Fazendo simples o Teorema de Green

Praciano-Pereira, Tarcisio *

25 de julho de 2017
preprints da Sobral Matemática
no. 2017.05
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

Vou mostrar como é simples o teorema de Green começando com a *versão trivial* e depois mostrando a versão geral. Um programa de computador estará disponível para que você calcule aproximadamente integrais de linha.

palavras chave: Teorema de Green, integral de linha, integral dupla, programa de computador `Green.calc`.

I will show that Green theorem has a trivial version which is easy to explain and from that point I will present the full version. I will give a link to a program to calculate line integrals so you can test the Green formula.

keywords: Green theorem, line integral, double integral, computer program `Green.calc`.

*tarcisio@member.ams.org

1 O projeto

O teorema de Green é uma fórmula intrigante que povoa os livros de Cálculo,

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{1}$$

em que à esquerda está a *integral de linha* duma forma diferencial e à esquerda uma integral dupla duma expressão associada com a forma diferencial da integral de linha. Tem um salto de dimensão 1 entre as duas fórmulas. Há várias aplicações para este teorema o que faz ser importante a sua compreensão e divulgação. Por exemplo, a integral de linha representa a diferencial dum potencial ao longo da fronteira de Ω e se houver uma diferença não nula então este potencial não é exato, o que ocorre com imensa frequência porque os potenciais exatos são perturbados por forças externas que não esperamos que existam. Um caso típico é o do pêndulo que se funcionasse num meio ideal, sem atrito, sua diferença de potencial ao fim de cada ciclo seria zero.

Neste artigo eu vou começar com um função potencial diferenciável à qual vou aplicar o teorema de Green para obter a versão trivial. Depois vou dar um exemplo que atende tanto à versão trivial como o caso geral quando finalmente vou enunciar o caso geral do Teorema de Green. Você não vai encontrar demonstrações aqui, por que eu não iria produzir nenhuma que fosse diferente das que você pode encontrar nos livros de Cálculo. O meu objetivo é levá-l@ a entender o teorema e consequentemente ter motivação para enfrentar os cálculos da demonstração que dificilmente podem ser atenuados.

2 A versão trivial do teorema

- **Green, teorema de** Este teorema é um dos resultados mais importantes do *Cálculo multivariado* junto com outros teoremas que podem ser considerados extensões ou complementações dele, como, por exemplo o *teorema de Stokes* e o *teorema da divergência de Gauss*. Não tenha dúvida que esta lista está longe de ser exaustiva.

Se (P, Q) for um campo vetorial diferenciável definido num domínio Ω do plano, então

$$\oint\limits_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{2}$$

Na equação (eq.2), à esquerda, está uma *integral de linha* calculada sobre a fronteira, $\partial\Omega$ da região Ω, e segunda integral, à direita, é uma integral dupla, calculada sobre a região Ω, portanto entre as duas integrais há um salto de dimensão 1 como no teorema Fundamental do Cálculo sendo esta a razão que me leva sempre a dizer que o teorema de Green é uma extensão do *teorema Fundamental do Cálculo*.

O teorema de Green tem uma versão trivial pela qual vou começar e que serve para classificar os campos vetoriais que vou usar ao final na expressão do teorema. Vou apresentar esta redação no caso de campos vetoriais bivariados, $(x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbf{R}$ com o objetivo de manter a linguagem simples. Para obter o caso com mais variáveis, basta acrescentar mais "*coordenadas*" às derivadas mas com algum cuidado! Esta generalização pode ser obtida com uma *mudança de variável* via uma parametrização duma superfície no espaço de dimensão maior do que três.

Se F for um campo vetorial, *uma função real de duas variáveis reais*, por exemplo, continuamente diferenciável, então, pelo teorema de *Schwarz-Clairaut* , as derivadas mistas serão iguais

$$J(F) = f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)); \tag{3}$$

$$\tfrac{\partial F}{\partial x} = P(x, y); \tfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y); \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$\tfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F_{xy} = Q_x = P_y = F_{yx} = \tfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \tag{6}$$

o que torna a integral

$$\int\int_{\Omega} (Q_x - P_y)dxdy = \int\int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0; \tag{7}$$

nula. Como posso calcular as primitivas de Q_x, P_y é possível deduzir, desta integral dupla, a integral de linha, também nula,

$$\oint_{\partial\Omega} P_x dx + Q_y dy = 0 \tag{8}$$

em que agora o símbolo $\partial\Omega$ representa a fronteira do domínio Ω, e esta integral é também nula. Suponha que tem uma poligonal de lados paralelos aos eixos e use-a para passar da integral dupla para integral de linha, é um exercício relativamente simples.

Mas a razão pela qual a integral de linha na equação (eq.8) é nula se pode deduzir de forma independente da integração feita na equação (eq.7). Ela é a *integral de linha* sobre um caminho fechado, a fronteira do domínio Ω quer dizer, uma integral que sai do ponto P e retorna ao ponto P ao longo do caminho $\partial\Omega$. Como nesta construção inicial o integrando foi construído como derivada dum campo vetorial F então a integral de linha começando numa condição inicial $P \in \Omega$ define uma primitiva F associada à esta condição inicial P e então as integrais do tipo da equação (eq.8), sobre circuítos fechados, têm que ser nulas.

Esta é a formulação trivial do teorema de Green. Se eu alterar um pouquinho a notação vou obter a expressão comum nos livros de Cálculo.

$$P(x,y) = F_x(x,y);\ Q(x,y) = F_y(x,y); \tag{9}$$

$$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 = \int\int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy \tag{10}$$

que é a expressão (trivial) do *teorema de Green* quando partimos de uma função diferenciável F, porque todas as integrais envolvidas são nulas:

- A *integral de linha* é nula porque o integrando é uma derivada e a curva $\partial\Omega$ liga um ponto P a si mesmo, uma curva fechada,
- A *integral dupla* é nula porque pelo teorema de *Schwarz-Clairaut* da igualdade entre derivadas mistas.

Se (P, Q) for um campo vetorial diferenciável continuamente, sobre um domínio Ω qualquer, ainda vale o teorema de Green mas as integrais não precisam ser nulas. A integral de linha, por exemplo, separa os campos vetoriais em duas classes:

- *Campos conservativos*, é o caso trivial, quando o campo vetorial é a derivada de um campo escalar. Então a integral de linha sobre qualquer curva fechada é zero, é uma aplicação direta do *teorema fundamental do Cálculo.*
- *Campos não conservativos*, quando houver uma curva fechada, fronteira de um domínio Ω sobre a qual a integral de linha na equação (10) é diferente de zero.

o valor da integral de linha é então a perda (ou ganho) de energia que o campo escalar sofre ao longo da curva $\partial\Omega$. Neste caso o campo vetorial (P, Q) não tem primitiva. Esta formulação permite ainda explicar dois tipos de integrais,

- *integrais independentes do caminho* aquelas, da forma

$$\oint_{\partial\Omega} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

  que são nulas sobre qualquer curva fechada. O campo escalar é conservativo, tem primitiva (vem da derivada de um campo escalar diferenciável).

- *integrais que dependem do caminho* aquelas, da forma

$$\oint_{\partial\Omega} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

que podem ser "*não nulas*" sobre alguma curva fechada. O campo escalar é não conservativo e não tem primitiva (não vem da derivada de um campo escalar diferenciável). Dizemos que integral depende do caminho porque, escolhidos dois caminhos entre dois pontos dados P_1, P_2, como se pode ver na figura (1) página 11, se o valor da integral sobre um dos caminhos, de P_1 até P_2 for diferente do valor da integral sobre o outro caminho, também de P_1 até P_2, podemos definir uma curva fechada, indo de P_1 até P_1, então a integral será diferente zero sobre esta curva fechada. Isto equivale a dizer-se que o campo vetorial (P, Q) não tem primitiva, não é a derivada de um campo escalar.

Como um exemplo, considere a integral da expressão do teorema de Green quando Ω for uma região do plano, confira a figura (fig 2), página 5.

Nesta figura a união das curvas γ e $r\mathbf{S}^1$ isolam o $(0,0)$ no exterior da região $\Omega_r = \Omega - rU$, em rU é uma contração do disco unitário cuja fronteira é $r\mathbf{S}^1$. Chame de $\beta_r = -r\mathbf{S}^1 \cup \gamma$, a união destas duas curvas fechadas, devidamente orientadas para que $(0,0)$ esteja no exterior da região Ω_r.

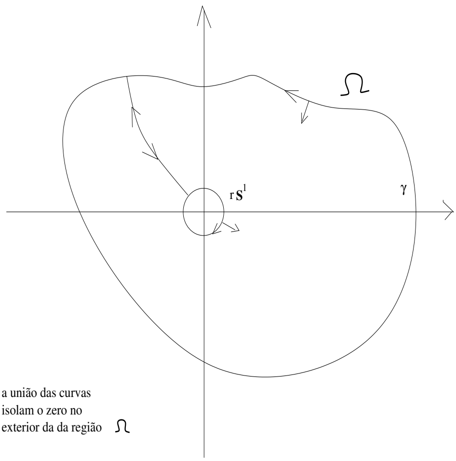

Figura 2:

Para orientar uma curva, considere um vetor tangente e um vetor perpendicular à curva no mesmo ponto com um ângulo positivo, $\frac{\pi}{2}$ entre eles. É a orientação positiva da curva. Oriente as duas fronteiras de modo que o vetor perpendicular aponte para a região limitada pelas curvas, como mostra a figura (fig 2).

Observe que não mencionei na descrição uma curva que aparece na figura (fig 2), ligando a curva γ e a curva $r\mathbf{S}^1$. Esta curva é um truque usado nas demonstrações, ela foi seguida duas vezes e em sentidos contrários, como indicam as setas apontando em direções opostas, portanto a integral de linha sobre esta curva é zero e não conta nos cálculos: *somei e subtrai*!

$$f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right); \tag{11}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}; \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Omega_r}\int \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = 0 = \oint\limits_{\beta_r} Pdx + Qdy; \tag{13}$$

$$(P,Q) \text{ não é uma derivada} \quad \Rightarrow \quad (\exists\gamma)\ (\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy \neq 0); \tag{14}$$

A curva γ mencionada na equação (eq.14) tanto pode ser $\gamma = \partial\Omega$ como $r\mathbf{S}^1$ sobre as quais o valor da integral de linha coincide em módulo. Eu teria que demonstrar que pelo menos uma destas integrais é diferente de zero (porque as duas poderiam ser zero...):

$$I_r = \oint\limits_{r\mathbf{S}^1} Pdx + Qdy = \tag{15}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\int\limits_0^{2\pi} r\sin(t)d(r\cos(t))dt + -r\cos(t)d(r\sin(t))dt = \tag{16}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi; \tag{17}$$

Na equação (eq.16) tirei para fora da integral r^2 do denominador e lhe atribui sinal negativo porque ela está sendo calculada no sentido "dos ponteiros do relógio" que é o sentido negativo de percurso. O resultado obtido, 2π merece um comentário especial, é um salto de uma "*espira*" na superfície de Riemann que é o gráfico da função f como função de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}$.

Calcular integrais de linha sobre curvas arbitrárias pode ser uma experiência nada fácil, nem sempre encontramos meios de calcular uma integral "*exatamente*", mas o cálculo aproximado com um programa de computador é simples. Experimente [3, programas/Green.calc que está editado para o cálculo da integral na equação (eq.15), leia os comentários. O programa irá calcular várias vezes, aproximadamente, a integral de linha atualizando o valor do passo `delta`. A curva se chama `gamma` e tem três parâmetros `a,b,r` para definir uma translação para um ponto do plano (a, b) e um fator de escala r de modo que você pode calcular a integral de linha sobre $r\mathbf{S}^1 + (a, b)$, a translação do círculo de raio r para o ponto (a, b). Se a origem estiver no interior de γ o valor da integral é o calculado na (eq.17).

Por exemplo, usando `Green.calc` com

$$(a, b) = (0.1, -0.2), r = 0.5$$

o valor da integral de linha será 2π e com

$$(a, b) = (2, -3), r = 0.5$$

o valor da integral de linha será 0, como era de esperar.

3 O programa `Green.calc`

Vou apresentar parte do programa que pode ser baixado da página [3, programas/Green.calc] para facilitar sua edição e uso. Vou me restringir às funções cuja edição lhe permitam fazer outras simulações. Procure a menção "*edite aqui*".

```
pi= 4*atan(1);  ## pi é uma aproximação da constante de Ar
## printf("pi = %f \n\n", pi);
i = sqrt(-1);


## edite aqui  para alterar a função - o campo vetorial (P
define f(x,y) { ## (y,-x)/zz* -  z* é o conjugado
```

```
local z = mat[2];
z[0] = 1.0*y/(power(x,2) + power(y,2));
z[1] = -1.0*x/(power(x,2) + power(y,2));
return z;
}

## edite aqui  para alterar a curva gama
define gamma(t) {
local r = 0.5; ## um fator de escala
local a,b;   ## uma translação
a = 0.1; b = -0.25;  ### coloque a = 0; b = 0 para centrar
local z = mat[2] = {a+r*cos(t), b+r*sin(t) };
return(z);
}

## edite aqui  para alterar a derivada da curva gama
define d_gamma(t) {  ## mantenha a equivalência com gamma(t
local r = 0.5;  ## o mesmo valor de gamma(t)
        local z = mat[2] = { -r*sin(t), r*cos(t) };
return(z);
}



## edite aqui  para alterar o valor de delta
delta = 0.01
while(delta > 0.00005) {
print "delta = ", delta,
"O valor da integral de Linha ",  RiemannLinha(delta);
delta *= 0.1;
}

quit;
```

4 A versão completa do teorema

Na versão completa do teorema de Green a integral de linha que aparece à direita não precisa ser nula sobre alguma curva fechada e isto denuncia que o campo vetorial (P, Q) não é uma derivada: não existe nenhuma função F

$$F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}; J(F) = (P, Q); \tag{18}$$

Observe o conteúdo do exemplo que dei,

$$(P, Q) = \frac{(y, -x)}{x^2 + y^2}; \tag{19}$$

é uma derivada, mas não quando zero pertence a região.

Então, quando (P, Q) não for uma derivada, ainda vale a igualdade na expressão do teorema de Green mas as expressões não precisam ser nulas.

Não vou apresentar uma demonstração porque eu não tenho nenhuma saida melhor do que as que você encontrará em qualquer livro de Cálculo, apenas advirto que em geral os autores burocratizam extremamente a demonstração. Tome a mais simples, alguma que use o percurso sobre um retângulo: ela mostra que você pode passar da integral dupla para a integral de linha e que portanto a fórmula vale.

Vou terminar apontando uma das aplicações mais interessantes do teorema, quando

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \tag{20}$$

então a integral dupla lhe dá a área de Ω e a integral de linha lhe fornece um meio de calculá-la usando uma integral univariada.

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus vol II*. Blaisdell Publishing Company, 1962.

[2] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[4] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.

um domínio não convexo no plano

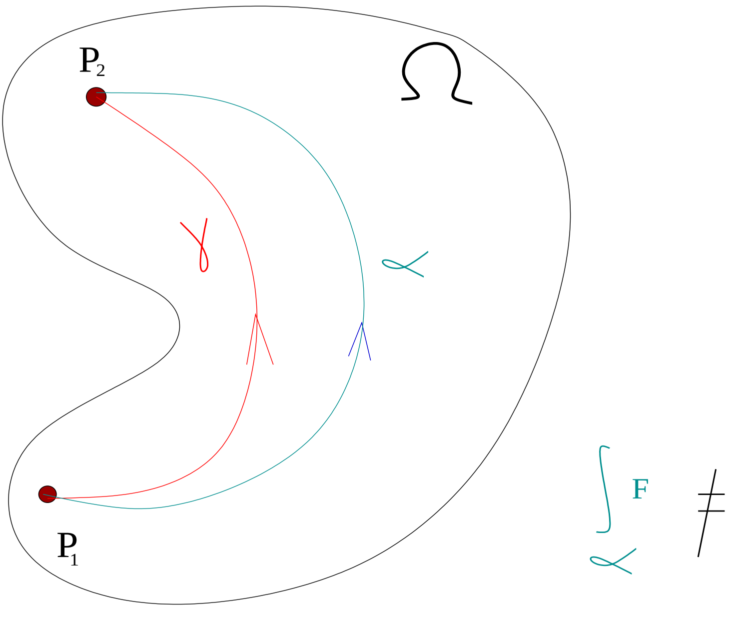

Figura 1: