UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ
Curso de Licenciatura Plena em Matemática

João Vianey Vasconcelos Rios

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS E DETERMINAÇÃO DE EXTREMOS

SOBRAL - 2009

João Vianey Vasconcelos Rios

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS E DETERMINAÇÃO DE EXTREMOS

Monografia apresentada à Universidade Estadual Vale do Acaraú como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. ______________________________

SOBRAL - 2009

João Vianey Vasconcelos Rios

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS E DETERMINAÇÃO DE EXTREMOS

Monografia apresentada à Universidade Estadual Vale do Acaraú como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Monografia aprovada em: --------- /--------- /---------

Orientador: ______________________________

Prof. Dr. Tarcisio Praciano Pereira (UVA)

2º Examinador: ______________________________

Prof.

3º Examinador: ______________________________

Prof.

____

Prof. Ms. Nilton José Neves Cordeiro
Coordenador do Curso de Matemática

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, pois foi meu principal refúgio nos momentos difíceis, me permitindo continuar com a elaboração deste trabalho.

À minha família, que tem me ajudado à conquistar objetivos e sempre me impulsiona a lutar na vida.

Aos meus amigos e colegas do curso que, mesmo estando juntos na jornada, torcem por meu sucesso.

E um agradecimento especial ao meu orientador, Tarcisio Praciano Pereira, pela partilha de conhecimento, boa vontade e sinceridade para com a conclusão desta monografia.

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo descrever um novo algoritmo para determinação de extremos, tendo como base as equações diferenciais exatas. A partir de dados colhidos, será descrito o modelo F gerado pelas curvas que estes dados delimitam, ou seja, concluir que existe uma superfície que modela um certo fenômeno.

No primeiro capítulo irei estabelecer algumas definições que irão dar suporte ao objetivo do trabalho, observando quais os tipos de curvas que resultados colhidos por uma malha selecionada sobre uma região podem produzir.

No segundo capítulo, apresentarei uma discussão sobre as equações diferenciais exatas, desde a introdução do conceito, passando pela solução de uma equação deste tipo e sua relação com o gradiente.

Finalmente criar uma linguagem que permita rapidamente montar um método para obtenção de extremos a partir de equações diferenciais exatas, apresentando um novo algoritmo e utilizando os difeo como suporte. Termino fazendo uma descrição geométrica dos difeo.

Palavras-chave: *equações diferenciais exatas, difeomorfismo, extremos.*

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A Matemática é a ciência dos números e dos cálculos. Desde a antiguidade, o homem utiliza a matemática para facilitar a vida e organizar a sociedade. A Matemática foi usada pelos egípcios nas construção de pirâmides, diques, canais de irrigação e estudos de astronomia. Os gregos antigos também desenvolveram vários conceitos matemáticos. Atualmente, esta ciência está presente em várias áreas da sociedade como, por exemplo, arquitetura, informática, medicina, física, química etc. Podemos dizer, que em tudo que olhamos existe a Matemática.

A Matemática é uma área instrinsecamente presente no nosso cotidiano, além de ser essencial e eficiente, ela facilita a resolução de diversas problemáticas pois abstém-se de mudanças nos seus conceitos e definições já que se trata de uma disciplina da área das Exatas. Uma definição, um teorema, estabelecidos há muitos e muitos anos, permanecem intactos até hoje, preservando a magnífica sequência de raciocínios de tantos e tantos matemáticos daquela época. Por mais que realizemos novas descobertas nos dias atuais, sempre precisaremos utilizar conceitos pré-estabelecidos, ou seja, os pré-requisitos necessários à realização de um método, um algoritmo novos foram deduzidos muito antigamente por matemáticos.

Nessa mesma linha nós, os matemáticos de hoje, precisamos produzir sempre mais, tanto melhorando quanto descobrindo coisas novas. O nosso material produzido servirá de base para outros matemáticos. Nosso trabalho será recompensado quando auxiliarem pesquisas, ajudarem a sociedade, serem pré-requisitos para estudos. Com persistência, vamos aumentado o leque de opções da nossa Matemática, minimizando a abstração de alguns conceitos e conquistando o espaço que a Matemática merece estar.

Capítulo 1

Curvas produzidas por dados

Como sabemos, a Matemática está mais do que envolvida no nosso cotidiano. Tal fato se torna evidente quando se observa engenheiros *analisando* construções; topógrafos *analisando* o relevo de determinadas regiões; até químicos e físicos, entre professores e cientistas, todos utilizam a Matemática de alguma forma. Em todas estas profissões a Matemática está intrinsecamente presente, uma vez que diversos cálculos somente são possíveis utilizando os artifícios matemáticos como ferramenta. Pode-se dizer que, quando se trabalha com a análise de dados, a Matemática e seus métodos são as principais ferramentas utilizadas.

1.1 O que produzem dados colhidos para uma malha?

Quando se trabalha com dados colhidos sobre determinado fenômeno, seja ele natural ou artificial, em uma determinada região, tem-se em mãos uma das principais, se não a principal ferramenta para entender onde e como tal fenômeno varia, com isso teremos a possibilidade de analisar o crescimento do mesmo.

Como estamos tratando de Matemática e falando em pontos, algo que pode nos vir a cabeça é o que dois ou mais pontos (dados) produzem. Três pontos são necessários para se gerar um plano, assim como dois pontos são necessários para se gerar uma reta, e assim sucessivamente. Obteremos objetos ou, matematicamente falando, obteremos *variedades geométricas*. Mas na **análise** de uma, digamos, determinado crescimento da biodiversidade de uma região, nós matemáticos, nos "responsabilizamos" em determinar seu extremo, ou seja, de alguma alteração que esteja ocorrendo num determinado ecossistema. Como exemplo, um problema que vem afetando diversas regiões do país é o proliferamento do *Aedes aegypti*, o mosquito causador da dengue, que tem provocado grandes movimentos no intuito de combatê-lo, e o trabalho dos matemáticos é analisar quais pontos são os mais problemáticos, ou seja, a análise da quantidade de focos do mosquito para então descrever tal quantidade, depois compete à algum órgão público o combate propriamente dito. No geral, a Matemática se compromete a **analisar** tanto o objeto causador de uma degradação ambiental como algum outro fenômeno que seja importante para o ambiente, assim precisará crescer e se propagar, a problemática muitas vezes culmina numa perda de biodiversidade, mas pode também ser algo importante para o ecossistema, e é com esse objetivo que venho produzindo este trabalho: *descrever um novo algoritmo para determinação de extremos de algum fenômeno.*

Análise: neste momento é que entra a questão dos *extremos* e dos *"passos de montanha"* (mais adiante tratarei destes assuntos), é onde a Matemática atua de forma objetiva, até porque o trabalho de um matemático consiste em analisar um fênomeno e indicar seus extremos (pontos críticos), cabe a outro profissional tomar as medidas que se justifiquem, mas que fique claro que não estou aqui retirando a responsabilidade dos matemáticos enquanto fora de suas atribuições (a Matemática: ferramenta de trabalho do matemático), mas a Matemática, enquanto ciência, trabalha na análise do fenômeno e aponta seus pontos críticos.

Pode-se perceber também que, para topógrafos e engenheiros, o interesse é observar a *deformação do relevo* de uma determinada região, por exemplo, observar se há uma *elevação* (montanha) ou uma *depressão* (buraco), e nesse estudo a Matemática também tem papel fundamental, é a partir da determinação de extremos que se irá determinar tais máximos (montanhas), tais mínimos (buracos), seus pontos críticos, como também os "passos de montanha" que delimitam regiões onde há extremos. A Topografia estuda as alterações no relevo de uma determinada região, e a Matemática dentro da Topografia será usada para se determinar os pontos críticos deste relevo. Como o objetivo é a descrição de um algoritmo para se determinar extremos, estou fazendo uma ligação com a Topografia pois a variação de um fenômeno define um "relevo dinâmico" que se altera ao longo do tempo.

Crescimento de biodiversidades, estudo das alterações no relevo, são diversos campos que a Matemática atua quando a análise visa a determinação de extremos. *Pontos críticos* para matemáticos indica pontos de máximos, mínimo, "passo de montanha", ou seja, perceber até que ponto atingiu a variação utilizando algoritmos que realizem, digamos, uma modelagem na região, isso permitirá que se obtenha um modelo do crescimento do fenômeno ao longo do tempo, para assim serem realizadas projeções.

Embora a Topografia não seja usada neste trabalho, vou tomar exemplos de ocasiões em que engenheiros ou topógrafos possam se deparar, já que existe uma semelhança com o *"relevo dinâmico"*.

Supondo que, analisando a deformação de um determinado relevo, queira se determinar seus extremos. Primeiramente se define uma malha sobre uma região e se faz um levantamento de dados, estabelecem-se algumas variáveis e tomam-se alguns pontos que serão necessários para serem realizadas aproximações.

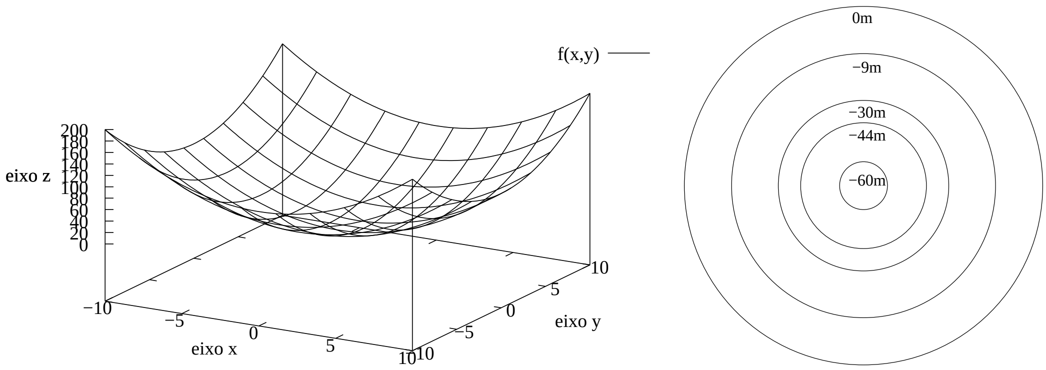

Figura 1.1: $f(x, y) = x^2 + y^2$ *e "suas" curvas de nível*

Hipoteticamemte, esta figura poderia representar a deformação em algum ponto de um relevo e algumas de suas curvas de nível. Note que há alguns valores em metros, são as alturas de cada curva de nível, eles representam que se está abaixo do nível do solo, então se trata de um buraco, uma depresssão. Como se trata de uma depressão, as curvas de nível determinam um *ponto de mínimo* no relevo. Outro exemplo:

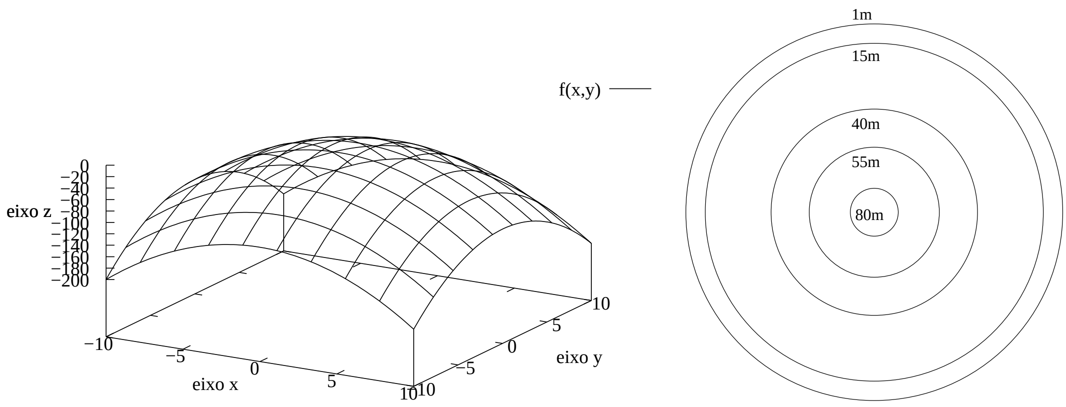

Figura 1.2: $f(x,y) = -(x^2 + y^2)$ *e "suas" curvas de nível*

Esta seria a deformação de um relevo e alguma das prováveis *curvas de nível.* Agora há valores positivos representando que se está acima do nível do solo, então temos um morro ou uma montanha, uma elevação. Como se trata de uma elevação, as curvas de nível determinam um *ponto de máximo* no relevo.

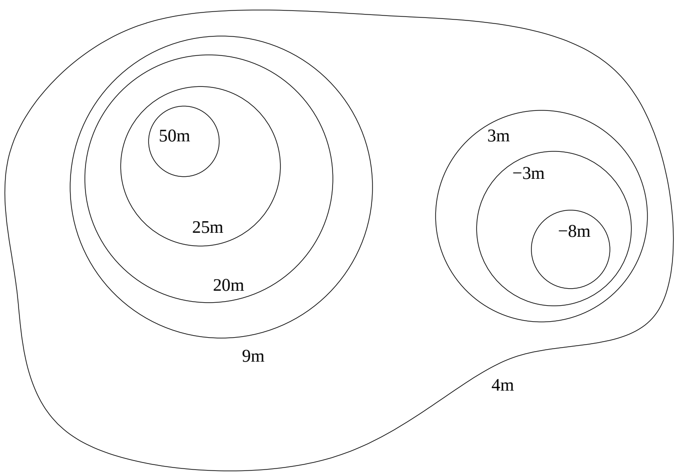

Figura 1.3: *Curvas de nível*

Mas podem haver ocasiões em que curvas determinem dois ou mais extremos, por exemplo, uma região que tenha uma elevação e uma depressão, como na figura. Com isso, numa mesma região poderá existir um máximo e um mínimo no relevo.

Analisando-se os três casos vistos, percebe-se que, ao se obter *curvas de nível em sequência* (uma dentro da outra) fica "fácil" a determinação do extremo: está no centro das curvas.

Esta discussão preliminar permitiu analisar, hipoteticamente, como se dá a determinação de extremos em regiões. Através de um levantamento de dados, podem ser obtidas curvas (não algébricas) mas que terão um conceito a partir de agora quando irei apresentar que tipos de curvas podem ser descritas quando se trabalha com dados.

1.2 Curvas do tipo círculos concêntricos

Círculos concêntricos são curvas que possuem o mesmo centro, sem contudo terem, obrigatoriamente, o mesmo raio. É um conceito importante para o objetivo do trabalho, o *difeomorfismo*, que caracteriza-se por ser uma *equivalência topológica que preserva a diferenciabilidade*. Esse é um exemplo de *difeormorfismo*: a imagem de uma grelha retangular em um quadrado sob um difeomorfismo do quadrado para si mesmo.

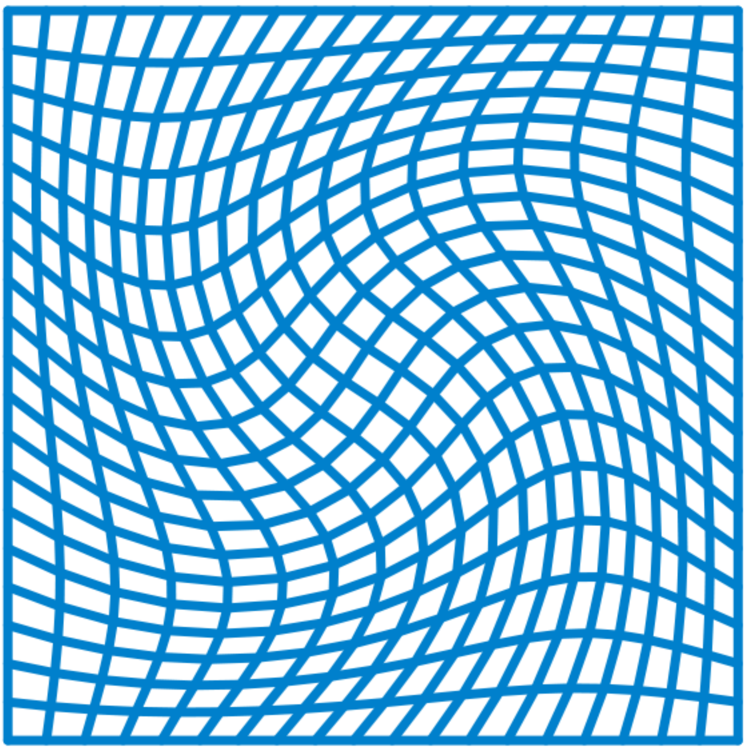

Figura 1.4: *Um Difeomorfismo*

Topologia é a parte da Matemática que identifica as propriedades dos conjuntos e os torna equivalentes do ponto de vista de funções contínuas. Sei que usei uma sentença extremamente vaga. Vou melhorar um pouco.

Para definir topologia, selecionamos conjuntos que chamamos os abertos do conjunto. Isto permite conceituar as funções definidas neste conjunto como contínuas. É a generalização das bolas abertas definidas com

$$|x - a| < r$$

em topologias oriundas de métricas, ou distâncias.

Desta forma pode-se dizer que quadrados e círculos são *equivalentes*. Mas um quadrado não seria equivalente a um anel (a diferença entre dois círculos concêntricos) porque, no segundo retiramos um pedaço interior. Enquanto foi retirada uma parte do círculo, preservou-se todo o quadrado, portanto a relação de equivalência não se aplicaria.

Logo, discos (círculos + interior) são topologicamente equivalentes a curvas fechadas com seu interior. É o que estou usando neste caso.

No que diz respeito à diferenciabilidade, precisa-se que dos dois lados se encontrem curvas diferenciáveis e a bijetividade dos difeo permite isto.

Então vou tomar como ponto inicial as curvas do tipo *círculo* estabelecendo a seguinte definição:

Definição 1 (Curva do tipo Círculo) *Uma curva será dita do tipo círculo quando houver um difeomorfismo entre ela e um círculo.*

Quando cortarmos um morro ou levantarmos dados, dificilmente serão encontrados círculos porque estas curvas *são algébricas* e dados que descrevem fenômenos *não são algébricos*. Por isso, quando estamos tratando de análise de dados, necessitamos de um meio que chegue mais próximo da "algebricidade" para que, com recursos matemáticos, possamos realizar os devidos estudos.

Observe a figura abaixo:

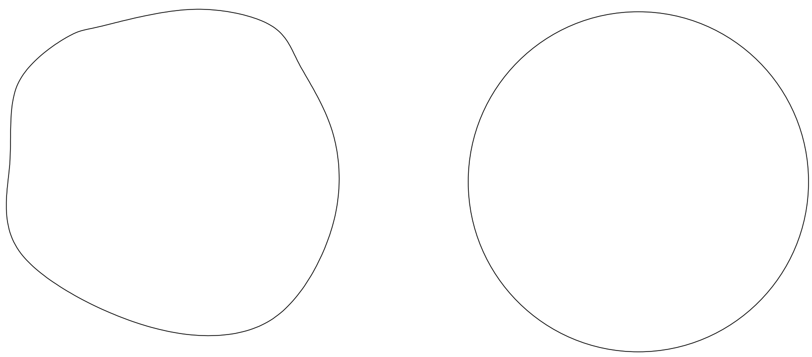

Figura 1.5: *Difeomorfismo de uma curva do tipo círculo*

De acordo com a definição, que esta curva será chamada *curva do tipo círculo* pois ela é difeomorfa ao círculo que está logo ao lado, já que se trata de uma equivalência topológica. Como os difeo preservam a diferenciabilidade, então o círculo é também diferenciável em todos os seus pontos.

Inicialmente propus uma primeira definição para estabelecer um caso particular de onde quero realmente chegar, que são uma família de curvas de nível *em sequência.* Este termo pode transparecer que sejam curvas "em fila", mas são curvas *contidas* em outras curvas. A partir de agora entender-se-á melhor. Assim como fiz para o caso particular, vou generalizar o conceito estabelecendo mais uma definição.

Definição 2 (Família de Curvas do tipo Círculos Concêntricos) *Uma família de curvas do tipo círculo é dita uma família de curvas do tipo Círculos Concêntricos quando houver um difeomorfismo entre uma família de círculos concêntricos e esta família de curvas.*

Então posso afirmar que estas curvas de nível são equivalentes:

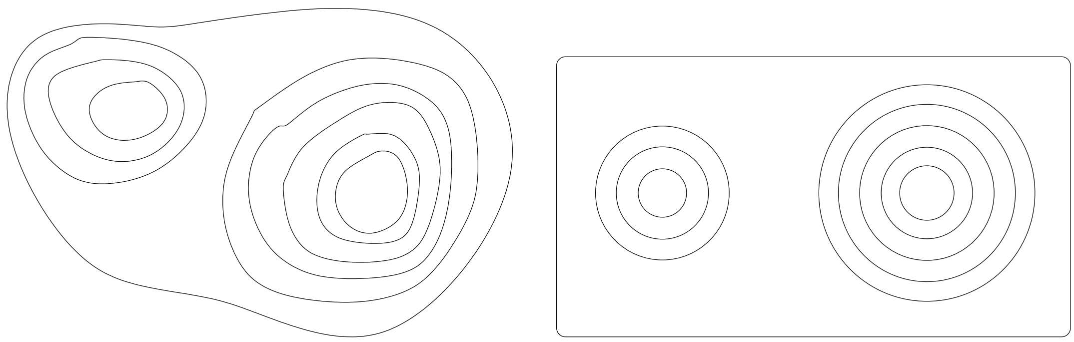

Figura 1.6: *Curvas do tipo Círculos Concêntricos*

Fazendo-se uma comparação, percebe-se que todas as curvas foram mantidas, somente alterei o formato de apresentá-las, quer dizer, fiz uma remodelagem. Então vou admitir que existe uma *equivalência topológica* entre tais objetos.

Na família de círculos concêntricos, há um "quadrado arredondado", isto implica que existe derivada em todos os seus pontos. Arredondei para preservar a *diferenciabilidade* que a relação de difeomorfismo garante.

1.3 Curvas do tipo hiperbólico

As *hipérboles* são curvas que possuem *retas assíntotas*. Estas retas são tais que a distância entre ela e um ponto P da curva (a hipérbole) tende a zero à medida que este ponto P se afasta indefinidamente da origem. Observando a figura abaixo, pode-se entender melhor este tipo de curva:

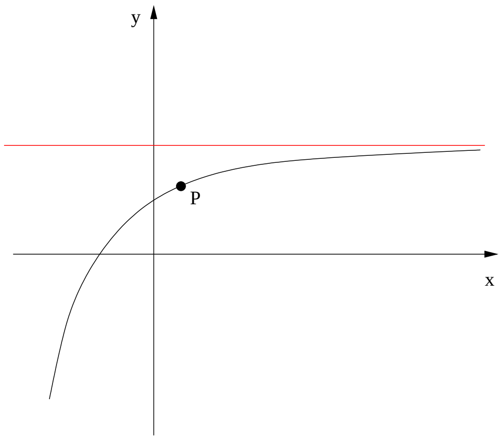

Figura 1.7: *Assíntota: horizontal*

Afastando-se o ponto P indefinidamente da origem na direção do eixo x, pode-se observar que a distância entre a reta e o ponto P tenderá à zero, *tenderá à zero sem nunca ser zero*, quer dizer, sem nunca tocar a reta. Assim diz-se que a reta em vermelho é *assíntota* à hipérbole.

Este é um exemplo de uma hipérbole, mas elas podem se apresentar de outras formas: podem ser também *vertical* e *oblíqua*, respectivamente:

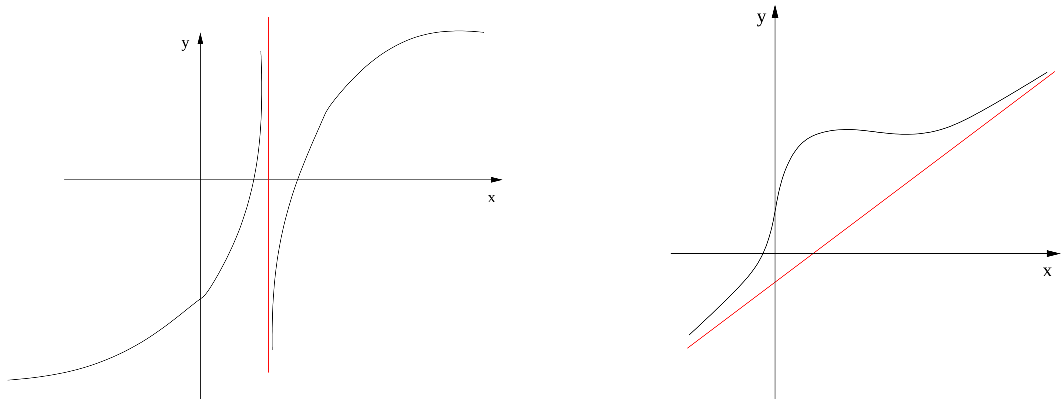

Figura 1.8: *Assíntota: vertival e oblíqua*

Assim, para cada reta assíntota existente, tem-se uma hipérbole correspondente.

São estes tipos de curvas que também podemos ter quando trabalhamos com dados colhidos, não exatamente hipérboles, mas difeomórfica às hipérboles. Se o objetivo é determinar extremos, eles podem estar dentro das regiões que estas curvas delimitam. Pode-se entender melhor observando essa figura: perceba que existem *curvas abertas* dentro de uma região (uma curva que contém as outras). Observando a figura, note que há uma sequência de curvas, e de fora para dentro encontra-se uma abertura, é alí dentro que os extremos podem estar.

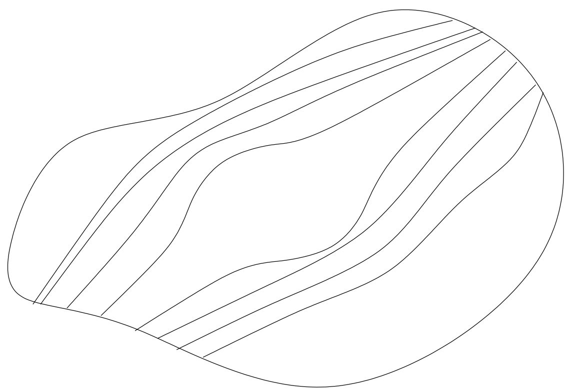

Figura 1.9: *Região de curvas abertas*

Tomando como caso particular uma curva do tipo *hiperbólico* vou estabelecer a próxima definição:

Definição 3 (Curva do tipo Hiperbólico) *Uma curva será dita do tipo hiperbólico quando houver um difeomorfismo entre ela e uma hipérbole.*

Com um difeomorfismo, consegue-se chegar mais próximo da algebricidade para então se poder construir um método que se almeja.

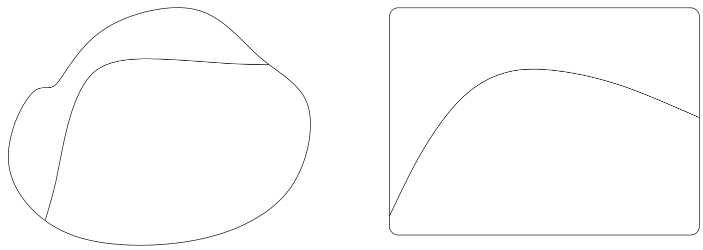

Figura 1.10: *Difeomorfismo de uma curva do tipo hiperbólico*

Do ponto de vista topológico, as curvas da figura acima são *equivalentes*. Mas os difeo, que é como são chamadas as relações de difeomorfismo, não determinam somente uma equivalência topológica, mas também preservam a diferenciabilidade entre os objetos. Desta forma, admitindo-se que a curva da esquerda é alguma curva de nível de uma superfície $z = F(x, y)$ continuamente diferenciável, e sendo o "quadrado arredondado" diferenciável, então existe um difeomorfismo entre estas curvas. Portanto a curva da esquerda é uma *curva do tipo hiperbólico.*

Vou propor uma nova definição, agora generalizando o conceito expandindo a definição anterior.

Definição 4 (Família de Curvas do Tipo Hiperbólico) *Dizemos que uma família de curvas hiperbólicas é uma família de curvas do tipo hiperbólico quando houver um difeomorfismo entre uma família de hipérboles e esta família de curvas.*

Assim, com a definição proposta, pode-se garantir que as curvas de nível abaixo são equivalentes:

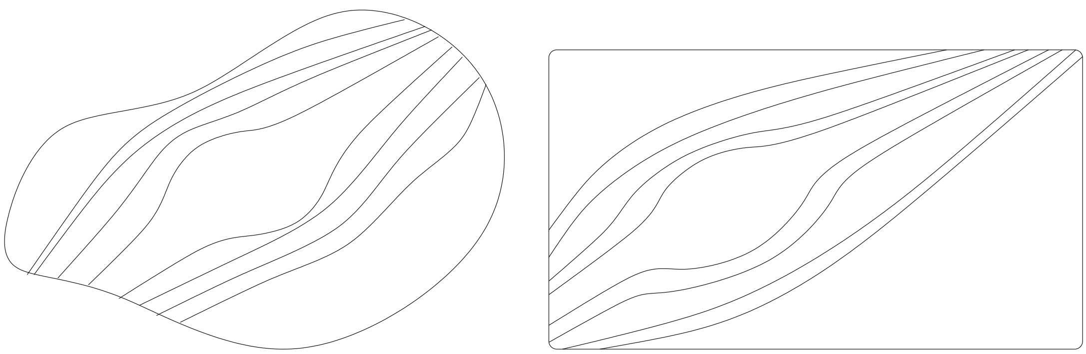

Figura 1.11: *Família de Curvas do tipo hiperbólico*

Ou seja, através da relação de *difeomorfismo* entre ambas, as curvas obtidas são uma *Família de Curvas do tipo hiperbólico.*

1.4 Passo de Montanha e os extremos

Seguindo com a mesma discussão, e em contrapartida com as curvas do tipo círculos concêntricos, entenda o que estou fazendo. Quando encontram-se, com os dados, uma *família de curvas do tipo hiperbólico*, conclui-se que alí existe um "passo de montanha" e portanto, numa direção perpendicular, haverá uma *família de curvas do tipo círculos* *concêntricos*. Os “passos de montanha” são os que correspondem, no caso univariado, aos pontos de inflexão. São regiões críticas porque elas delimitam regiões onde há extremos.

Vamos entender melhor observando o esboço abaixo:

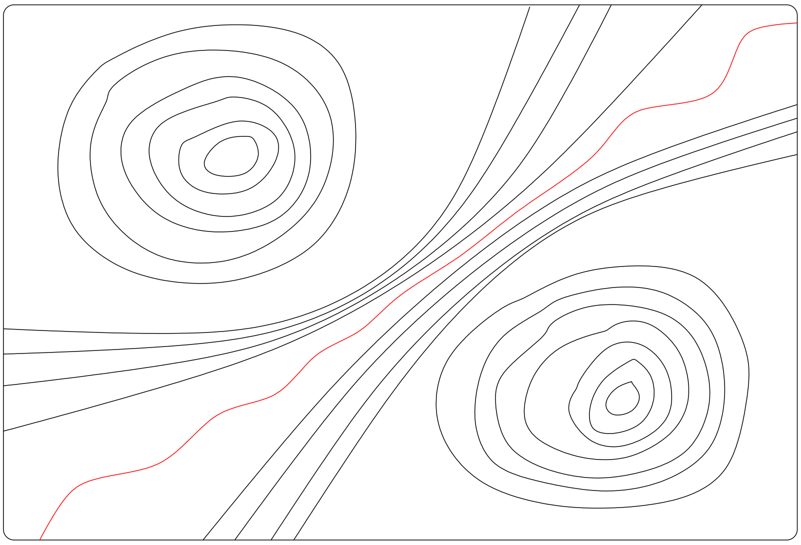

Figura 1.12: *O passo de montanha*

Colhidos alguns dados, obteve-se[1] uma certa região com *curvas do tipo hiperbólico* e *curvas do tipo círculos concêntricos*, então alí existe um “passo de montanha”. Repare na linha vermelha que percorre o entremeio destas curvas, ela também é uma curva do tipo hiperbólico. O “passo de montanha” é este caminho que segue a linha vermelha[2]. Quando escrevi que numa *direção perpendicular* às *curvas do tipo hiperbólico* existirá uma *família de curvas do tipo círculos concêntricos*, me referia à família de curvas fechadas que podemos observar na figura. Estando no “passo de montanha” e saindo numa perpendicular encontram-se curvas que, dependendo do relevo, pode ser um morro ou uma depressão para os topógrafos (relevo geográfico); ou um ponto forte ou fraco de alteração para os matemáticos (“relevo dinâmico”).

Mas também, entre curvas do tipo hiperbólico, podem ser encontradas curvas do tipo círculos concêntricos representando, por exemplo, uma alteração no relevo (relevo geográfico); ou uma alteração de biodiversidade (“relevo dinâmico”).

[1]Por difeomorfismo.

[2]Mas que não implica ser somente em cima da linha, você pode “sair de cima” dela também.

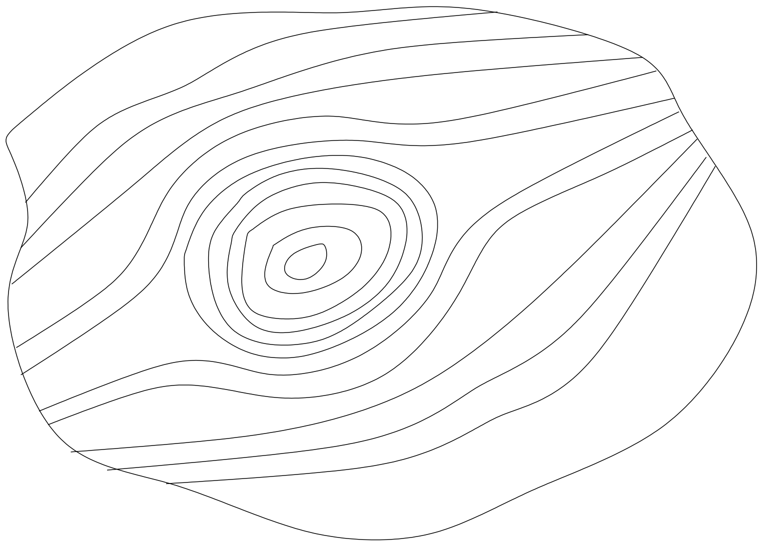

Figura 1.13: *Família de curvas do tipo círculos concêntricos entre uma família de curvas do tipo hiperbólico*

Nas deduções e exemplificações, utilizei constantemente o material de trabalho dos topógrafos e engenheiros, ou seja, o estudo do *relevo geográfico* de uma região. Foi proposital o uso deste "artifício" para elaborar toda uma linguagem que culmine no objetivo desta monografia. Estou trabalhando na busca de um método que sirva, por exemplo, para medir a alteração no ecossistema de uma região, portanto o "*relevo dinâmico*" que se assemelha ao relevo com que os topógrafos trabalham, mas a palavra *dinâmico* esclarece a diferença, pois se trata do **dinamismo** de algum fenômeno variando no tempo.

Em certas ocasiões, o *relevo geográfico* também poderá se alterar com as erosões que possam ocorrer, mas estou excluindo este fato, é como se o relevo permanecesse em condições normais, isto é, sem nenhuma alteração da natureza. Então, a melhor forma que encontrei para aplicar exemplos e permitir um melhor entendimento foi através do estudo de um certo relevo que, assim como as curvas não algébricas que se obtém com dados e que apontam para extremos, as curvas de um relevo também apontam, as elevações e depressões. Portanto são bastante semelhantes.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Exatas

Nos capítulos anteriores analisei os vários tipos de curvas que dados colhidos de uma determinada região podem fornecer. Para as curvas fechadas, *família de curvas do tipo círculo*, serão denominadas *curvas do tipo círculos concêntricos*; para as curvas abertas, *família de curvas do tipo hiperbólico* serão denominadas *curvas do tipo hiperbólico.* Mais adiante notar-se-á a relação entre **curvas** de nível e *equações diferenciais exatas.*

2.1 Uma breve introdução

Quando se estuda Equação Diferencial Ordinária (EDO), um tipo de equação particular são as *equações diferenciais exatas.* Tais equações se caracterizam por assumirem a forma:

$$dw = 0 \tag{2.1}$$

A *homogeneidade* (termo forçante igual a zero) é necessária e essencial porque a solução de equações deste tipo é uma *primitiva* w cujo diferencial está expresso na equação.

Vou considerar uma função duas vezes continuamente diferenciável de uma região Ω como sendo

$$z = F(x, y) \quad ; \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{2.2}$$

da qual posso deduzir uma *expressão diferencial exata* da forma

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{2.3}$$

Pode-se dizer que ela representa uma superfície de um tipo bastante especial, já que expressa o gráfico de uma função continuamente diferenciável.

Ao cortarmos a superfície $z = F(x, y)$ por planos paralelos ao plano $x0y$ que, nesse caso, serão *planos constantes*, ou alturas $z = C$ (C constante), é o mesmo que resolvermos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} z = F(x,y) \\ z = C \end{cases}$$

ou seja, para cada *plano constante* traçado, tem-se uma respectiva imagem de uma curva nesse plano, melhor dizendo, uma projeção sobre o domínio Ω da superfície $z = F(x,y)$. A esta projeção dá-se o nome de *curva de nível.* Isso quer dizer que se trata mesmo de estarmos resolvendo o sistema acima, pois juntando-se as equações tem-se, geometricamente, uma curva no espaço:

$$F(x,y) = C \tag{2.4}$$

obtida pela intercessão das duas variedades geométricas expressas no sistema: um plano e uma superfície.

Tomando-se esta última expressão, as curvas de nível C de $z = F(z,y)$ para alguma constante C adequada, vou *diferenciá-la*, quer dizer, aplicar a derivada dos dois lados. Então

$$(F(x,y))\,' = C\,' \tag{2.5}$$

da qual se obtem

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{2.6}$$

Portanto, solucionar uma equação diferencial exata, consiste-se em encontrar uma superfície $z = F(x,y)$ tal que sua diferencial é esta última equação. Então diz-se que as soluções de uma equação diferencial exata são as *curvas de nível* $F(x,y) = C$.

A *forma canônica* de uma equação diferencial exata, ou forma abreviada de representação, é:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.7}$$

Com isso, pode-se estabelecer o seguinte:

A equação

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

é dita equação diferencial exata se existir uma função $z = F(x,y)$ *tal que*

$$\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx \\[2ex] Q(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}dy \end{cases}$$

Então, resolver uma equação diferencial exata é descobrir uma superfície $z = F(x,y)$ se utilizando de suas derivadas parciais.

2.2 Condição de existência de uma ED exata

Como foi visto, as soluções de uma equação diferencial exata

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

sãos as curvas de nível

$$F(x,y) = C$$

para alguma contante C que seja admissível.

Observação importante:

Se $z = F(x,y)$ é uma variedade `não-linear` *de dimensão 2, então sua variedade tangente é* `não-linear` *de dimensão 2, ou seja, um plano tangente.*

Cortando-se[1] *$z = F(x,y)$ com um plano obtemos uma projeção de uma curva desta superfície neste plano, portanto uma variedade* `linear` *de dimensão 1, então a variedade tangente é* `linear` *de dimensão 1, ou seja, uma reta tangente.*

A esta última variedade não-linear tangente dá-se o nome de **curva de nível**.

Estou sempre falando em equação diferencial exata, mas não respondi qual a condição para que uma equação diferencial da forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

seja considerada *exata*.

É um pouco simples chegar a esta conclusão, com algum conhecimento de Cálculo facilmente pode-se definir tal condição, na qual vou chamar aqui de *condição de existência.*

Seja a expressão diferencial exata

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.8}$$

com $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ funções contínuas. Isso implica que existe uma função $z = F(x,y)$ satisfazendo:

$$P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad e \quad Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{2.9}$$

Observe que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad e \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{2.10}$$

[1]Corta-se paralelamente ao plano x0y.

Do Cálculo, sabe-se pelo Teorema de Clairaut que, se uma função tem derivadas parciais **contínuas**, então suas **derivadas mistas são iguais**, ou seja,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \tag{2.11}$$

Comparando-se (1.10) e (1.11) conclui-se que, para uma equação diferencial da forma como em (1.8) ser considerada uma *equação diferencial exata*, deve ser satisfeita a seguinte condição:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2.12}$$

esta relação é conhecida como **condição de Euler**.

Portanto, pode-se definir que uma equação diferencial da forma:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

será exata se, e somente se, a condição

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

for satisfeita.

Esta é a *condição de existência* para que uma equação diferencial seja considerada exata.

2.3 Solução de uma equação diferencial exata

Já vimos que $F(x, y) = C$ é uma curva de nível da superfície $z = F(x, y)$. Supondo conhecido um ponto-solução (a, b) de $F(x, y) = C$, a equação da reta tangente à curva de nível que passa por (a, b) pode ser obtida através da derivada implícita da mesma, ou seja, derivando implicitamente $F(x, y) = C$ tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{2.13}$$

e realizando-se as substituições

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad e \quad Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{2.14}$$

com

$$dx := (x - a) \quad e \quad dy := (y - b) \tag{2.15}$$

defini-se que a equação da reta tangente à curva de nível $F(x, y) = C$, fazendo $P = P(x, y)$ e $Q = Q(x, y)$, fica expressa da seguinte forma

$$P(x - a) + Q(y - b) = 0 \tag{2.16}$$

Note que esta última equação foi deduzida a partir da expressão (1.13) com as substituições (1.14) e (1.15), portanto são a mesma equação.

Tomando-se a equação (1.16) vou fazer o seguinte:

Sabendo-se que $b = F(a)$

$$P(x - a) + Q(y - F(a)) = 0 \tag{2.17}$$

$$Q(y - F(a)) = -P(x - a) \tag{2.18}$$

$$y = F(a) + \left(\frac{-P}{Q}\right)(x - a) \tag{2.19}$$

por esta última equação, deduz-se que se

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \tag{2.20}$$

pode-se explicitar

$$y = f(x) \quad ; \quad f'(a) = -\frac{P}{Q} \tag{2.21}$$

obtendo-se assim a variedade linear tangente

$$y = f(a) + \left(-\frac{F_x}{F_y}|_{(a,b)}\right)(x - a) \tag{2.22}$$

e com isso, o coeficiente angular desta reta é o coeficiente angular de $y = f(x)$ no ponto $x = a$.

Como também, se

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0 \tag{2.23}$$

pode-se explicitar

$$x = g(y) \quad ; \quad g'(b) = -\frac{Q}{P} \tag{2.24}$$

obtendo-se a variedade linear tangente

$$x = g(b) + \left(-\frac{F_y}{F_x}|_{(a,b)}\right)(y - b) \tag{2.25}$$

e com isso o coeficiente angular desta reta é o coeficiente angular de $x = g(y)$ no ponto $y = b$.

Estas duas induções advém do *Teorema da Função Implícita*, no qual garante que nas variedades lineares, sempre que o coeficiente de uma variável for **diferente de zero**, esta variável pode ser explicitada e a equação assim resultante ainda é de uma variável tangente.

Pelas deduções anteriores, pode-se concluir que (1.13) trata-se de uma reta tangente à $F(x, y) = C$ passando por (a, b). Então é a equação diferencial de qualquer das curvas de nível $F(x, y) = C$ para alguma constante C correspondente.

Portanto, as soluções da equação diferencial exata

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

são as curvas de nível $F(x, y) = C$ para constantes C admissíveis.

2.4 Gradiente de uma função

Do Cálculo, sabe-se que, se o gradiente de uma função **for igual a zero** em algum ponto então, naquele ponto a função tem um extremo. Desta forma, para um ponto ser extremo, deve acontecer a seguinte igualdade:

$$grad\ f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle \tag{2.26}$$

que é o mesmo que resolver o sistema:

$$\nabla f = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Normalmente irei me referir ao gradiente com o símbolo ∇ (nabla). Este símbolo foi introduzido mais tarde por *William Hamilton* que foi rapidamente assimilado pela comunidade científica em geral.

Observe que o gradiente se trata de um vetor, neste caso, nas coordenadas x, y, z.

O gradiente SEMPRE será ortogonal às curvas de nível

Considere uma função $f(x,y)$ definida num conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$; $f(x,y)$ é diferenciável em todo o seu domínio. Considere também o conjunto:

$$B = \{(x,y) \in A \ ; \ f(x,y) = C\}$$

Pelo conjunto B

$$f(x,y) = C \tag{2.27}$$

derivando a expressão acima tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{2.28}$$

Para $dx = (x-a)$ e $dy = (y-b)$ a expressão acima fica assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) = 0 \tag{2.29}$$

que pode ser interpretada como o *produto escalar* do vetor gradiente de f por um vetor tangente à f no ponto (a,b):

$$\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right), (x-a, y-b) \right\rangle = 0 \tag{2.30}$$

Da geometria vetorial, se o **produto escalar** entre dois vetores for **igual a zero** é porque tais vetores são *perpendiculares*. Se acima este produto é zero, pode-se concluir que o gradiente é ortogonal às curvas de nível $f(x,y) = C$.

Pela ortogonalidade do gradiente às curvas de nível, nota-se que ele aponta para o extremo de uma função quando esses gradientes formam uma "reta" chegando ao ponto extremo. Isto ocorre com os círculos concêntricos, como pode ser observado abaixo:

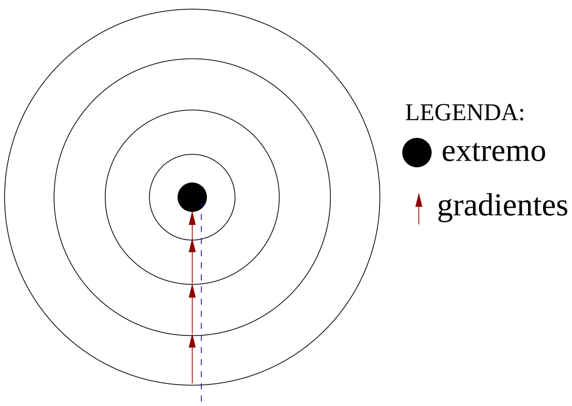

Figura 2.1: *O Método do Gradiente*

Tomando-se um ponto do círculo externo, indo de encontro ao centro dos círculos através do gradiente, no ponto central o **gradiente é zero**, pois curvas deste tipo definem um parabolóide tangente ao centro, o que implica que no centro dos círculos está o extremo. É este método, chamado de *Método do Gradiente*, que utilizarei como ferramenta para chegar ao objetivo do trabalho.

2.5 Polinômio de Taylor de segundo grau

Dados obtidos de um levantamento podem produzir apenas curvas de dois tipos: *curvas do tipo hiperbólico* (hiperbolóides) ou *curvas do tipo círculos concêntricos* (parabolóides), o que significa *passo de montanha* ou *extremo*, respectivamente. No primeiro caso, um passo de montanha indica que, numa direção perpendicular às curvas de nível podem haver extremos. Já no segundo caso, os dados levantados que indicam que há extremos.

Este conceito de extremos faz-nos direcionarmos para o **Polinômio de Taylor (de segundo grau)** que é definido pela seguinte soma:

$$P(x,y) = f(a,b) + J(a,b)(x-a, y-b) + \frac{1}{2}H(a,b)(x-a,y-b)(x-a,y-b) \tag{2.31}$$

em que $J(x,y)$ é a *Jacobiana* (Gradiente), as derivadas parciais, definida por:

$$J(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \tag{2.32}$$

e $H(x,y)$ é o *Hessiano*, a matriz das derivadas parciais de segunda ordem da função, definida por:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Caso o determinante da matriz $H(x,y)$ seja **definido positivo** então F tem um ponto de extremo pois, neste caso, ambos os termos de $H(x,y)$ são todos positivos (mínimo) ou todos negativos (máximo).

Caso este determinante seja negativo, então os termos têm sinais contrários.

E sendo zero, nada se pode concluir.

Capítulo 3

Novo algoritmo para determinação de extremos

Chega-se então ao momento crucial deste trabalho. A partir de agora, irei tratar de formalizar um método que ligeiramente forneça o crescimento, por exemplo, da variação de algum fenômeno, quer dizer, vou criar uma linguagem que permita rapidamente montar um método para obter extremos. O objetivo será então descrever um *novo algoritmo* que aponte na direção do crescimento (ou decrescimento), ou seja, a partir de dados amostrais (uma coleção discreta de informações) modelar um fenômeno, que irei chamar de modelo F, para determinar seu extremo.

3.1 Levantamento e Taxas de variação

O modelo F será descrito a partir de dados levantados, quando se obtém as taxas de variação parciais:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

De uma malha tomada (selecionada) sobre uma certa região, levantam-se dados. Levantados estes dados, calculam-se as *taxas de variação* a partir das variáveis pré-estabelecidas no estudo quando se define o que vai pesquisar, o que vai analisar, buscando-se aproximar uma certa região para estabelecer projeções pontuais, ou seja, analisar onde se concentra o extremo do modelo F. Com dados tabulados, tem-se então uma coleção discreta de informações para uma certa região indicando as taxa de variação parciais, relativamente a OX e OY em cada ponto, ou seja, tem-se uma tabela descrevendo uma malha de pontos, e cada ponto tem um par de taxas de variação parcial.

Desta forma, a partir dos dados, pode-se observar o comportamento das curvas de nível do modelo F em um intervalo.

3.2 Obtenção das Curvas de nível

Como citei, do Cálculo sabe-se que a derivada determina uma reta tangente no ponto em que se tem a taxa de variação. Tal definição leva a concluir que, quando se interpretam os dados de algum levantamento como taxas de variação nas direções dos eixos, naqueles pontos podem ser obtidas curvas de nível a partir das retas tangentes encontradas em cada ponto que foi definido o comportamento do modelo F.

O gráfico seguinte mostra geometricamente a idéia do algortimo que estou construindo:

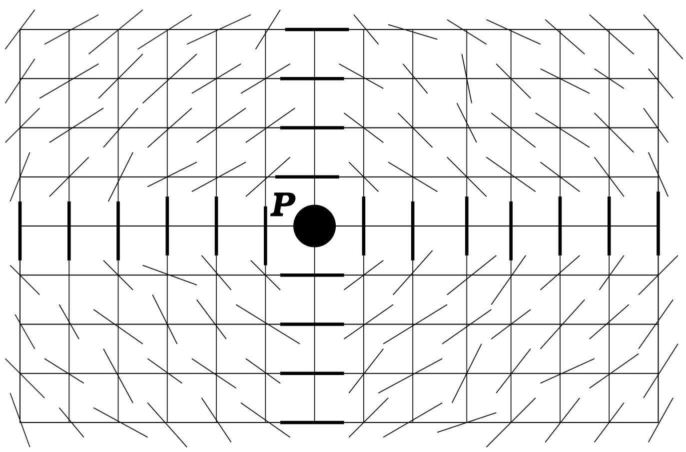

Figura 3.1: *Campo de direções de um modelo F*

Campo de direções porque são pequenos segmentos de reta tangentes às curvas que passam nos pontos da malha.

Vou comparar inicialmente, por razões pedagógicas, com o caso univariado. Cada segmento de reta representa a derivada da curva naquele ponto, e são denominados *diferencial total*:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{3.1}$$

ou seja, o diferencial total produz a equação de cada um daqueles pequenos segmentos de reta. Como se tratam de retas tangentes, certamente, em cada um destes pontos, passa alguma curva que tem por tangente esta reta. Isto porque a *derivada produz uma variedade tangente da mesma dimensão da variedade que foi derivada.* Desta forma, pode-se garantir que existem curvas passando por aqueles pontos.

3.3 As curvas que é possível obter

Analisando-se o modelo F, em cada nó da malha seu comportamento é descrito por uma *equação diferencial exata* (EDE)[1], quer dizer, na vizinhança daquele ponto o modelo F toma aproximadamente a mesma direção que a EDE descreve, com isso, não se sabe certamente como a curva está descrita mas, nos pontos onde foram estabelecidas as EDE's sabe-se desse comportamento e assim, obtem-se uma aproximação das curvas de nível naqueles pontos.

Uma vez estabelecidas retas tangentes, garante-se a existência de curvas passando por aqueles pontos. Agora o principal objetivo será descrever tais curvas.

Vou tomar como ponto de partida a malha abaixo (caso particular):

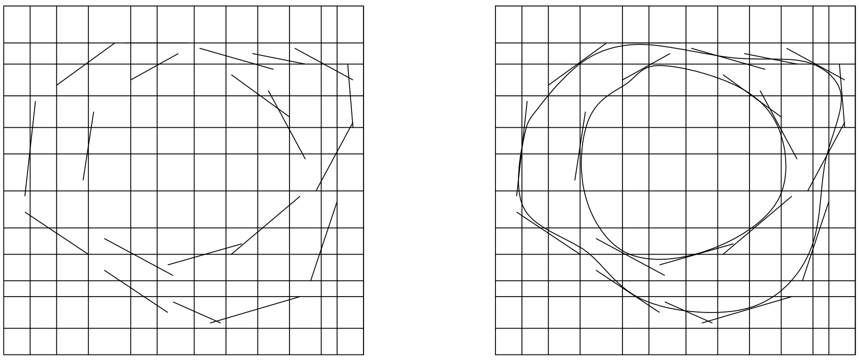

Figura 3.2: *O caso particular de um campo de direções*

Observando-se cada reta tangente, tem-se uma idéia do caminho percorrido pela curva, quer dizer, faz-se uma *aproximação* para se chegar ao resultado esperado. É como ligar cada ponto onde a curva certamente toca, percorrendo a malha com curvas *suaves* para que a curva que se está descrevendo seja totalmente derivável. O resultado seriam curvas de nível.

Agora pode-se notar que, no campo de direções do modelo F, as retas tangentes estão dispostas como as do caso particular, de modo que podem formar curvas de nível, pois observe que se prolongarmos cada reta tangente, uma tocaria na outra em algum ponto e as curvas "circulares" seriam naturalmente vistas (aproximadamente, claro):

[1]São retas tangentes.

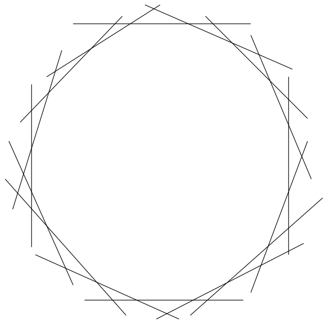

Figura 3.3: *Prolongamento das retas tangentes*

Seguindo este procedimento, aquele campo de direções será um campo descrito, aproximadamente, pelas curvas abaixo:

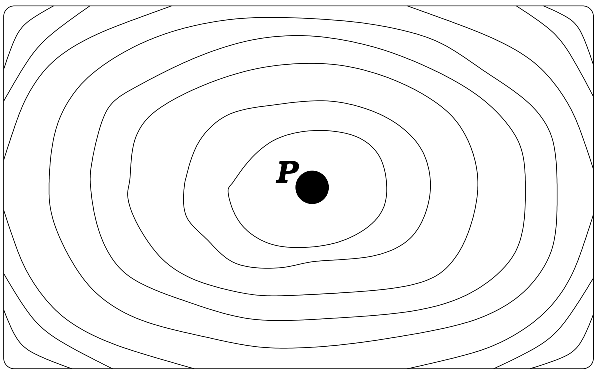

Figura 3.4: *Família de curvas do tipo círculos concêntricos*

É para este tipo de curva que irei descrever um novo algoritmo que determina o extremo do modelo F gerado.

3.4 Modelagem de fenômenos a partir de dados amostrais

Na seção anterior deduzi que as curvas descritas pelo campo de direções são *curvas do tipo círculos concêntricos.* Ainda no capítulo 2 introduzi o conceito de *difeomorfismo* que se tratam das equivalências topológicas que preservam a diferenciabilidade. É nesse instante que os *difeo* serão essenciais. Com um difeomorfismo, faz-se uma remodelagem para definir um tipo de curva que esteja mais próximo da algebricidade. O próximo passo será descrever o novo algoritmo para determinação dos extremos destas curvas.

Quando dados discretos fornecem curvas do tipo círculos concêntricos, isto indica que há um ponto de extremo localizado no "centro" destas curvas. Neste trabalho não vou determinar se há extremo, o que vou é apresentar um novo algoritmo que encontra este extremo.

Os difeo são funções bijetivas, ou seja, são inversíveis. Um difeomorfismo é a noção principal de equivalência em topologia diferencial, e a topologia é como a geometria sem a escala (as dimensões), é a ciência que trata das superfícies elásticas, e trata os objetos pelas relações que têm entre si, independente de suas dimensões. Formalmente se diz que os difeo estabelecem uma relação de equivalência entre variedades. Então:

Definição 5 *Duas variedades diferenciáveis serão difeomorfas entre si quando existir uma aplicação entre elas que seja diferenciável, invertível e sua inversa seja diferenciável.*

Vou admitir, por hipótese, que os dados discretos representam curvas diferenciáveis, então há uma aplicação das difeo que transforma a família de curvas do tipo círculos concêntricos numa família de círculos concêntricos:

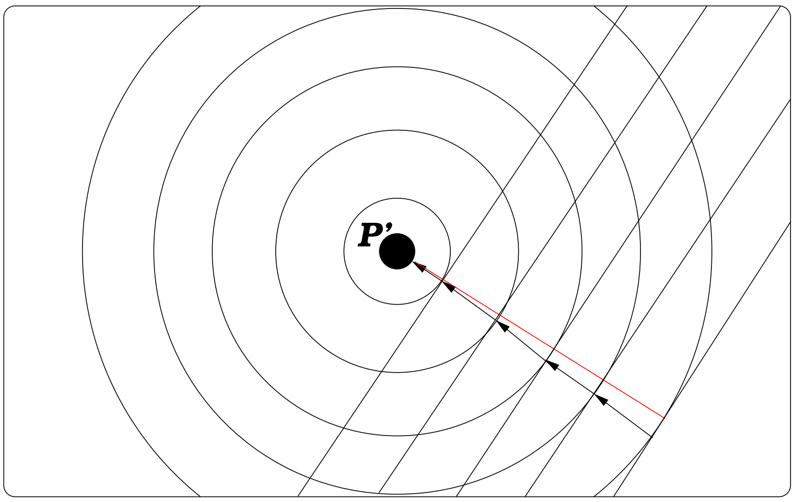

Figura 3.5: *Família de círculos concêntricos*

Nesta família de círculos concêntricos, qualquer perpendicular a um ponto arbitrário em um dos círculos, passa no ponto de extremo, uma vez que, sendo perpendicular às variedades tangente esta reta seguirá para o centro, que é onde estará localizado o extremo.

Encontrado o *extremo* para a família de círculos concêntricos, e pela bijetividade do difeomorfismo, pode-se agora voltar para as curvas do tipo círculos concêntricos e localizar o ponto de extremo pela *imagem inversa* da reta descrita, é um caminho que vai de um ponto de uma das curvas do tipo círculos concêntricos e chega ao ponto de extremo.

Observe a relação difeomórfica ocorrida. A família de círculos concêntricos descreveu uma reta que encotra o extremo destas curvas no centro:

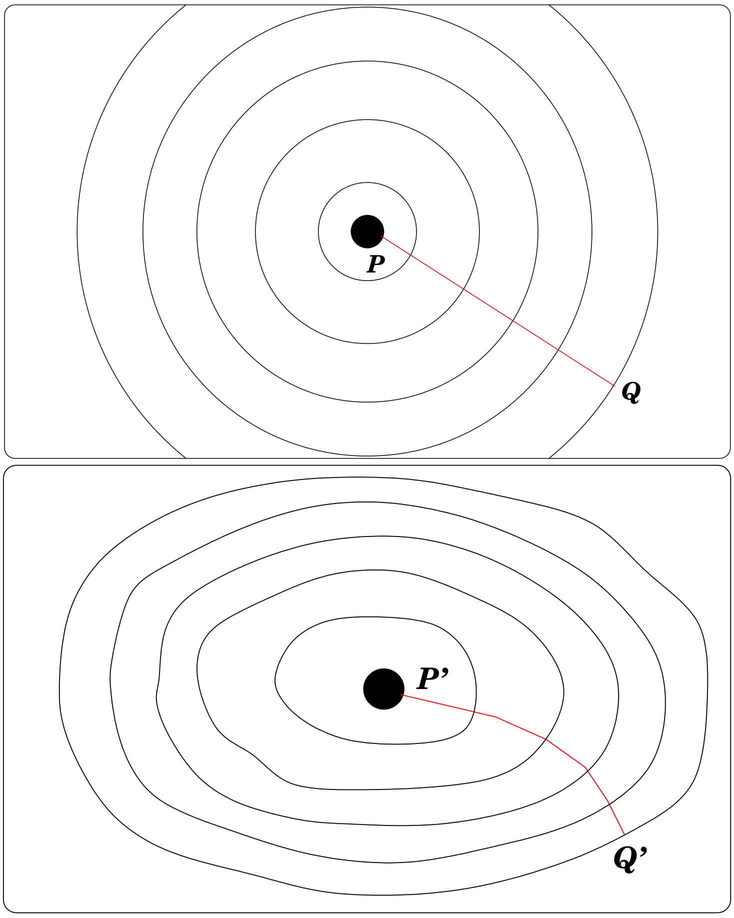

Figura 3.6: *Perpendicular $\overline{QP}$ encontrando o extremo*

De acordo com o Polinômio de Taylor de segundo grau, existe um parabolóide tangente ao ponto P', este ponto é o extremo do modelo F.

3.5 Uma descrição geométrica dos difeo

O difeomorfismo foi uma aplicação essencial para a descrição do novo algoritmo para a determinação de extremos de um modelo F obtido a partir de dados discretos. Hipoteticamente segui apresentando como é construído o difeo, foi uma teoria usada por mim. Mas na prática esta aplicação é bem mais interessante.

Para realizar esta aplicação, usa-se um programa gráfico, como o GIMP, para deformar a família de curvas obtidas até conseguir uma família de círculos concêntricos.

Para fazer isto, vai-se controlando uma lista de transformações $T1, T2, \ldots, Tn$ com o programa gráfico até se obter círculos. Então, no programa gráfico, o difeo é a composta:

$$T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_n = T \tag{3.2}$$

E agora, com o mesmo programa gráfico, pode-se executar as *operações inversas*, ou seja,

$$T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_n^{-1} \tag{3.3}$$

que produzirão

$$T_n^{-1} \circ \ldots \circ T2^{-1} \circ T_1^{-1} = T^{-1} \tag{3.4}$$

Assim, após realizada a volta com estas transformações no programa gráfico, para o modelo F pode-se transformar o segmento $\overline{QP}$ em $\overline{Q'P'}$. Foi esta aplicação que hipoteticamente utilizei em que, na prática se dá pelas transformações realizadas dentro de um programa gráfico.

O difeo neste trabalho é dado pelas *operações gráficas* num programa gráfico sempre sob a suposição razoável de que todas as operações são difeomorfismos.

Este é um novo algoritmo para determinação de extremos.

Conclusão

Entre os mais variados assuntos que rodeiam o nosso cotidiano, e que a Matemática aborda com certa frequência é a determinação de extremos de funções. Determinar o extremo de uma função consiste-se em analisar em que ponto a função apresenta seu maior valor no caso de um máximo, ou de seu menor valor no caso de um mínimo. Quando derivamos (diferenciamos) uma função, obtemos variedades tangentes, objetos estes que, para o caso univariado $y = f(x)$ sua derivada segunda $y = f''(x)$ fornece um objeto constante, tangente ao extremo da parábola, uma reta pra ser mais exato, isto quer dizer que a derivada de segunda ordem nos diz se $y = f(x)$ tem um máximo ou um mínimo.

No caso bivariado $z = f(x, y)$ o mesmo raciocínio, o que diferencia é a variedade tangente que, nesse caso, a derivada de segunda ordem fornece um plano tangente me vez da reta. Neste caso, o plano tangencia um parabolóide.

Os dois casos acima tratam de extremos no caso algébrico. Este trabalho teve como principal objetivo estabelecer um novo algoritmo para a determinação de extremos, mas a partir de equações diferenciais exatas quando se interpretam dados discretos como taxas de variação nas direções dos eixos. Introduzir a relação de difeomorfismo se fez necessário uma vez que, trabalhando no caso não algébrico precisaria de alguma aplicação que remodelasse as curvas obtidas a partir dos dados chegando mais próximo da algebricidade. E esta aplicação tornou-se essencial.

O resultado final foi a descrição de um novo algoritmo para, a partir de dados amostrais, uma coleção discreta de informações, modelar um fenômeno que seria representado por uma função, o modelo F obtido a partir de dados, as taxas de variação parciais.

Referências Bibliográficas

[1] PRACIANO-PEREIRA, T. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Edição eletrônica, Sobral: Laboratório Computacional de Matemática, 2007. Disponível em: http://www.uvanet.br/matematica/livros.php

[3] Wikipedia - A enciclopédia livre. **Diffeomorphism**. http://en.wikipedia.org/wiki/Diffeomorphism. Acessado em: 15 de Abril de 2009.

[4] Wikipedia - A enciclopédia livre. **Equação diferencial exata**. http://pt.wikipedia.org/wiki/Equação_diferencial_exata. Acessado em: 3 de Maio de 2009.

[2] SILVA, Ana Paula da. **O Teorema da Função Implícita e Equações Diferenciais Exatas**: Equações Diferenciais Exatas. 2006. 40 f. Monografia (graduação em Ciências Matemática) - Curso de Matemática, Universidade Estadual Vale do Acaraú, Sobral, 2006. Disponível em: http://www.edo-metodos.sobralmatematica.org/textos/

[5] Wikipedia - A enciclopédia livre. **Gradiente**. http://pt.wikipedia.org/wiki/Gradiente. Acessado em: 23 de Maio de 2009.