A reengenharia do Cálculo

Praciano-Pereira, Tarcisio *

6 de fevereiro de 2019
preprints da Sobral Matemática
no. 2019.02
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Este é o primeiro duma série de artigos em que estarei escrevendo o planejamento do meu livro de Cálculo, possivelemnte com o mesmo título seguido dum número de ordem. Neste estou mostrando porque as somas de Riemann Uniformes são os representantes naturais de classe das sucessões de Cauchy que definem as integrais das funções contínuas em intervalos fechados ou conjuntos compactos e a consequência importante que este resultado tem.

palavras chave: função contínua, integral de funções contínuas, soma de Riemann uniforme.

This is the first paper of a series into planing my book in Calculus to a final draft. The title of the papers will reflect they are together in a goal by the names containing numbers which will identify their precedence, roughly. In this paper I am dealing with the hypothesis under which uniform Riemann's sums define the representative Cauchy sequence converging to the number $\int\limits_a^b f(x)dx$ for a closed interval and what we can deduce from that.

keywords: Cauchy sequence of Riemann's sums, definite integral, uniform Riemann's sums.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 Plano do trabalho

Eu classifico este artigo como *de ensino* e faz parte dum projeto que estou desenvolvendo de livros de Cálculo que pretendo que seja algo bem diferente do habitual.

Há alguns autores que já seguiram a trilha que estou desenvolvendo, mais marcante quem começou foi Richard Courant por volta de 1945 quando escreveu um livro "Differential and Integral Calculus"em dois volumes, do qual existe uma tradução brasileira e no primeiro,[2], ele inovou fortemente embora tenha perdido a trilha e rapidamente se tenha acomodado ao fazer clássico.

Ele começou apresentando a integral mas não teve coragem (com todo o meu respeito pela figura do cara que deu o seu nome ao Instituto de Matemática da Universidade Nova Iorque ainda em vida! - o Instituto Courant of Mathematical Sciences) mas este é o fato. Depois deles outros, inclusive eu, tentamos seguir a trilha começada por ele sem entretanto ter a coragem de romper com o habitual.

Agora tenho material já escrito que me mostra que é possível alterar substancialmente a metodologia de ensino do Cálculo para retirar este conjunto de disciplinas da malfada posição de entrave. E o método é simples, inovador, surpreendente como soem ser as coisas simples: Cálculo Diferencial e Integral de funções polinomiais é ridiculamente simples e seria esta a trilha em que Courant falhou como falharam os seus seguidores. O potente teorema Fundamental do Cálculo se torna simples neste contexto e não apenas isto, representa uma ferramente real para calcular integrais o que não vale num contexto mais amplo.

Eu estava com uma dificuldade para fechar as ideias mas eu resolvi recentemente o problema que me faltava resolver e que estou publicando neste artigo fechando o ciclo que me faltava - somas de Riemann uniformes fornecem a sucessão convergente para integral de funções polinomiais e estou usando isto, sem salientar no artigo acima proposto. Estou já com o boneco pronto do próximo artigo em que esta afirmação é a central. Não se trata de nenhuma novidade teórica, ela esta contida num resultado mais amplo e bem bem conhecido - substitua "funções polinomiais"por "funções contínuas"e tem o resultado mais geral. O problema ainda reside na "continuidade"que é totalmente irrelevante para a trilha proposta uma vez que o universo de funções é de funções contínuas o que nos leva para um dos problemas centrais do atual ensino do Cálculo - como falar de "funções contínuas"se todas o são e as que não o são, na verdade, são construções maliciosas para provar que existem funções descontínuas. Esta é uma atitude antiética que per vaza o ensino do Cálculo, as alunas sentem isto exatamente desta forma o que destrói a dignidade da disciplina, e eu estou de como conseguir contorná-la.

Para terminar, eu tenho uma demonstração das derivadas do seno e do cosseno que cabem em 1/4 de página quando estas demonstrações, se colocadas junto com sua preparação importa em cerca de 40 páginas. Claro, ela vem como consequência da reengenharia proposta e continua precisando das 40 páginas, entretanto todo o processo se torna mais lógico e natural. Eu também vou publicar um artigo mostrando como se pode fazer demonstração.

Se trata duma rearrumação do conteúdo que eu já andei anunciando em algumas palestras, confira [8] e agora vou sistematizá-la numa série de pequenos artigos que irão constituir uma prévia do trabalho dos livros, ou de parte deles.

Na próxima seção eu vou descrever o problema que vou resolver aqui.

2 Somas de Riemann e a continuidade

Em [7] em observo que as funções integráveis à Riemann, e também é caso da integração à Lebesgue, definem uma classe de equivalência de números reais ou complexos formadas por sucessões de Cauchy que são as "*somas de Riemann*", no caso da integração à Riemann, ou "*integrais das funções simples*" que substituem as somas de Riemann na integração à Lebesgue. É interessante como é simples a passagem da integração à Riemann para a integração à Lebesgue que usualmente muito complicada na maioria dos livros.

Se uma função real de variável real for contínua, como é o caso das funções do Cálculo, então os representantes de classe, naturais. serão as *somas de Riemann uniformes.*

Este é um ponto que traz uma super-simplificação para os textos de Cálculo que é habitualmente ignorada muito possivelmente pelo *vício em seguir o hábito* erro em que eu mesmo já incorri diversas vezes.

As somas de Riemann uniformes produzem um algoritmo computacional *simples*, pela aplicação da distributividade da multiplicação relativamente à soma se tem uma soma de números multiplicada pelo tamanho comum dos intervalos, e pelo contrário, usar uma soma de Riemann qualquer com a seleção randômica dos nós das partições é um investimento num algoritmo computacional *simplesmente* perverso e desnecessário. Claro que todos sabemos que *somas de Riemann* não são os melhores algoritmos computacionais para calcular integrais, mas são elas que permitem que possamos obter o resultado formal da integral das funções polinomiais, confira [9]. O meu objetivo neste projeto é a construção do Cálculo Diferencial e Integral das funções polinomiais e sua expansão posterior às demais funções.

O teorema desta seção caracteriza o uso das partições uniformes.

Teorema 1 (Somas de Riemann) *representantes de classe*

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ for uma função contínua, então f é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

é o limite da sucessão das suas somas de Riemann uniformes.

Dem :

É um corolário dos dois teoremas que se seguem em que mostro que as funções contínuas são K-Lipschitz-contínuas ou em linguagem menos empolada, são uniformante contínuas.

q.e.d .

Teorema 2 (função contínua) *e uniformemente contínua*

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ for uma função contínua, então é uniformemente contínua.

Dem :

Este teorema é consequência de dois outros teoremas que vou usar aqui como lemas. O primeiro deles é que as funções contínuas definidas em conjuntos conexos, que é o caso dum intervalo da reta, tem imagem conexa, portanto outro intervalo. O segundo deles é que as funções contínuas transformam fechados em fechados, portanto a imagem dum intervalo fechado é um intervalo fechado. Consequentemente

$$f([a, b]) = [m, M] \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) < M - n; \tag{2}$$

$$d(x, y) < b - a < K(M - n) \quad \Rightarrow \quad (\exists \rho) d(x, y) > \rho(M - n); \tag{3}$$

$$d(f(x), f(y)) < M - n < \frac{1}{\rho} d(x, y); \tag{4}$$

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon d(x, y); \epsilon = \frac{1}{\rho}; \tag{5}$$

Eu usei os lemas na equação (2). Na equação (3) eu usei a propriedade arquimediana da reta para obter a desigualdade final.

O primeiro teorema caindo para o caso de intervalos que são os subconjuntos conexos da reta nos interessam, se tem a demonstração por absurdo: se a imagem dum intervalo não for conexa então tem um ponto de salto contrariando a continuidade de f. A existência do máximo, M e do mínimo m também, por absurdo, nega a continuidade.

q.e.d .

Vou terminar com uma declaração sobre o conteúdo. Não considero importante que apareçam estas demonstrações num livro de Cálculo mas considero que é importante que apareçam estes teoremas com uma breve mostra de porque eles são verdadeiros até para que eles possam ser absorvidos pelas estudantes e aceitos como instrumentos de trabalho. E a razão é simples, num contexto mais avançado eles ficam trivializados e é bom que isto seja anunciado, como também é importante observar que as somas de Riemann uniformes podem ser uma cilada conduzindo à integral de funções que não sejam integráveis. O teorema de Stone-Weirstrass me permite considerar uma aproximação diferenciável para qualquer função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ e o máximo da derivada é a *constante de Lipschitz* que torna trivial o teorema

Índice Remissivo

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus vol I.* Blaisdell Publishing Company, 1962.

[2] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus I.* Interscience Publishers Wiley classics library, 1988.

[3] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus II.* Interscience Publishers Wiley classics library, 1988.

[4] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[5] Harold J. Larson. *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference.* John Wiley & Sons, Inc - Wiley International Edition, 1969.

[6] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional.* Sobral Matematica, 2007.

[7] Tarcisio Praciano-Pereira. Integral de riemann. Technical report, Sobral Matemática, 2007.

[8] Tarcisio Praciano-Pereira. Um passeio no cálculo diferencial e integral. Technical report, Sobral Matemática, 2017.

[9] Tarcisio Praciano-Pereira. Determinantes. Technical report, Sobral Matemática, 2019.

[10] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.