A derivada complexa

Praciano-Pereira, Tarcisio *

14 de julho de 2017
preprints da Sobral Matemática
no. 2017.03
Editor Tarcisio Praciano-Pereira
tarcisio@member.ams.org

Resumo

O conjunto dos números complexos tem as mesmas propriedades que o conjunto dos números reais (exceto a ordem) é um *corpo*, herda todas as propriedades dos números reais consequentemente podemos transplantar para as funções complexas de variáveis complexas tudo que se estuda no Cálculo e com algumas vantagens. Desta forma posso aplicar a definição de derivada usual das *funções reais de variável real* às *funções complexas de variável complexa* que é o que se costuma chamar de *derivada complexa*, e neste momento surge um dos resultados mais intrigantes da análise: *se uma função complexa de variável complexa tiver derivada complexa ela será infinitamente diferenciável.* São as *funções analíticas*, as *funções complexas que têm derivada complexa.* Vou construir aqui uma demonstração simples deste resultado.

palavras chave: funções complexas, variavel complexa, função analítica.

The set of complex numbers has the same properties of real numbers, but the order, hence it is a field and the complex functions of complex variables inherits all the Calculus properties, verbatim, with some advantages. This way I can apply the usual definition of derivative to the *complex functions of complex variable* and have what is commonly called *complex derivative.* This produces one of the most intriguing results of the Analysis: if a complex functions of complex variable has a complex derivative it will have infinitely many derivatives. They are the so called *analytic functions*, the complex functions that have complex derivatives. I'm going to build here is a simple demonstration of this result.

keywords: complex functions, complex variable, analytical function.

*tarcisio@member.ams.org

1 O método

O meu objetivo é fazer uma demonstração simples do teorema

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1 (Propriedade fundamental)** *Funções analíticas*
Se uma função complexa, de variável complexa, tiver uma derivada complexa então ela é infinitamente derivável.

Apresento esta demonstração na próxima seção quando vou reunir todos os elementos necessários para apresentá-la.

Tais funções, as funções complexas que têm derivada complexa, se chamam *funções analíticas* e formam um corpo teórico que se chamou de *teoria das funções* até métade do século passado. A teoria das funções representa a solução duma única equação diferencial, o sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem chamado *equações de Cauchy-Riemann*.

Para atingir o resultado em foco, e sua demonstração, eu preciso de explicitar o significado do conceito *derivada complexa* que nada tem de especial a não ser porque o conjunto dos números complexos é duma grande riqueza estrutural consequência de que é um espaço de dimensão dois, o plano complexo, ao mesmo tempo que é um conjunto de números, objetos com que podemos *somar, multiplicar, subtrair e dividir*, como fazemos com os números reais.

A *derivada complexa* é a mesma derivada das funções reais de variável real

$$f'(z) = \lim_{\delta=0} \frac{f(z+\delta)-f(z)}{\delta}; \tag{1}$$

$$f(z) = z^2 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = 2z \in \mathbf{C}; \tag{2}$$

$$f'(z) = \lim_{\delta=0} \frac{f(z+\delta)-f(z)}{\delta} = \lim_{\delta=0} \frac{z^2+2z\delta+\delta^2-z^2}{\delta}; \tag{3}$$

$$f'(z) = \lim_{\delta=0} 2z = 2z; \tag{4}$$

Ocorre que $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ e assim também posso calcular as quatro derivadas parciais de f e a existência da derivada complexa fica caracterizada na equação (eq.2) porque $2z$ é um número complexo, tem apenas duas componentes reais. exatamente como no caso real, quando $z \in \mathbf{R}$ quando $2z \in \mathbf{R}$, um número também. Ai vem a questão, como conciliar as quatro derivadas parciais com um único número. A resposta são as *equações de Cauchy-Riemann* e é este o ponto central deste artigo, mostrar como entender a equação (eq.2).

A equação (eq.2) pode ser obtida diretamente do cálculo da derivada de f aplicando-se lhe limite num dos mais elementares de uso desta técnica, exatamente como no Cálculo. As as contas do Cálculo se podem copiar, tanto na *derivação* como na *integração* para usar nas variáveis complexas. No cálculo de integrais surge uma pequena novidade, fácil de ser incluída e entendida. O plano complexo é bidimensional, porisso perde a relação de ordem dos reais, mas ganha em possibilidades de caminhar entre dois pontos: há uma infinidade de caminhos ligando dois pontos e com isto se ganha em oportunidades e eu estarei mostrando logo este *ganho* fazendo todas as contas na próxima seção.

2 As provas

- **derivada complexa** O conjunto dos números complexos tem as mesmas propriedades que o conjunto dos números reais (exceto a ordem) e é, assim, um *corpo*. Desta forma posso aplicar a definição de derivada usual das *funções reais de variável real* às *funções complexas de variável complexa* que é o que se costuma chamar de *derivada complexa*, e neste momento surge um dos resultados mais intrigantes da análise: *se uma função complexa de variável complexa tiver derivada complexa ela será infinitamente diferenciável.* São as *funções analíticas*, as *funções complexas que têm derivada complexa.* O resultado é intrigante, mas é simples de se o demonstrar como você vai ver aqui uma forma simplificada do método que eu tomei emprestado do livro de Henry Cartan intitulado *Calcul Différentiel*,[2]. É simples hoje, mas foi construído ao longo de mais de um século e representa a solução de uma única equação diferencial, as *equações de Cauchy-Riemann*, um sistema linear de equações diferenciais parciais.

Existe uma notação clássica, usada por praticamente todos os autores que escrevem sobre funções complexas, deixe-me introduzi-la aqui. Se $z = x + iy$ então a função complexa $w = f(z)$ tem duas funções componentes, u, v e posso escrever

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y); \quad (5)$$
$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y); \quad (6)$$

u, v são funções reais da variável complexa $z = x + iy$ e algumas vezes são compreendidas como funções reais de duas variáveis reais (x, y), como está expresso na equação (eq.6). São formas idênticas de interpretar f, u, v.

As funções complexas que tiverem derivada complexa, também tem uma primitiva que é única a menos duma constante, como no caso real. A forma de calcular esta primitiva é muito semelhante àquela que usamos no caso real, apenas que agora temos que caminhar entre dois pontos ao longo dum curva no plano, confira a figura (fig. 1), página 2, em que você pode ver dois caminhos, um caminho poligonal, β e outro não poligonal, γ, partindo da condição inicial a até o ponto z. Se a função tiver uma primitiva, então o cálculo desta integral não pode depender da escolha do caminho e isto é muito prático, podemos escolher um melhor caminho para fazer o cálculo e eu vou com frequência escolher um caminho poligonal. Observe que o caminho escolhido tem que estar inteiramente contido no domínio de definição da função. Como as funções complexas são, de fato, transformações do plano, o Teorema de Green se lhes aplica e divide estas funções como *independentes do caminho* ou *dependentes do caminho* relativamente às integrais sobre curvas. As que tiverem *derivada complexa* são *independentes do caminho*, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann.

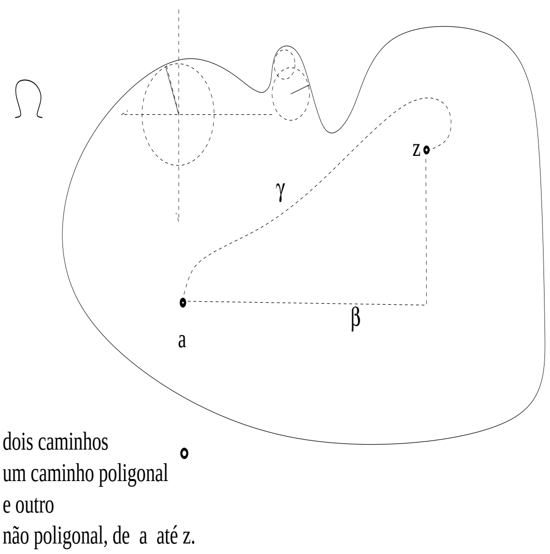

Figura 1:

Uma forma simples de se chegar ao resultados acima mencionados pode ser esquematizada na seguinte sequência em que estou usando derivação implícita para fazer aparecer as equações de *Cauchy-Riemann*, também estou usando a dualidade de interpretação $\mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$, $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$, conforme for conveniente:

ou a *dubie-d* você preferir...

$$f \text{ uma função complexa de variável complexa;} \tag{7}$$

$$f = u + iv; u, v \text{ funções reais de variável complexa;} \tag{8}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \alpha + i\beta = f'(z) \in \mathbf{C}; \tag{9}$$

$$df = J(f)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (\alpha + \beta i)(dx + idy) = (\alpha dx - \beta dy) + i(\alpha dy + \beta dx) \tag{10}$$

$$df = f'(z)dz = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$u_x = v_y; u_y = -v_x; \text{ Cauchy-Riemann} \tag{12}$$

$$f'(a + ib) = \alpha + i\beta = u_x + iv_x = v_y - iu_y; \tag{13}$$

A igualdade na equação (eq. 9) vem da afirmação inicial, $\mathbf{C}$ *é um corpo, como* $\mathbf{R}$*, a derivação das funções reais de variável real, se aplica* verbatim *ao caso complexo*, portanto, como no caso real, $f'(z) \in \mathbf{C}$, a *derivada complexa* é o número complexo $\alpha + i\beta$.

Este fato, que a derivada é um *número complexo*, volta a ser usado na equação (eq. 11) para identificar um tipo particular de matriz jacobiana, a derivada de f, agora vista como função de $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, na equação (eq. 11).

O que está em jogo aqui e que faz surgir este sistema de equações de diferenciais chamado de equações de Cauchy-Riemann é um pequeno e importante detalhe. Qualquer matriz 2×2 representa uma transformação linear do plano no plano, mas um subconjunto delas é que representa uma transformação linear de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}$, são aquelas da forma que se encontra na equação (eq. 11). Observe a seguinte sequência de cálculos e a observação que farei ao final dela:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix}; \tag{14}$$

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y); \tag{15}$$

Os cálculos acima poderiam ter sido feitos, faça você mesmo, de forma mais geral, usando uma matriz qualquer, em lugar daquela usada na equação (eq.14) e depois forçando uma igualdade entre ela e o resultado do produto de números complexos que aparece na equação (eq.15). Quer dizer que as *equações de Cauchy-Riemann* apenas caracterizam quando uma função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ é uma função que tem derivada complexa.

Vou poder assim destacar, entre as funções $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, uma classe particular de funções cuja matriz jacobiana tem o formato apresentado na equação (eq. 11), as funções analíticas.

A equação (ou sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem), equação (eq. 12), obtida quando se igualar as matrizes nas equações (eq. 9) e (eq. 11), é conhecida como *equações de Cauchy-Riemann*, e elas caracterizam quando uma função $f = u + iv$ é analítica e são usadas com frequência como definição de função analítica.

A derivada complexa de f, se existir, é uma nova função complexa de variável complexa e ao calcular-se sua derivada vão novamente aparecer as *equações de Cauchy-Riemann.* Por indução se conclui que se f for uma função complexa, de variável complexa, então será infinitamente diferenciável se for derivável no sentido complexo.

Quer dizer que voltando a olhar para as funções vetoriais de variável vetorial de dimensão dois haverá duas classes disjuntas de funções:

- aquelas que satisfazem às *equações de Cauchy-Riemann*, as funções analíticas, que são de classe $\mathcal{C}^\infty$,
- e as outras, que podem ser de classe $\mathcal{C}^\infty$ mas que não são analíticas.

Por exemplo

$$g(x,y) = (x,-y) = (u(x,y), v(x,y)); g(z) = \overline{z}; \tag{16}$$

$$u_x = 1 \neq v_y = -1; g'(x,y) = J(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$g''(x,y) \equiv 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{18}$$

$$(\forall n) g^{(n)} \equiv 0 \cdots \tag{19}$$

Então a derivada de $g(x,y) = (x,-y)$ não se pode identificar com um número complexo e assim g não tem uma *derivada complexa*, mas tem derivadas de todas as ordens que são matrizes nulas. g não é uma função analítica mas é de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Obviamente que ainda existe uma infinidade de outras funções que nem mesmo precisam ser contínuas: a "*maioria*"!

maioria, impr
confira a hipo
de Cantor!

Uma das implicações mais fortes da analiticidade é que se f for analítica irá transformar *abertos do plano complexo* em *abertos do plano complexo* mas não é uma propriedade fácil de ser demonstrada. Esta propriedade fundamental, ser de classe $\mathcal{C}^\infty$, caracteriza as *funções analíticas* como *aplicações abertas.*

Mas a recíproca não é verdadeira porque a função g, definida na equação (eq. 16), é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$, é uma aplicação aberta, mas não é analítica.

A derivada complexa de f pode ser escrita numa das formas alternativas seguintes, usando as *equações de Cauchy-Riemann*:

$$u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y = \alpha + i\beta; \tag{20}$$

$$f'(a+ib) = \alpha + i\beta; \tag{21}$$

O número $f'(a+ib) = \alpha + i\beta$ pode ser obtido com uma qualquer das expressões da equação (eq. 20).

Usando a equação (eq. 20) e a equação (eq. 21) posso criar a expressão de dois *operadores diferenciais* que vão permitir-me a síntese destes dois conceitos centrais, a *derivada complexa* e as *equações de Cauchy-Riemann.* Deixe-me seguir usando a notação $f'(a+ib) = \alpha + i\beta$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = 2(\alpha + i\beta) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u) + (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv); \quad (22)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u + iv) = 2(\alpha + i\beta) \quad (23)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})f = 2(\alpha + i\beta) \quad (24)$$

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})f = (\alpha + i\beta) = f'(a + ib); \quad (25)$$

$$\partial = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \quad (26)$$

$$\partial f = f'; \quad (27)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})u - (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(iv) = 0 \quad (28)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(u - iv) = 0 = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})\overline{(u + iv)} = \overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})}(u + iv) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{1}{2}\overline{(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial})}(f) = 0; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(f) = 0; \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y})(f) = 0; \quad (30)$$

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}); \quad (31)$$

$$\overline{\partial}(f) = 0; \quad (32)$$

- Na equação (eq. 22) escrevi de forma repetida a expressão da derivada, à direita é o resultado da aplicação do operador $(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ a cada uma das componentes de f e à esquerda é a expansão do mesmo operador. A razão pela qual o valor é $2(\alpha + i\beta)$ vem da equação (eq. 13) que expressa a derivada $(\alpha + i\beta)$ usando as derivadas parciais de u, v.

- A equação (eq. 23) resume a anterior assim como também (eq. 24) agora usando f.

- Na equação (eq. 25) defini o operador ∂, como resumo da equação anterior.

- Na equação (eq. 26) defini o operador ∂ em dois formatos equivalentes.

- A equação (eq. 27) é a expressão da derivada usando o operador ∂, e vale quando f tiver uma *derivada complexa*.

- Na equação (eq. 28) estão sendo aplicadas as equações de Cauchy-Riemann resumidas na equação (eq. 29) em três formatos equivalentes fazendo uma definição prévia do operador $\overline{\partial}$ que será corrigida na próxima equação uniformizando a notação porque a multiplicação por $\frac{1}{2}$ não vai alterar o resultado quando a função f for analítica (e nem quando não for ...). Observe que a igualdade central, na equação (eq. 29), vale independentemente de que f seja ou não analítica, mas, ser zero, é consequência da hipótese de que seja analítica.

- A equação (eq. 30) define o operador $\overline{\partial}$, que representa as equações de Cauchy-Riemann, em três formatos equivalentes.

- Na equação (eq. 31) encontra=se uma definição do operador $\overline{\partial}$.

- A equação (eq. 31) é a expressão das equações de Cauchy-Riemann usando o operador $\overline{\partial}$.

Destes cálculos posso deduzir duas expressões mais simples de dois *operadores diferenciais* clássicos permitindo uma forma concisa de expressar tanto as *equações de Cauchy-Riemann* como a definição da derivada de uma função analítica:

$$\partial = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \tag{33}$$

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}) \tag{34}$$

$$\partial(f) = \alpha + i\beta = f'(a+ib) \tag{35}$$

$$\overline{\partial}(f) = 0 \iff f \text{ satisfaz às equações de Cauchy-Riemann} \tag{36}$$

Embora a formulação à direita, nas equações (eq. 33) e (eq. 34) sejam mais didáticas (ligadas à definição de conjugado), a expressão que parece ser a mais comum são as que ficam à esquerda, para definir os operadores $\partial, \overline{\partial}$.

Neste ponto, de posse da expressão simples, como número complexo para a derivada, posso demonstrar o teorema fundamental mencionado anteriormente sobre a infinidade de derivadas que tem uma função analítica como uma aplicação do operador $\overline{\partial}$.

Teorema 2 (funções analíticas) *infinitamente deriváveis*

A derivada complexa de f, se existir, é uma nova função complexa de variável complexa e ao calcular-se sua derivada vão novamente aparecer as equações de Cauchy-Riemann. *Por indução se conclui que se f for uma função complexa, de variável complexa, então será infinitamente diferenciável se for derivável no sentido complexo:*

Dem:

$$f = u + iv; f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y \tag{37}$$

$$2\overline{\partial}(f') = 2\overline{\partial}(u_x + iv_x) = 2\overline{\partial}(u_x) + 2i\overline{\partial}(v_x); \tag{38}$$

$$2\overline{\partial}(f') = u_{xx} + iu_{yx} + i(v_{xx} + iv_{yx}); \tag{39}$$

$$2\overline{\partial}(f') = u_{xx} + iu_{yx} + iv_{xx} - v_{yx}; \tag{40}$$

$$2\overline{\partial}(f') = v_{yx} + iu_{yx} - iu_{yx} - v_{yx} = 0 \tag{41}$$

1. *Na equação (eq. 37) estou escrevendo f e a expressão de sua derivada usando a equação (eq. 13).*
2. *Nas equação (eq. 38)- (eq. 40), estou aplicando a definição do operador $\overline{\partial}$. Como $\overline{\partial}$ é um operador linear porque é combinação linear de derivadas que são operadores lineares então posso expandir a aplicação para cada uma das parcelas de f.*
3. *Na equação (eq. 41) reescrevi todas as derivadas para se tornassem derivadas mistas, para então concluir que a soma é nula e portanto f' satisfaz às equações de Cauchy-Riemann porque f é analítica e então f' também é analítica.*

Termina-se a demonstração do teorema aplicando indução finita. **q.e.d .**

As equações de Cauchy-Riemann são um exemplo de equação diferencial parcial que foi resolvida ao longo de mais de um século, resultando na construção do que se chamava de *teoria das funções* que se pode dizer, com alguma dose de exagero, que foi o processo de construção da *solução das equações de Cauchy-Riemann*, ou, a solução destas equações é uma função analítica e vice-versa.

As funções analíticas são também chamadas de *funções holomorfas*.

Como subproduto da solução das *Cauchy-Riemann* se obteve a solução da equação homogênea de Laplace. Se $f = u + iv$ for analítica, então as duas funções reais u, v são harmônicas, quer dizer, satisfazem à equação homogênea de Laplace $\Delta(u) = \Delta(v) = 0$, isto é consequência direta das equações de Cauchy-Riemann e do teorema de Schwarz-Clairaut das derivadas mistas.

As funções u, v chamam-se *conjugados harmônicos*. A recíproca é verdadeira e passa pela solução da equação diferencial de Cauchy-Riemann (as equações de Cauchy-Riemann) em que uma das duas funções, u ou v, é um dado do problema. A solução é única a menos de uma constante.

Para resolver a *equação diferencial parcial* $\Delta(F) = 0$ foi preciso montar toda a teoria das funções analíticas.

Referências

[1] Tom M. Apostol. *Calculus vol II*. Blaisdell Publishing Company, 1962.

[2] Henri Cartan. *Calcul Différentiel*. Herman - Paris, 1967.

[3] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[4] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional*. Sobral Matematica, 2007.

[5] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.