Determinantes

Praciano-Pereira, Tarcisio *

6 de fevereiro de 2019
preprints da Sobral Matemática
no. 2019.01
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Este artigo trata da definição de determinante, mostra como aparecem os determinantes e a definição formal para o cálculo deles passando depois para o método de cálculo que se usa na prática. Também apresento um programa que lhe vai permitir experimentar alguns cálculos com determinantes e matrizes que você pode alterar para obter outros resultados do seu interesse. O programa é distribuído sob a licença GPL.

palavras chave: determinantes, exemplos de determinantes,regras práticas.

This paper deals with determinant, show how they come by and the formal way to calculate them with a practical, computational example. Then I step down to the way to calculate them in practice. Finally I point to a program that gives you some possibilities to realize what the paper describe and the program is yours, distributed under GPL, to change and make your own experiments.

keywords: determinant, examples of determinant, practical rule.

* tarcisio@sobralmatematica.org

1 Como aparecem os determinantes

Determinante é uma função que aparece na Álgebra Linear e Multilinear produzindo um número que aparece associado a uma matriz retangular $n \times n$.

As matrizes são coeficientes, ou melhor *multicoeficientes* dos sistemas de equações lineares, e quando o número de equações for igual ao número de incógnitas, elas funcionam de forma semelhante ao caso das equações lineares elementares do Ensino Médio sendo portanto uma generalização destas. Se a matriz não for quadrada o seu determinante que em geral nem é definido, seria zero levando ao caso *dos sistemas de equações lineares indeterminados ou impossíveis.* Confira matriz e equações lineares.

A solução dum *sistema de equações lineares* quando o número de incógnitas é igual ao número de equações, é muito semelhante, formalmente, à solução da equação do primeiro grau $ax + b = c$. Ignore a comutatividade, e você tem dois tipos de equação do primeiro grau:

$$ax + b = c \;\; \Rightarrow \;\; x = a^{-1}(c-b); \text{ inverso à esquerda de } a \tag{1}$$

$$xa + b = c \;\; \Rightarrow \;\; x = (c-b)a^{-1}; \text{ inverso à direita de } a \tag{2}$$

num *anel não comutativo* em que a tenha por inverso a^{-1}. Se o inverso existir, ele é único, mas na equação (eq. 1) ou (eq. 2) eu usei o inverso de a multiplicando à direita ou à esquerda porque assumi que estrutura não era comutativa. Isto significa que numa estrutura *não comutativa* há duas soluções, possivelmente, para uma equação do primeiro grau que podem ser vista como (eq. 1) ou (eq. 2). É o caso das equações matriciais, confira *matrizes.*

A fração $\frac{a}{b}$ somente tem sentido nas estruturas multiplicativas comutativas com que nos habituamos em nossos primeiros passos nos estudos de Matemática então

$$x = (c-b)a^{-1} \neq a^{-1}(c-b) \tag{3}$$

o que implica que não podemos resolver a equação com símbolo tradicional

$$x = \frac{(c-b)}{a}; \tag{4}$$

se a estrutura não for comutativa como é o caso das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \end{pmatrix}; I_{234} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$A * I_{234} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & -8 & -2 \\ 1 & 9 & 27 & 3 \\ 1 & 9 & -27 & -3 \end{pmatrix}; I_{234} * A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

No exemplo acima a matriz I_{234} representa a permutação (234) e quando a matriz A foi multiplicada à direita por I_{234} se produz a troca de suas colunas de acordo com a permutação (234) e se multiplicada à esquerda por I_{234} se vão trocar as linhas de A de acordo com a permutação (234).

Em $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ estas equações são idênticas, porque a multiplicação é comutativa nestas estruturas numéricas, e se tem o hábito de escrever

$$x = \frac{c-b}{a} \tag{7}$$

como solução, devido à comutatividade da multiplicação.

Mas se a, b, c forem matrizes e estas equações forem possíveis (as dimensões envolvidas forem compatíveis) a solução do sistema seria expressa por uma das equações (eq. 5) ou (eq. 6). A razão é que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

A notação $\frac{a}{b}$ somente pode ser usada em estruturas comutativas: $a\frac{1}{b} \neq \frac{1}{b}a$

Para que se possam escrever as soluções que aparecem na equação (eq. 5) ou (eq. 6) é *suficiente* que $\det(a) \neq 0$ e neste caso podemos aplicar a fórmula para o inverso de uma matriz para calcular a^{-1}, confira *matriz*.

Mas não é necessário...

Porém esta forma de resolver um sistema linear é muito pouco prática e apenas serve para introduzir o conceito de *determinante* no cálculo da matriz inversa. Observe que estou o tempo todo fazendo a restrição de que as matrizes sejam quadradas, $n \times n$, porque se a matriz não for quadrada o seu determinante que em geral nem é definido, seria zero levando ao caso *dos sistemas de equações lineares indeterminados ou impossíveis*. Confira matriz e equações lineares.

O determinante duma matriz $n \times n$ é uma forma n-linear alternada aplicada aos vetores-coluna (ou vetores-linha) da matriz. Este assunto é estudado na disciplina *álgebra multilinear* e o determinante é uma *forma multilinear* alternada. O adjetivo "*alternada*" vem de uma propriedade dos determinantes: se trocarmos duas colunas (ou duas linhas) o determinante muda de sinal. O adjetivo "*multilinear*" vem da propriedade de que se uma coluna (ou linha) for substituída por uma combinação linear de vetores se terá a combinação linear dos determinantes obtidos usando, em cada caso, um dos vetores desta combinação e usando os mesmo coeficientes para combinar os determinantes. Como isto vale para qualquer coluna (ou linha) então o determinante é "multi"-linear.

Os determinantes de matrizes 2×2 e 3×3 são fáceis de calcularem-se, mas a expressão geral para o cálculo de um determinante envolve o conceito de *permutação* como é relativamente fácil de mostrar, mas não de calcular. Suponha que

$$\mathcal{A} = (a_{ij}); i, j = 1, \dots, n; \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{k1} & \dots & a_{ij} \dots & a_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

e que $\sigma \in sim(n)$, um elemento do grupo das permutações de n elementos, então

$$\det(\mathcal{A}) = \sum_{\sigma \in sim(n)} sng(\sigma) \prod_{i=1\dots n} a_{i\sigma(i)} \tag{9}$$

ou seja a soma dos produtos das entradas na diagonal principal das matrizes obtidas com as possíveis permutações σ das n colunas da matriz $\mathcal{A}$. Eu poderia repetir a frase usando colunas em lugar de linhas, mas vou tentar apenas falar das colunas como elementos aos quais se aplica o determinante, para simplificar a linguagem, deixando que você substitua mentalmente coluna por linha.

Um exemplo de termo da soma seria

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}; \sigma \in sim(n); \tag{10}$$

ou para visualizar melhor, considere a matriz

$$\mathcal{A}_\sigma \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\sigma(j)} \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{j1} & \dots & a_{j\sigma(j)} \dots & a_{jn} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n\sigma(j)} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

que foi obtida da matriz $\mathcal{A}$ aplicando a permutação σ em sua coluna de ordem j. Observe que a notação na matriz está errada e eu não tenho como corrigi-la, por exemplo, $\sigma(j)$ pode ser 1 e neste caso a esta coluna seria a primeira coluna da matriz. O número que aparece na equação (eq. 10) é o produto dos termos da diagonal de

$$\mathcal{A}_\sigma = I_\sigma A$$

Para obter o $\det(\mathcal{A})$ se calculam todas as imagens de $\mathcal{A}$ pela permutações $\sigma \in sim(n)$ e se somam os produtos dos elementos na diagonal principal usando $sng(sigma)$, sinal de σ, como coeficiente.

Este é o método usado para o cálculo do determinante duma matriz 3×3, observe que $sim(3)$ tem $3! = 6$ elementos portanto há 6 termos na soma da equação (eq. 9) que podem ser obtidos com esquema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \tag{12}$$

chamado de *regra de Sarrus.* em que as duas primeiras colunas foram repetidas. Traçando as diagonais decrescentes, e depois as diagonais ascendentes, neste esquema,

- e fazendo o produto dos elementos sobre todas estas diagonais,
- com o sinal trocado no caso das diagonais ascendentes,

se obtém todos os termos da soma do determinante. O sinal trocado no caso das diagonais ascendentes corresponde às permutações ímpares das colunas da matriz.

Você talvez experimente a curiosidade de saber de onde veio esta regra, quem a inventou e porque ela tem este formato. Para responder esta sua justa curiosidade eu vou lhe responder com uma anedota, uma história verdadeira e engraçada em que eu me vi inserido numa certa ocasião *frente a frente* com um *inventor da regra.*

Eu estava estudando numa biblioteca pública, em Fortaleza, quando, à saída, me deparei com um senhor idoso que se divertia ensinando a algumas garotas e garotos como resolver sistemas de equações 2×2.

Ele mostrava à garotada o desenho que aparece na figura (fig 1), página 4, que estava numa folha dum caderno que ele folheava mostrando outros exemplos. E explicava cuidadosamente o método que ele havia descoberto multiplicando cruzados os coeficiente na equação e depois criando três esquemas, três matrizes 2×2, de onde ele tirava mais produtos cruzados para finalmente calcular o quociente e encontrar os valores de x e de y. Ele havia redescoberto a regra de Cramer, era um inventor, e divertia a garotada resolvendo um problema difícil, um sistema de equações.

A regra de Cramer surge naturalmente quando você usar o método de substituição sucessiva da primeira equação na segunda. Os números que vão aparecer como coeficientes das frações para determinar os valores de x e de y são os determinantes obtidos neste cálculo cruzado da matriz da equação, no denominador, e substituindo as colunas pela coluna dos dados para obter o determinante de cada um dos denominadores.

Não era *o inventor*, mas ele acreditava que fosse, eu assisti a sessão, ri-me, e fui-me embora sem destruir a autoestima do inventor. Isto aconteceu em 1965 e os determinantes foram inventados no século 19 ou um pouco antes.

Se você *atacar* um sistema de três equações com três incógnitas, como o que aparece na lista equações abaixo, você irá escrever

$$\begin{cases} ax + by + cz &= A \\ ex + fy + gz &= B \\ mx + ny + pz &= C \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}; \tag{14}$$

$$x = \frac{\det(A1)}{\det(A)}; y = \frac{\det(A2)}{\det(A)}; z = \frac{\det(A3)}{\det(A)}; \tag{15}$$

e a forma de calcular os determinantes para escrever os valores de x, y, z é muito semelhante à do inventor cearense mas agora a gente cai na regra de *Sarrus* que eu descrevi acima. O que interessava aqui era responder à pergunta: de onde saiu o determinante? e a resposta está na anedota, foi inventado por um cearense em 1965, fazendo as multiplicações cruzadas para obter os números das frações e calcular x, y. Como ele não sabia que já havia sido inventado, então era um direito dele, também, inventar! E eu poderia repetir várias anedotas de inventores e vou citar apenas mais uma: o *triângulo de Pascal* que já era conhecido dos matemáticos chineses no século 12 pelo menos duzentos anos antes de Pascal que foi um matemático e filósofo muito produtivo do século 15. Ele não sabia que os chineses haviam inventado o triângulo portanto ele também é o inventor. Parece que Tartaglia, na Itália, também já havia descoberto o triângulo de Pascal.

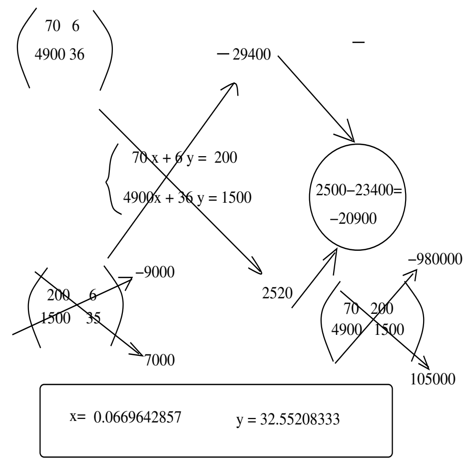

Figura 1:

2 Definição de determinante

Voltando aos determinantes, esta expressão, ou melhor o método envolvendo diretamente os determinantes, não é *computacional.* O método para resolver sistema de n equações lineares com n incógnitas passa por triangularizar as matrizes quando o cálculo do determinante se transforma no produto dos termos da diagonal principal, porque em qualquer outra permutação há um zero na digonal tornando nulos todos os outros produtos. Este assunto pertence à *álgebra linear computacional*, ao *cálculo numérico* ou à *análise numérica.*

Por exemplo, a *regra de Sarrus* não serve para matrizes de ordem superior à 3 como você pode verificar no esquema abaixo.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{16}$$

A *regra de Sarrus* não se aplica para matrizes de ordem superior a 3. No esquema que aparece na equação (eq. 16), a partir da quinta coluna, as permutações se repetem. Só existem "regras práticas" usando as diagonais da matriz para calcular determinantes de ordem 2 ou 3.

A fórmula para o cálculo do determinante duma matriz $n \times n$ é uma generalização da fórmula que vale para as matrizes 3×3. Se A for uma matriz $n \times n$ real ou complexa então

$$A = (a_{ij}); \det(A) = \sum_{\sigma \in Sim(n)} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}; \tag{17}$$

é a soma sobre todas as permutações aplicadas às colunas i e para cada uma das permutações o produto dos elementos da diagonal principal, que é o que acontece com a *regra de Sarrus* no caso das matrizes de ordem 3, em que se repetem duas colunas obtendo uma matriz com seis colunas e então se multiplicam os elementos de cada uma das diagonais deste esquema aplicando o sinal negativo, correspondente às permutações do ordem impar, aos elementos das diagonais ascendentes o que perfaz seis somas e $Sim(3)$ tem 6 elementos. $Sim(4)$ tem 24 elementos portanto não dá para obter todas as permutações repetindo, de forma análoga, as colunas duma matriz 4×4.

Se eu aplicar a *representação de grupos* em que o grupo $Sim(n)$ fica transformado nas permutações das colunas da matriz identidade, I_σ, então eu posso reescrever a fórmula da equação (eq.17) como

$$Pr(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}; \tag{18}$$

$$Pr(I_\sigma A); A \mapsto (I_\sigma A) \mapsto Pr(I_\sigma A) \in K; \tag{19}$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Sim(n)} sgn(\sigma) Pr(I_\sigma A) = \sum_{\sigma \in Sim(n)} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} = \tag{20}$$

$$\sum_{\sigma \in Sim(n)} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(1)2} \cdots a_{\sigma(n)n}; \tag{21}$$

Na equação (eq.18) eu defini uma função semelhante ao *traço*, mas que diferentemente do *traço* é o produto dos elementos da diagonal principal.

Na equação (eq.19) defini o produto da matrizes $I_\sigma A$ que representa a permutação $\sigma \in Sim(n)$ que efetua a permutação das colunas de A e apliquei a função Pr ao produto de matrizes $I_\sigma A$ obtendo um número real ou complexo.

Na equação (eq.20) defini o determinante como a soma dos números $Pr(I_\sigma A)$ usando como coeficientes da soma o sinal da permutação σ tendo por resultado o determinante de A.

Na equação (eq.21) eu repeti a expressão da equação anterior escrevendo explicitamente o produto da diagonal principal da matriz obtida com a permutação σ.

Estou chamando de $sgn(\sigma)$ ao sinal da permutação σ, e Pr uma função parecida com a função *traço* mas que em vez de somar os elementos da diagonal principal, produz o produto destes elementos.

Isto equivale no caso das matrizes 3×3,

- a escrever as seis matrizes $Pr(I_\sigma A)$ com as colunas permutadas por σ, as seis permutações das colunas duma matriz 3×3,

- a soma dos produtos da diagonal principal de cada matriz $I_\sigma A$ usando o sinal da permutação σ como coeficientes da soma. Como $Sim(3)$ tem 6 elementos, tem 3 permutação com sinal -1, que correspondem na regra de Sarrus o cálculo sobre as diagonais ascendentes.

O programa [3, Determinante.calc] foi usado para fazer os cálculos que aparecem nas equações abaixo no cálculo do determinante duma matriz 3×3.

Deixe-me aplicar a equação (eq.18) num exemplo simples, considere a matriz A que aparece na primeira equação da sequência de equações abaixo cujo determinante eu calculei usando a função `det()` do `calc` e aparece na segunda equação. Nas equações seguintes aparecem $I_\sigma A$ obtida pelas permutações das colunas de A. Confira os comentários logo depois da sequência de equações.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\det(A) = -282; \tag{23}$$

$$sgn(I) = sgn((123)) = sgn((132)) = 1; sgn((23)) = sgn((13)) = sgn((12)) = -1; \tag{24}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \mapsto 1 * 5 * (-9) \tag{25}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto (-4) * 8 * 3 \tag{26}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \mapsto 7 * 2 * 6 \tag{27}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -9 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \mapsto -(1 * 8 * 6) \tag{28}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \\ -4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto -(7 * 5 * 3) \tag{29}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \mapsto -((-4) * 2 * (-9)) \tag{30}$$

$$1 * 5 * (-9) + (-4) * 8 * 3 + 7 * 2 * 6 - 1 * 8 * 6 - 7 * 5 * 3 - (-4) * 2 * (-9) = -282 \tag{31}$$

Na equação (eq.22) está apresentada a matriz A e o valor do seu determinante na (eq.23).

Na equação (eq.24) exibi os elementos de $\sigma \in Sim(3)$ com seus respectivos sinais.

Nas equações (eq.25)- (eq.30) eu exibi o produto $I_\sigma A$ seguido do produto dos elementos da diagonal principal alterado com sinal da respectiva permutação σ, e na equação (eq.31) se encontra a soma dos produtos dos elementos na diagonal, alterados pelo sina da respectiva permutação, totalizando o valor do determinante de A.

Eu tentei usar como exemplo o caso de $Sim(4)$ mas o texto ficou simplesmente ilegível com apresentação de 24 matrizes modificadas a partir duma matriz 4×4 e penso que o caso 3×3 mostra todos os segredos da coisa ficando ainda simples. Mas você pode alterar o programa [3, Determinante.calc] usando uma matriz 4×4 para ver o que se passa neste caso, se quiser ter este trabalho. Sugiro que antes confira o grupo $Sim(4)$ que deixei *representado como um grupo de matrizes* no programa mencionado acima.

Vou fazer a demonstração do teorema “produto dos determinantes é o determinante do produto” mas não vou usar a definição formal de determinante porque a demonstração se verifica impossível desta forma. Vou usar o que a prática nos ensinou sobre o uso dos determinantes e que está registrado nos algoritmos que são usados e se deduz também duma prática centenária na solução de sistemas lineares que é o método da eliminação sucessiva das variáveis que para matrizes se traduz como determinação da *forma triangular inferior da matriz*, quando todos os elementos que estiverem acima da diagonal principal ficam anulados.

Antes deixe-me mostrar dois resultados envolvendo *matrizes de transformação*.

Teorema 1 (Determinante) *da matriz I_σ*

Determinante de $I_\sigma = 1$ em que σ é uma permutação das colunas da identidade.

Dem:

$$\det(I_\sigma) = \sum_{\tau \in Sim(n)} sgn(\tau) Pr(I_\tau I_\sigma) = \tag{32}$$

$$\sum_{\tau \in Sim(n)} sgn(\tau) Pr(I_{\tau o \sigma}) = 1 \tag{33}$$

Porque $Pr(I_{\tau o \sigma}) = 0$ para todas as permutações exceto quando $\tau o \sigma$ for a identidade em qual caso $Pr(I_{\tau o \sigma}) = 1$;

Isto porque $I_\tau I_\sigma$ é uma nova permutação das colunas da matriz identidade levando a unidade para uma coluna e trazendo esta coluna para o lugar da que foi levada o que significa que na posição ii tem zero o que zero o produto da diagonal principal de $I_\tau I_\sigma$.

Outra forma de entendê-lo é que $I_\sigma; \sigma \in Sim(n)$ tem sempre zero em alguma posição ii exceto quando $I_\sigma = I$, quer dizer que todas as parcelas na soma do determinante são nulas com exceção daquela que corresponde a I que vale 1, o valor do determinante. O programa `Determinante.calc`, [3, Determinante.calc] mostra isto no caso de $Sim(3)$.

q.e.d .

O que o teorema significa é que $\det(I_\sigma) = 1$ para qualquer permutação das colunas da matriz identidade porque vai haver uma permutação $\tau \in Sim(n)$ que transforma I_σ na identidade.

Teorema 2 (Determinante) *de matriz equivalente*

Dada uma matriz quadrada A e uma matriz de transformação I_σ *então*

$$\det(I_\sigma A) = \det(A I_\sigma) = \det(A)$$

Dem:

$$\det(I_\sigma A) = \sum_{\tau \in Sim(n)} sgn(\tau) Pr(I_\tau I_\sigma A) = \tag{34}$$

$$\sum_{\tau \in Sim(n)} sgn(\tau) Pr(I_{\tau o \sigma} A) = \tag{35}$$

$$\sum_{\phi \in Sim(n)} sgn(\phi) Pr(I_\phi A) = \det(A); \tag{36}$$

Porque qualquer permutação representa um isomorfismo do grupo $Sim(n)$ portanto a soma na equação (eq.35) é exatamente a expressão da definição do determinante reescrevendo a soma com a permutação genérica ϕ. **q.e.d .**

As matrizes $I_\sigma; \sigma \in Sim(n)$ são também chamadas de *matrizes de transformação* porque ela transforma a matriz A em outra que lhe é equivalente no sentido de que o sistema de equações definido pela matriz A tem a mesma solução que o sistema de equações definido pela matriz $I_\sigma A$ ou $A I_\sigma$. O produto $A I_\sigma$ apenas permuta o sistema de equações que tem A como matriz.

Teorema **3 (Determinante)** *de matriz triangular O determinante duma matriz triangular é o produto dos elementos em sua diagonal principal.*

Dem *: Porque todas as matrizes obtidas de A por permutação de suas colunas vão ter um zero na diagonal principal tornando nulos todos os produtos na soma da definição do determinante exceto, possivelmente, o caso da diagonal principal de A que também sera zero se houver um zero em sua diagonal principal sendo este o valor do seu determinante.*

q.e.d .

Teorema **4 (produto de)** *determinantes*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B); \tag{37}$$

Dem *:*

Dada uma matriz A ela sempre pode ser escrita na na forma triangular*, superior ou inferior, sempre possível e existem algoritmos já prontos para consegui-lo para uma matriz qualquer. A e sua forma triangular superior são equivalentes do ponto de vista do sistema de equações que elas definem e um corolário deste teorema é que também elas têm o mesmo determinante.*

Vou supor que a matriz A se encontra na forma triangular inferior, ou seja, todas entradas acima da diagonal principal são nulas, exceto as que estiverem sobre a diagonal principal que podem ser nulas ou não. Observe que a matriz nula é uma matriz triangular inferior, assim como a matriz identidade. A matriz B se encontra na forma triangular superior, quer dizer, todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, exceto as que estiverem sobre a diagonal principal que podem ser nulas ou não. A matriz identidade é uma matriz triangular superior. Pelo teorema 3 o determinante das matrizes A, B é o produto dos elementos na diagonal principal de qualquer uma delas. Assim

$$- \quad A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), AB = (m_{ij}); m_{ij} =< \vec{a_i}, \uparrow b_j >; \tag{38}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}; \det(B) = \prod_{i=1}^{n} b_{ii}; \tag{39}$$

$$AB = (m_{ij}); m_{ij} =< \vec{a_i}, \uparrow b_j >= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ii}b_{ii}; \tag{40}$$

$$\det(AB) = \sum_{\sigma\in Sim(n)} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i)i} = \prod_{i=1}^{n} m_{ii} = \tag{41}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} < \vec{a_i}, \uparrow b_i >= \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii} = \tag{42}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \prod_{i=1}^{n} b_{ii} = \det(A)\det(B); \tag{43}$$

Na equação (eq.41) eu simplifiquei a soma reduzindo-a permutação identidade porque em todos os outros casos haverá zero nas diagonais tanto de $I_\sigma A$ como de $I_\sigma B$.

Na equação (eq.42) eu reduzi o produto dos elementos da diagonal m_{ii} ao caso $a_{ii}b_{ii}$ porque quando $k < i$ $a_{ki} = 0$ e quando $k > i$ $b_{ik} = 0$.

Na equação (eq.43) usei a associatividade do produto para separar os dois produtos.

q.e.d .

Na próxima seção vou lhe mostrar um caso particular de determinante, os *determinantes de Vandermonde* que tem particular importância por estarem ligados a determinação de polinômios e ao cálculo da integral das funções polinomiais. Também eles tem uma regra prática específica para o cálculo.

3 Determinantes de Vandermonde

Vandermonde é um tipo determinante que aparece naturalmente quando você tentar encontrar a equação dum polinômio usando o teorema Fundamental da Álgebra, confira o exemplo.

Exemplo 1 (encontrar) *a equação dum polinômio*

Um polinômio Q do grau n fica completamente determinado por $n+1$ equações. Na seguinte sucessão de equações vou procurar um polinômio do quarto grau, Q, que tenha os valores que me interessam para obter a soma das terceira potências dos n primeiros números naturais.

$$n \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mapsto Q(n) \in \{1, 9, 36, 100, 225\} \tag{44}$$

Com fundamento no Teorema Fundamental da Álgebra, um polinômio do quarto grau fica determinado por cinco "pontos" dados. O polinômio Q vai me fornecer a soma das terceiras potências dos números naturais e sei que um tal polinômio é do grau 4.

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; \tag{45}$$

$$\begin{cases} Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1; \\ Q(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_3 = 9; \\ Q(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 36; \\ Q(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 = 100; \\ Q(5) = a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 625a_4 = 225; \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \\ 225 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$Q(x) = \tfrac{\det(A_1)}{\det(A_0)} + \tfrac{\det(A_2)}{\det(A_0)}x + \tfrac{\det(A_3)}{\det(A_0)}x^2 + -\tfrac{\det(A_4)}{\det(A_0)}x^3 + \tfrac{\det(A_5)}{\det(A_0)}x^4 \tag{48}$$

$$Q(x) = \tfrac{\det(A_1)+\det(A_2)x\,\det(A_3)x^2+\det(A_4)x^3+\det(A_5)x^4}{\det(A_0} = \tfrac{x^2+2x^3+x^4}{4}; \tag{49}$$

- *Na equação (eq.45) escrevi a expressão geral dum polinômio do quarto grau.*
- *Na equação (eq.46) expressei com um sistema de equações os valores de Q para os números que me interessavam,*

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \mapsto \{1, 9, 36, 100, 225\} \tag{50}$$

- *na (eq.47) transformei o sistema de equações numa equação matricial que resolvi encontrando os coeficientes de Q, $a_0 = 0; a_1 = 0; a_2 = 0.25; a_3 = 0.5; a_4 = 0.25;$. O polinômio é*

$$Q(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4}; \tag{51}$$

- *A matriz na equação (eq.47) tem um formato especial, das matrizes de Vandermonde. Na segunda coluna se encontram os números $1, 2, 3, 4, 5$ cujas potências se encontram nas linhas que eles determinam.*

  Expressando em símbolos,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{pmatrix} \tag{52}$$

Em exemplos numérico posso ter que “*interpretar*” $1 = 0^0$, mas não estou propondo esta correção à exceção que existe em Matemática à lei das potências, é apenas um padrão que funciona. Cada linha da matriz na equação (eq.52) é formada pela sucessão de potências do segundo elemento da linha sendo o primeiro elemento sempre 1 que é a potência zero do elemento que define a linha, com a *convenção* de que vale também para zero.

Confira que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \\ 0 & 27 & 64 & 125 & 216 & 343 \\ 0 & 81 & 256 & 625 & 1296 & 2401 \\ 0 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 & 16807 \end{pmatrix} \tag{53}$$

é uma matriz de Vandermonde, o seu determinante é 725760 e pode ser calculado com a regra exposta mais abaixo, na primeira coluna se encontram as “*potências de zero*” desde zero até 5 ...

Você pode trocar linha por coluna, e é o caso na equação (eq.53), e também terá uma matriz de Vandermonde, neste caso se diz que as colunas são formadas pela sucessão de potências do segundo elemento da coluna, a transposta duma matriz de Vandermonde é também uma matriz de Vandermonde trocando linha por coluna ao descrever as propriedades. Daqui para frente, para simplificar a linguagem, vou fazer referência exclusivamente às matrizes de Vandermonde em que as linhas contém as potências do segundo elemento. Deve ficar claro para a leitora de que valem todas as afirmações para a matriz transposta.

Os determinantes de Vandermonde podem ser calculados com uma regra bem simples que vou expor no próximo teorema. A regra é simples mas a demonstração é um pouco complicada.

Teorema 5 (Determinante) *Vandermonde Supondo que na segunda coluna da matriz de Vandermonde V de ordem n se encontrem os números*

$$a_1, \cdots, a_n \in \mathcal{A}_n$$

considere os conjuntos $\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n,k}$ de todas as combinações $2-a-2$, dos elementos da segunda linha ordenadas pelos índices,

$$\mathcal{A}_n = \{a_1, \cdots, a_n\}; \tag{54}$$

$$\mathcal{C}_n = \{(a_i, a_j); i < j; \}; \tag{55}$$

$$\mathcal{C}_{n,k} = \{(a_i, a_j); i < j; i, j \neq k\} \tag{56}$$

em que os conjuntos $\mathcal{C}_{n,k}$ são obtidos do anterior, $\mathcal{C}_n$, eliminando todas as ocorrências do índice k que os caracterizam.

O valor do determinante de Vandermonde é o produto

$$D = det(V) = \prod_{(a_i, a_j) \in \mathcal{C}_n} (a_i - a_j) \tag{57}$$

em que n é a ordem do determinante.

A fórmula para o cálculo do determinante de Vandermonde aparece na equação (eq.57), os conjuntos $\mathcal{A}_n, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n,k}$ facilitam a expressão do produtório. Eu introduzi os conjuntos

$$\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n,k} \tag{58}$$

para simplificar a notação dos índices dos somatórios e produtórios, do contrário eu teria que indicar $i < j; i, j \neq k$, é este o uso destes conjuntos.

Antes de passar à demonstração, deixe-me mostrar-lhe como é simples a regra para o cálculo do determinantes de Vandermonde:

- *Se fazem todas as combinações dois a dois dos elementos da segunda coluna,* $\{a_i, a_j\}$*, quer dizer, se selecionam todos os conjuntos com dois elementos tirados de* $\mathcal{A}_n$*, ordenados como eles aparecem na matriz,*
- *se calcula o produto da diferenças dos pares obtidos anteriormente,* $(a_i - a_j)$*, este é o valor do determinante.*
- *Mais prático ainda, calcule, ordenadamente, as diferenças dos elementos da segunda coluna e faça o produto destas diferenças. Você terá* C_n^2 *fatores para calcular o produto.*
- *Mais logo, na demonstração, você verá esta regra prática sendo aplicada.*

Observe que pela comutatividade da multiplicação, o que interessa no produto definido na equação (eq.57) é o produto das diferenças dos pares que formam o conjunto $\mathcal{C}_n$ *e ele foi construído levando em consideração à ordem dos índices. O que aparece na equação (eq.57) é o produto destas diferenças. Não respeitar esta ordenação implica em alterar o sinal do determinante.*

$\boxed{\textbf{Dem}}$:

A demonstração vai prosseguir por indução finita *na ordem das matrizes de Vandermonde. O primeiro passo* que eu vou escolher *da indução é a matriz de ordem* 3*, mas vale para matriz de ordem 2 também, verifique!*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}; D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_1 & a_1^2 - a_1^2 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_2a_1 \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_3a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix}; \tag{59}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} = -(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix}; \tag{60}$$

$$D = -(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3); \tag{61}$$

Na equação (eq.59) eu deixei indicadas as operações com colunas que levaram ao último determinante e (eq.60) eu usei a regra dos determinantes de Vandermonde numa matriz 2*, observe que há uma troca de sinal a ser feita que foi produzida na (eq.61).*

Vou desenvolver o caso da matriz de ordem 4×4 *que, embora desnecessário porque o ponto inicial do* processo de indução finita *já foi executado no caso* 3×3*, mas, este caso envolve uma pequena complicação que será didática para a aplicação do segundo passo da* indução finita *quando vou ter fazer uso de reticências para representar as passagens intermediárias.*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_1 & a_1^2 - a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_2a_1 & a_2^3 - a_2^2a_1 \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_3a_1 & a_3^3 - a_3^2a_1 \\ 1 & a_4 - a_1 & a_4^2 - a_4a_1 & a_4^3 - a_4^2a_1 \end{vmatrix} = \tag{62}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & a_2^2(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) \\ 1 & a_4 - a_1 & a_4(a_4 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix} = \tag{63}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & a_2^2(a_2 - a_1) \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) \\ 0 & a_4 - a_1 & a_4(a_4 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix} = \tag{64}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & a_2^2(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) \\ a_4 - a_1 & a_4(a_4 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix} = \tag{65}$$

$$-(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 \end{vmatrix} = \tag{66}$$

$$= -(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4) = \tag{67}$$

$$= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4); \tag{68}$$

Este desenvolvimento eu o copiei da Wikipedia fazendo uma busca com a chave Vandermonde *mas não consegui identificar o autor da mesma.*

Vou supor que a regra seja válida para qualquer matriz de Vandermonde de ordem menor ou igual $n \times n; n > 3$*, como* hipótese de indução finita*, e vou considerar uma matriz expandindo a matriz de ordem* n *com mais uma coluna* *e uma linha de modo a ser também uma matriz de Vandermonde. Terei acrescentado uma linha com as potências dum novo número x até a ordem $n+1$ e uma coluna incluindo as potências n dos números já existentes,*

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix} = D \tag{69}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_1 & a_1^2 - a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} - a_1^{n-1} & a_1^n - a_1^n \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_2 a_1 & \cdots & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_1 & a_2^n - a_2^{n-1} a_1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_n a_1 & \cdots & a_n^{n-1} - a_n^{n-2} a_1 & a_n^n - a_n^{n-1} a_1 \\ 1 & a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}^2 - a_{n+1} a_1 & \cdots & a_{n+1}^{n-1} - a_{n+1}^{n-2} a_1 & a_{n+1}^n - a_{n+1}^{n-1} a_1 \end{vmatrix} = \tag{70}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) & a_{n-1}^{n-1}(a_n - a_1) \\ 1 & a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}(a_{n+1} - a_1) & \cdots & a_{n+1}^{n-2}(a_{n+1} - a_1) & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{vmatrix} = \tag{71}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ 0 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) & a_{n-1}^{n-1}(a_n - a_1) \\ 0 & a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}(a_{n+1} - a_1) & \cdots & a_{n+1}^{n-2}(a_{n+1} - a_1) & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{vmatrix} = \tag{72}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) & a_{n-1}^{n-1}(a_n - a_1) \\ a_{n+1} - a_1 & a_{n+1}(a_{n+1} - a_1) & \cdots & a_{n+1}^{n-2}(a_{n+1} - a_1) & a_{n+1}^{n-1}(a_{n+1} - a_1) \end{vmatrix}; \tag{73}$$

$$D = (-1)^n (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1)(a_{n+1} - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^{n-2} & a_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = \tag{74}$$

$$= (a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_n)(a_1 - a_{n+1})(a_2 - a_3) \cdots (a_n - a_{n+1}) \tag{75}$$

Na penúltima equação aparece um Vandermonde de ordem n-1 ao qual eu apliquei a hipótese de indução para obter o valor final. Na penúltima equação tenho as diferenças invertidas pelo que eu preciso corrigir com $(-1)^n$ que é o número de fatores foram colocados em evidência do determinante da equação anterior. $\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

4 Exemplos de aplicação de determinantes

Não vou fazer uma lista grande, vou reduzir-me a dois exemplos muito significativos e de grande uso,

- determinação de polinômios dados valores específicos é um deles,
- o outro é a determinação da fórmula para o cálculo da integral do monômio $f(x) = x^n$, mas vou apresentar o caso $n = 3$ de onde é fácil deduzir o método genérico.

4.1 Determinar um polinômio dados alguns seus valores

Um polinômio Q do grau n fica completamente determinado por n+1 equações. Na seguinte sucessão de equações vou procurar um polinômio do quarto grau, Q, que tenha os valores que me interessam para obter a soma das terceira potências dos n primeiros números naturais.

$$n \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mapsto Q(n) \in \{1, 9, 36, 100, 225\} \tag{76}$$

Com fundamento no Teorema Fundamental da Álgebra, um polinômio do quarto grau fica determinado por cinco "pontos" dados. O polinômio Q vai me fornecer a soma das terceiras potências dos números naturais e sei que um tal polinômio é do grau 4.

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; \tag{77}$$

$$\begin{cases} Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1; \\ Q(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_3 = 9; \\ Q(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 36; \\ Q(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 = 100; \\ Q(5) = a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 625a_4 = 225; \end{cases} \tag{78}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \\ 225 \end{pmatrix} \tag{79}$$

$$Q(x) = \frac{\det(A_1)}{\det(A_0)} + \frac{\det(A_2)}{\det(A_0)}x + \frac{\det(A_3)}{\det(A_0)}x^2 + -\frac{\det(A_4)}{\det(A_0)}x^3 + \frac{\det(A_5)}{\det(A_0)}x^4 \tag{80}$$

$$Q(x) = \frac{\det(A_1)+\det(A_2)x\det(A_3)x^2+\det(A_4)x^3+\det(A_5)x^4}{\det(A_0} = \frac{x^2+2x^3+x^4}{4}; \tag{81}$$

- Na equação (eq.77) escrevi a expressão geral dum polinômio do quarto grau.
- Na equação (eq.78) expressei com um sistema de equações os valores de Q para os números que me interessavam,

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \mapsto \{1, 9, 36, 100, 225\} \tag{82}$$

- na (eq.79) transformei o sistema de equações numa equação matricial que resolvi encontrando os coeficientes de Q, $a_0 = 0; a_1 = 0; a_2 = 0.25; a_3 = 0.5; a_4 = 0.25;$. O polinômio é

$$Q(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4}; \tag{83}$$

- A matriz na equação (eq.79) tem um formato especial, das matrizes de Vandermonde. Na segunda coluna se encontram os números $1, 2, 3, 4, 5$ cujas potências se encontram nas linhas que eles determinam.

  Expressando em símbolos,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{pmatrix} \tag{84}$$

Você pode usar esta metodologia para determinar um polinômio dum grau n qualquer sabendo $n+1$ valores do mesmo.

4.2 Polinômios e suas integrais

Vou evitar de ser genérico mas a redação específica que vou apresentar pode ser facilmente generalizada o que lhe deixo como exercício. Vou mostrar-lhe como podemos determinar as fórmulas para o cálculo da integral de funções polinomiais. E sendo específico vou calcular a integral da função $f(x) = x^3$ e você poderá generalizar o método para calcular a integral de $f(x) = x^n$ e depois dum polinômio qualquer do grau n. Não é preciso usar *indução finita*, mas é preciso usar o *binômio de Newton* e verificar que apenas interessa o termo de maior grau do mesmo para tirar as conclusões finais. Isto ficará claro ao longo deste exemplo.

Partindo da suposição de que exista a integral de $y = f(x)$ sobre um intervalo $[a, b]$, confira a representação geométrica na figura (fig. 2), página 14 uma forma de calcular a integral consiste em fazer uma aproximação do seu valor pela área de retângulos contidos na região limitada pelo gráfico de f, o eixo OX e os limites de integração definidos pelo intervalo considerado.

O gráfico na figura (fig. 2), página 14 mostra geometricamente esta ideia. No gráfico, figura (fig. 2) tive o cuidado de fazer as subdivisões para minimizar os erros, um dos retângulos representa a área por excesso noutro tanto há excesso como falta e nos demais a área foi calcula por falta, de modo que há uma certa compensação visual. Mas isto é um detalhe sem relevância, o que interessa é que a quantidade n de subdivisões do intervalo $[a, b]$ seja grande para que se obtenha mais precisão e, finalmente, produzir uma sucessão convergente. Se conseguirmos calcular o limite teremos descoberto a fórmula para o cálculo dum certo tipo de integral.

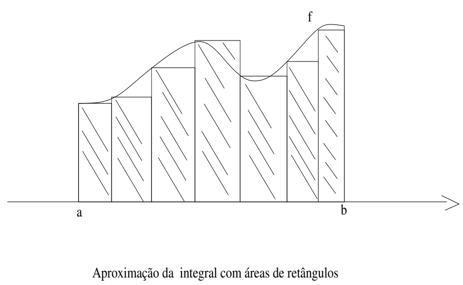

Figura 2:

Porém muito melhor do que estas tentativas consiste simplesmente em reduzir a medida das bases dos retângulos e melhor ainda considerá-las todas iguais com valor $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ em que N é a quantidade de tais retângulos, para finalmente fazer o cálculo com um programa de computador.

A soma das áreas dos retângulos se expressa com a soma de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k); \tag{85}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k; \Delta x_k = x_{k+1} - x_k; \tag{86}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k; \Delta x_k = x_k - x_{k-1}; \tag{87}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{n}; \tag{88}$$

Este tipo de soma que aparece nas equações (eq. 85) (eq. 86) se chama *soma de Riemann.* e elas podem aparecer com vários formatos alternativos como o do equação (eq. 87). A expressão da *soma de Riemann* que aparece na equação (eq. 88) é particularmente importante, é chamada de *soma de Riemann uniforme*. Observe que nela o *passo da soma* foi obtido dividindo o intervalo em n partes iguais: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Se a integral existir no sentido de Riemann, as somas de Riemann, satisfazendo a uma condição que garante uma distribuição equitativa dos *levantamentos* $f(x_k)$, definem sucessões de Cauchy equivalentes cujo limite comum é o número

o tamanho máximo de Δx_k é uma sucessão equivalente a $\frac{1}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \tag{89}$$

e sendo assim um formato particular de soma de Riemann pode então ser usado, como é o caso da *soma de Riemann uniforme* quando $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$, a soma de Riemann associada à partição uniforme do intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_x = \Delta_x \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k); \tag{90}$$

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n}; x_k = a + k\Delta_x; \tag{91}$$

Isto é possível fazer se, primeiro, for possível provar que a integral existe, e aqui, sim, existe um caminho teórico, científico, para a demonstração da existência de integrais, por exemplo, pode-se provar que se f for contínua, então $\int_a^b f(x)dx$ existe em qualquer intervalo $[a, b]$ contido no domínio de f porque nestas condições f é uniformemente contínua. Portanto vale aplicar somas de Riemann e programas de computador para rapidamente calcular esta integral. É o caso das funções polinomiais e vou aplicar esta metodologia ao cálculo da integral de $f(x) = x^3$. Deixe-me então reescrever a equação (eq. 90) e a equação seguinte (eq. 91), com o meu objetivo atual:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx; \tag{92}$$

$$f(x) = x^3; \tag{93}$$

$$I = \int_0^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_x = \Delta_x \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \Delta_x \sum_{k=0}^{n-1} x_k^3; \tag{94}$$

$$\Delta_x = \frac{b}{n}; x_k = k\Delta_x; \tag{95}$$

$$I \approx \Delta_x \sum_{k=0}^{n-1} (k\Delta_x)^3 = \tag{96}$$

$$\Delta_x^4 \sum_{k=0}^{n-1} k^3; \tag{97}$$

Da última equação posso deduzir que se eu souber calcular a soma dos cubos dos termos duma progressão aritmética eu estarei a caminho duma fórmula para o cálculo da integral I. Neste ponto você pode ver o método específico que lhe estou apresentando facilmente pode ser adaptado para qualquer potência e ficará, logo mais, claro que me será possível calcular o limite da expressão na equação (eq. 97) quando $\Delta_x = 0$ ou, equivalentemente, quando n crescer indefinidamente.

As somas de potências dos termos duma progressão geométrica são *somas notáveis* cujas fórmulas são dadas por polinômios sendo a regra geral “a soma das potências p dos termos duma progressão aritmética é dada por um polinômio do grau $p+1$". Logo tenho que procurar um polinômio do grau 4 que me vai dar a soma das potências 3 da progressão aritmética dos n primeiros números naturais e como já lhe mostrei, na seção anterior, isto recai na solução dum sistema equações cujo determinante é um Vandermonde:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; \tag{98}$$

$$\begin{cases} P(0) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0; \\ P(1) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_3 = 1; \\ P(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 9; \\ P(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 = 36; \\ P(5) = a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 625a_4 = 100; \end{cases} \tag{99}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \end{pmatrix} \tag{101}$$

$$P(x) = \frac{\det(A_1)}{\det(A_0)} + \frac{\det(A_2)}{\det(A_0)}x + \frac{\det(A_3)}{\det(A_0)}x^2 + -\frac{\det(A_4)}{\det(A_0)}x^3 + \frac{\det(A_4)}{\det(A_0)}x^4 \tag{102}$$

$$Q(x) = \frac{\det(A_1)+\det(A_2)x \det(A_3)x^2+\det(A_4)x^3+\det(A_4)x^4}{\det(A_0} = \frac{x^2+2x^3+x^4}{4}; \tag{103}$$

O método aqui vai parecer truncado entretanto logo vou encontrar uma saída adequada para o problema que vou enfatizar. A matriz A é uma matriz de Vandermonde e mesmo os determinante das matrizes A_1 e A_4 podem ser facilmente calculados usando-se método de Vandermonde ao se desenvolver o determinante pela primeira coluna, no caso de A_1 ou pela última coluna, no caso de A_4, se cai em determinantes de Vandermonde. As demais matrizes não parecem produzir determinantes de Vandermonde portanto o cálculo dos demais determinantes sai do contexto de *determinante de Vandermonde*.

Entretanto este problema é de importância menor porque vou mostrar que apenas interessa descobrir o coeficiente de maior grau e neste caso preciso calcular apenas os determinantes de A, A_4 onde vou poder aplicar o método dos determinantes de Vandermonde. Esta afirmação logo vai ser comprovada e a melhor maneira de fazê-lo é a *saída habitual*, deixe-me supor que os determinantes foram calculados e que eu tenha calculado os valores de

$$a_0, \ldots, a_4; \tag{104}$$

e logo vou mostrar-lhe que apenas interessa o valor de a_4. Então posso substituir os seus valores na equação (eq. 97),

$$\Delta_x^4 \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \Delta_x^4 P(n-1); \Delta_x = \tfrac{b}{n}; \Delta_x^4 = \tfrac{b^4}{n^4}; \tag{105}$$

$$\Delta_x^4 (a_0 + a_1(n-1) + a_2(n-1)^2 + a_3(n-1)^3 + a_4(n-1)^4) = \tag{106}$$

$$a_0 \tfrac{b^4}{n^4} + a_1(n-1)\tfrac{b^4}{n^4} + a_2(n-1)^2 \tfrac{b^4}{n^4} + a_3(n-1)^3 \tfrac{b^4}{n^4} + a_4(n-1)^4 \tfrac{b^4}{n^4}; \tag{107}$$

Todas os termos na equação (eq.4.107) têm limite zero quando $\Delta_x = 0$ exceto o último cujo limite é $a_4 b^4$ e portanto interessa-me saber apenas o valor de a_4 que é dado por

$$a_4 = \tfrac{\det(A_4)}{\det(A_0)};$$

$$\det(A) = (1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(2-3)(2-4)(2-5)(3-4)(3-5)(4-5) =$$

$$288 == 2^5 * 3^2 \qquad \det(A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

$$\begin{gathered} = -1(1-3)(1-4)(1-5)(3-4)(3-5)(4-5) + \\ 9(1-2)(1-4)(1-5)(2-4)(2-5)(4-5) - \\ 36(1-2)(1-3)(1-5)(2-3)(2-5)(3-5) + \\ 100(1-2)(1-3)(1-4)(2-3)(2-4)(3-4) = 72 = 2^3 * 3^2; \\ a_4 = \tfrac{\det(A_4}{\det(A} = \tfrac{1}{4} \end{gathered}$$

e $\det(A_4)$ pode ser calculado pelo método Vandermonde se o desenvolvendo pela última coluna. Posso agora substituir a_4 na equação na equação (eq. 97) para obter a expressão da integral:

$$I = \int_0^b f(x)dx = \lim_{\Delta_x = 0} \Delta_x^4 \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{b^4}{4}; \tag{116}$$

Este é o valor da integral de $f(x) = x^3$ no intervalo $[0, b]$ de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções polinomiais.

O método pode ser repetido para qualquer monômio x^n, interessando apenas o cálculo de a_{n+1} no polinômio quando se irá chegar à conclusão esperada:

$$I = \int_0^b x^n dx = \lim_{\Delta_x = 0} \Delta_x^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} k^n = \frac{b^{n+1}}{n+1}; \tag{117}$$

Os cálculos dos determinantes foram desenvolvidos no programa `Determinante.calc` que pode ser baixado da página [2, Determinante.calc] em que, eventualmente você pode ter que fazer pequenas alterações para refletir o conteúdo deste artigo.

Observe que pelo Binômio de Newton, o denominador no polinômio que soma as potências p dos n primeiros números naturais é $\frac{1}{p+1}$.

Índice Remissivo

Referências

[1] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[2] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, 2009. http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/.