A reengenharia do Cálculo segunda parte

Praciano-Pereira, Tarcisio *

15 de fevereiro de 2019
preprints da Sobral Matemática
no. 2019.03
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Este é o segundo duma série de artigos em que estarei escrevendo o planejamento do meu livro de Cálculo, possivelemnte com o mesmo título seguido dum número de ordem. Neste estou mostrando, resumidamente, o Cálculo Diferencial e Integral das funções polinomiais.

palavras chave: função polinomial, derivada de funções polinomiais, integral de funções polinomiais.

This is the second paper of a series into planing my book in Calculus to a final draft. The title of the papers will reflect they are together in a goal by the names containing numbers which will identify their precedence, roughly. In this paper I am dealing with the Differential and Integral Calculus of polynomial functions in a very resumed way.

keywords: derivative of polynomial functions, integral of polynomial functions, polynomial functions.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 O desenvolvimento deste artigo

Eu vou desenvolver a integral e a derivada do monômio $f(x) = x^n$ e para simplicidade do texto, coerente com o objetivo desta série de préprints, eu vou me restringir ao caso $n = 3$ deixando para a leitora à expansão ao caso geral dum polinômio qualquer.

Estou usando sem nenhuma outra referência o artigo [9] que justifica porque posso usar somas de Riemann uniformes na aproximação da integral definida e também vou usar o resultado final do [8] que mostra como calcular a integral do monômio $f(x) = x^n$.

O objetivo aqui é chegar ao teorema fundamental do Cálculo Integral. Nesta primeira seção, eu vou mostrar que as funções polinomiais são contínuas, o que todo mundo já sabe, e não representa nenhum novidade a não ser porque estou usando continuidade sequencial que é ignorada nos livros de Cálculo. Com isto estarei montando o prequesito para as duas seções seguintes: integral e derivada.

1.1 Continuidade das funções polinomiais

Vou me restringir ao caso $f(x) = x^n, n = 3$ uma vez que os demais casos não oferecem nenhuma novidade.

Também para simplificar a linguagem e a notação, e eu estarei me referindo a uma *função contínua,* f quando na verdade quero dizer $f(x) = x^n, n = 3$.

A teoria que se encontra por baixo é que os números reais são classes de equivalência de sucessões de Cauchy do anel de todas as sucessões de números reais com o quociente sendo feito com o ideal maximal das sucessões que convergem para zero tendo como consequência um corpo. Entretanto num livro de Cálculo é suficiente mostrar as propriedades dos limites que será o que vou fazer aqui. A tradução desta frase matemática de *altíssimo nível, fim duma boa graduação* é que as propriedades do limite valem: soma de limites é o limite da soma, produto dos limites é o produto dos limites, aliás, esta é uma das dificuldades do Cálculo apresentada na forma como o é habitualmente, coisa que pretendo romper aqui, a dificuldade.

Também, a menos que eu o explicite ao contrário, estarei sempre trabalhando com funções definidas num intervalo fechado da reta, ou no caso complexo, definidas na bola $\mathcal{B}[0, r]$ para r suficientemente grande e ao usar esta notação para as bolas, quero me referir às bolas fechadas.

As propriedades do limite são, na verdade, a construção dos números reais que fará parte dum artigo desta sequência.

A continuidade sequencial equivale para o conjunto dos números reais, ou dos números complexos, à definição com *épsilon e deltas*, fato este que é ignorado na grande maioria dos livros de Cálculo tornando a grande maioria das demonstrações tortuosas comparadas com as que vou fazer aqui.

Teorema 1 (As funções polinomiais) *são contínuas*

Dem :

É consequência de que o produto do limite é o limite do produto. Seja

$$f(x) = x^n, n = 3; \tag{1}$$

$$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}; x_n \longrightarrow a; \text{ uma sucessão convergente}; \tag{2}$$

então

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(a); \tag{3}$$

A equação (eq.1.3) é consequência do limite do produto que é o produto dos limites.

A sucessão $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ em alguns casos precisa de pequenas restrições uma das quais é que todos os termos um número finito estejam dentro do domínio de definição f, e isto precisa ser dito. Mas não farei nenhuma menção a este observação na sequência.

q.e.d .

E para um polinômio qualquer vale que *soma dos limites é o limite da soma.*

A continuidade deve ser tratada com bastante cuidado, por um lado ela se torna, no contexto das funções polinomiais uma exceção à regra, mas ela é necessária para garantir que as somas de Riemann uniformes representam o limite comum de todas as somas de Riemann no contexto em que estou trabalhando, e entendo que este assunto deve ser tratada de forma marginal, o que significa, dar-lhe importância mas salientando que faz parte duma conceituação mais ampla que se aplica aqui ao universo dos elementos que serão usados. Isto dá uma sensação de inutilidade ao conceito de *continuidade* que é comum no ensino do Cálculo. Como entender que é importante a *continuidade* se todas as funções usadas são contínuas a não ser algumas construídas especialmente para serem exemplos de funções descontínuas?

Entretanto a *descontinuidade* faz parte da vida diária, apenas é de difícil observação e apenas os pesquisadores envolvidos com a questão é que podem observar a sua presença. Um exemplo interessante se me ocorreu outro dias observando o comportamento dos insetos: eles procuram o encontro entre a parede e o piso exatamente porque aí se dá uma descontinuidade na luminosidade e que em alguns casos se dá por uma fresta do encontro da parede com o piso que eles percebem como um buraco. Mas é muito difícil formular este exemplo sob forma duma equação, entretanto é um bom exemplo para mostrar que existe *descontinuidade* e sugerir que se aguarde um pouco pois é no estudo das derivadas que será fácil construir exemplos: a curva da luz atravessando um meio tem uma derivada descontínua e a função módulo tem um gráfico semelhante oferecendo a mesma descontinuidade na derivada. Mas é preciso chegar à derivada para que apareçam exemplos significativos que não possam ser etiquetados como *produzidos* para se falar dum conceito que parece não ter exemplos na vida real.

Nas duas próximas seções vou tratar, neste ordem, da integral e da derivada, reservando uma quarta seção para o Teorema Fundamental do Cálculo que poderá ser continuação de qualquer das duas anteriores, numa tentativa de me apaziguar com os que preferem começar pela derivada. Sempre que volto a esta questão lembro-me duma ocasião em que, recentemente tendo feito concurso para o Dep de Matemática da UEM, brindaram-me com uma turma de repetentes para dar aulas de Cálculo. Comecei pela integral ouvindo reclamações de alguns dos experimentados repentes: *mas não pode! ainda não deu derivada!.* Ao que lhes respondi, *ora, esta é uma turma de repetentes, todos aqui já viram derivada!*

Lamento que Courant não tenha ido a fundo em sua inversão, eu precisei de 30 anos para refazer aquilo que ele deixou incompleto, talvez ele se assustasse com a possibilidade de enfrentar repetentes, coisa muito comum entre os estudante de Cálculo. Courant foi um marco importante em minha formação como matemático porque me iniciei em seu livro de Cálculo, inicialmente na verão em português mas posteriormente adquiri a versão em inglês. Penso que uma das características de minha formação iniciada com este livro marcante foi a de que devemos mostrar ao estudante o caminho que poderá ser desenvolvido no futuro mas manter os pés no presente. Então, devem aparecer teoremas importantes no texto, mas nem sempre é importante que apareçam as demonstrações ou se aparecerem que sejam em letra pequena caracterizando que o importante e entender o teorema, fazer uso dele e aguardar um maior amadurecimento para então dominar a demonstração que muitas vezes pode ser feita com mais facilidade posteriormente e estarei dando aqui alguns exemplos disto.

O objetivo é abrir horizontes e não fechá-los.

2 Integral das funções polinomiais

Há alguma coincidência entre esta seção e a última seção de [8]. Ali o objetivo era mostrar uma aplicação do uso dos determinantes de Vandermonde que é o detalhe que vou omitir aqui.

Na seção anterior provei que as funções polinomiais f são contínuas e como tal uniformemente contínuas sobre intervalos fechados ou bolas fechadas e consequentemente as somas de Riemann uniformes são um válido representante de classe para o número $\int_a^b f(x)dx$.

Interessa-me agora determinar a fórmula para o cálculo *exato* desta integral o que vou fazer no caso particular de $f(x) = x^3$ seguindo o método que venho usando. Facilmente a leitora generalizará o método para o caso $f(x) = x^n$ e o meu trabalho fica simplificado.

Considere a seguinte lista de equações e os comentários que vou tecer em seguida.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx = \tag{4}$$

$$= \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx; \tag{5}$$

$$\int_0^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \Delta x^3 = \tag{6}$$

$$= \Delta x^4 \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \Delta x^4 P(n); \Delta x = \tfrac{b}{n}; \tag{7}$$

Na equação (eq.2.4) usei uma propriedade geométrica da integral que me permite dividir uma integral usando um ponto médio, aqui usei o zero e seria preciso estabelecer, e o faço agora, que $0 \in [a, b]$ de modo a poder usá-lo como ponto médio. Observe que isto é uma das vantagens de que eu esteja trabalhando com funções polinomiais, elas estão definidas em qualquer intervalo da reta ou do plano complexo de modo que sempre posso fazer esta hipótese.

Na equação (eq.2.5) eu reescrevi a integral usando o ponto médio e usando outra propriedade da integral que implica na troca do sinal acompanhando uma troca na ordem dos terminais da integração. A integral é sensível ao sentido em que estiver sendo calculada:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = \tag{8}$$

Isto vai me permitir uma simplificação nos cálculos que vou usar na próxima equação.

Na equação (eq.2.6) transformei o problema ao cálculo da integral usando a *condição inicial.* zero e uma condição final não zero. Mais a frente você vai ver a grande vantagem em fazer assim, e mesmo a soma se Riemann ficou simplificada. Agora aparece a soma de Riemann uniforme que representa este cálculo aproximadamente e na equação (eq.2.7) aparece a fórmula final que depende dum polinômio P que calcula as somas das terceiras potências dos n primeiros números naturais. Este polinômio, confira [7], é um polinômio do grau 4, sendo o resultado geral que a soma das potências p dos n primeiros números naturais é $P(n)$ em que P é um polinômio do grau $p + 1$. Também você encontra em [7], o método para encontrar a equação de P em que aparece um *determinante de Vandermonde* e ainda melhor em [8] em que mostro que interessa calcular apenas dois determinantes que são de Vandermonde.

E no caso das terceiras potências a equação de P é

$$P(x) = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4}{4}; \tag{9}$$

que substituído na equação (eq.2.7) me dá

$$\Delta x^4 \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \Delta x^4 \tfrac{(n-1)^2+2(n-1)^3+(n-1)^4}{4} = \tag{10}$$

$$= \tfrac{b^4((n-1)^2+2(n-1)^3+(n-1)^4)}{4n^4} = \tfrac{b^4(n-1)^2+}{4n^4} + \tfrac{2b^4(n-1)^3}{4n^4} + \tfrac{b^4(n-1)^4}{4n^4}; \tag{11}$$

$$\lim_{n=\infty} \tfrac{b^4((n-1)^2+2(n-1)^3+(n-1)^4)}{4n^4} = \lim_{n=\infty} \tfrac{b^4(n-1)^4}{4n^4} = \tag{12}$$

$$= \lim_{n=\infty} \tfrac{b^4}{4} = \tfrac{b^4}{4}; \tag{13}$$

$$\int\limits_0^b f(x)dx = \tfrac{b^4}{4}; \int\limits_0^a f(x)dx = \tfrac{a^4}{4}; \int\limits_a^b f(x)dx = \tfrac{b^4-a^4}{4}; \tag{14}$$

Preciso explicar a passagem entre as equações acima, devido ao uso do *operador limite.* Na equação (eq.2.10) e na equação (eq.2.11) eu usei a aritmética.

Na equação (eq.2.12) eu usei *limite* de sucessões. Eu vou deixar esta explicação para um artigo posterior em que estarei construindo os números reais a partir de sucessões de números racionais. Entretanto posso adiantar que na equação (eq.2.11) você tem duas frações que dependem da variável n em que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador e nestes casos o operador limite lhes atribui o valor zero no ∞ o que é uma propriedade deste operador que precisa ser estudada como farei em outro artigo desta sequência. Na terceira fração as potências são iguais e operador limite atribua à fração $\frac{(n-1)^4}{n^4}$ o valor 1 resultando no valor calculado na equação (eq.2.13)

E foi criada uma notação para simplificar o resultado expresso na equação (eq.2.14) que é

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b; F(x) = \frac{x^4}{4}; \tag{15}$$

Vou retornar a esta expressão no final da próxima seção quando vou fazer conexão entre integral e derivada com o *Teorema Fundamental do Cálculo Integral.* Mas vou adiantar um pouco o serviço observando que defini uma nova função F para compor esta notação que simplifica o cálculo da integral.

Deixe-me terminar mostrando-lhe uma outra propriedade da integral que justifica bem a definição da função F que vou chamar de *primitiva* de f.

Observe que calculei

$$\int\limits_0^b f(x)dx = \tfrac{b^4}{4}; \int\limits_0^a f(x)dx = \tfrac{a^4}{4}; \int\limits_a^b f(x)dx = \tfrac{b^4-a^4}{4}; \tag{16}$$

$$x \mapsto \int\limits_0^x f(t)dt = \tfrac{x^4}{4}; \tag{17}$$

Na equação (eq.2.16) eu simplesmente copiei os resultados que obtive anteriormente, e na equação (eq.2.17) eu fiz duas modificações:

- escrevi $\int\limits_0^x f(t)dt$ e é preciso comentar um pouco a respeito e para tornar a conversa mais vívida, deixe-me escrever esta expressão de novamente:

$$\int_0^a f(t)dt; \int_0^a f(y)dy; \int_0^a f(x)dx; \tag{18}$$

observando que representam exatamente a mesma expressão. Neste momento é um pouco complicado discutir o significado de todos os símbolos envolvidos, mas na próxima seção vou conseguir avançar um pouco mais neste sentido. Entretanto, já agora, deixe-me dizer-lhe na expressão $\int\limits_0^a f(x)dx$ não tem sentido escolher um valor para "x" o que alguns autores chegam mesmo a dizer que na expressão $\int\limits_0^a f(x)dx$ *não tem x* o que é exato uma vez que você não pode dar-lhe um valor.

- O símbolo dx também não tem x e também não é uma variável à qual se lhe possa dar um valor. Mas existe uma conexão entre x e dx que vou poder deixar mais clara na próxima seção. Há autores que sugerem que o símbolo da integral foi construído com um alongamento do somatório quando se aproveitou para transformar a diferença Δx em dx. Eu não sei se esta evolução corresponde à verdade histórica, mas em francês o sinal de integral é chamado de *somme*. É possível que esta evolução tenha algum justificativa. Entretanto há duas questões que me afastam de usar esta justificativa:
  - Pensar no dx como corruptela de Δx ajuda a manter vivo um conceito que nunca conseguiu encontrar uma justificativa teórica que é o *infinitésimo*. Não existem infinitésimos, e voltarei na próxima seção ao assunto.
  - A *notação de Leibniz* é um exemplo de formalismo que mostra como a Matemática é uma meta linguagem e como tal nada exata. A *notação de Leibniz* justifica perfeitamente o dx e vou retornar a ela na próxima seção.

Se eu lhe disser que tem imprecisões na Matemática, ou que a Matemática não é uma *ciência exata* eu não estaria dizendo nenhuma mentira. Mas não é o meu objetivo dizer isto aqui e sim dizer que a Matemática é uma linguagem que está longe de ter uma estrutura unificada e que inclusive exitem diversos pesquisadores, matemáticos, trabalhando na criação de teorias na tentativa de encontrar uma unificação geral para a Matemática e possivelmente eles irão falhar com este objetivo específico mas certamente irão criar outras teorias interessantes aumentando o grau de destruturação da Matemática... mas exatamente esta desestruturação é que torna a Matemática uma bonita teoria.

Quando os *bourbaquistas* começaram o seu projeto e de certa forma continuando o projeto de Hilbert, mas possivelmente não perceberam a impossibilidade do projeto demonstrada por Gödel. Se nem mesmo é possível ter-se uma axiomatização completa dos números naturais, como garantir que a Matemática toda tenha consistência.

O melhor desta história é que nós, os matemáticos, conseguimos viver muito bem com os defeitos inerentes da Matemática e conseguimos nos adaptar em cada momento para que os nossos cálculos fiquem exatos...

O limite é um destes problemas que pervasa a Matemática e vou retornar a estas questões na próxima seção quando discutir a *notação de Leibniz*.

É válido falar que resolvi uma equação diferencial de primeira ordem onde a terminologia, *condição inicial* é marcante ao caracterizar a partir de que ponto se mede um fenômeno que é este o significado no Cálculo da integral, *calcular a quantidade do fenômeno que f descreve.*

3 A derivada das funções polinomiais

A derivada é usualmente introduzida geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico duma função e passa pelo uso duma sucessão de retas secantes que fornecem uma aproximação para a o coeficiente angular da reta tangente.

Não tenho nenhum acréscimo significativo a fazer aqui a não ser na discussão sobre o limite que considero que foi uma das descobertas que fiz ao longo das diversas tentativas de tornar o assunto lógico dentro do quadro do ensino de Cálculo. O limite representa um salto lógico bem visível na construção dos números reais que será tratado num dos artigos desta sequência e que é declarado por Courant em seu primeiro volume de Cálculo, [2], como o *limiar da Matemática Superior*. Considere a seguinte sucessão de cálculos

$$f(x) = x^3; \Delta x > 0; \tag{19}$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \tag{20}$$
$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \tag{21}$$
$$\Delta f = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3; \tag{22}$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2; \tag{23}$$
$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2; \tag{24}$$

A passagem para as equações (eq.3.20), (eq.3.21), (eq.3.22), (eq.3.23), é aritmética, todos os cálculos envolvidos se explicam com as regras da aritmética. A passagem para a equação (eq.3.24), não é aritmética e eu não sei lhe dar uma justificativa senão falando que usei um novo operador aplicado na expressão contida na equação (eq.3.23) que no primeiro membro tem uma fração cujo denominador é Δx, que não pode assumir o valor zero, mas o operador limite encontra um valor para esta expressão, neste caso, simplesmente calculando o valor da expressão à direita dando-lhe o valor $\Delta x = 0$.

Quando for possível encontrar, pela via da aritmética, uma simplificação da expressão $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ em que o denominador seja eliminado, facilmente posso obter o resultado da aplicação do operador limite simplesmente calculando o valor da expressão substituindo $\Delta x = 0$.

Exatamente porque não se sabe explicar esta passagem é que não temos nenhum algoritmo computacional para o cálculo de limites e com a visão computacional que temos hoje este algoritmo não será escrito, traduzindo, não sabemos o que é *limite* fora da Matemática onde ele é explicado de formas variadas, talvez a mais precisa como um filtro ao longo duma cadeia que é impossível usar nos primeiros anos do ensino universitário até porque nem todos os professores o entenderiam.

Mas a linha de raciocínio que usei acima é possível de ser apresentada com o comentário educado e honesto de que não sabemos explicar o que é limite, mas que funciona, um pouco na linha da anedota da ferradura pendurada na sala do físico Bohr, em algum lugar de Copenhague na década de 20 quando ele dizia que não acreditava, obviamente, que ferraduras dessem sorte, entretanto, acrescentava, "*dizem que dá, mesmo para aqueles que não acreditam nisto*", como Bohr que não acreditava na sorte das ferradura, mas se beneficiou delas, vai por ai a apresentação do limite no Cálculo. A gente não sabe o que é, mas funciona! E não tem nenhuma desonra, Courant também não sabia, mas sabia que funcionava, e soube fazer uso extensivo nas equações diferenciais parciais das quais ele foi o mestre dos mestres de sua época.

busca com palavra chave Bohr var mostra-lhe uma versão desta história...

Consequência da sequência de cálculos das equações (eq.3.19), (eq.3.20), (eq.3.21), (eq.3.22), (eq.3.23), (eq.3.24), é o próximo teorema deduzido de $f(x) = x^3$:

Teorema 2 (Derivada das) *funções polinomiais Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$*

Como na construção de números reais eu vou mostrar em artigo vindouro, que o operador *limite* nos permite descobrir pontos de convergências de sucessões e mesmo definir novos tipos de números, agora, o limite aplicado a uma sucessão de secantes vai nos dar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico duma função, se esta tangente existir. Falo de sequência de retas tangentes porque eu poderia ter definido

$$\Delta x_n = \frac{1}{n}; n \geq 1; n \in \mathbf{N}; \tag{25}$$

e Δf_n é o coeficiente angular duma reta tangente que passa nos pontos

$$(x, f(x)), (x + \Delta x_n, f(x + \Delta x_n));$$

Você pode obter vários gráficos de retas tangente a uma função usando o programa
`TaylorPolinomio.gnuplot`
que você encontra em [3, programas]. Redefina a função f e sua derivada *df* logo no começo e deixe o programa rolar com o comando
`gnuplot TaylorPolinomio.gnuplot`
Tudo que você precisa, além de baixar o programa é ter `gnuplot` instalado e o comando acima funciona perfeitamente num terminal duma distribuição `Linux`.

Definição 1 *função diferenciável*
Uma função é diferenciável se tiver uma reta tangente em todos os pontos de seu gráfico.

As funções polinomiais são diferenciáveis, elas tem uma reta tangente em qualquer ponto de seus gráficos mesmo que estejam definidas em conjuntos mais amplos que intervalos da reta.

3.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Vou unificar as teorias da integral e da derivada usando a *função primitiva* que eu já defini na construção da integral. Na equação (eq.2.15) eu defini a função F que chamei de primitiva da função f e agora, como sei calcular derivadas de polinômios posso calcular a derivada da função F mas ao fazê-lo vou introduzir a *notação de Leibniz* para derivadas porque vou também dar uma primeira justificativa para o símbolo dx que aparece nas integrais.

Tenho

$$F(x) = \tfrac{x^4}{4}; \tag{26}$$

$$F'(x) = \tfrac{dF(x)}{dx} = \tfrac{4x^3}{4} = x^3 = f(x); \tag{27}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F|_a^b; \tag{28}$$

Na equação (eq.3.26) estou relembrando o valor da integral que defini como "*funçao definida com auxílio duma integral*" e que chamei de *primitiva* ela é um polinômio, ou como se costuma chamar, um monômio. Na equação (eq.3.27) calculei a derivada do polinômio $\frac{4x^3}{4}$ que está multiplicado pela constante $\frac{1}{4}$ que sai fora no cálculo do limite pelo fato de ser uma constante. Na equação (eq.3.28) voltei a escrever a expressão da integral em que se vê a derivada, $F' = f$, aparecendo no integrando. Estou colocando em relação a *primitiva* e a *derivada*, a derivada da primitiva é a função que aparece dentro da integral.

Observe que o valor da integral é a diferença entre dois valores da primitiva e isto vai ter uma explicação interessante mais a frente.

A notação de Leibniz representou um dos problemas complicados de resolver pelos que sempre tentaram unificar a notação da Matemática. Ao calcular a derivada não existe nenhuma *fração* apesar de que muitos autores se refiram a *quociente de diferenciais* que não existe em lugar nenhum como você viu quando eu calculei a derivada da função $f(x) = x^3$, mas havia um *quociente de diferenças* que num *passe aritmético* eu fiz desaparecer a fração permitindo-me o calculo do limite atribuindo o valor zero à *diferença* Δx. Nem sempre as coisas se passam de modo assim tão simples, e Courant tinha razão quando dizia que "*o limite se encontrava no limiar da Matemática superior*". Apesar disto, como no caso da *ferradura de Bohr* a fração de Leibniz funciona como uma fração quando a derivada existe e podemos efetuar cálculos usando esta *fração* como se ela fosse uma fração verdadeira, e existisse. Esta notação, por um lado mística e muito útill, conduziu alguns autores a fazer referência a *coisas* para as quais nunca se conseguiu dar uma explicação lógica e formal que são os *infinitesimais* e ao *quociente de diferenciais.* Em particular este objeto sem nenhuma inclusão teórica dentro da Matemática, chamado *infinitésimo* ficou por muito tempo criando entulhos e emperrando a compreensão de muita coisa nesta vã tentativa de explicar a derivada como um quociente de *infinitésimos.*

A fração de Leibniz é um símbolo que funciona muito bem, e exatamente pode ser operado com uma fração, apenas formalmente em conjunto com o símbolo "d" representando a derivada. Sabendo fazer uso adequado, a fração de Leibniz é um bom instrumento, apenas não queira encontra-lhe o numerador e o denominador!

O dx que aparece dentro do símbolo da integral vem da notação de Leibniz querendo dizer que estamos calculando a *integral duma derivada* tendo como resultado uma *primitiva* que se-lhe for aplicado o *operador derivada* vai reproduzir esta *função derivada.* Por exemplo, o cálculo seguinte é legal

$$y = F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \Rightarrow \quad dy = dF = f(x)dx; \tag{29}$$

e a "*mística*" está em que "x" que aparece na equação anterior em dois locais diferentes nada tem um que ver com o outro. Se você escrever

$$\int_0^4 f(t)dt \tag{30}$$

o resto da expressão perde sentido. A verdade é que usamos variáveis para representar expressões matemáticas porque não temos outra forma de fazê-lo, um exemplo bem simples é um polinômio que escrevemos como

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 \tag{31}$$

quando tudo que queriamos dizer era que P é um polinômio que tem coeficientes $1, 3, 5$ num certa ordem e aqui funciona escolher um valor qualquer, numérico, como $x = 3$, para se calcular o valor do polinômio com este valor.

Vou introduzir um método de derivação que faz uso indireto da fração de Leibniz e que mostra que seu uso funciona embora não exista nenhuma fração no cálculo da derivada.

3.2 A derivação implícita

Considere a seguinte sequência de cálculos e a posterior sequência de comentários.

$$x^2 + y^2 = r^2; \tag{32}$$
$$2xdx + 2ydy = 0; \tag{33}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \tag{34}$$
$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}; \tag{35}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1/2}{(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}; \tag{36}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2y}; \tag{37}$$
$$y = F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt \;\; \Rightarrow \;\; dy = dF = f(x)dx; \tag{38}$$

- A equação (eq.3.32) é a equação do círculo de raio r e centro na origem.
- Na equação (eq.3.33) eu calculei a soma das derivadas de todas as expressões polinomiais deixando-as multiplicadas por um "*diferencial*" indicando qual foi a "*variável*" relativamene à qual que a derivada foi calculada. É isto que se chama de *derivação implícita*. Depois, *supondo* que as entidades "*dx*" e "*dy*" existissem, eu fiz um *cálculo aritmético* para obter a equação (eq.3.34) que me diz que o coeficiente angular da reta tangente ao círculo, em qualquer ponto em que este coeficiente angular possa ser calculado, é dado pelo quociente $-\frac{x}{y}$ que é o inverso do coeficiente angular da reta que contém o raio, com o sinal trocado.

  E isto está perfeito! Quando duas retas forem perpendiculares, seus coeficientes angulares são
  $$m, -\frac{1}{m};$$
  O raio é sempre perpendicular à tangente no círculo, e até pode ser usado como definição de círculo, é a *equação diferencial do círculo*! Círculo é a única curva em que a tangênte é sempre perpendicular à normal. Usei a *derivação implícita* e a *fração de Leibniz* para obter um resultado correto.
- Na equação (eq.3.35) eu defini a equação da parte superior do circulo cuja derivada calculei usando a regra para o cálculo de polinômios obtendo um resultado errado que está expresso na equação (eq.3.36). Está errado porque está incompleto, falta alguma coisa e você pode conferir com a equação (eq.3.34) que falta $2x$ no numerador.

Para corrigir o erro, eu vou novamente usar a derivação implicita e também a fração de Leibniz e vou convidá-la a acompanhar a seguinte sequência de cálculos e lhe peço que leia os comentários que vou fazer depois.

$$x = g(s) = r^2 - s^2; y = f(x) = \sqrt{x}; \tag{39}$$
$$y = f(x) = f(g(s)) = \sqrt{r^2 - s^2}; s = x; \tag{40}$$
$$dy = f'(x)dx = f'(g(x))g'(s)ds; \text{ regra da cadeia} \tag{41}$$
$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}; \tag{42}$$
$$dx = g'(s)ds = -2sds; \tag{43}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2s}{2y} = -\frac{s}{y} = -\frac{x}{y}; \tag{44}$$

A equação (eq.3.44) corrige o erro cometido anteriormente cuja razão foi a que naquele momento eu ignorava a *regra da cadeia* que descobri agora usando a *derivada implícita* e vou deixar que você *acredite ou não*, que *eu não conhecia ainda a regra da cadeia*, mas você pode ver que com a derivação implícita eu a descobri, e a derivada implícita é um simbolismo que está intimamente envolvido com a *fração de Leibniz* o que lhe mostra que grande parte das descobertas que fazemos em Matemática ocorre pela simples manipulação de símbolos que tem significado dentro dum contexto local mas que podem perder sentido num contexto um pouco mais amplo como eu lhe mostrei na equação (eq.3.30).

É preciso fazer uma crítica aos cálculos feitos nas equações (eq.3.39) (eq.3.43). Quem o mostra são os cálculos anteriores usando apenas a derivação implícita, da equação (eq.3.32) até a equação (eq.3.34). Apenas eu queria cometer o erro, considero erros os aspectos mais instrutivos dum texto, se forem bem utilizados como penso que aqui foi!

Vou terminar esta seção fazendo mais um uso da derivação implícita para descobrir outra regra de derivação. Acompanhe os cálculos e leia os comentários depois dos mesmos.

$$z = f(x, y) = xy; \tag{45}$$

$$dz = f'(x, y) = (xy)' = ydx + xdy; \tag{46}$$

$$(uv)' = vdu = udv; \tag{47}$$

Na equação (eq.3.45) eu defini uma função de duas variáveis e cada uma delas é uma função de uma outra variável o que não me interessa. Na equação (eq.3.46) eu calculei a *derivada implícita* da expressão na equação anterior seguindo esta regra de derivação pela qual

- eu derivo todas as expressões relativamente a cada variável nela contida deixando o símbolo dx, dy ou dz conforme a variável sendo derivada,
- o resultado final é uma soma destas expressões

que você vê na equação (eq.3.46):

$$dz - ydx - xdy = 0 \quad \Rightarrow \quad dz = ydx + xdy;$$

Agora eu vou interpretar o resultado obtido e na última expressão da equação (eq.3.46) eu vejo uma soma que é idêntica à que escrevi na equação (eq.3.47) que me diz que a derivada do produto uv é a soma da derivada de u multiplicada por v com a derivada de v multiplicada por u. Esta é a *regra do produto para derivadas* que descobri usando *derivada implícita*.

Eu vou voltar num próximo artigo a estas questões completando as ideias e lhe mostrando que a descoberta destas regras usando a derivada implícita apenas me *sugerem um resultado* e que eu posso fazer uma demonstração formal dele. Em suma, a manipulação símbolica abre perspectivas, cria *conjecturas* que precisam ser demonstradas.

Índice Remissivo

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus vol I*. Blaisdell Publishing Company, 1962.

[2] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus I*. Interscience Publishers Wiley classics library, 1988.

[3] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[4] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[5] Tarcisio Praciano-Pereira. Integral de riemann. Technical report, Sobral Matemática, 2007.

[6] Tarcisio Praciano-Pereira. Um passeio no cálculo diferencial e integral. Technical report, Sobral Matemática, 2017.

[7] Tarcisio Praciano-Pereira. Somas notáveis, determinante de vandermonde e a integral de polinômios. Technical report, Sobral Matemática, 2018.

[8] Tarcisio Praciano-Pereira. Determinantes. Technical report, Sobral Matemática, 2019.

[9] Tarcisio Praciano-Pereira. A reengenharia do cálculo. Technical report, Sobral Matemática, 2019.