Somas notáveis, determinante de Vandermonde e a integral de polinômios

Praciano-Pereira, Tarcisio *

17 de dezembro de 2018
preprints da Sobral Matemática
no. 2018.05
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@sobralmatematica.org

Resumo

Vandermonde, é um tipo determinante que aparece naturalmente quando você tentar encontrar a equação dum polinômio usando o teorema Fundamental da Álgebra, confira o exemplo. Neste artigo estou apresentando uma demonstração da fórmula para o cálculo do determinante de Vandermonde junto com um exemplo de como ele ocorre junto com uma aplicação no cálculo de integrais.

palavras chave: determinante de Vandermonde, integral de polinômios, somas notáveis.

Vandermonde determinant occurs naturally when you are trying to find the equation of a polynomial subjected to the Fundamental theorem of Algebra. In this paper I am presenting the proof of the formula together with some applications of notable sums and integral of polynomials.

keywords: integral of polynomials, notable sums, Vandermonde determinant.

*tarcisio@sobralmatematica.org

1 Somas notáveis e deterinante de Vandermonde

Vandermonde, é um tipo determinante que aparece naturalmente quando você tentar encontrar a equação dum polinômio usando o teorema Fundamental da Álgebra, confira o exemplo.

Exemplo 1 (encontrar) *a equação dum polinômio*

Um polinômio Q do grau n fica completamente determinado por $n+1$ equações. Na seguinte sucessão de equações vou procurar um polinômio do quarto grau, Q, que tenha os valores que me interessam para obter a soma das terceira potências dos n primeiros números naturais.

$$n \in \{1,2,3,4,5\} \mapsto Q(n) \in \{1,9,36,100,225\} \tag{1}$$

Com fundamento no Teorema Fundamental da Álgebra, um polinômio do quarto grau fica determinado por cinco "pontos" dados. O polinômio Q vai me fornecer a soma das terceiras potências dos números naturais e sei que um tal polinômio é do grau 4.

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; \tag{2}$$

$$\begin{cases} Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1; \\ Q(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_3 = 9; \\ Q(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 36; \\ Q(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 = 100; \\ Q(5) = a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 625a_4 = 225; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \\ 225 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$Q(x) = \frac{\det(A_1)}{\det(A_0)} + \frac{\det(A_2)}{\det(A_0)}x + \frac{\det(A_3)}{\det(A_0)}x^2 + -\frac{\det(A_4)}{\det(A_0)}x^3 + \frac{\det(A_5)}{\det(A_0)}x^4 \tag{5}$$

$$Q(x) = \frac{\det(A_1)+\det(A_2)x\det(A_3)x^2+\det(A_4)x^3+\det(A_5)x^4}{\det(A_0} = \frac{x^2+2x^3+x^4}{4}; \tag{6}$$

- *Na equação (eq.2) escrevi a expressão geral dum polinômio do quarto grau.*
- *Na equação (eq.3) expressei com um sistema de equações os valores de Q para os números que me interessavam,*

$$\{1,2,3,4,5\} \mapsto \{1,9,36,100,225\} \tag{7}$$

- *na (eq.4) transformei o sistema de equações numa equação matricial que resolvi encontrando os coeficientes de Q, $a_0 = 0; a_1 = 0; a_2 = 0.25; a_3 = 0.5; a_4 = 0.25;$. O polinômio é*

$$Q(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4}; \tag{8}$$

- *A matriz na equação (eq.4) tem um formato especial, das matrizes de Vandermonde. Na segunda coluna se encontram os números $1,2,3,4,5$ cujas potências se encontram nas linhas que eles determinam.*

  Expressando em símbolos,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Em exemplos numérico posso ter que "*interpretar*" $1 = 0^0$, mas não estou propondo esta correção à exceção que existe em Matemática à lei das potências, é apenas um padrão que funciona. Cada linha da matriz na equação (eq.9) é formada pela sucessão de potências do segundo elemento da linha sendo o primeiro elemento sempre 1 que é a potência zero do elemento que define a linha, com a *convenção* de que vale também para zero.

Confira que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \\ 0 & 27 & 64 & 125 & 216 & 343 \\ 0 & 81 & 256 & 625 & 1296 & 2401 \\ 0 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 & 16807 \end{pmatrix} \tag{10}$$

é uma matriz de Vandermonde, seu determinante é 725760 e pode ser calculado com a regra exposta mais abaixo, na primeira coluna se encontram as "*potências de zero*" de zero até 5 ...

Você pode trocar linha por coluna, e é o caso na equação (eq.10), e também terá uma matriz de Vandermonde, neste caso se diz que as colunas são formadas pela sucessão de potências do segundo elemento da coluna, a transposta duma matriz de Vandermonde é também uma matriz de Vandermonde trocando linha por coluna ao descrever as propriedades. Daqui para frente, para simplificar a linguagem, vou fazer referência exclusivamente às matrizes de Vandermonde em que as linhas contém as potências do segundo elemento. Deve ficar claro para a leitora de que valem todas as afirmações para a matriz transposta.

Os determinantes de Vandermonde podem ser calculados com uma regra bem simples que vou expor no próximo teorema. A regra é simples mas a demonstração é um pouco complicada.

Todos os cálculos foram testados com o programa `Vandermonde.calc` que pode ser baixdo de [3, Vandermonde.calc]. A linguagem de programação `calc` é distribuida com a licença `GPL`, confira [2].

2 calculando um determinante de Vandermonde

O próximo teorema mostra o método de cálculo dum determinante de Vandermonde e a demonstração do método.

Teorema 1 (Determinante) *Vandermonde*

Supondo que na segunda coluna da matriz de Vandermonde V de ordem n se encontrem os números

$$a_1, \cdots, a_n \in \mathcal{A}_n$$

considere os conjuntos $\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n,k}$ de todas as combinações $2 - a - 2$, dos elementos da segunda linha ordenadas pelos índices,

$$\mathcal{A}_n = \{a_1, \cdots, a_n\}; \tag{11}$$

$$\mathcal{C}_n = \{(a_i, a_j); i < j; \}; \tag{12}$$

$$\mathcal{C}_{n,k} = \{(a_i, a_j); i < j; i, j \neq k\} \tag{13}$$

em que os conjuntos $\mathcal{C}_{n,k}$ são obtidos do anterior, $\mathcal{C}_n$, eliminando todas as ocorrências do índice k que os caracterizam.

O valor do determinante de Vandermonde é o produto

$$D = det(V) = \prod_{(a_i,a_j)\in\mathcal{C}_n} (a_i - a_j) = \tag{14}$$

$$I = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} a_k^{n-1} \prod_{(a_i,a_j)\in\mathcal{C}_{n,k}} (a_i - a_j); \tag{15}$$

em que n é a ordem do determinante.

A fórmula para o cálculo do determinante de Vandermonde aparece na equação (eq.15), os conjuntos $\mathcal{A}_n, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n,k}$ *facilitam a expressão do produtório. Na equação (eq.11) eu escrevi a expansão do determinante relativamente à última coluna e vou precisar desta notação mais adiante. Eu introduzi os conjuntos*

$$\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n,k} \tag{16}$$

para simplificar a notação dos índices dos somatórios e produtórios, do contrário eu teria que indicar $i < j; i, j \neq k$*, é este o uso destes conjuntos.*

Antes de passar à demonstração, deixe-me mostrar-lhe como é simples a regra para o cálculo do determinantes de Vandermonde:

- *Se fazem todas as combinações dois a dois dos elementos da segunda coluna,* $\{a_i, a_j\}$*, quer dizer, se selecionam todos os conjuntos com dois elementos tirados de* $\mathcal{A}_n$*, ordenados como eles aparecem na matriz,*
- *se calcula o produto da diferenças dos pares obtidos anteriormente,* $(a_i - a_j)$*, este é o valor do determinante.*
- *Mais prático ainda, calcule, ordenadamente, as diferenças dos elementos da segunda coluna e faça o produto destas diferenças. Você terá* C_n^2 *fatores para calcular o produto.*
- *Mais logo, na demonstração, você verá esta regra prática sendo aplicada.*

Observe que pela comutatividade da multiplicação, o que interessa no produto definido na equação (eq.10) é o produto das diferenças dos pares que formam o conjunto $\mathcal{C}_n$ *e ele foi construído levando em consideração à ordem dos índices. O que aparece na equação (eq.10) é o produto destas diferenças. Não respeitar esta ordenação implica em alterar o sinal do determinante.*

$\boxed{\textbf{Dem}}$*:*

A demonstração vai prosseguir por indução finita *na ordem das matrizes de Vandermonde. O primeiro passo* que eu vou escolher *da indução é a matriz de ordem* 3*, mas vale para matriz de ordem 2 também, verifique!*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} = \tag{17}$$

$$D = -\left(a_1^2(a_2 - a_3) - a_2^2(a_1 - a_3) + a_3^2(a_1 - a_2)\right) = \tag{18}$$

$$= a_2a_3^2 - a_3a_2^2 - (a_1a_3^2 - a_3a_1^2) + a_1a_2^2 - a_2a_1^2 = \tag{19}$$

$$= a_2a_3^2 - a_3a_2^2 + a_3a_1^2 - a_1a_3^2 + a_1a_2^2 - a_2a_1^2 = \tag{20}$$

$$= a_2a_3(a_3 - a_2) + a_1a_3(a_1 - a_3) + a_1a_2(a_2 - a_1) = J; \tag{21}$$

$$I = -(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) = -(a_1^2 - a_1a_3 - a_1a_2 + a_2a_3)(a_2 - a_3) = \tag{22}$$

$$= -a_1^2a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2^2 - a_2^2a_3 + (a_1^2a_3 - a_1a_3^2 - a_1a_2a_3 + a_2a_3^2 = \tag{23}$$

$$= -a_1^2a_2 + a_1a_2^2 - a_2^2a_3 + a_2a_3^2 - a_1a_3^2 + a_1^2a_3 = \tag{24}$$

$$= a_1a_2(a_2 - a_1) + a_2a_3(a_3 - a_2) + a_1a_3(a_1 - a_3) = J = I = \tag{25}$$

$$(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) = I = J; \tag{26}$$

Estes cálculos mostram que a regra do cálculo do determinantes de Vandermonde vale para uma matriz quadrada de ordem 3*, mas, além disto a sucessão de equações (eq.17)- (eq.25) mostram a identidade algébrica*

$$a_1^2(a_2 - a_3) - a_2^2(a_1 - a_3) + a_3^2(a_1 - a_2) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3); \tag{27}$$

$$\frac{a_1^2(a_2-a_3)-a_2^2(a_1-a_3)+a_3^2(a_1-a_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)} \equiv 1; \tag{28}$$

que posso descrever como, dados três números "a_1, a_2, a_3*" e o produto das diferenças das combinações ordenados* $2 - a - 2$*, conjuntos com dois elementos tirados dos três elementos da segunda coluna do determinante,* $-(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$ *vale a identidade expressa na equação (eq.27).*

A equação (eq.28) expressa que o polinômio racional obtido com o quociente das duas expressões anteriores, é constante se os números "a_1, a_2, a_3*" forem diferentes e, em se tratando dum determinante (ou matriz) de Vandermonde, não teria sentido que houvesse igualdade entre eles, portanto o quociente é identicamente 1 e vou necessitar deste detalhe no final.*

Por combinações ordenadas considero a ordem em que se encontram os números a_1, a_2, a_3 *e as diferenças são*

$$\mathcal{C}_3 = \{(a_i, a_j); a_i - a_j; i < j; \}; \mathcal{C}_{3,k} = \{(a_i, a_j); a_i - a_j; i < j; i, j \neq k; \}; \tag{29}$$

e observe que a ordenação é feita pelos índices que marcam a ordem como os números a, b, c *aparecem no determinante. Desobedecer esta ordenação implica em alterar o sinal do determinante.*

Estou usando na técnica de indução finita o uso simultâneo de duas hipóteses expressas pela identidade já mencionada na equação (eq.27). A hipótese de indução *que vou estabelecer é que o determinante de Vandermonde de ordem n equivale a um polinômio de grau* $n-1$ *no sentido de que determina os coeficientes dum tal polinômio. Observe que o exemplo desenvolvido anteriormente mostra a recíproca: um polinômio de grau* $n-1$ *produz um sistema de equações cuja matriz é de Vandermonde.*

Vou desenvolver o caso da matriz de ordem 4×4 *que, embora desnecessário porque o ponto inicial do* processo de indução finita *já foi executado no caso* 3×3*, mas, este caso envolve uma pequena complicação que será didática para a aplicação do segundo passo da* indução finita *quando vou ter fazer uso de reticências para representar as passagens intermediárias.*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} \tag{30}$$

$$I = (a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_3-a_4) = \tag{31}$$

$$\stackrel{?}{=} a_1^3(a_2-a_3)(a_3-a_4)(a_4-a_2) - a_2^3(a_1-a_3)(a_3-a_4)(a_4-a_1) + \tag{32}$$

$$a_3^3(a_1-a_2)(a_2-a_4)(a_4-a_1) - a_4^3(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1) = \tag{33}$$

$$= -(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_3-a_4) = \tag{34}$$

$$D = \sum_{k=1}^{4}(-1)^{(k+4)}a_k^3 \prod_{(a_i,a_j)\in\mathcal{C}_{4,k}}(a_i-a_j); \tag{35}$$

$$I = \prod_{(a_i,a_j)\in\mathcal{C}_4}(a_i-a_j); \tag{36}$$

$$\frac{D}{I} = \sum_{k=1}^{4} \pm\frac{a_k^3}{(a_1-a_k)(a_2-a_k)(a_3-a_k)} = \tag{37}$$

$$\textit{Fazendo } a_1 = a_2 = a_3 = 0 \textit{ tenho:} \tag{38}$$

$$\frac{D}{I} = \pm\frac{a_4^3}{(a_1-a_4)(a_2-a_4)(a_3-a_4)} = \pm\frac{a_4^3}{a_4^3} = \pm 1; \tag{39}$$

Na equação (eq.37) estou usando o símbolo $\pm$ *porque pode haver erro de sinal uma vez que no denominador devem estar as diferenças* $(a_i - a_j)$ *com* $i < j$ *e "*quem é quem*" na diferença depende de* k*. Na última expressão na equação (eq.39) eu tenho controle total das diferenças assim como em qualquer das escolhas na ordem que eu fizer para calcular zerando todas as variáveis menos uma como é o caso na equação (eq.39). Mas o quociente é a constante* 1 *se as diferenças forem corretamente calculadas.*

O valor obtido na equação (eq.39) voltará a ser obtido fazendo-se sucessivamente $a_j = 0; j \neq k$ *para cada um dos valores de* $k = 1,2,3,4$ *mostrando que o quociente* $\frac{D}{I} = 1$ *e portanto que* $D = I$ *como eu queria demonstrar. Vou usar esta mesma técnica para finalizar o último item na demonstração por indução finita.*

Da execução dos dois casos acima surgiram duas versões da identidade algébrica:

$$D = a_1^2(a_2-a_3) - a_2^2(a_1-a_3) + a_3^2(a_1-a_2) = I = (a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3); \tag{40}$$

$$D = \left\{\begin{array}{l} -a_1^3(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_3-a_4)+ \\ a_2^3(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_3-a_4)+ \\ -a_3^3(a_1-a_2)(a_1-a_4)(a_2-a_4) \\ a_4^3(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3) = \end{array}\right. = \tag{41}$$

$$= I = (a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_3-a_4); \tag{42}$$

- *O segundo membro em cada uma das identidades na equação (eq.40) e na equação (eq.41) é a fórmula do determinante de Vandermonde,*
- *no primeiro membro se tem uma uma soma cujas parcelas são formadas por cada uma das entradas da última coluna elevada a potência* $n-1$*, multiplicadas pelas diferenças das combinações 2-a-2 dos demais elementos segunda coluna o que performa o desenvolvimento do determinante pela última coluna sendo cada um dos menores na soma, o Vandermonde de ordem imediatamente inferior.*

Vou supor que a regra seja válida para qualquer matriz de Vandermonde de ordem menor ou igual $n\times n; n > 3$*, como* hipótese de indução finita*, e vou considerar uma matriz expandindo a matriz de ordem* n *com mais uma coluna e uma linha de modo a ser também uma matriz de Vandermonde. Terei acrescentado uma linha com as potências dum novo número* x *até a ordem* $n+1$ *e uma coluna incluindo as potências* n *dos números já* *existentes,*

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix} = D \tag{43}$$

a hipótese de indução é uma dupla de afirmações, a identidade algébrica e a fórmula do cálculo dum determinante de Vandermonde. Na verdade a identidade algébrica *é a expressão do determinante quando desenvolvido a partir da última coluna.*

Aplicando a hipótese de indução à matriz de ordem $n+1$ na equação (eq.43) cujo determinante vou desenvolver pela última coluna, tenho sucessivamente

$$I = \prod_{(a_i,a_j)\in\mathcal{C}_{n+1}} (a_i - a_j) \stackrel{?}{=} \tag{44}$$

$$= D = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+n+1} a_k^n \prod_{(a_i,a_j)\in\mathcal{C}_{n+1,k}} (a_i - a_j); \tag{45}$$

$$\frac{D}{I} = \frac{D}{\prod\limits_{(a_i,a_j)\in\mathcal{C}_{n+1}} (a_i-a_j)} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+n+1} a_k^n \frac{\prod\limits_{(a_i,a_j)\in\mathcal{C}_{n+1,k}} (a_i-a_j)}{\prod\limits_{(a_i,a_j)\in\mathcal{C}_{n+1}} (a_i-a_j)} = \tag{46}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+n+1} \frac{\pm a_k^n}{\prod\limits_{(a_k,a_j);j\neq k} (a_k-a_j)}; \tag{47}$$

A soma na equação (eq.47) é de frações cujo denominador são os termos remanescentes da simplificação na equação anterior o produto das diferenças que que não contém a diferença $(a_k - a_j)$ em que a_k está no numerador.

Na equação (eq.47) tenho uma soma de frações cujo denominador é a_k^n e no denominador o produto de todas as diferenças $(a_k - a_j)$ em que, em cada fração, aparece neste produto o correspondente a_k que se encontra no numerador. Como anteriormente, estou usando o símbolo "$\pm$" porque o sinal depende da ordem correta em que as diferenças $(a_k - a_j)$ sejam consideradas e assim estou indicando que posso ter aqui um erro de sinal.

Posso então calcular o valor de $\frac{D}{I}$ sucessivamente considerando para obter

$$a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{I} = \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+n+1} \frac{a_k^n}{(a_1-a_{n+1})\cdots(a_n-a_{n+1})}; \tag{48}$$

$$a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{I} = \sum_{k=3}^{n+1} (-1)^{k+n+1} \frac{a_k^n}{(a_1-a_{n+1})\cdots(a_n-a_{n+1})}; \tag{49}$$

$$\cdots \vdots \cdots; \tag{50}$$

$$a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{I} = \frac{a_{n+1}^n}{(a_1-a_{n+1})\cdots(a_n-a_{n+1})} = \pm\frac{a_{n+1}^n}{a_{n+1}^n} = \pm\frac{D}{I} = \pm 1; \tag{51}$$

O que mostra que o quociente $\frac{D}{I} = 1$ quando eu considerar, isoladamente, cada um dos $a_j = 0$ para todos os valores de $j \neq k$ portanto $D = I$.

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

3 Cálculo de integrais de polinômios

Há diversas *somas notáveis* de que precisamos com frequência ou que ocorrem em várias situações como

- soma dos termos dum progressão artimética, ou geométrica,
- soma dos quadrados duma sequência de números,

- soma das potências p duma progressão aritmética de números inteiros (pode ser um pouco mais geral),
- em *somas de Riemann* no cálculo da integral duma função polinomial.

Estas somas são polinômiais e as fórmulas para o seu cálculo são também polinômiais tendo um formato *idêntico* que usa o próximo teorema, embora de forma indireta.

Exceto a soma dos termos das p.g. de que não vou tratar aqui.

Teorema **2 (somas)** *polinomiais* *Suponha que P seja um polinômio do grau p então a soma*

$$\sum_{k=0}^{n} P(k) = Q_{p+1}(n+1) - Q_{p+1}(0) \tag{52}$$

em que Q_{p+1} é um polinômio do grau $p+1$ **Dem** *: É corolário do lema, $x \mapsto Q_{p+1}(x)$ é um polinômio do grau $p+1$ se e somente se $x \mapsto Q_{p+1}(x+1) - Q_{p+1}(x)$ é um polinômio do grau p. Depois a equação (eq.52) é consequência direta da identidade*

$$Q_{p+1}(x+1) - Q(x)_{p+1} = P(x)$$

substituida na soma: os termos se cancelam dois a dois ficando apenas o primeiro e o último. Estas somas são chamadas de telescópicas *porque* encolhem *entre o primeiro e último termo.*

Resta mostrar como obter Q_{p+1} que satisfaça à equação (eq.52), mas isto é imediato em cada caso: basta escrever $p+2$ somas uma vez que o grau de Q_{p+1} é $p+1$ tornando necessários $p+2$ amostras para obter um sistema de $p+2$ equações que determinem Q_{p+1}. Tentar uma demonstração genérica é muito difícil (eu não consegui) sem passar por uma notação estrambótica. Os passos seriam:

- $Q_{p+1}(x) = \sum_{j=0}^{p+1} a_j x^j$;
- *dado uma* razão aritmética *h, $Q_{p+1}(x+h) - Q_{p+1}(x) = P(x)$ é um polinômio de grau $p > 0$. Consequência do Binômio de Newton.*
- *Escreva $p+1$ somas sucessivas e obtenha assim $p+1$ equações que determinam de forma única os coeficientes de Q_{p+1}.*
- *O determinante do sistema será um Vandermonde, portanto, diferente de zero: o sistema tem uma única solução, o polinômio Q_{p+1}, o que significa $p+2$ coeficientes.*

q.e.d .

Uma referência basica para estas somas relativas às integrais polinomiais é [1].

Como seria muito difícil encontrar uma notação adequada para demonstrar o caso geral deste teorema, o exemplo inicial representa um atalho que vai suprir diretamente a fórmula geral e como biproduto vou mostrar tanto o uso do determinante de Vandermonde como mostrar como se obtém a fórmula para o cálculo da integral de funções polinomiais. Pelo exemplo, e com fundamentação no Teorema Fundamental da Álgebra, podemos encontrar a fórmula para a soma de qualquer potência p da soma dos primeiros n números naturais sob a forma dum polinômio de grau $p+1$,

Para determinar um polinômio do grau n preciso de $n+1$ *amostras* deste polinômio o que vai produzir um sistema de $n+1$ equações nas $n+1$ incógnicas que são os coeficientes do polinômio. Quem fundamenta isto é teorema fundamental da Álgebra. É isto que nos mostra o exemplo com este artigo se inicia para determinar um polinômio do quarto grau.

As somas do tipo do exemplo inicial ocorrem no cálculo da integral de funções polinomiais e o que interessa é o cálculo da integral de x^n depois as regras de integração nos permitem calcular a integral de qualquer polinômio. Como as funções polinomiais são contínuas e até mesmo uniformemente contínuas em intervalos fechados, então o cálculo da integral

$$\int_a^b x^n dx \tag{53}$$

pode ser arbitrariamente aproximada por *somas de Riemann* uniformes.

A figura (fig 1), página 8, mostra a motivação geométrica. Subdividimos o intervalo sobre o qual queremos calcular integral em n partes iguais produzindo uma soma que se chama *soma de Riemann uniforme* em oposição aquelas em que a divisão é feita em subintervalos de tamanho variado. Se pode provar que, se a integral existir então a convergência via somas de Riemann uniformes ou não é a mesma: o limite é comum. Uma classe de funções, as contínuas, têm esta propriedade e $f(x) = x^n$ é uma função contínua. Então posso aplicar no cálculo da integral as somas de Riemann uniformes.

E tem integrais que não existem!

$$\Delta x = \tfrac{b-a}{n+1} = \tfrac{1-0}{n+1} = \tfrac{1}{n+1}; \tag{54}$$

$$I = \int\limits_0^1 x^p dx \approx \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta x)\Delta x; \tag{55}$$

$$I \approx \sum_{k=0}^{n} k^p \Delta x^p \Delta x; \tag{56}$$

$$I \approx \sum_{k=0}^{n} k^p \Delta x^{p+1} = \Delta x^{p+1} \sum_{k=0}^{n} k^p = \tfrac{1}{(n+1)^{p+1}} \sum_{k=0}^{n} k^p; \tag{57}$$

Na equação (eq.57) se tem a soma das p-potências dos n primeiros números naturais, confira somas notáveis, e nós sabemos podemos descobrir um polinômio de grau $p+1$ para calcular esta soma. Vou continuar com $p = 3$ para fazer uso do exemplo inicial.

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2 + 2n^3 + n^4}{4} \tag{58}$$

que substituindo na (eq.57) me dá

$$\frac{1}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n-1}k^3 = \frac{1}{(n+1)^4}\frac{n^2+2n^3+n^4}{4} = \frac{n^2+2n^3+n^4}{4(n+1)^4} = \tag{59}$$

$$= \frac{n^2}{4(n+1)^4} + \frac{2n^3}{4(n+1)^4} + \frac{n^4}{4(n+1)^4} = \tag{60}$$

$$\frac{n^2}{4(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)} + \frac{2n^3}{4(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)} + \frac{n^4}{4(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)} = \tag{61}$$

$$\frac{1}{4(n^2+4n+6+4/n+1/n^2)} + \frac{1}{2(n+4+6/n+4/n^2+1/n^3)} + \frac{1}{4(1+4/n+6/n^2+4/n^3+1/n^4)}; \tag{62}$$

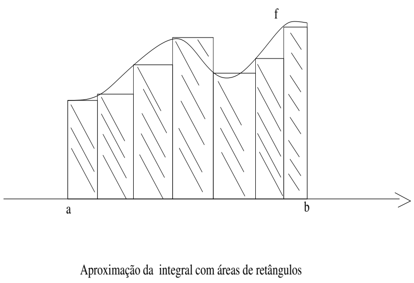

Figura 1: Soma de Riemann

A sequência de equações (eq.59) -(eq.62) são todas aritméticas, apenas fiz cálculos aritméticos. Agora vou dar um salto lógico usando o conceito de limite pulando da equação (eq.62) para a próxima equação e fazendo uma operação que nos separa das máquinas: o cálculo de limites.

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{4(n^2+4n+6+4/n+1/n^2)} \approx \lim_{n=\infty}\frac{1}{4(n^2+4n+6)} = 0; \tag{63}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{2(n+4+6/n+4/n^2+1/n^3)} \approx \lim_{n=\infty}\frac{1}{2(n+4)} = 0; \tag{64}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{4(1+4/n+6/n^2+4/n^3+1/n^4)} = \lim_{n=\infty}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \tag{65}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{n^2+2n^3+n^4}{4(n+1)^4} = \frac{1}{4}; \tag{66}$$

$$\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}; \tag{67}$$

No último sistema de equações eu fiz dois cálculos de limite, um nas equações que se encontram à esquerda identificando como "emphlimite nulo" de frações da forma

$$\frac{k}{n}, \frac{k}{n^2}, \dots, \frac{k}{n^p} \tag{68}$$

o que reduziu ao caso imediato na equação (eq.65) e me permitiu escrever as equivalências nas equações intermediárias (eq.64) e (eq.63). Para que finalmente eu aplicasse a regra da potência no denominador expressa na equação (eq.27) para finalizar o "*cálculo do limite*" que não é um cálculo aritmético e sim um cálculo lógico que aprendemos a fazer estudando limites mas que temos uma dificuldade imensa de explicar.

Estas contas estão baseadas em *dois princípios básicos do limite*

1. sucessões que convergem para zero formam uma álgebra sem divisão: a soma delas é uma outra sucessão que converge para zero, e o produto delas é uma outra sucessão que também converge para zero.

2. se alguma sucessão tiver um limite conhecido, este limite será preservado quando você lhe somar uma sucessão que converge para zero e na multiplicação predomina o limite para zero. O que explica o segundo membro nas equações (eq.64).

Simplesmente não será possível ensinar as máquinas a calcularem limites, somente nós os humanos é que sabemos fazer este cálculo,

$$\lim_{n=\infty}\frac{n^2+2n^3+n^4}{4(n+1)^4} = \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3dx; \tag{69}$$

é o valor da integral.

Num próximo artigo eu vou mostrar que podemos facilmente obter a fórmula

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \tag{70}$$

com um pequeno complemento às ideias aqui desenvolvidas.

Referências

[1] Richard Courant. *Differential and Integral Calculus I*. Interscience Publishers Wiley classics library, 1988.

[2] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. Programas para cálculo numérico. Technical report, 2009. http://www.calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas/.