UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ

Curso de Licenciatura em Ciências – Matemática

Monique Araújo

ANÁLISE DA TRAJETÓRIA DE UM ASTERÓIDE EM APROXIMAÇÃO COM A TERRA

Sobral – 2009

Monique Araújo

ANÁLISE DA TRAJETÓRIA DE UM ASTERÓIDE EM APROXIMAÇÃO COM A TERRA

Monografia apresentada à Universidade Estadual Vale do Acaraú, como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof. Tarcísio Praciano Pereira - Dr.

Sobral – 2009

Dedico à minha mãe, que é minha base, minha estrutura, que me ensinou a ser capaz de lutar por meus objetivos. E a pessoas também muito importantes: João Guilherme, Elaine e Nilton.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder saúde e perseverança para chegar até aqui.

Agradecimentos especiais à minha mãe, que sempre me apoiou, incentivou e acreditou que eu seria capaz. E ao meu professor orientador, Tarcísio Praciano, por sua importante participação, incentivo e apoio constante, sem o qual esse trabalho não seria possível.

A Diego Araújo pela essencial colaboração.

Aos colegas de sala, dos quais alguns hoje são grandes amigos: Elaine, Rakely e José.

A todos aqueles que foram meus professores ao longo do curso, principalmente, Lucas Carvalho, Luiz Diniz, Alencar Menezes, Nilton Neves e Márcio Nascimento.

“Um pouco de ciência nos afasta de Deus. Muito, nos aproxima.” (Louis Pasteur)

RESUMO

Esta monografia tem como objetivo mostrar uma das aplicações decorrentes da lei da Gravitação Universal: a descrição das possíveis trajetórias de um asteróide em aproximação com a Terra. Para tanto, procurei, inicialmente, explicar o conceito de Gravitação, partindo dos estudos de Aristóteles até Isaac Newton. A descrição da Força de atração entre os corpos, bem como a explicação do movimento dos corpos celestes, através da demonstração da equação da trajetória de um corpo sob a ação de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância, são indispensáveis para a ilustração do problema. Vale ressaltar que um problema simplificado, uma vez que é aplicado a dois corpos, ignorando a presença de outros corpos no universo. O último capítulo é uma breve apresentação da equação do movimento relativo de dois corpos.

SUMÁRIO

1. Introdução

Um momento culminante na história da Física foi o descobrimento, realizado por Isaac Newton, da Lei da Gravitação Universal: todos os objetos são atraídos uns aos outros com uma força diretamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros. Ao submeter a uma só lei matemática os fenômenos físicos mais importantes do universo observável, Newton demonstrou que a Física Terrestre e a Física Celeste são semelhantes. O conceito de gravitação conseguia de uma só vez:

1. Revelar o significado físico das três leis de Kepler sobre o movimento planetário.
2. Resolver o intricado problema da origem das marés.
3. Dar conta da curiosa e inexplicável observação de Galileu Galilei de que o movimento de um objeto em queda livre é independente de seu peso.

O tema central desse trabalho é um caso particular de **1.**: a equação da trajetória de um asteróide em aproximação com a Terra.

Uma razão para apresentar esse problema é a possibilidade do impacto de um meteorito com a Terra. É uma possibilidade remota, mas não impossível.

O asteróide DD45, que possui entre 30 e 40 metros de diâmetro, passou, no dia 02 de março de 2009, a, aproximadamente, 60 mil quilômetros do sudeste do Pacífico, uma distância sete vezes mais próxima ao planeta do que em relação à distância entre ele e a Lua, para surpresa dos astrônomos, que não esperavam que o meteorito se aproximasse tanto da Terra. A informação foi dada dia 04 de março pela imprensa australiana.

“Nenhum objeto desse tamanho ou maior foi observado tão perto da Terra”, disse Rob McNaught, cientista do observatório australiano de Siding Spring.

Até agora, foram descobertos cerca de 6000 objetos cósmicos próximos à Terra, que com regularidade cruzam a órbita de nosso planeta. Os cientistas esperam que seu número aumente para um milhão por volta de 2020.

A probabilidade de que um meteorito de mais de um quilômetro de diâmetro impacte contra a Terra é de uma em vários milhões de anos. Já a possibilidade de que um de menor tamanho atinja o planeta, mas com capacidade de por em perigo uma cidade inteira, é de uma em cem anos.

É o caso do famoso Apophis, um asteróide de 270 metros de diâmetro, cuja rota se direciona para o Sol, mas que passará muito perto da Terra, em 2029. No entanto, o Apophis ameaça colidir com a Terra no retorno, por volta de 2036, com um efeito superior ao de milhares de bombas atômicas. Calcula-se que a eventual devastação causada seria cem vezes superior à do meteorito Tunguska, que em 1908 destruiu 2000 hectares na Sibéria.

Não há aqui a pretensão de propor a solução para evitar uma possível colisão (isso requer estudos de alta complexidade), mas há o objetivo de expor o problema e apresentar, matematicamente, as três possibilidades de rota de um asteróide em aproximação com a Terra.

2. Da queda dos corpos à Gravitação Universal

2.1. Aristóteles

2.1.1. O movimento

Pensadores helênicos colocaram o problema de explicar a Natureza. O problema era buscar "o porquê" das transformações ou "movimentos", que são observados; entre essas transformações, está o chamado *movimento local* ou deslocamento.

Na tradição herdada por Aristóteles, havia quatro elementos básicos - *terra, água, ar* e *fogo*; a cada um estavam associadas duas de quatro qualidades primárias fundamentais: *quente* ou *frio, úmido* ou *seco*.

Em uma corrente filosófica mais antiga, o mundo seria explicado por um elemento básico e suas qualidades. Aristóteles aderiu a uma corrente filosófica posterior: As propriedades de um corpo seriam parte de sua "essência" ou "forma". A cada um dos elementos acima mencionados corresponderia um *lugar natural* e um *movimento natural*: Aos corpos *pesados*, o centro do Universo; à *água*, ao *ar* e ao *fogo*, respectivamente, esferas concêntricas com a Terra, com raios crescentes nessa ordem. Um corpo só poderia se mover, quando se encontrasse fora de seu *lugar natural*; portanto, a corpos *pesados* corresponderia um movimento natural em *linha reta para baixo*, em direção ao centro do Universo; os corpos *leves* (*fogo*) movimentar-se-iam em *linha reta para cima*, em direção à sua esfera; a *água*, quando na *terra*, movimentar-se-ia para *cima* e, quando no *ar*, para *baixo*; o *ar*, quando na *terra* ou na *água*, movimentar-se-ia para *cima*, mas, quando no *fogo*, para *baixo*. Quando se encontram em seu *lugar natural*, os corpos não se movem.

2.1.2. Corpos Celestes

Os corpos celestes foram tratados diferentemente. A eles foi atribuído um movimento *circular uniforme*. Isso tem bases observacionais: Os astros nascem a leste e se põem a oeste, parecendo percorrer um arco de círculo, no céu. Porém, dentro do esquema conceitual, é preciso postular um novo tipo de matéria, à qual corresponderia um movimento circular uniforme - o *éter*. O *éter* tinha as características de *incorruptibilidade* e *imutabilidade*. Isso pode ser entendido de vários modos. É suficiente pensar que o movimento circular possui uma simetria: Uma esfera é sempre igual a ela mesma, quando é girada em torno de seu eixo. Os gregos associaram à *imutabilidade* a idéia de *perfeição*: Aos objetos celestes perfeitos corresponde o movimento perfeito. Além disso, os astros já se encontram em seu *lugar natural* e, como, então, não haveria necessidade de movimento, a solução foi entender que os astros se movem "por amor à perfeição".

O Universo foi, correspondentemente, dividido em *sublunar* e *supra-lunar*: Aquele é corruptível, mutável e imperfeito; esse, incorruptível, imutável e perfeito.

Figura 1. Universo Aristotélico. A Terra está no centro do Universo. Os corpos celestes giram em torno dela, na seguinte ordem: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. A última esfera é a das estrelas.

2.1.3. Descrição do movimento

Aristóteles entendeu que corpos mais pesados caem mais rapidamente que corpos mais leves. Ele nunca escreveu uma fórmula, nem poderia, pois o mundo sublunar não era matematizado, somente o movimento dos astros. Entretanto, historiadores expressaram as idéias de Aristóteles assim:

$$\boldsymbol{v = \frac{W}{R}}$$

onde v é a "velocidade" de queda; W, o "peso"; R, a "resistência". Esses termos não podem ser entendidos em seu sentido moderno: "Velocidade" é mais bem entendida como simples celeridade ou rapidez, sem indicar "espaço percorrido em um tempo"; "peso" designa a simples "tendência natural" de queda, que difere, segundo Aristóteles, de corpo a corpo;

"resistência" é um conceito suficientemente vago para incluir, em termos modernos, tanto uma resistência do meio, quanto a inércia dos corpos.

Uma outra questão complicada para Aristóteles foi o caráter não-inercial de sua descrição do movimento: Um corpo que se move é empurrado ou puxado por "algo"; esse "algo" estaria sempre em contato com o corpo (não existiria ação a distância), mas não é parte da natureza do corpo. O problema é, então, identificar esse "algo". Aristóteles atribuiu ao meio - o ar - a capacidade de empurrar o corpo; o movimento não natural ou *violento* é, então, explicado: No caso de uma pedra lançada (projétil), o movimento inicial seria proveniente de quem a atirou; esse movimento seria transmitido à camada de ar subjacente, que, então, empurraria a pedra e transmitiria movimento à camada seguinte e, assim, sucessivamente.

2.1.4. O vácuo

O Universo de Aristóteles não apresenta espaços vazios, pois ele supunha que o vácuo não existisse. A razão para isso é que era difícil para os gregos entender o "nada", pois o que pode existir é a matéria e o vácuo é, de certo modo, uma espécie de "nada".

Uma consequência interessante segue-se da fórmula acima: Como a resistência no espaço vazio é zero, a velocidade de qualquer corpo no vácuo seria infinita e um corpo cairia instantaneamente, em contradição com o fato de que corpos mais pesados caem mais rapidamente. A fórmula parece levar a um absurdo, a menos que se negue a existência do vácuo, em cujo caso o raciocínio não se aplicaria.

É importante mencionar outro argumento de Aristóteles contra o vácuo. No vácuo, não há *lugar natural*, pois cada região seria igual a qualquer outra região (diríamos que o vácuo é *homogêneo* e *isotrópico*). Assim, não existiria razão para que um corpo, uma vez em movimento, parasse em um lugar em vez de em outro, pois o que faz o corpo mover é sua "ida" para seu *lugar natural*. O movimento seria, então, eterno (como o movimento inercial), o que não é possível em um *Universo* fechado e finito, como o de Aristóteles.

2.2. Galileu Galilei

2.2.1. Antecedentes medievais

Uma modificação profunda do entendimento do movimento foi feita no século XIV, em Oxford, na Inglaterra. William of Ockham, um teólogo e frade franciscano, definiu o movimento com conceitos bem diferentes dos aristotélicos. Ele enuncia um princípio epistemológico, que ficou conhecido como *Navalha de Ockham*, que significa algo como "[...]

é fútil usar mais entidades [para explicar alguma coisa], se for possível usar menos [...]". Por exemplo, se for possível entender "movimento", sem postular "entidades" (conceituais) - tais como *lugar natural, corpo pesado, corpo leve* ou, ainda, como pensava Aristóteles, um "algo" para empurrar o corpo de modo que ele se mantenha em movimento - então é desnecessário usar tais "entidades" para definir "movimento". E, de fato, segundo Ockham, "movimento" pode ser concebido como o mero deslocamento do corpo (no tempo), o que torna "fútil" o uso de outras "entidades" :

> (...) é claro que movimento local é para ser concebido como se segue: Afirmando que o corpo está em um lugar, depois em outro lugar, assim procedendo sem qualquer repouso ou qualquer coisa intermediária, além do próprio corpo, nós temos movimento local, verdadeiramente. Portanto, é fútil postular outras tais coisas.

As idéias de Ockham influenciaram seus contemporâneos, em Oxford. Um grupo de pensadores, pertencentes ao Colégio de Merton, inventaram o que se chama, hoje, *Cinemática*. Embora não tivessem as categorias matemáticas para desenvolver um tratamento matemático analítico, puderam utilizar Geometria. Importantes contribuições foram:

1. Uma clara distinção entre *descrição* do movimento e *causa* do movimento. Obviamente, isso decorre da definição de *movimento* dada por Ockham.

2. A definição de *velocidade* (no sentido de "rapidez" ou de "vagarosidade") como deslocamento no tempo e a conceitualiza cão de *velocidade instantânea*.

3. A definição de *aceleração* como variação de velocidade no tempo.

4. A consideração de *movimentos uniformes* e *movimentos uniformemente acelerados*. Traçaram os gráficos $v \times t$ desses movimentos e entenderam que as *distâncias percorridas* nesses movimentos são dadas, respectivamente, pelas *áreas* do retângulo e do triângulo, formados pelo conjunto das ordenadas (velocidade).

5. A formulação e demonstração do *Teorema da Velocidade Média*.

O problema colocado pelos Mertonianos foi o de como qualidades podem ser somadas ou subtraídas: Por exemplo, Santa Clara e Madre Tereza de Calcutá, trabalhando juntas, formariam uma santidade maior? Para tratar esse problema, os Mertonianos atribuíram a uma qualidade uma *intensidade* e uma *extensão*: A *intensidade* é medida por *graus*; saber como uma qualidade varia consiste, agora, em saber como o *grau* de sua *intensidade* varia ao longo de uma linha arbitrária e imaginária, chamada *extensão*. Uma felicidade na História da Física foi terem concebido o movimento como uma qualidade: O *grau* é a *velocidade instantânea* e a *extensão*, o *tempo*, embora se saiba que, durante muitos anos, Galileu usou a *distância* ao invés do *tempo*.

Galileu usou as idéias Mertonianas de maneira original. Ele deu ao *Teorema da Velocidade Média* uma aplicação que jamais seria concebida no século XIV: Ele o usou para resolver o problema da queda dos corpos.

2.2.2. O teorema da velocidade média e a queda dos corpos

O teorema diz que a distância percorrida em um movimento uniformemente acelerado é igual à distância que seria percorrida no movimento uniforme feito com a velocidade média.

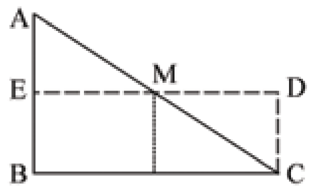


Figura 2. Teorema da Velocidade Média. A área do triângulo AEM é igual à área do triângulo MDC, de modo que o triângulo ABC e o retângulo BCDE tem a mesma área.

Galileu usou esse teorema para provar que, se um corpo se move com movimento uniformemente acelerado, as distâncias, s_1 e s_2, percorridas, respectivamente, em tempos t_1 e t_2 obedecem à seguinte relação:

$$\frac{\boldsymbol{S_1}}{\boldsymbol{S_2}} = \left(\frac{\boldsymbol{t_1}}{\boldsymbol{t_2}}\right)^2$$

em notação moderna: $\boldsymbol{s = \frac{1}{2}gt^2}$.

Ele também demonstrou o corolário:

$$\frac{\boldsymbol{S_1}}{\boldsymbol{S_2}} = \left(\frac{\boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_2}}\right)^2$$

Em notação moderna: $v^2 = 2gs$.

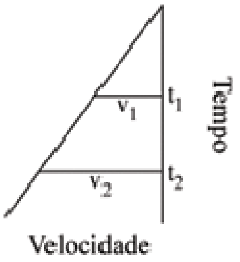


Figura 3. Demonstração da Lei da Queda dos Corpos. Pelo Teorema da Velocidade Média, $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right) \times \left(\frac{t_1}{t_2}\right)$; por definição de Movimento Uniformemente Acelerado: $\left(\frac{v_1}{v_2}\right) = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)$; logo $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2$. Segue-se um corolário: $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$.

2.2.3 O movimento da Terra, o princípio da inércia e a Gravitação

Um dos argumentos usados desde a Antigüidade contra a possibilidade de se atribuir um movimento de rotação à Terra era que uma flecha atirada verticalmente para cima nunca poderia cair, de volta, no mesmo lugar, se a Terra movesse: Enquanto a flecha está em vôo, a Terra se move de oeste para leste, de forma que a flecha cai de volta em um ponto mais a oeste da pessoa que a atirou.

Para derrubar o argumento, alguns pensadores imaginaram que, em seu movimento para leste, a Terra arrastasse o ar e tudo que nele estivesse, como pássaros e a flecha do exemplo; assim, embora a Terra se movesse, a flecha, por ser arrastada pela Terra, poderia cair no mesmo lugar.

Porém, essa resposta é difícil de ser sustentada no caso, por exemplo, em que em vez de flechas se tivesse uma bala de canhão. Assim, a descoberta do canhão permitiu um argumento mais forte contra o movimento da Terra: Se a Terra se move de oeste para leste, o alcance do tiro para oeste seria maior do que o alcance do tiro para o leste. De fato, diz o argumento, enquanto a Terra move para leste, a bala move para oeste, de modo que o alcance seria o que a Terra moveu acrescido do que a bala moveu; no caso do tiro para leste, seria o que a Terra moveu diminuído do que a bala moveu. Se a Terra está em repouso, os alcances são iguais. Como o observado é a igualdade dos alcances, conclui-se que a Terra é imóvel.

O *Princípio da Inércia* foi utilizado por Galileu para justificar a possibilidade da Terra estar em movimento. A resposta de Galileu é que o movimento comum à Terra e a tudo que nela se encontra não desaparece (pelo *Princípio da Inércia*); assim, a bala de canhão e a flecha do primeiro exemplo, durante seus vôos, continuam a compartilhar com a Terra a velocidade que compartilhavam antes de serem lançadas. O resultado é que uma pessoa sobre a Terra só pode observar o movimento que a bala tem e que a Terra não tem, isto é, o movimento da bala relativo à Terra. Um modo curioso de ler esse argumento é que Galileu colocou a *Lei da Inércia* no lugar do ar que, ao ser arrastado pela Terra, arrastaria, com ele, tudo o que nele se encontrasse, como queriam os antigos.

Um outro argumento contra o movimento da Terra era que, se ela girasse em torno de seu eixo, tudo o que se encontrasse em sua superfície seria atirado para fora, como pessoas, árvores, casas, etc (*tendência centrífuga*). Galileu tentou responder a esse argumento, mas sua resposta, além de trabalhosa e cheia de argumentos sutis, está inteiramente errada.

2.3. Johannes Kepler

2.3.1. Modelos Astronômicos

A *Astronomia* descrevia matematicamente o movimento dos astros. De acordo com a natureza dos corpos celestes, como já explicado, os astros deveriam mover-se, uniformemente, em círculos, ao redor da Terra. Porém, as observações mostram desvios desse movimento, chamados *anomalias*:

1. Os planetas de tempos em tempos parecem andar para trás, em seu movimento nos céus (*retrogressão*).
2. Os planetas parecem não se mover uniformemente, em sua jornada pelo céu, isto é, arcos iguais, no céu, não são, necessariamente, percorridos em tempos iguais.
3. O brilho dos planetas varia, o que era atribuído a um menor ou maior afastamento da Terra.

No século II, Cláudio Ptolomeu escreveu o mais completo tratado de Astronomia da Antigüidade, *Almagesto*.

Para responder à primeira e terceira anomalias, foi proposto que o planeta se movesse em um círculo (*epiciclo*), cujo centro moveria ao longo de outro círculo (*deferente*), centrado na Terra; o movimento do planeta seria a composição desses dois movimentos e, visto da Terra, sua trajetória formaria "laços", como na Fig. 6, ora indo em um sentido, ora voltando para trás e se aproximando da Terra.

A outra anomalia era mais difícil de ser tratada. Porém, é fácil entender (Fig. 4) que a introdução de uma *excentricidade* - isto é, deslocando o *centro do deferente* do centro da Terra para um ponto *D* - permite considerar um movimento que seja não uniforme do ponto de vista da Terra, embora uniforme, do ponto de vista do *centro do deferente*.

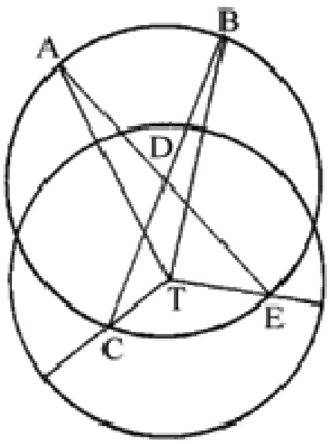


Figura 4. Excentricidades. Visto de D, os arcos AB e CE, sobre o deferente, são iguais e são subentendidos por ângulos iguais, ângulo ADB = ângulo CDE, logo são percorridos no mesmo tempo, pois a velocidade angular é suposta ser uniforme. Porém, vistos da Terra (T), os arcos são subentendidos por ângulos diferentes, respectivamente, ângulo ATB ≠ ângulo CTE. Como os arcos são supostos serem percorridos no mesmo tempo, o observador em T vê arcos (ou ângulos) diferentes percorridos no mesmo tempo e a velocidade angular não pode ser uniforme.

Mas o modelo é bem mais complexo. Para melhorar os resultados experimentais, foi necessário introduzir outra *excentricidade*, o *ponto equante*: A rotação uniforme não mais seria o do *centro do epiciclo* sobre o *deferente*, mas o da linha *Equante-centro do epiciclo*, em torno do *equante*.

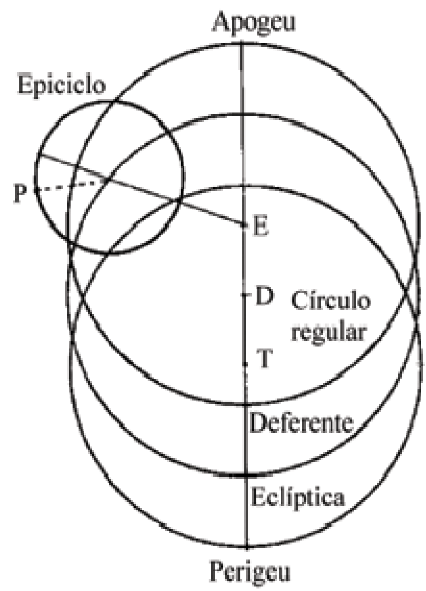


Figura 5. Sistema Ptolomaico. O modelo considera três círculos: A *eclíptica*, que é o círculo com centro na Terra; o *deferente,* que tem centro em D; o *círculo regular,* que tem centro em E. O planeta está em P, no círculo *epiciclo*, com centro no deferente. Uma hipótese fundamental feita por Ptolomeu, que não se consegue justificar, é: ED = DT; porém ela é consistente com o fato que Ptolomeu desenha os círculos com o mesmo raio. O cálculo da excentricidade, TD, a partir de dados observacionais (ângulos em que o planeta é visto em várias ocasiões), é o ponto para o qual convergem os cálculos no Almagesto.

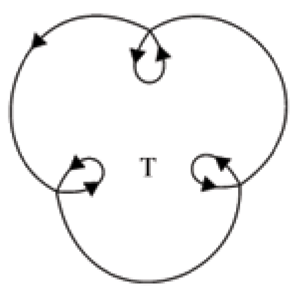


Figura 6. Movimento do planeta visto da Terra.

Nicolau Copérnico colocou o Sol no centro e a Terra girando em seu redor, mas não abandonou as órbitas circulares de Ptolomeu. Historiadores têm dito que o ganho de Copérnico se encontra nas explicações qualitativas, porém seu sistema se complica, quando detalhes quantitativos se tornam importantes; em particular, a colocação da Terra em órbita, analogamente aos outros planetas, permite explicar de modo muito simples a "anomalia" da retrogressão .

Tycho Brahe construiu melhores instrumentos que, junto com sua inata habilidade para observar o céu, lhe permitiram obter medidas mais precisas de posições (angulares) de Marte. Marte representava um desafio; hoje, sabemos que a órbita de Marte é acentuadamente elíptica, o que não é tão acentuado, no caso dos outros planetas.

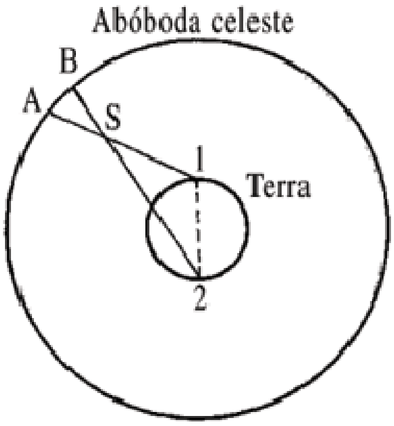


Figura 7. A Paralaxe. Tycho não aceitou o *sistema copernicano*, por razões técnicas: O *sistema copernicano* prediz a *paralaxe*, um fenômeno não predito pelo *ptolomaico*: uma pessoa em 1 observa uma estrela (S) projetada contra o pano de fundo do céu, em A; seis meses depois, como a Terra girou, a pessoa está diametralmente oposta, em 2, e vê a estrela projetada em B; ela pensa que a estrela moveu de A para B; ângulo ASB = ângulo 1S2 é chamado ângulo de *paralaxe.* Como as estrelas estão muito longe, o ângulo de paralaxe é muito pequeno e só foi observado no final do século XIX com potentes telescópios. A observação de Tycho era a olho nu. Ele não observou a paralaxe, mas não aceitou integralmente o *sistema ptolomaico*; ele propôs seu próprio sistema, intermediário entre os dois outros: a Terra estaria no centro, com o Sol orbitando em torno dela, enquanto os outros planetas orbitariam em torno do Sol.

Johannes Kepler trabalhou como assistente de Tycho. Ele usou os dados de Tycho para resolver o problema de determinar a órbita de Marte. Inicialmente, o problema de Kepler foi o mesmo de Ptolomeu: Calcular *excentricidades* (*ED* e *TD*, na Fig. 5), direção do *periélio* e *afélio*, etc. Mas ele tinha melhores dados e pôde almejar uma melhor precisão dos cálculos. Ele teve de fazer hipóteses tentativas para ajustar seus dados aos cálculos e testá-las para muitas posições Foi um trabalho árduo, que lhe consumiu, aproximadamente, 5 ou 6 anos e que resultou na publicação do *Astronomia Nova*, em 1609.

Dos cálculos de Kepler resultaram as leis:

1. As órbitas planetárias são elípticas, com o Sol em um foco.

2. A linha ligando o Sol ao planeta descreve áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

Anos depois, ele acrescenta nova lei: A razão entre o quadrado do período da órbita do planeta e o cubo do raio médio de sua órbita é uma constante.

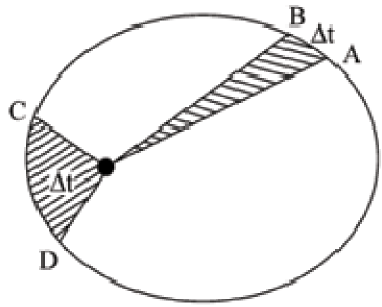


Figura 8. O Modelo de Kepler. O planeta descreve uma elipse com o Sol, no foco. Quando o planeta vai de A a B, a linha do Sol a ele descreve a área SAB; e, quando o planeta vai de C a D, a linha descreve a área SCD. Se o tempo gasto pelo planeta de ir de A a B for igual ao tempo para ir de C a D, segue-se que área SAB = área SCD.

2.4. Isaac Newton

Isaac Newton nasceu em 1642 (o ano da morte de Galileu), no dia de Natal. Filho póstumo de um fazendeiro, teve de custear seus estudos trabalhando. E, foi graças à ajuda de um tio que conseguiu entrar em Cambridge, em 1661. Quando se bacharelou, em 1665, Isaac Barrow, seu professor de matemática, encorajou-o a permanecer em Cambridge.

Naquela época, Londres era uma cidade muito poluída e com péssimo saneamento. No verão de 1665, a peste se alastrou rapidamente, dizimando cerca de 70.000 pessoas, a sétima parte da população. Um ano mais tarde, sobreveio o Grande Incêndio em Londres, que arrasou dois terços da cidade.

A peste provocou o fechamento da Universidade, e Newton refugiou-se em sua fazenda de Woolsthorpe. A melhor descrição do que fez nesse período foi dada por ele próprio cinqüenta anos mais tarde.

"No princípio de 1665, achei o método par aproximar séries e a regra para reduzir qualquer potência de um binômio a uma tal série" (binômio de Newton e série binomial). "No mesmo ano, em maio, achei o método das tangentes de Gregory e Slusius" (fórmula de interpolação de Newton) e em novembro, o método direto das fluxões" (cálculo diferencial); "no ano seguinte, em janeiro, a teoria das cores" (experiências com o prisma sobre decomposição da luz branca), "e, em maio, os princípios do método inverso das fluxões" (cálculo integral), "e, no mesmo ano, comecei a pensar na gravidade como se estendendo até a orbitada Lua, e ...da Lei de Kepler sobre o período dos planetas... deduzi que as forças que mantem os planetas em suas órbitas devem varia inversamente com os quadrados de suas distâncias aos centros em torno dos quais as descrevem: tendo então comparado a força necessária para manter a Lua em sua órbita com a força da gravidade na superfície da Terra, e encontrado que concordavam bastante bem. Tudo isso foi feito nos anos de peste, 1665 e 1666, pois naqueles dias eu estava na flor da idade para invenções, e me ocupava mais de matemática e filosofia" (física) "do que em qualquer época posterior".

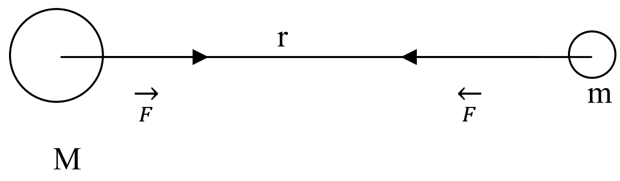
Para efetuar o cálculo da força gravitacional a que Newton se refere, ele já devia dispor da formulação dos princípios fundamentais da dinâmica, embora não se refira explicitamente a isso. Todos esses resultados foram obtidos por Newton, em sua fazenda, entre 23 e 24 anos de idade! Compreende-se que ele tenha sido considerado por Hume como o maior gênio já produzido pela espécie humana.

Em 1687, com a publicação de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Newton lançou as bases da Física Clássica, propondo a lei da atração gravitacional para explicar o movimento dos planetas em torno do Sol. Os planetas são mantidos em órbita em torno do Sol devido a uma ação mútua.

Exaustivamente verificada por processos experimentais, a Lei da Gravitação Universal, associada às Leis de Newton, foi um passo decisivo na Astronomia. Permitiu explicar e prever as trajetórias de todos os corpos sob ação gravitacional.

3. A Equação da Trajetória

3.1. Força de Atração entre os Corpos



A interação entre dois corpos de massa M e m é descrita em termos de uma força atrativa, cuja direção é a reta que passa pelo centro dos dois corpos e cujo módulo é dado pela expressão:

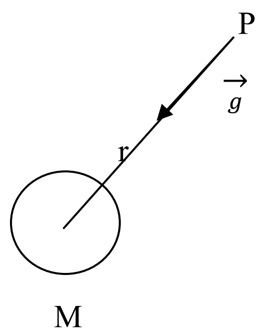
$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

G é a constante da gravitação universal, G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 e, r é a distância entre os centros dos corpos.

3.2. Aceleração da Gravidade

É denominada intensidade do campo gravitacional, ou aceleração da gravidade **g** em um ponto P distante r do centro do planeta de massa M, a força sobre a unidade de massa situada no ponto P.

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{M}{r^2}$$



3.3. Força Central

Uma força é central quando o vetor posição **r** é paralelo ao vetor força **F.** O torque $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Da relação entre o torque que atua sobre a partícula e o momento angular, conclui-se que:

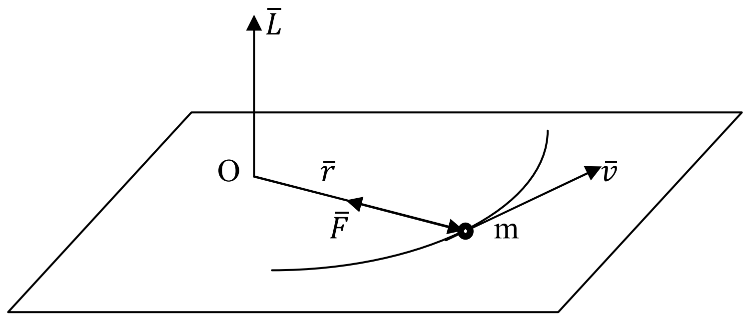
$$\tau = \frac{dL}{dt} \qquad \tau = 0 \qquad L = cte$$

O momento angular permanece constante em módulo, direção e sentido.

O momento angular **L** de uma partícula é o vetor resultado do produto vetorial $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$, cuja direção é perpendicular ao plano determinado pelo vetor posição **r** e o vetor velocidade **v**.

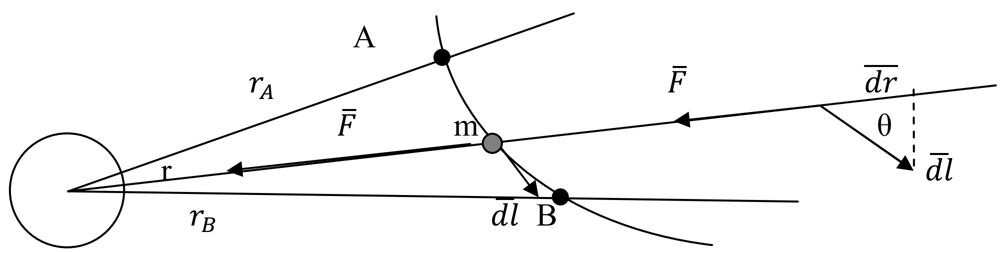
Como o vetor **L** permanece constante em direção, **r** e **v** estão em um plano perpendicular à direção fixa de **L**. Conclui-se que a trajetória do móvel estará contida em um plano perpendicular ao vetor momento angular **L**.

Quando os vetores **r** e **v** são paralelos, a direção do movimento passa pela origem, o momento angular **L** = 0. A partícula descreve um movimento retilíneo, cuja aceleração não é constante.



3.4. Força Conservativa

Suponhamos que uma partícula de massa *m* se move desde a posição A até a posição B nas proximidades de um corpo fixo de massa M.



Vamos agora calcular o trabalho realizado pela força de atração **F**.

$$F = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

O trabalho infinitesimal é o produto escalar do vetor força **F** pelo vetor deslocamento **dl**, tangente à trajetória.

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dl} = F \cdot dl \cdot \cos(180 - \theta) = -F \cdot dl \cdot cos\theta = -Fdr$$

Onde dr é o deslocamento infinitesimal da partícula na direção radial.

Para calcular o trabalho total, integra-se entre a posição inicial A, distante $r_A$do centro de forças, e a posição final B, distante $r_B$do centro fixo de forças.

$$W = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^2}dr = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A} = \left(-G\frac{Mm}{r_A}\right) - \left(-G\frac{Mm}{r_B}\right)$$

O trabalho W não depende do caminho seguido pela partícula para ir desde a posição A a posição B. A força de atração **F**, que exerce o corpo fixo de massa **M** sobre a partícula de massa *m* é conservativa. A fórmula da energia potencial é

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

O nível zero de energia potencial foi estabelecido no infinito, para $r = \infty$, $E_p = 0$.

O fato de que a força de atração seja conservativa, implica que a energia total (cinética mais potencial) da partícula é constante, em qualquer ponto da trajetória.

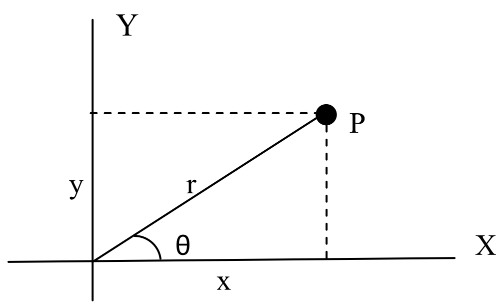
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = cte$$

3.5. Equação da Trajetória

Vamos deduzir, passo a passo, a equação da trajetória de uma partícula sob a ação de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância.

As forças de interação gravitacional e elétrica são centrais e conservativas. Portanto, a energia e o momento angular são mantidos constantes em todos os pontos da trajetória.

Posição e velocidade em coordenadas polares

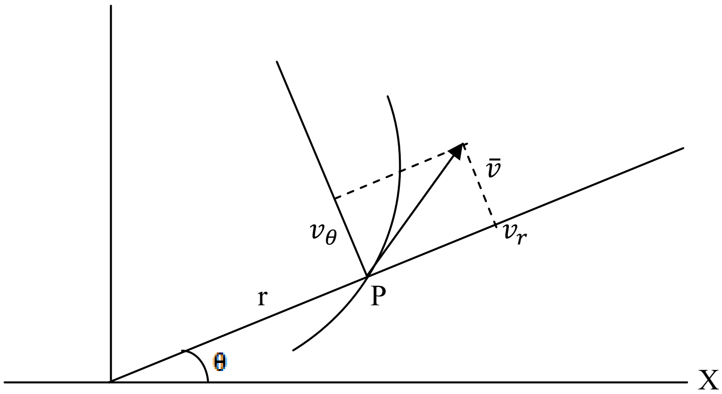


A posição do ponto P é

$$x = r \cdot cos\theta$$

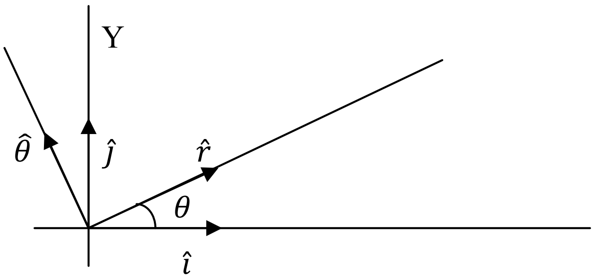
$$y = r \cdot sen\theta$$

Expressamos a velocidade da partícula em coordenadas polares



$$v = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \hat{r}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Calculo as componentes retangulares dos vetores unitários **r** e **θ**.



$$\hat{r} = \hat{\imath}cos\theta + \hat{j}sen\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{\imath}sen\theta + \hat{j}cos\theta$$

Percebe-se que

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\hat{\imath}sen\theta\frac{d\theta}{dt} + \hat{j}cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

As componentes do vetor velocidade em coordenadas polares são, portanto:

$$v = \hat{r}\frac{dr}{dt} + \hat{\theta}r\frac{d\theta}{dt}$$

A energia e o momento angular em coordenadas polares

A expressão da energia em coordenadas polares é

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{k}{r}$$

Onde k/r é a energia potencial correspondente à força conservativa $F = k/r^2$, com $k = -GMm$.

Expressamos o momento angular **L** em coordenadas polares:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times \left(\hat{\boldsymbol{r}}\frac{dr}{dt} + \hat{\boldsymbol{\theta}}r\frac{d\theta}{dt}\right) = mr^2\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}$$

Explicitando $d\theta/dt$ na expressão do momento angular:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

E introduzindo na expressão da energia, tem-se:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} \qquad (I)$$

E:

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt} \qquad (II)$$

Equação da Trajetória

Quando o momento angular **L** não é nulo, a trajetória é uma cônica, tal como demonstrarei abaixo.

De (*I*), tem-se:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)}$$

$$\boxed{dr = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)}\,dt}$$

E de (*II*):

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\boxed{d\theta = \frac{L}{mr^2}dt}$$

Para obter a equação da trajetória, primeiro elimino *dt* através do quociente entre (*II*) e (*I*):

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)}}$$

$$d\theta = \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)}}dr$$

Depois integro a equação diferencial resultante:

$$\int \theta d\theta = \int \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)}}dr$$

$$\theta = \frac{L}{m}\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)}$$

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}}\int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}\right)}$$

Agora, chamando $\frac{1}{r} = u$, tem-se:

$$u = \frac{1}{r}$$

$$u^2 = \frac{1}{r^2}$$

$$2udu = -2r^{-3}dr$$

$$du = \frac{-2 \cdot \frac{1}{r^3}dr}{2u}$$

$$du = \frac{-2 \cdot \frac{1}{r^3}dr}{2 \cdot \frac{1}{r}}$$

$$du = -\frac{2}{r^3} \cdot \frac{r}{2}dr$$

$$du = -\frac{dr}{r^2}$$

Então:

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{-du}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2m} \cdot u - ku}}$$

Chamando $a = \frac{L^2}{2m}$, $b = k$ e $c = E$:

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{-du}{\sqrt{-au^2 - bu + c}}$$

Sabemos que $-au^2 - bu + c$ pode ser escrita da forma:

$$a\left[\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \left(u + \frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

Então:

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{-du}{\sqrt{a\left[\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \left(u + \frac{b}{2a}\right)^2\right]}}$$

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{-du}{\sqrt{\left[\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \left(u + \frac{b}{2a}\right)^2\right]}}$$

Fazendo mais uma substituição, chamamos $\sqrt{\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} = A$ e $u + \frac{b}{2a} = B$. Por conseqüência: $du = dB$. Dessa forma:

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \int -\frac{dB}{\sqrt{A^2 - B^2}}$$

Podemos, agora, resolver essa integral por substituição trigonométrica:

$$B = Acos\alpha$$

$$dB = -A \cdot sen\alpha \cdot d\alpha$$

$$-dB = A \cdot sen\alpha \cdot d\alpha$$

Então:

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{A \cdot sen\alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{A^2 - (Acos\alpha)^2}}$$

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{A \cdot sen\alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{A^2 - A^2cos^2\alpha}}$$

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{A \cdot sen\alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{A^2 - (1 - cos^2\alpha)}}$$

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{A \cdot sen\alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{A^2sen^2\alpha}}$$

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{A \cdot sen\alpha \cdot d\alpha}{A \cdot sen\alpha}$$

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \int d\alpha$$

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \alpha$$

Como $a = \frac{L^2}{2m}$, $\theta = \alpha$.

Desfazendo as mudanças:

$$B = Acos\alpha$$

$$u + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \cdot cos\theta$$

$$\frac{1}{r} + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \cdot cos\theta$$

Se $b > 0$:

$$\frac{1}{r} + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} \cdot \left(\frac{4a^2}{b^2} \cdot \frac{c}{a} + 1\right)} \cdot cos\theta$$

$$\frac{1}{r} + \frac{b}{2a} = \frac{b}{2a} \cdot \sqrt{\frac{4ac}{b^2} + 1} \cdot cos\theta$$

$$\frac{1}{r} = \frac{b}{2a} \cdot \sqrt{\frac{4ac}{b^2} + 1} \cdot cos\theta - \frac{b}{2a}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{b}{2a} \cdot \left(\sqrt{\frac{4ac}{b^2} + 1} \cdot cos\theta - 1\right)$$

$$r = \frac{\frac{2a}{b}}{\sqrt{\frac{4ac}{b^2} + 1} \cdot cos\theta - 1} \qquad (i)$$

Se $b < 0$:

$$\frac{1}{r}+\frac{(-b)}{2a}=\sqrt{\frac{(-b)^2}{4a^2}\cdot\left(\frac{4a^2}{(-b)^2}\cdot\frac{c}{a}+1\right)}\cdot cos\theta$$

$$\frac{1}{r}-\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}\cdot\left(\frac{4a^2}{b^2}\cdot\frac{c}{a}+1\right)}\cdot cos\theta$$

$$\frac{1}{r}=\frac{b}{2a}\cdot\sqrt{\frac{4ac}{b^2}+1}\cdot cos\theta+\frac{b}{2a}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{b}{2a}\cdot\left(\sqrt{\frac{4ac}{b^2}+1}\cdot cos\theta+1\right)$$

$$r=\frac{\frac{2a}{b}}{\sqrt{\frac{4ac}{b^2}+1}\cdot cos\theta+1}\qquad(ii)$$

Substituindo *a, b* e *c* por seus respectivos valores, tem-se:

Para $k>0$:

$$r=\frac{\frac{2\left(\frac{L^2}{2m}\right)}{k}}{\sqrt{\frac{4\left(\frac{L^2}{2m}\right)E}{k^2}+1}\cdot cos\theta-1}$$

$$\boxed{r=\frac{\frac{L^2}{mk}}{\sqrt{\frac{2L^2E}{mk^2}+1}\cdot cos\theta-1}}\qquad(iii)$$

Para $k<0$:

$$\boxed{r=\frac{\frac{L^2}{mk}}{\sqrt{\frac{2L^2E}{mk^2}+1}\cdot cos\theta+1}}\qquad(iv)$$

Tomando $\varepsilon=\sqrt{\frac{2L^2E}{mk^2}+1}$ e $d=\frac{L^2}{mk}$, temos:

$$r = \frac{d}{1 - \varepsilon cos\theta}\ , para\ k > 0\ ou\ r = \frac{d}{1 + \varepsilon cos\theta}, para\ k < 0$$

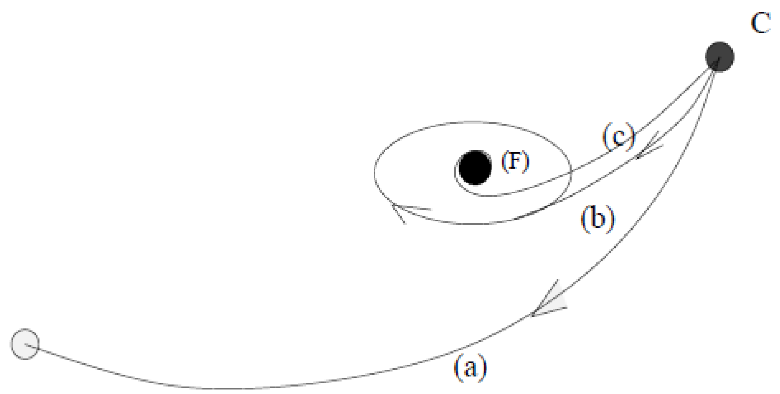
Que é a equação de uma cônica (elipse, parábola ou hipérbole), dependendo do valor da excentricidade ε.

Classe de cônica	Descrição geométrica	Descrição física
Elipse	$e < 1$	$E < 0$
Parábola	$e = 1$	$E = 0$
Hipérbole	$e > 1$	$E > 0$

Temos, então, três possibilidades de caminhos para um corpo celeste ao se aproximar da Terra:

- **Trajetória (a):** o corpo passaria aproximadamente numa parábola, tendo um ponto de mínimo de aproximação com a Terra, *perigeu*, e seguiria nesta parábola se afastando indefinidamente da Terra;
- **Trajetória (b):** o corpo entraria em órbita elíptica da Terra se tornando um satélite;
- **Trajetória (c):** o corpo entraria em colisão com a Terra.

A diferença entre as órbitas parabólicas e hiperbólicas e as elípticas é haver ou não condições para que o corpo em órbita se liberte da atração gravitacional do outro corpo e atinja distâncias arbitrariamente grandes, e isso depende apenas da energia da órbita.



4. Breve apresentação da equação do movimento relativo de dois corpos

As leis de Kepler descrevem corretamente o movimento dos planetas, mas não explicam a razão dessas trajetórias.

1. Os planetas descrevem órbitas elípticas, estando o Sol em um de seus focos.
2. O vetor posição de qualquer planeta com relação ao Sol varre áreas iguais da elipse em tempos iguais.
3. Os quadrados dos períodos de revolução são proporcionais aos cubos dos semi-eixos da elipse.

As leis de Newton não somente explicam as Leis de Kepler como também predizem outras trajetórias para os corpos celestes: as parábolas e as hipérboles. Como foi comentado no capítulo anterior, as propriedades *central e conservativa* da força de atração entre os corpos, determinam um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem que quando são expressas em coordenadas polares conduzem à equação da trajetória, uma cônica.

A lei da gravitação universal, que relaciona a força entre dois corpos F e C de massas M e m, a uma distância $|\vec{r}|$, é dada por:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \quad (1)$$

Da lei da gravitação se pode derivar as leis de Kepler.

Serão usadas as seguintes notações:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad (2)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a} = \ddot{\vec{r}} \quad (3)$$

Aplicando-se a lei da gravitação e a segunda lei do movimento, tem-se:

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \quad (4)$$

$$m\ddot{\vec{r}}_m = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \quad (5)$$

$$M\ddot{\vec{r}}_M = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \quad (6)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\vec{r} \qquad (7)$$

Definindo-se $\mu = G(M+m)$, podemos escrever:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \qquad (8)$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0} \qquad (9)$$

A equação 4 é a segunda lei de Newton e na equação 5 a força é representada como a segunda derivada da posição do corpo de massa m. Na equação 6, o mesmo para o corpo de massa M. Portanto, a equação 7, equação do equilíbrio, é a diferença entre as duas anteriores. Finalmente, na equação 8, pode-se escrever de forma mais simplificada, usando a substituição $\mu = G(M+m)$, a equação do equilíbrio de forças.

O resultado é a **equação diferencial vetorial do movimento relativo de dois corpos**. A solução dessa equação nos dá a órbita relativa dos corpos (planeta, cometa, satélite, etc.). A equação descreve como o vetor posição $\vec{r}$ varia com o tempo, mas sua solução não é simples. Como é uma equação diferencial vetorial de segunda ordem, isto é, envolve segunda derivada de vetores, precisamos de seis constantes para obter a solução. Por exemplo, se soubermos a posição tridimensional e a velocidade de um planeta em um determinado momento, poderemos calcular sua posição e velocidade em qualquer outro tempo.

Os detalhes da solução numérica dessa equação e a apresentação de exemplos podem ser tema para um trabalho posterior. O objetivo desse capítulo foi apenas apresentar a equação.

CONCLUSÃO

Ao realizar esse trabalho percebi o quão maravilhosas são as ligações entre a Matemática e a Física. Abordar o tema das possíveis trajetórias dos corpos celestes me fez ver que estudar Matemática se torna muito mais interessante quando levamos em conta que a Matemática tem na Física uma forte fonte de inspiração. Por exemplo, estudar a equação de uma elipse é muito mais atraente quando associamos essa equação à órbita dos planetas.

Embora não seja minha pretensão conseguir produzir nenhum sistema de defesa da Terra contra queda de meteoritos gigantes, o problema me atrai e desejo entender melhor esta questão. Uma segunda justificativa para a escolha do tema se prende ao evento do Ano Internacional da Astronomia.

Por o tema ser muito amplo, foram abordados apenas alguns tópicos, o que não impede o estudo de ser continuado posteriormente. A simples descrição dos fatos e a divulgação das idéias já é um objetivo que o trabalho alcançou. Existe um desejo futuro de desenvolver algum trabalho interessante na área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica - vol. 1.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. 3 v.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica - vol. 1:** Mecânica. 4. ed. São Paulo: Blucher, 2002. 3 v.

SYMON, Keith R.. **Mecânica.** Rio de Janeiro: Campus, 1982. 685 p.

CURSO DE ASTRONOMIA E ASTROFÍSICA – UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL acessível em:
http://astro.if.ufrgs.br/kepleis/kepleis.htm

FOLHA ONLINE – CIÊNCIA E SAÚDE acessível em:
http://www1.folha.uol.com.br/folha/ciencia/ult306u471532.shtml

REVISTA BRASILEIRA DE ENSINO DE FÍSICA acessível em:
http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-47442004000300012&lng=pt&nrm=iso&tlng=pt

WIKIPÉDIA, A ENCICLOPÉDIA LIVRE acessível em:
http://pt.wikipedia.org/wiki/2009_DD45