq.12).

$$123456789 + \frac{1415}{9999} = \frac{123456789 * 9999 + 1415}{9999} = \frac{373412655 + 1415}{9999} = \frac{373414070}{9999}; \quad (14)$$

e pode testar com `python` ou `calc`, [1].

Se você usar `Linux`, e se a distribuição for baseada no `Debian`, `Debian/gnu/linux`, você pode instalar `calc` com o comando
`sudo apt install apcalc`.
sem precisar pagar nada aos autores do programa porque `calc` é um programa livre distribuído com a licença `GPL`. Esta afirmação nada tem o que ver com *gratuito* por que isto simplesmente não existe. Nós que escrevemos programas e os distribuímos sob `GPL`, trabalhamos para alguma empresa que nos permite produzir programas sob esta licença, no meu caso eu sou professor universitário e posso fazê-lo. Outros programadores pedem que lhes seja feita uma doação que lhes permitam continuar trabalhando. Não sei qual é o caso do `calc`, mas digitando `help copyright`, num terminal do `calc` você vai obter alguma informação que lhe pode ajudar descobrir mais a respeito.

3 Quando o ponto decimal não identifica as partes

E aqui você tem três casos que são diferentes do exemplo inicial.

1. 123456789.(1415) . . . $m = 0$;
2. 1234567891414.(1415) . . . $m = 4$;ou
3. poderia ser 0.01234567891415(1415) . . . $m = -10$

E você vai poder obter a *dízima periódica* com o comando do `calc`
`power(10,m)*(123456789*9999 + 1415)/9999`
usando o valor de m apropriado a cada caso. Por exemplo, para o terceiro caso usei
`m=-10; power(10,m)*(123456789*9999 + 1415)/9999`
que são dois comandos do `calc`, separados por "ponto e vírgula", ou poderia serem os comandos separados em linhas distintas. Se você raspar a linha de comandos acima, e a colar num terminal do `calc` vai ter na frente dos olhos a dízima periódica do terceiro exemplo. Troque o valor de m e você pode obter os outros dois.

E vou mostrar-lhe como usar o exemplo inicial para preparar a *dízima periódica* para construir sua *geratriz*.

1. Deixe-me caracterizar o primeiro dos exemplos acima como o *padrão*, quando $m = 0$, e os dois outros como modificações do *padrão* em que o *ponto decimal* corre para direita ou para esquerda como for conveniente ao caso.
2. Identifique a *parte periódica* e divida-a por uma tira de 9s com mesmo comprimento do período.

3. Some o resultado anterior com a *parte não periódica* multiplicada pela tira de 9s com mesmo comprimento do período. Observe que você está somando frações e o processo é aquele para igualar os denominadores.

4. Você deve identificar nas duas etapas anteriores o método para somar uma fração, o primeiro item, com um número, a *parte não periódica* no segundo item. Divida agora este resultado pela tira de 9s que é o *denominador comum.*

5. Multiplique por uma potência de 10 (o expoente pode ser negativo). É esta multiplicação que vai governar a colocação do *ponto decimal.* Na prática, desloque o ponto decimal para voltar ao caso anterior e conte o número de casas correspondentes a este deslocamento do *ponto*, seja m este número e vai ser

   (a) $m = 0$ no primeiro caso, não há deslocamento do ponto decimal,

   (b) $m = 4$ no segundo caso, o ponto decimal se deslocou quatro casas para a direita,

   (c) $m = -10$, no terceiro caso, o ponto decimal se deslocou dez casas para a esquerda, deixando um zero depois do *ponto decimal.*

   como ficou indicado dentro da lista de casos.

   Observe que uma outra forma prática relativamente ao deslocamento do *ponto decimal* consiste em colocar m zeros no denominador ou no numerador. É o papel de `power(10,m)` no algoritmo computacional.

   A geratriz vai ser a soma de frações usando o primeiro caso como padrão e usando m para retornar à *dízima periódica* original. Vou repetir a lista de casos com o algoritmo computacional:

   (a) 123456789.(1415) ... $m = 0$;
   `power(10,m)*(123456789*9999+1415)/9999`;
   o ponto decimal não se deslocou nem para direita e nem para esquerda.

   (b) 1234567891415.(1415) ... $m = 4$;
   `power(10,m)*(123456789*9999+1415/9999)`; o ponto decimal se deslocou para esquerda de quatro casas decimais.

   (c) poderia ser 0.01234567891415(1415) ... $m = -10$ o ponto decimal se deslocou para direita de 10 casas decimais, deixando um zero depois do ponto decimal.
   `power(10,m)*(123456789*9999+1415)/9999`;

   Neste ponto *eu cometi um erro* que vou registrar como uma curiosidade para quem não tiver tanta experiência com uso de expressões computacionais, (e eu tenho experiência, e errei): Havia um erro! Corrigido!

   (a) <u>errado</u> `power(10,m)*(123456789*9999+1415/9999)`,

   (b) <u>certo</u> `power(10,m)*(123456789*9999+1415)/9999`,

   o erro se encontra na posição do parêntesis à esquerda cortando a distributividade na *multiplicação* por $\frac{1}{9999}$.

   Nas listagens dos três exemplos você vê comandos para a linguagem de computação `calc` e eu preciso agora lhe mostrar onde esta a *geratriz* e como obtê-la. Correr o ponto decimal para a direita ou para esquerda, significa colocar zeros no denominador ou no numerador, nesta ordem. É o papel do multiplicador `power(10,m)`. Então eu vou repetir a lista de casos agora construindo a *geratriz*:

(a) 123456789.(1415)... $m = 0$;

$$\frac{123456789 * 9999 + 1415}{9999} = \frac{373414070}{9999} \tag{15}$$

e o comando do `calc`

`power(10,m)*(123456789*9999+1415)/9999;`

(b) 1234567891415.(1415)... $m = 4$;

$$10^4 \frac{123456789 * 9999 + 1415}{9999} = 10^4 \frac{373414070}{9999} = \frac{3734140700000}{9999} \tag{16}$$

Os zeros são incluídos no final do numerador na expressão da geratriz e o comando do `calc`

`power(10,m)*(123456789*9999+1415)/9999;`

(c) poderia ser 0.0123456789(1415)... $m = -10$

$$10^{-10} \frac{123456789 * 9999 + 1415}{9999} = 10^{-6} \frac{1234444434625}{9999} = \frac{37341407}{9999000000} \tag{17}$$

e o comando do `calc`

`power(10,-10)*(123456789*9999+1415)/9999;`

Use o algoritmo anterior e multiplique o resultado por 10^m em que $m = -10$ é negativo, quando o deslocamento do *ponto* foi para direita, e $m = 4$, positivo, no outro caso, quando o ponto foi deslocado para a esquerda.

Experimente usando `calc`, para obter a geratriz de 1234567891415.(1415)...

`m=4; power(10,m)*(123456789*9999 + 1415)/9999`

A geratriz é o resultado da conta

`power(10,m)*(123456789*9999 + 1415)/9999` que é $\frac{12344444434626}{9999}$ e você também pode verificar usando `calc` ou outra máquina de calcular. Mas observe, separe os *processos*:

- para obter a geratriz, calcule com `calc` o numerador: `123456789*9999 + 1415` e escreva à mão a fração $\frac{1234444434626}{9999}$,
- para recuperar a dízima periódica use o comando duplo do `calc`
  `m=4; power(10,m)*(123456789*9999 + 1415)/9999`
  que corresponde à fração $\frac{12344444346260000}{9999}$
  substituindo "m=4" com o valor apropriado.
  No terceiro caso a fração é $\frac{1234444434626}{99990000000000}$.

E você já pode ver que a regra é

(a) escreva uma fração cujo denominador seja uma *tira* de noves do mesmo comprimento do período.

(b) o numerador seja a parte não periódica multiplicada pela referida *tira* de noves somado a um período.

(c) acrescente m zeros ao numerador se o ponto decimal estiver deslocado m posições para esquerda, ou

(d) acrescente m zeros ao denominador se o ponto decimal estiver deslocado m posições para direita.

Experimente usando `calc`

$$\texttt{power(10,-5)*(123456789*9999 + 1415)/9999;} \tag{18}$$
$$123456789 + 1415/9999 = (123456789*9999 + 1415)/9999; \tag{19}$$
$$(123456789*9999 + 1415)/9999 = 1234444434626/9999; \tag{20}$$
$$\texttt{power(10,-5)*1234444434626/9999;} \tag{21}$$
$$1234.56789(1415)\ldots \tag{22}$$
$$\tfrac{1234444434626}{999900000} = 1234.56789(1415)\ldots \tag{23}$$
$$\text{Na folha do } \texttt{calc}\text{, digite:} \tag{24}$$
$$1234444434626/999900000; \tag{25}$$

Compare o valor de m com o número de zeros que aparece no denominador da geratriz.

A geratriz é o resultado da conta
`123456789 + 1415/9999` que é $\frac{1234444434626}{999900000}$ onde você pode identificar a multiplicação por `power(10,-5)` na presença de cinco zeros, depois dos quatro *nove*s, no denominador.
`power()` é a função do `calc` para calcular qualquer potência, inclusive fracionária.
Em alguns textos aparece a fórmula errada para determinar a geratriz duma dízima periódica como sendo:

1. no numerador *uma tira formada com a parte não periódica seguida dum período*
2. no denominador *uma tira de 9 com o mesmo comprimento da parte periódica seguida por uma tira de 0 com o mesmo comprimento da parte não periódica*

e está errado, como o mostram os exemplos anteriores.

4 A fração obtida pode ser redutível

Este método produz a geratriz de qualquer dízima periódica, entretanto o resultado pode não ser a fração mais simples. Por exemplo

$$0.(142857)\cdots = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}; \tag{26}$$

E você pode gerar vários exemplos interessantes, tome um número primo, p, multiplique-o por uma tira de noves somando 1 ao resultado para obter o numerador, coloque a tira de noves no denominador e vai obter uma *geratriz* da dízima periódica. Por exemplo

$$\frac{p * 99999 + 1}{99999} \tag{27}$$

em que p é primo.
O comando do `calc` é
`p=5; (p*99999+1)/99999`
para obter

$$5.00001000010000100001 \cdots = 5(00001)$$

Como o denominador é sempre divisível por 3 basta verificar se o numerador também o é para obter uma fração mais simples. No caso da equação (eq. 27), eu fatorei o numerador

$$142857 = 3^3*11*13*37; 999999 = 3*333333 = 9*111111 = 3^3*7*11*13*37 = 7*142857; \quad (28)$$

e eliminei os fatores comuns com o denominador.

Entretanto as duas frações

$$\frac{142857}{999999} \approx \frac{1}{7} \quad (29)$$

são *equivalentes* portanto qualquer uma das duas é uma boa resposta para a questão da procura duma geratriz para uma dízima periódica.

Estou lhe mostrando na listagem a abaixo as três classes possíveis de *dízimas periódicas*. Estou fazendo esta descrição usando uma mistura das linguagens Matemática e Computação. Se você colocar alguma das expressões abaixo que terminam com reticências ou as que representam frações na linguagem da Matemática do Ensino Médio, numa folha de cálculo duma linguagem de computação você vai receber uma mensagem de erro do tipo "*bad formated number*". Também há *erros* que são usados comumente na linguagem matemática como $4\frac{3}{4}$ que se "*pretende*" que seja $4 + \frac{3}{4}$.

5 Três classes de dízimas periódicas

Eu posso gerar qualquer dízima periódica com comandos do `calc` e ao mesmo tempo escrever a expressão matemática que produz a correspondente *geratriz* usando duas variáveis a, b que tanto podem ser usadas na expressão matemática como na computacional. Você pode experimentar em `calc` qualquer uma das expressões abaixo em que vou apresentar, lado a lado as expressão matemática e expressão computacional.

A expressão computacional é

1. `a=123456789; b=1415;m=-10;`
2. `power(10,m)*(a*9999+b)/9999`
3. troque os valores de a,b,m, a *tira* de 9's de acordo com a dízima que lhe interessar. Observe que a equação (eq.19) mostra o "método automático" para calcular a tira de 9's:
   $$\frac{1}{1-\frac{1}{10^m}} = \frac{1}{1-\frac{1}{10000}};$$
   produz o número certo de noves no denominador.
4. aplique no `calc` (a*9999+b) para encontrar o numerador e a fração será
   `power(10,m)*(a*9999+b)/9999`
5. substitua `power(10,m)` por uma *tira* de zeros no numerador ou no denominador para refletir o deslocamento do ponto decimal para direita ou para esquerda.

```
m=-10; power(10,m)*(a*9999+b)/9999
```

O programa

```
define DizimaPeriodica(m,a,b) {
     while(m < 11)        {
                          print "m = ",m,, power(10,m)*(a + b/9999);
                          m+=4; }
}
```

Vai gerar as três classes se você `definir` este programa numa folha do `calc` e depois digitar
`DizimaPeriodica(-9,a,b);`

Então m vai saltar de 4 em 4 que é menor do que o comprimento da tira não periódica produzindo as três classes e lhe apresentando cinco exemplos.

- `m = -12 -  0.00012345678914151415`
- `m = -8 -  1.23456789141514151415`
- `m = -4 -  12345.67891415141514151415`
- `m = 0 -  123456789.14151415141514151415`
- `m = 4 -  1234567891415.14151415141514151415`
- `m = 8 -  12345678914151415.14151415141514151415`

Eu usei $a = 123456789, b = 1415$, respectivamente, como a *tira* da parte não periódica, $a = 123456789$, e o período, $b = 1415$, e m como potência de 10: 10^m.

Não foi gerada pelo programa a dízima periódica pura mas teste com os valores para a, b

$$b = 1415; a = 0;$$

e o programa vai gerar uma dízima periódica pura quando o ciclo passar por $m = 0$.

O comando do calc que produz a *dízima periódica* correspondente a qualquer um destes casos é
`power(10,m)*(a*9999 + b)/9999`

Os casos acima descrevem três classes básicas de *dízimas periódicas* que você pode encontrar. Eu posso descrevê-las de uma forma abstrata usando uma mistura das linguagens Matemática e Computação como:

- Você tem duas tiras de mesmo comprimento, em inglês se traduz *tira* por *string.* que no exemplo acima são $a = 123456789$ e $b = 714297$ e a fração produziria $\frac{123456666257508}{999999} =$ 0.(123456) uma *dizima periódica* que é um decimal puro: 0.(123456). É o primeiro caso.
- Você possivelmente tem outra tira com tamanho m que produz os demais casos 2,3: $a =$ 123456789, $m = 9$.

Os casos estão escritos numa expansão da linguagem matematico-computacional porque ninguém costuma escrever $0.000123456789\frac{714297}{999999}$ mas é habitual $123456789.(714297)\ldots$ nos textos de Matemática do Ensino Médio, porém produz o erro do tipo "*bad formated number*" numa linguagem de computação: $123456789\frac{714297}{999999}$ e pode ser traduzido, com eu apresentei acima, como

$$123456789 + 714297/999999 = \frac{123456666257508}{999999}$$

Os programas que usei aqui se encontram na página [2, programas] de onde você pode baixar sob a licença `GPL`.

Índice Remissivo

Referências

[1] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[2] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.