Construção Geométrica de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$

Daniel Lacerda Loiola

10 de junho de 2009

Resumo

Ao passo que estudamos e exercitamos a matemática, uma coisa fica bem clara em nossas mentes, é uma ciência que vem sendo construída e estudada com o passar de séculos, algo que não foi deduzido rapidamente por seus intelectuais, mas sim, fruto de muita dedicação por parte de trabalhadores matemáticos que surgiram e foram recohnecidos com totais merecimentos.

Pelo que vemos, essa ciência permanece sendo estudada e cada vez mais reconhecemos que existem inúmeros ramos, se não infinitos, a serem mais e melhor compreendidos, isto é, a matemática se mostra ilimitada em termos de seus conceitos e ramos. Muitas vezes é necessário que busquemos um pouco mais de conhecimento em alguns de seus ramos para que possamos entendê-los melhor. É nesse intuito que buscaremeos se aprofundar, ou pelo menos, conhecer de uma forma diferente o conjunto $\mathbb{R}$ que chamamos de CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS. Uma vez que, trabalhamos com esse conjunto durante todo o ensino fundamental e médio, no entanto, as vezes desconhemos o porque de sua necessidade e importância. Outo conjunto muito conhecido por nós, o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, que por sua vez é entendido por muitos como algo que faz jus ao nome, isto é, é algo complicado. Toda via, é tentar tirar essa imagem de $\mathbb{C}$ que buscaremos nesse trbalho.

Através da matemática podemos deduzir muitos dos conjuntos essenciais na resolução de problemas e no estudo de funções. Uma forma bem conhecida, é utilizarmos pressupostos algébricos, no entanto, podemos também, com auxilio geométrico tentar explicar uma maneira de construirmos o corpo dos REAIS, partindo então, de um outro conjunto bem conhecido por nós, o conjunto Q dos RACIONAIS. Consequentemente podemos deduzir os COMPLEXOS de natureza geométrica.

Sumário

Introdução

Capítulo 1

Considerações sobre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

Para que possamos começar definitivamente a construção do conjunto dos números reais a partir nos racionais, em seguida fazermos uma abordagem dos números complexos, é necessário fazermos algumas considerações sobre outros conjuntos contidos nos racionais($\mathbb{Q}$), consequentemente em ($\mathbb{R}$) e $\mathbb{C}$. No caso, como sabemos, são os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números `naturais` e $\mathbb{Z}$ dos números `inteiros`.

1.0.1 Conjunto $\mathbb{N}$

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, possui uma característica diferente dos demais que veremos aqui. Tal característica se dá pelo fato de $\mathbb{N}$ ter um menor elemento. Conhecendo esse elemento podemos formas os demais como soma repetida desse elemento com 1, a unidade.

Definição de soma e produto em $\mathbb{N}$ e particularidades.

- **Adição.** A adição é representada por $c = a+b$, assim c é um novo elemento de $\mathbb{N}$ obtido pela soma de a e b com $a, b \in \mathbb{N}$.

- **Multiplicação**. O produto em $\mathbb{N}$ é simbolizado por $c = a \times b$ e c é um novo elemento de $\mathbb{N}$ obtido pelo produto de a e b com $a, b \in \mathbb{N}$. Também podemos convencionar $a \times b = ab$. A multiplicação em $\mathbb{N}$ na verdade é uma soma repetida, isto é, $3a = a + a + a$.

- **O primeiro de** $\mathbb{N}$**.** Há discórdia de alguns autores sobre o primeiro elemento de $\mathbb{N}$, há quem prefira que seja 1, no entanto, vamos adotar 0(zero) como sendo este elemento. Os demais elementos podem ser encontrados com a soma repetida de 0 com 1.

- **Todo elemento de** $\mathbb{N}$ **possui um sucessor.** Algo também muito bom entre os números naturais, se resume, devido cada elemento de $\mathbb{N}$ possuir um sucessor. Donde.

$$b = a + 1$$

é o sucessor de a e

$$c = b + 1$$

é o sucessor de b e assim sucessivamente.

Connhecido essas características sobre $\mathbb{N}$ podemos defini-lo.

$$\mathbb{N} = \{0, 0+1, 0+1+1, 0+1+1+1, 0+1+1+1+1, ...\}$$

isto é,

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., 1000, 1001, ...\}$$

Propriedades importantes.

Ultilizando os argumentos que já conhecemos podemos provar algumas propriedades sobre $\mathbb{N}$, no entanto, como estamos apenas dando suporte ao que queremos chegar, é mais coerente definir essas propriedades sem demosntração. No caso, cabe ao leitor.

- **PROPRIEDADES SOBRE** $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

i) Comutatividade da soma.

$$a + b = b + a \;\; \forall \; a, b \in \mathbb{N}$$

ii) Associatividade da soma.

$$a + (b + c) = (a + b) + c \;\; \forall \; a, b, c \in \mathbb{N}$$

iii) Existência do elemento neutro.

$$a + 0 = a \ \ \forall\ a \in \mathbb{N}$$

iv) Comutatividade do produto.

$$ab = ba \ \ \forall\ a, b \in \mathbb{N}$$

v) Associatividade do produto.

$$a(bc) = (ab)c \ \ \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$$

vi) Identidade do produto.

$$1 \cdot a = 1a = a \ \ \forall\ a \in \mathbb{N}$$

vii) Distributividade do produto sobre a soma.

$$a(b + c) = ab + ac \ \ \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$$

viii) $\mathbb{N}$ não possui divisores de zero.

$$a \times 0 = 0\ \forall a \in \mathbb{N}$$

e

$$a \times b = 0 \Rightarrow a = 0\ ou\ b = 0\ \forall a, b \in \mathbb{N}$$

Nos naturais também são conhecidos $\mathbb{N}^*$ que representa os naturais menos seu elemento $\{0\}$, ou seja, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. Tomando como base o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais é que vamos definir os inteiros($\mathbb{Z}$) os racionais($\mathbb{Q}$) e então podemos passar para uma análise mais específica, construindo por meio de passos geométricos os números reais.

1.0.2 Conjunto $\mathbb{Z}$

Muitas vezes consultamos nosso saldo financeiro em uma conta corrente ou mesmo quando analisamos nossa carteira de bolso e deparamos com uma ralidade bastante comum, isto é, estamos no “vermelho”, significa que estamos devendo.

Isso é um fato indesejado, além do saldo não ser positivo no momento, estamos devendo um produto que compramos no crédito. Podemos usar esse exemplo para entendermos a necessidade e o surgimento dos números inteiros. Como ponto de partida vamos analisar a equação abaixo, estender conceitos de $\mathbb{N}$ e utlilizar a questão financeira anterior para resolvê-la.

$$a + x = 0 \ ; \quad a \in \mathbb{N}$$

Observe que é como se tivéssemos uma certa quantidade de dinheiro na carteira e utilizamos essa quantia para pagar uma conta justamente nesse valor. Mas quando devemos, convencionamos a dívida como uma quantia negativa no momento. Assim podemos representá-la como sendo $-a$ que será uma invenção para resolvermos a equação, pois, ao pagarmos a dívida ficaremos com saldo igual a zero. Matematicamente daqui para frente teremos:

$$a + x = 0 \ ; \quad a \in \mathbb{N} \ \Rightarrow x = -a$$

O que nos dará um novo conjunto que chamaremos de $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Note que $\mathbb{Z}$ apresenta uma `particularidade` se comparado ao conjunto $\mathbb{N}$, pois não possui um primeiro elemento. Visto isso, é de fundamental impotância que façamos também a extenção das definições de soma e produto de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

Chamaremos de inteiros positivos o conjunto representado por $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ e inteiros negativos por $\mathbb{Z}^- = -\mathbb{N}$. É melhor não destacarmos aqui, por enquanto, a qual dessas partições 0 pertence para não encontrarmos contradições comuns na matemática e ficarmos atrelados a isso.

1.0.3 Origem dos sinais

Na época do Renascimento os matemáticos sentiram cada vez mais a necessidade de um novo número que pudesse ser a solução da equação que vimos anteriormente.

$$a + x = 0 \ ; \quad a \in \mathbb{N}$$

Como vimos isso se deu com a invenção dos números inteiros. Na verdade muitas outras ciências necessitavam do surgimento desses números. Os físicos precisavam de símbolos para representar temperaturas abaixo de $0^o C$. Os astrônomos e físicos procuravam linguagem matemática para expressar as forças de atração entre dois corpos.

A idéia dos sinais veio com os comerciantes da época. Suponha que um comerciante tenha eu seu armazém duas sacas de milho cada uma com 15kg. Se vendece por exemplo 10kg de milho por dia ele marcava no saco em que retirou, o número 10 com um traço, (semelhante ao sinal de menos hoje), para indicar que faltava 10kg de milho. Em seguida se resolvesse despejar o restante no outro saco, escrevia o número 5 com dois traços cruzados (semelhante ao atual sinal de mais). Para indicar que havia $5kg$ de milho à mais. E foi assim que surgiu os sinais **-** e $+$.

Apartir dessas novas notações, os matemáticos poderiam não somente indicar quantidades, como também, representar ganho e perda dessas quantidades através dos sinais de $-$ (menos) e $+$ (mais).

1.0.4 Adição e produto em $\mathbb{Z}$

Vamos estender também as definições de soma e produto de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.

Definição 1 *Ressaltado, Chamaremos de $\mathbb{Z}^+$ o conjunto dos númerros inteitos, ou somente, de $\mathbb{N}$. Também chamaremos de $\mathbb{Z}^-$ ou $-\mathbb{N}$ ao conjunto dos números inteiros negativos.*

Exercício. Visto essas duas partições em $\mathbb{Z}$ tente agora imaginar e argumentar a qual delas 0(zero) pertence.

Para $x \in \mathbb{Z}^+$ ficam válidas as mesmas propriedades de soma e produto no conjunto dos números naturais. A diferença aqui nos inteiros é quando estivermos operando com $x \in \mathbb{Z}^-$. Para isso vamos definir uma regra que nos ajudarar.

Definição 2 *MUNDANÇA DE SINAL.*

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, uma função talque.

$$x \in \mathbb{N} \ \Rightarrow f(x) \in -\mathbb{N}; x + t(x) = 0 \Rightarrow t(x) = -x \ negativo$$

$$x \in -\mathbb{N} \ \Rightarrow f(x) \in \mathbb{N}; x + t(x) = 0 \Rightarrow t(x) = -x \ positivo$$

Exemplo: Para $x = 5 \Rightarrow f(5) = -5$. Para $x = -5 \Rightarrow f(-5) = 5$

Todas as oito propriedades citadas em $\mathbb{N}$ são válidas para $\mathbb{Z}^+$, assim, a soma de elementos que pertencem aos inteiros positivos será um novo inteiro positivo. Mas quando tivermos elementos em $\mathbb{Z}^-$?

Definição 3 *VALOR ABSOLUTO. O valor absoluto ou módulo de um número inteiro, nada mais é do que um número inteiro que mede a distância até a orígem. Matematicamente falando.*

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \in \mathbb{Z}^+ \\ -x & se \quad x \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

Agora sim podemos estender soma e produto.

Definição 4 *SOMA EM $\mathbb{Z}$*

- *Como já vimos se a e b $\in \mathbb{Z}^+$ nada há para revelar já que conhecemos as propriedades de $\mathbb{N}$*

- *Se a e b $\in -\mathbb{N}$ utilizamos a troca de sinal. $a \to f(a) \in \mathbb{N}$ e $b \to f(b) \in \mathbb{N}$. Assim temos, $c = f(a)+f(b) \in \mathbb{N}$. Novamente $c \to f(c) = f(f(a)+f(b)) = a + b \in -\mathbb{N}$.*

- *Se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in -\mathbb{N}$. Neste caso temos duas particularidades.*

Se $|a| \geqslant |b|$, então teremos $a+b = a-|b|$. Que é a diferença entre dois números positivos. Essa diferença é a mesma que efetuamos no conjunto $\mathbb{N}$ cujo já temos bastante conhecimento.

Se $|a| \leqslant |b|$, então $a + b = t(|b| - a)$. Podemos perceber que se resume em calcular a diferença de dois números naturais sendo o maior menos o menor, depois fazemos a troca de sinal.

Definição 5 *PRODUTO EM $\mathbb{Z}$. O produto de números inteiros segue a mesma idéia apresentada nos naturais, ou seja, como uma soma repetida. Assim teremos.*

- *Se a e b $\in \mathbb{N}$ já sabemos calcular.*

- *Se* a *e* $b \in -\mathbb{N}$. *Fazemos* $a \times b = |a| \times |b|$. *Assim, é o mesmo que encontrar o valor absoluto de* a *e* b *e efetuarmos o produto, uma vez que o módulo de um inteiro pertence a* $\mathbb{N}$.

- *Se* $a \in \mathbb{N}$ *e* $b \in -\mathbb{N}$. *Teremos* $a \times b = f(a \times |b|)$.

O conjunto $\mathbb{Z}$, também é contável e infinito. Comparando os inteiros aos naturais, percebe-se que âmbos possuem e mesmo elemento neutro, tanto na soma como também no produto. No entanto $\mathbb{Z}$ é mais abrangente. Pois, além de conter os naturais possui ainda o elemento simétrico, isto é, para todo $a \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$a + a_s = elemento\ nulo$$

$$a + a_s = 0 \ \Rightarrow \ a_s = -a$$

a_s é denomidado elemento simétrico de a.

Propriedades sobre $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Em relação a estrutura $(\mathbb{Z}, +)$. Podemos dizer que forma um grupo aditivo, donde.

- $a + (b + c) = (a + b) + c \ \ \forall a, b, c \in \ Z$

- Existe para cada $a \in \mathbb{Z}$ um $a_s \in \mathbb{Z}$, tal que, $a + a_s = 0$

- Existência do elemento neutro.

$$a + 0 = a \ \ \forall \ a \in \mathbb{Z}$$

Além disso $(\mathbb{Z}, +)$ ainda forma grupo aditivo abeliano pois, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$a + b = b + a$$

Para $(\mathbb{Z}, \cdot\,)$. Como já vimos seu elemento neutro é o mesmo de $\mathbb{N}$, ou seja

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ ; \ \ \forall a \in \mathbb{Z}$$

Também temos a associatividade.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ ; \ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

No entanto $(\mathbb{Z}, \cdot)$ não forma um grupo multiplicativo, pois não existe $x \in \mathbb{Z}$ talque,

$$a \cdot x = e$$

isto é, se $a \cdot x = 1$ com $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$.

Como podemos observar, a estrutura $(\mathbb{Z}, \cdot)$ deixa a desejar se comparada a $(\mathbb{Z}, +)$. Isso causa problemas na solução de equações. Pois podemos encontrar problemas que seja preciso usar um inverso multiplicativo. Daí então a necessidade de talvez estender as definições de $\mathbb{Z}$ para outros caminhos, da mesma forma que fizemos dos naturais para os inteiros.

Na verdade tudo o que enunciamos aqui sobre este segundo conjunto, nada mais é do que uma expansão do primeiro, ou seja, conhecido o conjunto $\mathbb{N}$ e algumas de suas propriedades, fizemos algumas manipulações para fora de $\mathbb{N}$ e encontramos $\mathbb{Z}$. Isto é uma forma muito utilizada na matemática com relação a teoria de conjuntos, uma vez que não se pode deduzir algo muito aprofundado, específico, sem antes conhecer a base. Faremos esse método para também definirmos, de forma breve, um novo conjunto mais amplo.

1.0.5 Considerações sobre $\mathbb{Q}$

Novos elementos

Uma das explicações que podemos dar sobre a necessidade de construir na matemática outros conjuntos, se dá pelo fato de que em determinados conjuntos, não encontramos saídas, ou se preferir, não encontramos soluções para muitos tipos de equações algébricas. Isso se justifica se dermos uma analisada na equação abaixo em que a incógnita é x.

$$ax = 1 \quad com \quad a \in \mathbb{Z}$$

Se dispusermos apenas do conhecimento dos conjuntos aqui já enunciados, chegaremos a uma conclusão ligeiramente clara. Eles possuem uma **incompletitude algébrica**. Para tanto, vamos introduzir mais alguns conceitos sobre esse assunto. Ou melhor, vamos fazer uma expansão do que já temos e deduzir algo mais completo.

Na verdade caro leitor, você já sabe do que iremos fazer, faremos uma definição do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e veremos algumas de suas propriedades. Mas antes de tudo vamos ver um pouco de abordagem histórica.

Muitas vezes no nosso dia a dia sentimos a necessidade de medir objetos. No entanto, nem sempre o objeto medido representa um número inteiro de vezes da unidade de medida adotada para a medição. Por exmplo, ao medir uma ponte ou uma porta, verificamos que ambas possuem medidas do tipo $35m$ e algo mais, ou $2m$ e mais a metade de outro metro. Da mesma forma que se tem hoje a necessidade de medir objetos, instrumentos, etc com medidas quase que exatas, aconteceu também em passagens históricas em determinas civilizações.

Por volta de 3000 a.C, geômetras do Egito trabalhavam fazendo marcações de terras nas margens do rio Nilo em favor de sua população. No período das cheias quase sempre o rio inundava essas marcações, desconfigurando-as, fazendo com que fossem remarcadas. Para medir as terras os egípcios usavam quantidades inteiras em uma corda. No entanto ao remarcá-las verificava-se que que nem sempre as medidas dos lados do terreno davam exatas, ou seja, o lado do terreno não correspondia um número inteiro de vezes a medida padronizada da corda. Havendo assim a necessidade da criação do número fracionário.

Voltando a equação anterior, em que

$$ax = 1 \quad com \quad a \in Z$$

Podemos entendê-la como o produto de duas medidas que resulta em $1m$ (um metro.) Como por exemplo.

$$2x = 1$$

Que é o mesmo que.

$$x + x = 1$$

O que se convencionou para o resultado de x como sendo o símbolo $\frac{1}{2}$ que neste caso representa a metade do metro. Na verdade assumiu-se uma invenção de números que quebram os inteiros em partes iguais. E as somas das partes tem-se o inteiro. Em termos gerais, o que houve foi uma nova interpretação de operação chamada divisão que é contrária a multiplicação. Assim os resultados de,

$$ax = 1 \quad com \quad a \in Z \Rightarrow a = \frac{1}{x}$$

A partir dessas novas idéias podemos então acrescentar os novos elementos que surgiram ao conjunto $\mathbb{Z}$ da seguinte forma,

$$\mathbf{K} = \mathbb{Z} \bigcup \left\{ ..., \frac{1}{-4}, \frac{1}{-3}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ... \right\}$$

Vamos agora estender `SOMA` e `PRODUTO`.

Definição 6 *SOMA. Considere a soma repetida de dois números da forma $\frac{1}{x}$, ou seja, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$. Note que é como se tivéssemos somando dois pedaços de medidas iguais.*

Exemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{2}{2}$$

Que é o mesmo que unir duas metades e econtrar a parte inteiro. Assim de

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

tem-se,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

Assim por diante o mesmo quando,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

como também,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

Definição 7 *PRODUTO. O produto para os novos elementos pode ser entendido como o mesmo passo que fizemos estendo o produto de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$.*

Exemplo:

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

Mas como agora já sabemos calcular essa soma então teremos,

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Daí segue-se um resultado análogo para $2 \times \dfrac{2}{3}$, isto é,

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

Até então fizemos apenas umas definições de frações, ou melhor, um conceito de divisão na tentativa de encontrar estruturas que sejam capazes de resolver inúmeros tipos de equações. No entanto não vamos dar nome nem ficar a mercê do conjunto **K** citado anteriormente. Vamos encontrar algo mais amplo, já que agora temos algum conhecimento de tipos de frações e suas propriedades. Vamos definir uma relação da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x, y) & \longrightarrow & \dfrac{x}{y} \text{ com } y \neq 0. \end{array}$$

Isso é uma associação, na verdade uma divisão, em que tomamos dois elementos x e y de $\mathbb{Z}$, com $y \neq 0$ e efetuamos essa divisão como sendo $\dfrac{x}{y}$. Com x chamado de `numerador` e y `denominador`. A esse novo elemento resultante dessa associação é o que podemos definir por conjunto dos números `Racionais`, popularmente conhecido como conjunto de todas as frações e representado por $\mathbb{Q}$.

Voltando a analisar a equação $ax = 1$, podemos também chegar a uma solução.

Se dividirmos ambos os membros por a a igualdade será mantida e teremos um resultado para x. Observe que podemos fazer isso já que temos um leve conceito de divisão.

$$ax = 1 \ \Rightarrow \frac{ax}{a} = \frac{1}{a} \ , \quad donde \quad x = \frac{1}{a}$$

Esse valor de x representa um número racional, note que, foi necessário utilizar novos procedimentos para encontrar a solução da equação, pois até então não tinhamos argumentos suficientes. Isso é mais um exemplo de extensão de conjuntos.

Formalmente falando a representação dada aos racionais é:

$$\mathbb{Q} = \{x; \ x = \frac{a}{b}, \ com \ a, b \in \mathbb{Z} \ e \ b \neq 0\}$$

Sendo assim, vamos definir também soma e produto para $\mathbb{Q}$.

1.0.6 Soma e produto

Definição 8 *SOMA. Seja $x, y \in \mathbb{Q}$ tal que $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$ a soma $x+y$ é definia por:*

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \\ &= \frac{ad + cb}{bd} \end{aligned}$$

Definição 9 *PRODUTO. O Produto de dois números escritos em forma de fração é definido multiplicando numerador com numerador e denominador denominador.*

Algebricamente temos.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Isso de justifica observando a seguinte propriedade.

- **Comutatividade do produto.** No conjunto **K** citamos algo do tipo. $x \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y}$, mas seria o mesmo se fosse $\dfrac{1}{y} \cdot x = \dfrac{x}{y}$. Sem perda de generalidade, que a multiplicação é comutativa.

Usando esse argumento chegaremos na definição anterior do produto de dois racionais. Seria uma boa idéia que o leitor realiza-se essa observação.

Até agora não começamos a falar do que realmente queremos, isso porque nesse caso é coerente e se faz necessário relembrar alguns conceitos matemáticos. Vamos então começar a introduzir o que realmente interessa.

Vamos tomar como ponto de partida uma reta, escolher um ponto e marcá-lo como sendo 0. A direita da reta temos os números positivos. Os elementos de $\mathbb{N}$ podem ser representados a partir do primeiro ponto a direita que macaremos como sendo 1, os demais como $2, 3, 4, 5, 6, ...$ podem ser obtidos transferindo a media que vai de 0 a 1 para o lado direito de 1, e assim sucessivamente. Observemos a figura abaixo.

Os pontos representados na reta é o conjunto $\mathbb{N}$. Façamos o mesmo procedimento à esquerda do 0, ou seja, translatando o segmento que mede uma unidade sucessivamente para esquerda de 0. Com os pontos encontrados acrescentaremos o sinal de $(-)$ para indicar número negativo. Como ilustra a figura abaixo.

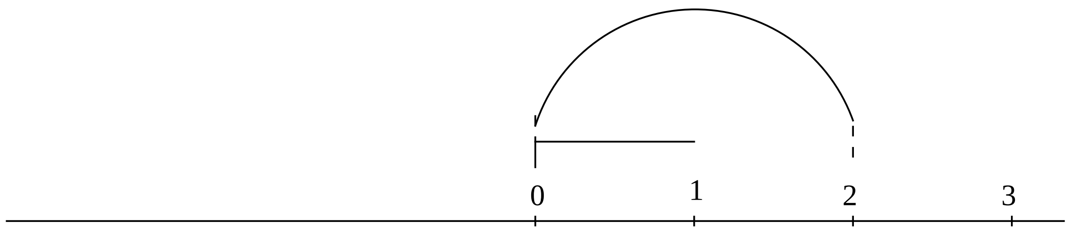

Figura 1.1: representação de $\mathbb{N}$ na reta.

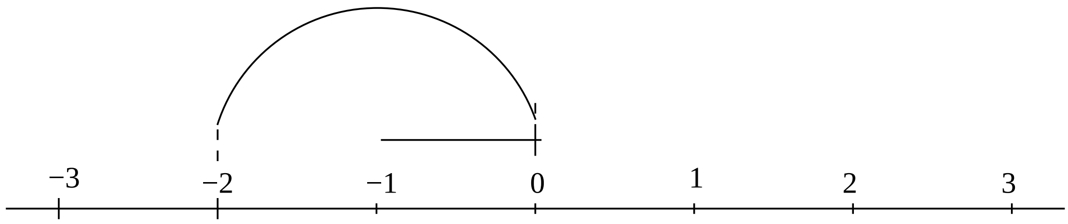

Figura 1.2: representação de $\mathbb{Z}$ na reta.

Os pontos que estão enumerados na reta constituem o conjunto $\mathbb{Z}$, que contém $\mathbb{N}$.

Vamos voltar a dar mais um pouco de ênfase a $\mathbb{Q}$.

Também é comum encontrar por aí uma definição do produto de números racionais da seguinte forma.

- **Soma.** Como estamos acostumados a ver a soma de dois números racionais como $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$; $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $b, d \neq 0$. É definda por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(\frac{mmc(b,d)}{b})a + (\frac{mmc(b,d)}{b})b}{mmc(b,d)}$$

Se b e d são primos entre si temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{da + bc}{bd}$$

Essa propriedade que envolve o mmc também pode ser adotada, mas, de acordo com o que vimos percebe-se que isso não é uma regra esclusiva a ser seguida, pois definimos isso anteriormente.

Analisando a estrutura $(\mathbf{Q}, \cdot)$ veremos que $\mathbb{Q}$ é a mais abrangente do que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ pelo fato de que possui inverso multiplicativo. Isto é, existe para cada $x \in \mathbb{Q}$

um elemento denotato por $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, tal que,

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

Também são válidades as propriedaes.

- **Distributividade.** $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ tem-se,

$$a(b + c) = ab + ac$$

- **Sem divisores de zero**. $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ Temos,

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \ ou \ y = 0$$

Dessa forma podemos concluir que $\mathbb{Q}$ forma um corpo. Sendo muito utilizado na resolução de equações. Poderíamos então deixar de expandir conjuntos e ficarmos satisfeitos com os racionais. Uma vez que esse conjunto possui grande autonomia na resolução de problemas matemáticos. É também necessário representá-lo na reta, isso facilita entender a amplitude de $\mathbb{Q}$.

Capítulo 2

Expandindo $\mathbb{Q}$

Ainda se tratando de $\mathbf{Q}$, existe nos racionais uma propriedade, digamos forte, na qual define que, entre dois elementos de $\mathbf{Q}$ na reta existe sempre outro elemento pertencente a esse mesmo conjunto. Também, uma observação simples, mas válida, é de que todo número inteiro pode ser escrito como uma fração que possui denomindador igual a 1, isso também dar mais autonomia a $\mathbf{Q}$. Vamos compreender melhor o que acontece na reta com a representação dos `racionais`.

Em estruturas algébricas vemos representações do tipo $G = \langle g \rangle$, que simboliza um congunto G gerado por um de seus próprimos elementos. Na verdade somboliza um grupo, mas não vamos entrar em detalhes aqui sobre esse assunto.

Exemplo:

$$N = \langle 1 \rangle = \{1 \cdot n \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$$

Podemos escrecer os racionais também dessa forma. Observe.

$$\mathbb{Q} = \left\langle \frac{2}{7} \right\rangle = \left\{ \frac{2}{7} \cdot \frac{a}{b} \ ; a, b \in \mathbb{Z} \ b \neq 0 \right\}$$

Vamos tomar uma reta `s` e fixar um ponto considerando o como sendo 0(zero). Em seguida use o procedimento feito no capítulo anterior para representar os inteiros. Teremos o resultado abaixo.

Agora traçamos uma nova semi-reta pelo ponto 0 e por ponto p localizado no plano mas fora da reta, isto é, uma semi-reta oblíqua a reta anterior .

- Agora marque na semi-reta todos os inteiros positivos antecessores a p.
- Trace um segmento de reta que vai de p para $1 \in s$.

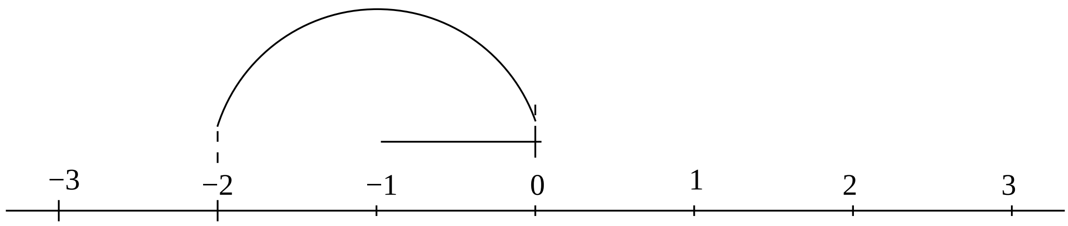

Figura 2.1: representação de $\mathbb{Z}$ na reta.

- Em seguida trace segmentos de reta paralelos ao segmento anterior passando pelos inteiros que estão entre 0 e p.

Observe!

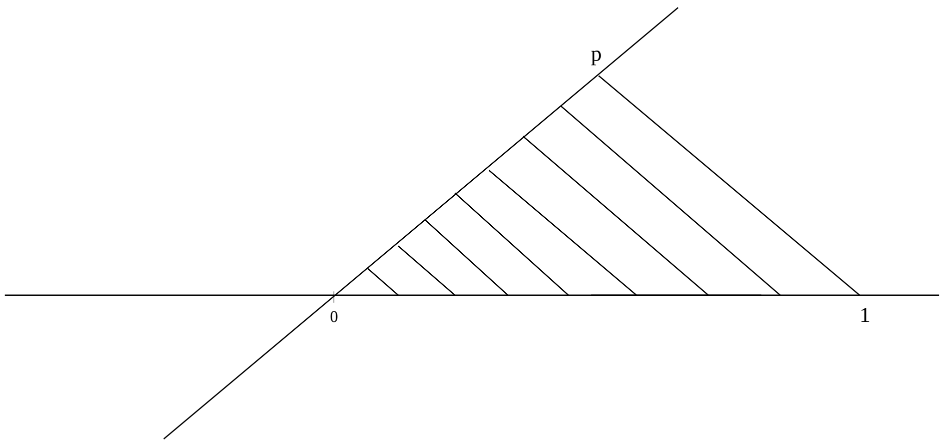

Figura 2.2: representação das fracções $\dfrac{1}{p}$ na reta.

Identificado os pontos de encontro dos segmentos paralelos com a reta s, temos que, por semelhança de triângulo os pequenos segmentos de reta entre 0 e 1 possuem a mesma medida $\dfrac{1}{p}$. E levados a diante representão sucessivamente as fracções:

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \frac{4}{p}, \frac{5}{p}, ..., \frac{p}{p} = 1$$

Note que, fazendo esse procedimento para $p = 7$ encontraremos a fração $\dfrac{2}{7}$ e então podemos deduzir as demais, uma vez que,

$$\mathbb{Q} = \left\langle \frac{2}{7} \right\rangle$$

Feito isso, podemos atentar agora para o fato de que, $\dfrac{\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{p}\right)}{2} \in \mathbb{Q}$, ou melhor, $\dfrac{\left(\dfrac{q}{p}+\dfrac{m}{n}\right)}{2} \in \mathbb{Q} \;\; ; \;\; \forall \;\; \dfrac{q}{p}, \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q},\; com\; p, n \neq 0.$

Apartir disso podemos deduzir algo muito interessante. $\mathbb{Q}$ possui uma infinidade de elementos, entre dois números racionais há sempre outro racional, a reta possui infnitos pontos. Será a reta o conjunto $\mathbb{Q}$?.

2.0.7 Número não racional na reta.

Vamos tentar resolver essa hipótese. Tomemos uma reta s e nela fixamos o ponto 0(zero) e a sua direita um ponto conveniente para 1. Utilizando um compasso, trasferimos a medida de uma unidade traçando um segmento perpendicular a s passando por 1. Em seguida unimos a extremidade superior do segmento ao ponto 0, formando assim um triângulo retângulo de hipotenusa h, como mostra a figura abaixo.

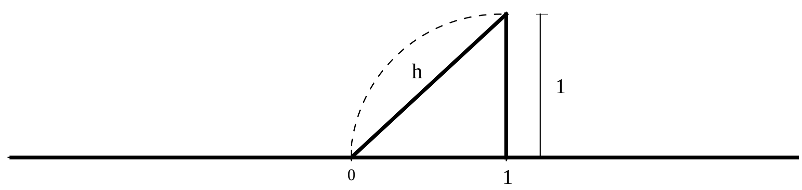

Figura 2.3: representação da $\sqrt{2}$ na reta.

Como sabemos, pelo teorema de `Pitágoras` $h = \sqrt{2}$. Novamente utilizando um compasso trancrevemos a medida $\sqrt{2}$ para a reta.

Observe:

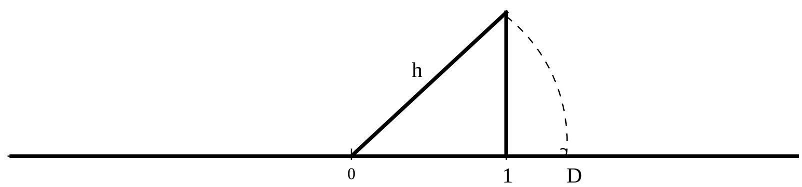

Figura 2.4: representação da $\sqrt{2}$ na reta.

Note que h é igual ao segmento $\overline{0D}$, isto é,

$$h = \overline{0D} = \sqrt{2}$$

Mas acontece que $\sqrt{2}$ não é racional!

Prova:

Considere $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Assim podemos escrever raiz de dois da forma, $\frac{p}{q}$ onde $mdc(p, q) = 1$. Seque-se que:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \ \Rightarrow (\frac{p}{q})^2 = (\sqrt{2})^2 \ \Rightarrow p^2 = 2q^2 \ (1)$$

Donde p é par, ou seja, $p = 2n$. Substituindo em (1) temos:

$$(2n)^2 = 2q^2 \ \Rightarrow 4n^2 = 2q^2 \ \Rightarrow q^2 = 2n^2$$

. Logo q também é par. **Absurdo!** Pois, o $mdc(p, q) = 1$. Portanto $\sqrt{2}$ não é `racional.`

Podemos ver então, que na reta existe outro conjunto além de $\mathbb{Q}$. Quebrando o que vinha acontecendo, esse novo conjunto não contém os raconais. Se o novo conjunto não contém elementos racionais podemos chamá-lo de `irracionais`, sombolizado pela letra $\mathbb{I}$. Que se resume em elementos obtidos calculando raízes quadradas de números naturais que não formam um quadrado perfeito como.

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, ...$$

Podemos calcular sucessivamente essas raízes quadradas de números naturais utilizando o mesmo procedimento que fizemos para calcular raiz de dois. No entanto, ao transcrevermos o segmento da hipotenusa do triângulo que se forma, fazemos isso traçando um círculo no plano. O que nos dará a esquerda de 0(zero) o valor negativo para o número encontrado, tipo $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$. Vejamos a figura abaixo para compreendermos melhor.

Agora traçamos uma parelala a reta `s` passando pelo ponto P. Em seguida translatamos o segmento de uma unidade para uma posição perpendicular à `s` e passando pelo ponto que representa raiz de dois. Assim teremos outro triângulo com a hipotenusa medindo $\sqrt{3}$ e assim sucessivamente para $\sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, ...$

Observe a figura 8 !

Assim podemos econtrar todos esse números que chamos de `Irracionais` e represená-los na reta. Note que Quando n é primo então $\sqrt{n}$ é irracional. Dessa forma chegamos a conclusão que os `Racionais` não compõe toda a reta.

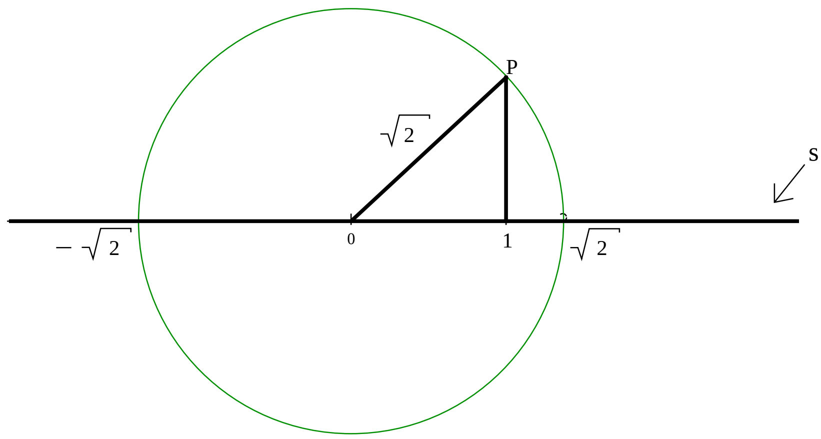

Figura 2.5: representação da $\sqrt{2}$ na reta.

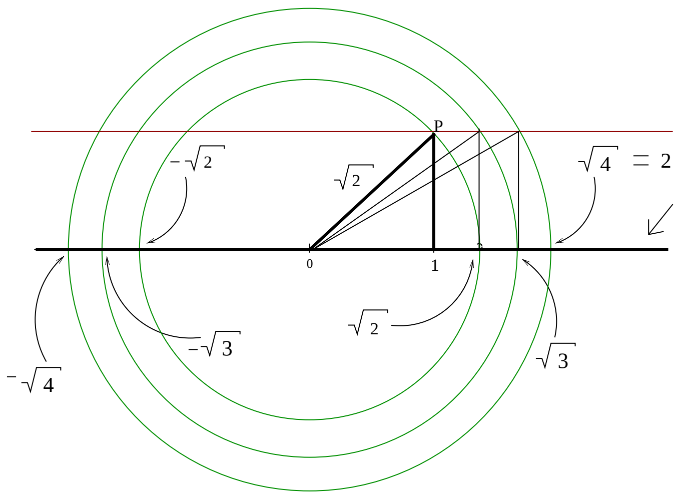

Figura 2.6: representação da $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{4}, \pm\sqrt{5}, ...$ na reta.

Existem hoje muitos números irraconais fundamentais na resolução de problemas matemáticos. Como $\pi, e, \mathit{\Phi}$ entre outras constantes conhecidas no âmbito dos cálculos.

2.0.8 Contexto Histórico

Historicamente, a primeira descoberta da existência dos números irracionais é atrubuída ao matemático `Hipaso de Metapondo`, um seguidor de `Pitágoras`. Acredita-se que Hipaso tenha feito uma demonstração(provavelmente gométrica) da raiz de dois ou do número de `ouro`, mostrando que não é racional.

O curioso, foi que a idéia não foi muito aceita por Pitágoras. Pois para ele, os novos números estavam fora dos padrões matemáticos. Pitágoras considerava por exemplo que a raiz de dois `"maculava"` até então a perfeição dos números, sendo assim não poderia existir. Em virtude disso, há uma lenda na qual diz que Pitágoras condenou seu seguidor ao afogamento.

A partir daí os números irracionais passaram a ser quase que esquecidos. Foi só com `Eudoxo de Cnido` que eles voltaram a ser estudados pelos gregos. Logo depois, o décimo livro da série de `Euclides` foi especialmente atribuído aos números irracionais. No entanto, foi somente em 1872, através do grande matemático alemão `Dedekind` (de 1831 a 1916) que os irracionais foram incorporados na aritmética.

2.0.9 Unindo $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{I}$

Conjunto R e nomenclatura

Até então vimos algo do tipo $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ e também que existe outro conjunto conhecido por $\mathbf{I}$ na reta que não contém $\mathbf{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ também não contém $\mathbf{I}$ concluímos.

$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \{\ \}$$

Como ambos representam os pontos da reta, ao unirmos $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{I}$ teremos outro conjunto bem mais autônomo do que os vistos até aqui. Podemos dar uma representação para esse novo conjunto, vamos por enquanto representá-lo apenas por $\mathbf{R}$ ou também por todos os pontos de uma reta. Dessa forma, daqui em diante teremos,

$$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$$

Assim $\mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos de uma reta.

Já que $\mathbb{R}$ representa os pontos de uma reta, então vamos adotar conceitos geométricos na representação dos elementos de $\mathbb{R}$. Em seguida, assim como foi feito com os demais, vamos definir operações em $\mathbb{R}$.

Nomenclatura dos elementos de $\mathbb{R}$

Assim como fazemos constantemente em cinemática ao escolhermos um referencial, um objeto por exemplo, para estudarmos fenômemos apartir desse obejeto que evidenciamos, podemos também fazer aqui a mesma metodologia para entendermos os novos elementos que temos. Dessa forma, ao trabalharmos com a reta vamos destacar um ponto, vamos apenas escolher de forma coerente um ponto representará o ponto zero. Os demais elementos ou pontos da reta serão representados tendo o zero como referência.

Definição 10 *Seja x pertencente a reta $\mathbb{R}$, x será representado pelo segmento de reta ou vetor $\overline{0x}$ que liga a origem(o ponto zero) a x que está na reta, ou seja, $x \rightarrow \overline{0x}$.*

Sendo o zero o nosso referencial, teremos a reta divida em duas semirretas, uma a direita de zero e a outra a esquerda. Assim a semirreta a direita será o conjunto $\mathbb{R}^+$ representando os elemenotos positivos de $\mathbb{R}$, sem dúvias será a semirreta que contiver o conjunto $\mathbf{Q}^+$. Analogamente, a semirreta a esquerda de zero repsenta o conjunto $\mathbb{R}^-$ ou os números positivos de $\mathbb{R}$, ou ainda, a semirreta que contiver o conjunto $\mathbf{Q}^-$.

Agora os elementos de $\mathbb{R}$ possuem uma natureza geométrica. Cada ponto x da reta será o segmento de reta(ou podemos chamar de vetor da reta) que vai da origem ao ponto x. A semirreta $\mathbb{R}^+$ cresce para direita de zero indicando sentido positivo, enquanto $\mathbb{R}^-$ cresce para esquerda indicando sentido negativo. Para este último caso, diremos somente que decresce. Em resumo, um número do conjunto $\mathbb{R}$ determina com a origem um segmento de reta no sentido positivo ou negativo. Observemos a figura abaixo que ilustra os pontos $x \in \mathbb{R}^+$ e $-x \in \mathbb{R}^-$.

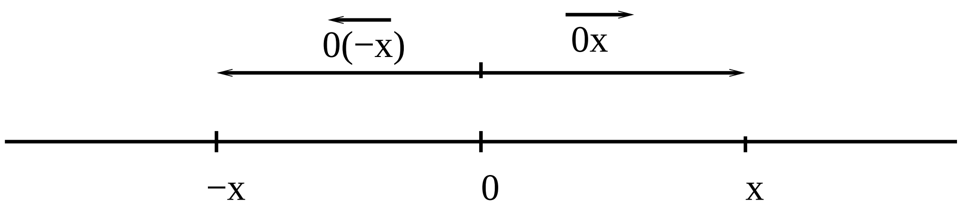

Figura 2.7: $-x = \overline{0(-x)}$ e $x = \overline{0x}$

Em virtudes de estarmos agora lidando com objetos geométricos, a verificação ou análise prática das definições que serão feitas aqui, se faz necessário o uso de algumas ferramentas principalmente compasso e esquadro.

Se pensarmos um pouco chegaremos a uma dedução um pouco clara. Como a união $\mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ representa o conjunto $\mathbb{R}$, que por sua vez equivale a todos os pontos da reta. Então $\mathbb{R}$ representa uma restrição do plano. Ou seja, possui elementos do plano a que pertence. Como podemos entender os pontos da reta como segmentos de reta ou vetores com a origem no ponto zero, estão vamos analisar primeiro algumas definições como soma, produto entre outras que ocorrem no plano. Apartir daí podemos particularizar casos dessas operações e definições para a reta.

2.0.10 O plano

Dado um ponto do plano, ele determina com a origem do sistema de eixos ortogonais um segmento de reta ou vetor dado por suas componentes, as coordenadas de seu afixo (x, y). Observe a figura abaixo.

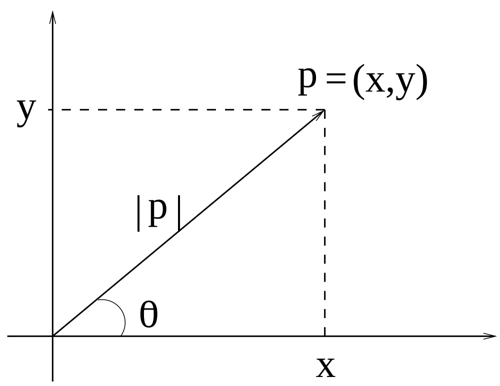

Figura 2.8: Ponto qualquer no plano.

Em que θ é chamado argumento de p ou somente $arg(p)$. O comprimento do segmento de reta que vai desde a origem ao ponto p é chamado módulo de p dado por,

$$|p| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

.

Assim o ponto p qualquer do plano pode ser entendido pelo próprio vetor que p forma com a origem. Na figura abaixo temos uma infinidade de vetores no plano que possuem direção e sentidos diferentes, mas com o mesmo módulo dado pelo raio da circunferência.

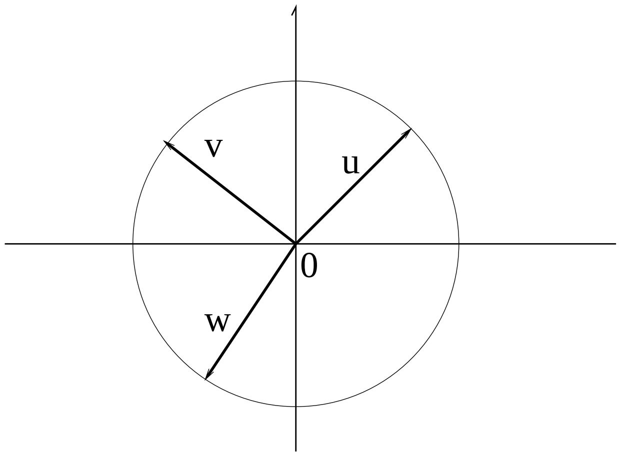

Figura 2.9: Módulo de um vetor

Definição 11 *SOMA: a soma de dois pontos ou vetores do plano é feita somando-se as componetes de um vetor com as respectivas componentes do outro. Dados p e q no plano, com $p = (x_1, y_1)$ e $q = (x_2, y_2)$. Temos,*

$$p + q = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Podemos também realizar graficamente a soma através da regra do paralelogramo.

Definição 12 *REGRA DO PARALELOGRAMO: para somarmos vetores no plano usamos a regra bastante conhecida, a regra do paralelogramo. Sejam dois vetores* **u** *e* **v** *no plano, então a soma se resume unindo a extremidade de um vetor com a origem do outro.*

Observe a figura a seguir em que **u** e **v** são dados por suas componentes.

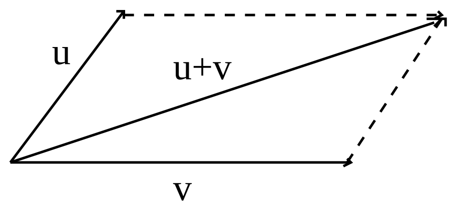

Figura 2.10: soma dos vetores **u** e **v**.

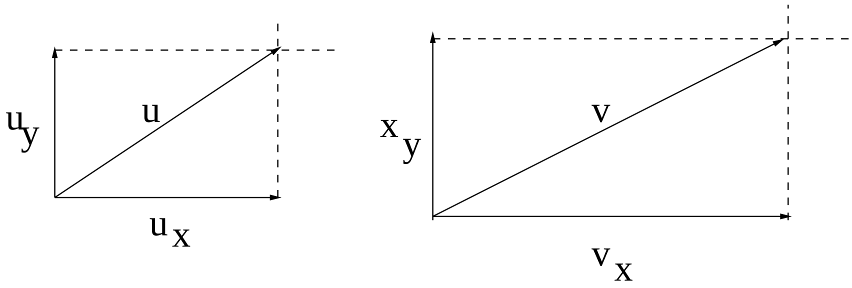

Figura 2.11: $\mathbf{u} = \mathbf{u_x} + \mathbf{u_y}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v_x} + \mathbf{v_y}$.

Perceba que a diferença se deduz da soma, isto é, $x - y = x + (-y)$. Assim podemos calcular também a diferença quando já sabemos fazer a soma. Na verdade a diferença acompanha também a regra do paralelogramo. Analisemos a figura abaixo.

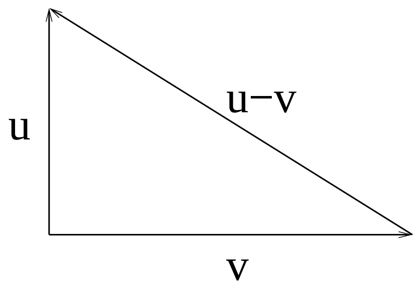

Figura 2.12: Diferança $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Todo vetor no plano possui seu inverso aditivo encontrado através de uma rotação de π. Ou seja, dado um vetor $\mathbf{u}$ no plano basta adicionarmos π ao seu argumento e encontraremos outro veror $\mathbf{u}'$, talque

$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = 0$$

Da operação adição no plano podemos citar as seguintes propriedades

- Dados $u = (x_1, y_1)$, $\;v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$ com u, v e w pertencentes ao plano, então

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

Da mesma forma acontece com a soma de vetores, pois é a mesma prática.

$$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$$

- Também como já foi dito, todo ponto do plano que representa um segmento de reta ou vetor com a origem, definido por suas coordenadas ou componentes, possui seu inverso aditivo encontrado com uma rotação de π.

- Temos ainda, para qualquer ponto $z = (x, y)$ do plano, a soma de z com o ponto $e = (0, 0)$ resulta em z, isto é, é,

$$z + e = (x, y) + (0, 0) = (x, y) = z$$

- A soma de pontos no plano também é comutativa, ou seja,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

Sem maiores dúvidas, o plano representa um conjunto que forma `grupo aditivo.`

Definição 13 `PRODUTO NO PLANO:` *Dados $p = (x_1, y_1)$ e $q = (x_2, y_2)$ o produto $p \cdot q$ é definido por*

$$p \cdot q = (x_1, y_2) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - x_1y_2 \ , x_1y_2 + y_2x_2)$$

Em que $|p \cdot q| = |p| \cdot |q|$ e além disso, $arg(pq) = arg(p) + arg(q)$. Observe o gráfico abaixo.

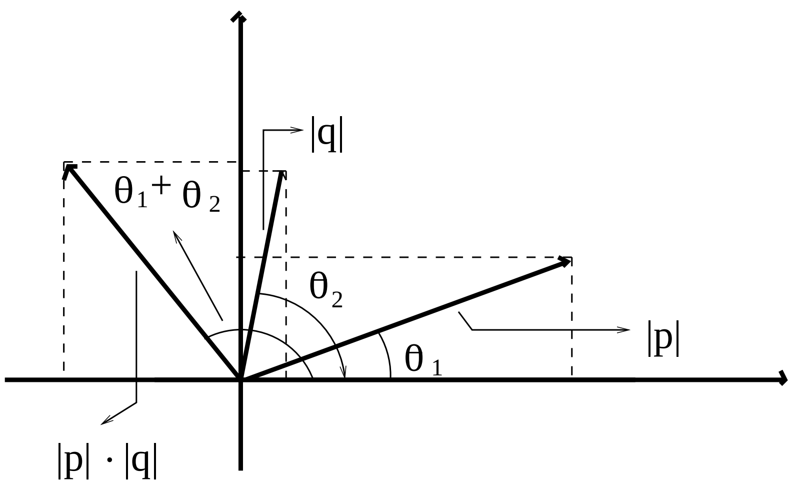

Figura 2.13: $|p \cdot q| = |p| \cdot |q|$.

Conhecido o produto no plano, vamos destacar agora as propriedades relativas a esta operação.

- **Associatividade**

$$(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)] = [(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)$$

- **comutatividade**

$$(a,b)\cdot(c,d) = (c,d)\cdot(a,b)$$

- **elemento neutro**

$$(x,y)\cdot(1,0) = (1,0)\cdot(x,y) = (x,y)$$

- **Elemento inverso**. Seja $(x,y) \neq (0,0)$ pertencente ao plano existe $(x,y)^{-1}$ no plano talque,

$$(x,y)\cdot(x,y)^{-1} = (1,0)$$

além disso $(x,y)^{-1} = \left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$

- **Distributividade**

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)] = (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$$

Com essas propriedade podemos então dizer que o conjunto dos pontos do plano exceto $(0,0)$ forma `grupo comutativo.` Apartir do conhecimento que já temos em relção ao plano, podemos estudar casos particulares nesse conjunto, como por exemplo, o conjunto $\mathbb{R}$, já que repesenta o conjunto dos pontos da reta.

Capítulo 3

Conjunto $\mathbb{R}$ e propriedades

Tomando como base o plano é que vamos particularizar casos espacíficos para a reta, já que o plano possui uma represenatação geométrica mais autônoma do que $\mathbb{R}$.

Analisando a definição de soma no plano pela regra do paralelogramo como podemos repassar essa idéia para os pontos da reta?

Basta adimitirmos que temos um paralelogramo incomum, mas válido. Observe que podemos imaginar a transformação de um paralelogramo formado por vetores quaisquer e um ângulo α.

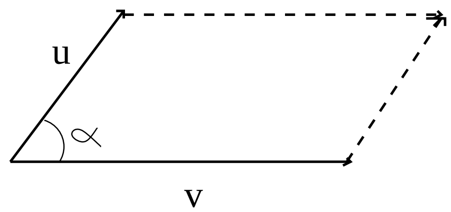

Figura 3.1: paralelogramo qualquer.

A medida que α diminui, os vetores vão ficando mais próximos de se encontrarem na mesma reta. Quando $\alpha = 0$ teremos um paralelogramo degenerado com os vetores na mesma reta. É dessa forma que podemos entender a soma de segmentos pertencentes a reta $\mathbb{R}$, da mesma maneira que a soma de vetores do plano. O uso do paralelogramo se torna muito especial para o que queremos, pois permite transferir segmentos de reta ou vetores sem perder módulo, direção e sentido. Podemos transferir segmentos da reta $\mathbb{R}$ utilizando compasso.

3.0.11 Soma em $\mathbb{R}$

Definição 14 *SOMA. A soma será feita utilizando um compasso para transferir a origem de segmentos de reta ou vetores para a extremidade do outro.*

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^{+}$, acompanhe a figura abaixo. Transferindo a origem do segmento ou vetor $\overrightarrow{0x}$ para a extremidade de $\overrightarrow{0y}$ teremos como vetor resultante $\overrightarrow{0x} + \overrightarrow{0y}$ ou somente o ponto $x + y$ da reta $\mathbb{R}$.

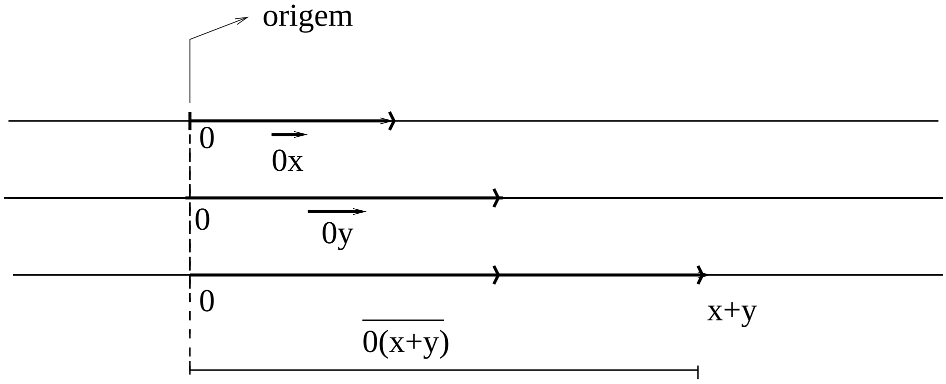

Figura 3.2: $x, y \in \mathbb{R}^{+}$

A diferença também pode ser interpretada através da adição. Pois,

$$x - y = x + (-y)$$

Mas para isso precisamos do inverso aditivo de y. Para encontrarmos o inverso aditivo de $y \in \mathbb{R}$ fazemos o mesmo passo realizado no plano, isto é, fazemos uma rotação de π com o segmento de reta ou vetor $\overline{0y}$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^{+}$, acompanhe a figura abaixo. Encontrando o inverso aditivo de $\overrightarrow{0y}$, então podemos efetuar a diferença $\overrightarrow{0x} - \overrightarrow{0y} = \overrightarrow{0x} + (-\overrightarrow{0y})$.

Em seguida aplicamos a propriedade da soma para $\overrightarrow{0x} + (-\overrightarrow{0y})$, ou seja, unimos a origem de um com a extremidade do outro para encontrar o vetor resultante.

Agora que sabemos também calcular a diferença utilizando uma rotação de π vamos destacar o que de fato essa rotação representa na reta.

Definição 15 *MUDANÇA DE SINAL. Dado um ponto x qualquer da reta ou conjunto $\mathbb{R}$, podemos aplicar uma regra que estabelece uma mudança de sinal para x. A mudança de sinal encontra o outro vetor da reta que possui mesmo*

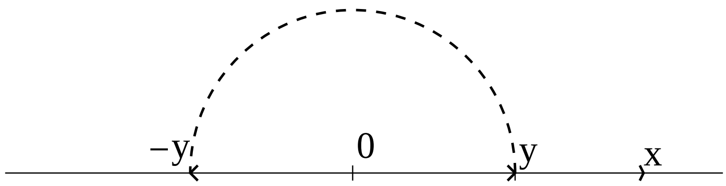

Figura 3.3: Rotação de π

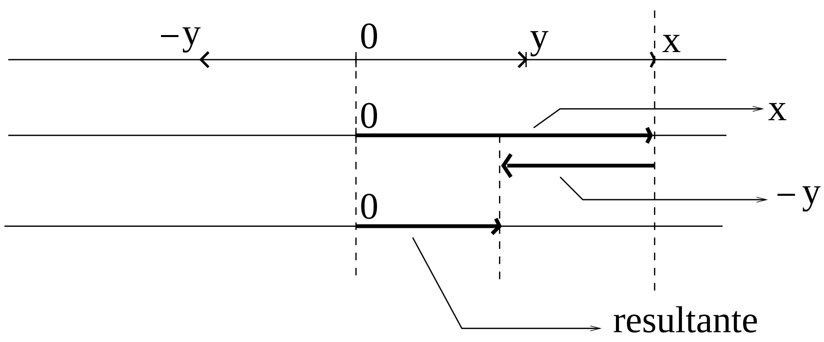

Figura 3.4: Diferança $x - y \ : \ x, y \ \in \mathbb{R}$

módulo de x, no entanto, com sentido contrário. A mudança de sinal é feita com o mesmo passo realizado no plano quando deseja-se determinar o inverso aditivo de um vetor. Portanto, através de uma rotação de π.

Podemos deixar claro ainda o que representa o segmento de reta que um ponto na reta forma com a origem.

Definição 16 *MÓDULO. Dado um ponto x qualquer da reta ou conjunto $\mathbb{R}$, o módulo de x é o segmento de reta ou vetor determinado pela distância da origem(ponto zero) ao ponto x. Asssim,*

$$|x| = \overrightarrow{x} = \overline{0x}$$

Podemos perceber que o módulo na reta na verdade é uma adapatação do plano. No plano temos infinitos pontos que determinam segmentos de retas de mesmo comprimento, dizemos que podemos ter infitos pontos com mesmo módulo. Já na reta teremos apenas dois, x e $-x$. Assim,

$$|x| = r = |-x| \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Conhecida essas definições, analisemos a soma de forma mais detalhada.

A soma de elementos do conjunto $\mathbb{R}$ assumirá valores na semirreta $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$, dependendo de alguns casos.

- Sejam $x_1, x_2 \ \in \mathbb{R}^+$ então a soma

$$(x_1 + x_2) \in \mathbb{R}^+$$

- Se $x_1, x_2 \ \in \mathbb{R}^-$ fazemos primeiro a soma dos módulos depois fazemos uma rotação de π para o resultado. Assim teremos

$$x_1 + x_2 = -(|x_1| + |x_2|) \Rightarrow \ x_1 + x_2 \in \mathbb{R}^-$$

- Se $x_1 \in \mathbb{R}^+$ e $x_2 \in \mathbb{R}^-$. Neste caso a soma pertencerá a semirreta $\mathbb{R}^+$ quando $|x_1| > |x_2|$. Caso contrário o resultado da soma pertencerá a semirreta $\mathbb{R}^-$.

Como não poderia deixar de ser, os pontos de $\mathbb{R}$, por ser uma restrição do plano, logo também forma grupo aditivo. Onde.

- Dados $x_1, x_2, x_3 \ \in \mathbb{R}$ temos.

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$$

- O ponto zero é o elemento neutro para esta operação.

$$x + 0 = x, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$$

- Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe seu inverso aditivo ou elemento simétrico denotado por $(-x)$ encontrado com a rotação de π, talque,

$$x + (-x) = 0$$

Além disso a soma também é comutativa. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ então,

$$x + y = y + x : \ \forall \in \mathbb{R}$$

Vamos analisar agora a operação multiplicação no conjunto $\mathbb{R}$.

3.0.12 Produto em $\mathbb{R}$

Definição 17 *PRODUTO NA RETA. O produto de dois elementos x_1 e x_2 da reta será feito restringindo a definição feita no plano.*

- Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. Neste caso o produto será feito da seguinte forma,

$$x_1 \cdot x_2 = |x_1| \cdot |x_1| \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}^+$$

- Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$. O produto é análogo ao ítem anterior.

$$x_1 \cdot x_2 = |x_1| \cdot |x_1| \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}^+$$

- Se $x_1 \in \mathbb{R}^+$ e $x_2 \in \mathbb{R}^-$ Neste caso calculamos primeiro o produto dos módulos, em seguida fazemos uma rotação de π para o resultado. Como a rotação de π corresponde a troca de sinal, então teremos,

$$x_1 \cdot x_2 = -(|x| \cdot |y|) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}^-$$

Observe que cada ponto da reta determina com a origem um segmento de reta que possui argumento igual a zero ou argumento igual a π, ou seja,

$$arg(x) = 0 \ ou \ \pi \ \ \forall \, x \in \mathbb{R}$$

O que determina o $arg(x)$ é sua posição na reta. Se $x \in \mathbb{R}^+$ então o segmento ou vetor que ele determina tem argumento zero. Agora se $x \in \mathbb{R}^-$, daí segue-se que o $arg(x)$ é π. Assim, quando efetuamos o produto qualquer $x_1 \cdot x_2$ na reta a soma de seus argumentos é zero ou π, o que implica $(x_1 \cdot x_2) \in \mathbb{R}$

Definição 18 *Seja $x \in \mathbb{R}$, se $x \in \mathbb{R}^+$ então $arg(x)$ é 0. Caso contrário, se $x \in \mathbb{R}^-$, isso implica $arg(x)$ igual a π.*

O produto de elementos do conjunto $\mathbb{R}$ também adimite propriedades em relação a multiplicação. Assim teremos.

- Dados $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ então é válidada a associatividade em relação ao produto.

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$$

- Existe o elemento neutro para essa operação denotado pelo segmento $\overline{01}$ de origem no ponto zero e extremo no ponto 1. Tal que.

$$x \cdot 1 = x \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

- Existe para cada $x \ \in \mathbb{R}$ seu inverso multiplicativo denotado por $\dfrac{1}{x}$ talque,

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

Assim, conslui-se que $(\mathbf{R}, \cdot)$ é `grupo multiplicativo`.

3.0.13 O corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$

Agora que temos um conjunto bem mais amplo, o conjunto formado por todos os pontos da reta ou somente a reta, vamos analisar também as propriedades que relacionam soma com produto e ainda a relação de ordem envolvendo estas operações.

Já que estamos lidando com a reta, com objetos geométrico, podemos dar um argumento justificando a distributividade relativamente à soma.

Observe que nossos elementos são seres geométricos, então podemos fazer uma analogia com o cálculo de áreas. A área de um retângulo por exemplo, é nada mais do que o produto de elementos da reta, pois é o produto de segmentos de reta. Observemos a figura seguinte.

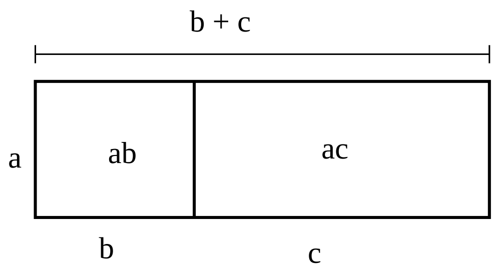

Figura 3.5: Propriedade distributiva.

Como estamos trabalhando com um conjunto que pode ser representado geometricamente por uma reta e que possui infinitos segmentos de reta, podemos trabalhar estes segmentos para o cálculo da área da figura acima.

Calculando a área do retângulo maior teríamos

$$A_T = base \cdot altura = a(b + c)$$

Para o cálculo dos outros retângulos disjuntos teríamos

$$A_{T1} = ab \quad e \quad A_{T2} = bc$$

Mas da figura segue-se que

$$A_T = A_{T1} + A_{T2} \quad \Rightarrow \quad a(b + c) = ab + bc$$

Portanto é verdade que vale a `distributividade`.

Assim, vemos que $\mathbb{R}$ também é subgrupo comutativo do plano. O que o torna um conjunto muito utilizado na resolução de probblemas.

TEOREMA 01

`Adição e desigualdade.`

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \geq y$ então

$$x + z \geq y + z$$

Caso contrário, se $x \leq y$ então teremos,

$$x + z \leq y + z$$

Demonstração:

Vamos tomar dois pontos x, y da reta tais que $x > y$ em seguida um outro ponto qualquer, depois efetuamos a soma. Ora, se $x > y$ então x está a direita de y. Quando translatarmos os vetores que estes pontos formam com a origem, seguindo a regra da soma. Então a soma $x + z$ permanecerá a direita de $y + z$. Acompanhe os passos na seguinte.

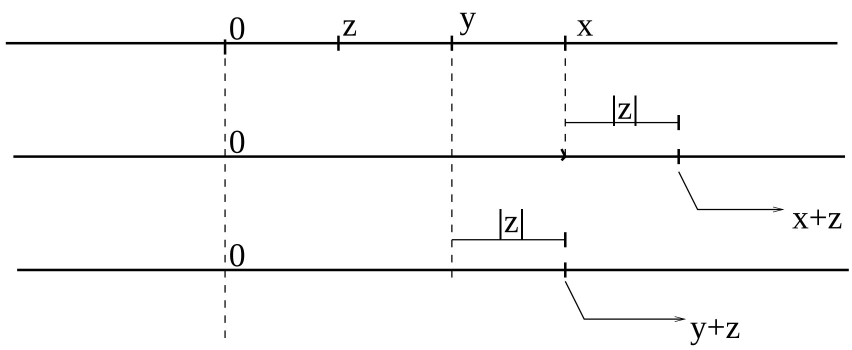

Figura 3.6: Adição e desigualdade $x + z > y + z$

Observe que $x + z$ sempre permanecerá a direita de $y + z$ quando $x > y$. Para $x < y$ o procedimento geométrico é análogo a este, a diferença é que x será identificado na reta a esquerda de y e consequentemente $x + z$ ficará a esquerda de $y + z$.

TEOREMA 02

`Multiplicação e desigualdade.`

Dados $x, y, z \in \mathbf{R}$. Se $x \leq y$ e $z \geq 0$. Então

$$xz \leq yz$$

Agora se $z \leq 0$, logo teremos,

$$xz \geq yz$$

Demonstração:

Primeiro observe que se um número do conjunto $\mathbb{R}$ é positivo então ele possui argumento igual a zero. Sejam x, z positivos, como $|xz| = |x||z|$ e além disso $arg(xz) = arg(x) + arg(z)$. Então $arg(xz)$ é zero pois $arg(x)$ e $arg(z)$ é zero. Portanto o produto de positivos é positivos.

Assim para o primeiro problema temos.

Se $z \geq 0$

$$x \leq y \Rightarrow y - x \geq 0 \Rightarrow z(y - z) \geq 0 \Rightarrow zy - zx \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$$

Agora observemos a figura 20..

Podemos perceber que $arg(x)$ é zero, enquanto o $arg(-x)$ é π. Se multiplicarmos $-x$ por y qualquer na semirreta $\mathbb{R}^-$ teremos.

$$arg(-xy) = arg(-x) + arg(y) = arg(x) \Rightarrow xy \in \mathbb{R}^+$$

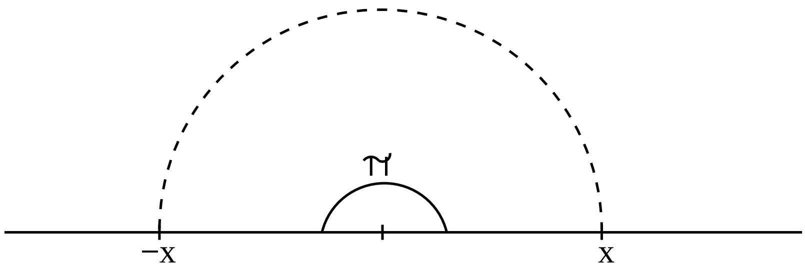

Figura 3.7: Rotação de π.

Portanto o produto de negativos é negativo.

Voltando ao que queremos mostrar, se $x \leq y$ e $z \leq 0$ segue-se que,

$$x - y \leq 0 \;\Rightarrow z(x-y) \geq 0 \;\Rightarrow zx - zy \geq 0 \;\Rightarrow zx \geq zy$$

Falamos muitas coisas aqui sobre $\mathbb{R}$. Que esse cojunto é composto por todos os pontos de uma reta. Sem perda de generalidade $\mathbb{R}$ é a reta. Vamos chamá-la de reta `REAL` ou `CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS`.

<u>TEOREMA FUNDAMENTAL</u>

De acordo com as proprieades vistas aqui sobre os números reais, chegamos a conclusão que a reta real é um conjunto que munido de suas operações forma um corpo ordenado. Assim temos, `existe um corpo ordenado completo chamado corpo dos números reais.`

3.0.14 Imcompletitude álgebrica de $\mathbb{R}$

Agora que já estamos quase dando por satisfeitos com o último conjunto que estudamos, definimos e analisamos suas propriedades em relação as operações mais predominantes, soma e produto. Podemos começar a analisar e tentar resolver vários tipos de equações.

Vamos diretamente ao ponto, observemos a equação abaixo.

$$x^2 + 1 = 0$$

Se colocarmos em prática os conhecimentos que já temos na resolução de equações do segundo grau, ou melhor, resolvendo de forma simples, chegaremos ao seguinte resultado para x.

$$x = \sqrt{-1}$$

O mesmo que,

$$x^2 = -1 \;\Rightarrow x \cdot x = -1$$

Vamos tentar resolver esse problemas com números `reais`.

- Se $x \in \mathbb{R}^+$ então.

  $$x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$$

  pois como vimos anteriormente

  $$arg(x \cdot x) = arg(x) + arg(x) = 0$$

- Nos resta apenas quando $x \in \mathbb{R}^-$. Dessa forma teremos

  $$x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$$

  Como também foi dito na última seção, quando $x \in \mathbb{R}^-$ o $arg(x) = \pi$. Donde

  $$arg(x \cdot x) = arg(x) + arg(x)$$

  Mas na reta o tanto faz o argumento 2π como $0(zero)$ é indiferente.

Portanto a equação não apresenta solução no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, a reta real. Assim, vemos a necessidade de novamente estender os conceitos que já temos aliando os com outras idéias com o objetivo de resolver problemas que envolvam raiz quadrada de números negativos.

Capítulo 4

Construindo $\mathbb{C}$

Antes de tudo é bom estabelecermos de ínicio as finalidades pretentidas nesse capítulo. Devido a imcompletiude algébrica de $\mathbb{R}$ queremos um conjunto mais abrangente na solução de equações matemáticas, algo novo e diferente dos demais elementos que vimos aqui. Não entenda a diferença como uma abordagem mais complica, na verdade essa diferença se estabelecerá apenas pela aparência estética dos elementos.

Se tratando do plano, temos todos os "ponto iguais", pois não diferenciamos um ponto do outro apenas pela observação. É o mesmo que foi dito anteriormente para a reta. A `reta real` é formanda por uma união infinita de pontos, esteticamente os pontos são os mesmos, no entanto fizemos uma referência utilizando o número zero e estabelecemos os demais números na reta como distâncias do ponto zero. Para se ter uma idéia mais intuitiva dessa observação, não sabemos diferenciar os dias da semana dos outros, dizemos que é segunda, terça, etc. Devido uma adptação do tempo orbital do nosso planeta ao dar uma volta em torno do sol, e restringimos a dados e tempos mais curtos, as semanas. Além disso não sabemos se é domingo ou segunda pelo nascer do sol por exemplo, nem por outo fenômeno natural.

Estudaremos aqui a formação do plano gerado por duas retas perpendiculares, pelo que já temos será a reta $\mathbb{R}$. Assim tomemos um sistema formado por duas retas perpendiculares, a reta real. Embora as retas sejam a mesma, representemos na horizontal por x e na vertical por y. Novamente vamos tomar como nosso referencial o zero, no entanto, o zero será apenas o primeiro referecial que tomaremos nesse conjunto. Daí, as retas se interseptam justamente no ponto $(0, 0)$.

Como mostra a figura abaixo.

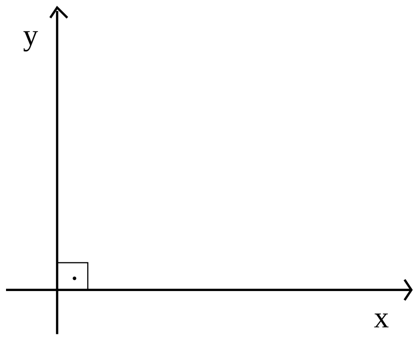

Figura 4.1: Sistema de retas ortogonais.

Como o nosso trabalho agora será baseado no plano acima, vamos introduzir as regras básica do jogo. Tomaremos como conhecimento primitivo algumas propriedades sobre ponto, reta, ângulo, enfim alguns axiomas da geometria euclidiana, dados como pressupostos já inerentes ao nosso conhecimento. Assim, não precisaremos fundamentar certas operações da geometria no plano.

Um ponto p qualquer no plano será designado por (x, y) ou seja, $p \equiv (x, y)$. Além disso,

$$\mathbb{R} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

O nosso ponto de partida será o ponto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$, será chamado de unidade imaginária representado pela letra i

$$i = (0, 1)$$

Assim fazendo o cálculo de i^2 temos.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \Rightarrow i^2 = -1$$

Voltando a equação dada anteriormente,

$$x^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow x^2 = -1$$

teremos $i = (0, 1)$ como resultado da incógnita. Em particular as equações do segundo grau que apresentarem o discriminante menor que zero, isto, o $\triangle$(delta) negativo passaram a ter raízes, desde que sejam chamadas raízes imaginárias.

Para qualquer ponto (x, y) no plano estabelecido, teremos.

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & = & (x,0)+(0,y) \\ & = & x+y(0,1) \\ & = & x+yi \\ \Rightarrow (x,y) & = & x+yi \end{array}$$

Definição 19 ***NÚMEROS COMPLEXOS.*** *O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos representa o conjunto de todos os pares ordenados escritos da forma:*

$$\mathbb{C} = \{x + yi \ : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Assim um número complexo representa uma extenção do conjunto $\mathbb{R}$. Também podemos nos referir a um número complexo como sendo, $x + yi \equiv (x, y)$

Para melhor didática do assunto podemos trabalhar com nomes diferentes o número que acompanha a unidade imaginária e o que não acompanha. Dessa forma, dado um número complexo $z = x + yi$ temos,

- x representa a parte real de z, ou somente, $Re(z)$
- y representa a parte imaginária de z, ou somente, $Im(z)$

Agora olhando paro lado geométrico da situação, a unidade imaginária determina um segmento de reta no plano medindo uma unidade.

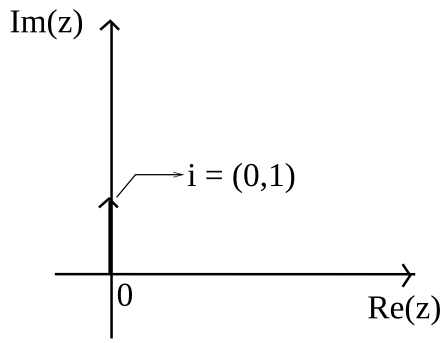

Figura 4.2: Plano complexo

Da mesma forma ocorre com os demais números complexos. Ao escrevermos um número $z = x + yi$ da forma $z = (x, y)$ estamos tirando indiretamnete o conceito de complexo, pois estamos introduzindo natureza geométrica, já que um ponto qualquer no plano determina um segmento de reta com a origem dos eixos. Observe os números complexos no plano abaixo.

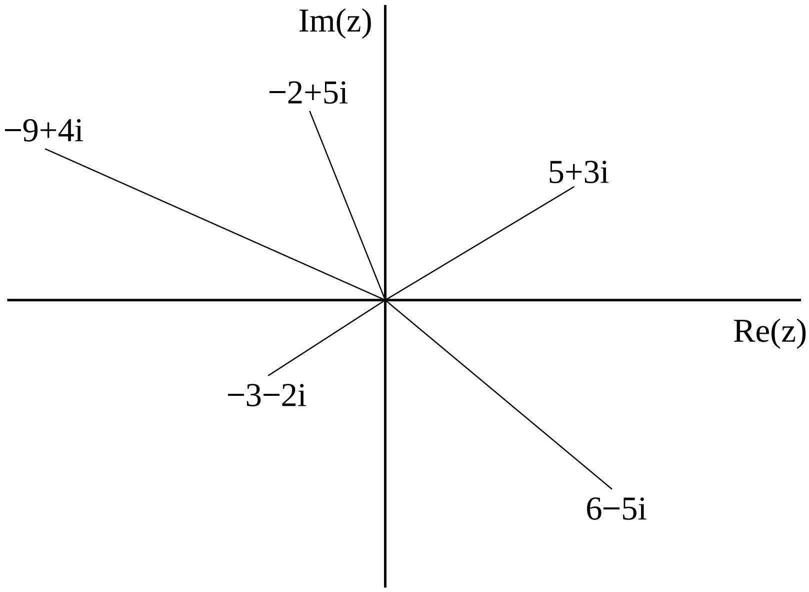

Figura 4.3: Representação geométrica de alguns complexos.

Ao trabalharmos com o número complexo genérico tanto faremos referência a nomenclatura $a + bi$ como $x + iy$, ou ainda (x, y)

4.0.15 Operações em $\mathbb{C}$

Definição 20 *SOMA: A soma de números complexos tembém acompanha a soma de vetores no plano, ou seja, somando-se as componentes de um com as respectivas componentes do outro.*

Dados $z = a + bi$ e $w = c + di$. Temos,

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a, b) + (c + d) \\ &= (a + c, b + d) \\ \Rightarrow z + w &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

O que geometricamente nos dá a mesma regra do paralelogramo, isto é, unindo a origen do segmento que $z = a + bi$ determina, com a extremidade do segmento que $w = c + di$ determina. Observe a figura 4.4.

O mesmo acontece com o módulo de um número complexo. É a medida do segmento de reta que seu afixo forma com o ponto $(0, 0)$, a origem dos eixos.

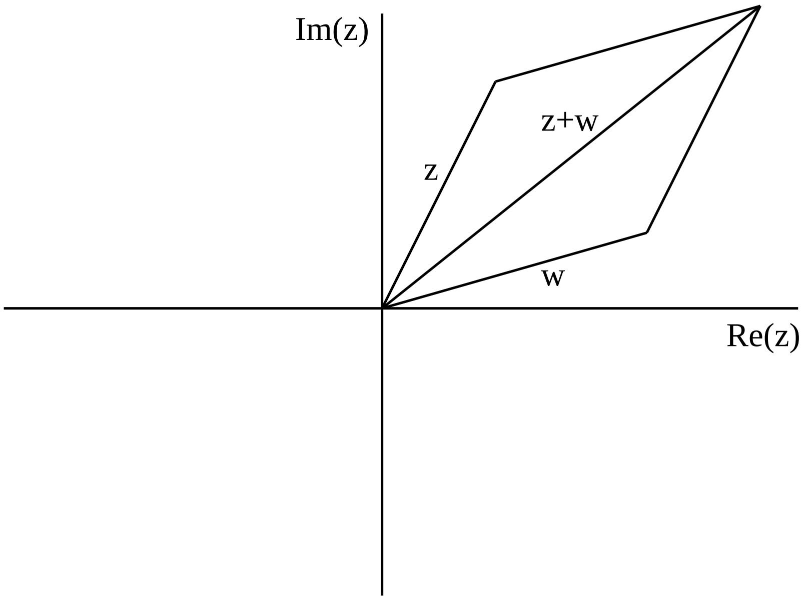

Figura 4.4: Adição geométrica de complexos.

Donde segue-se que para qualquer $z = a + bi$, com $z \in \mathbb{C}$ tem-se.

$$\begin{aligned} |z| &= |(a+bi)| \\ &= |(a,b)| \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \Rightarrow |z| &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Geometricamente temos

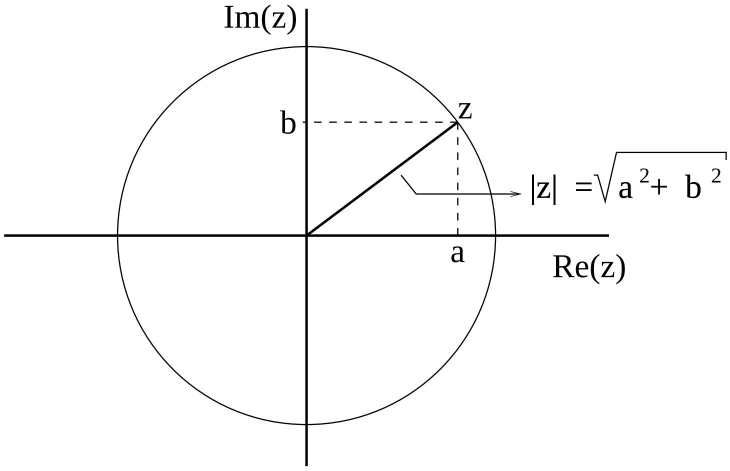

Figura 4.5: Módulo de um número complexo.

Assim como os números reais formavam segmentos de reta que por sua vez possuiam seus respectivos argumentos, um número complexo também contém essa característica, pois representam pontos no plano, os pares ordenados (x, y), com $x, y \in \mathbb{R}$. A diferença apenas se estabelece pelo fato de que na reta cada elemento tem argumento igual a zero ou π, já no plano teremos os elementos com seus respectivos argumentos no intervalo $[0, 2\pi]$.

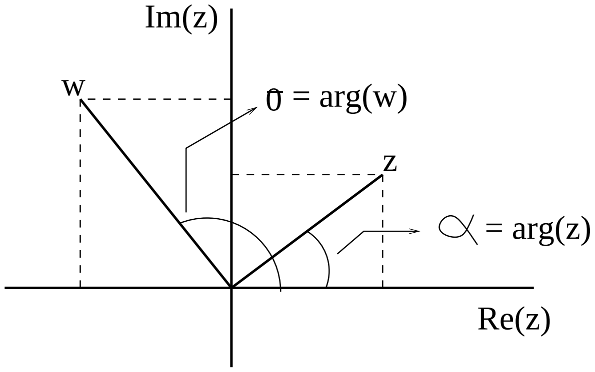

Figura 4.6: Argumento de $z = a + bi$

Assim, o conjunto dos números reais positivos é o subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que os seus elementos têm argumento igual a zero. Já os reais negativos, é o subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que os seus elementos têm argumento igual a π.

No capítulo anterior, dizemos que o produto de números reais é uma restrição do produto ralizado no plano. Para o caso dos complexos temos uma extenção da multiplicação em $\mathbb{R}$.

Definição 21 *PRODUTO EM* $\mathbb{C}$. *A multiplicação de números complexos é feita muliplicando os pares de números como fazemos com a propriedade distributiva no conjunto* $\mathbb{R}$

Dados dois complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ temos.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bdi^2 + adi + bci \\ &= ac - bd + (ad + bc)i \\ \Rightarrow z \cdot w &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Lembre-se de que,

$$i = (0, 1) \;\Rightarrow\; i^2 = -1$$

Trazendo para o plano visualizamos nelhor a multiplicação. Pois, no plano temos,

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Além disso,

$$arg(zw) = arg(z) + arg(w)$$

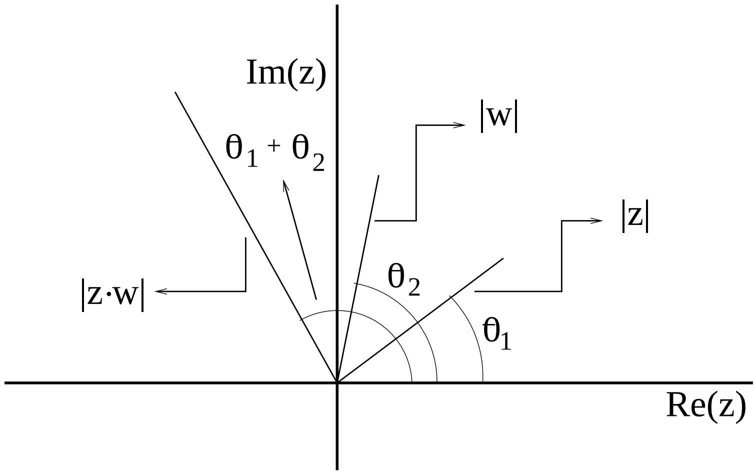

Figura 4.7: Argumento de $z = a + bi$

O número complexo $z = 1 + 0i$ é o elemento neutro para esta operação. Assim $\forall z \in \mathbb{C}$ temos,

$$z \cdot (1 + 0i) = z$$

Existe para cada $z \in \mathbb{C}$ um elemento denotado por $\overline{z}$ chamado conjugado de z. Dado um número compelexo $z = a + bi$ o seu conjugado é $\overline{z} = a - bi$. Assim, para encontrar o conjugado de z basta substituirmos a parte imaginária pelo seu inverso aditivo. Dessa forma teremos, $|z| = |\overline{z}|$. Geometricamente representa a figura abaixo.

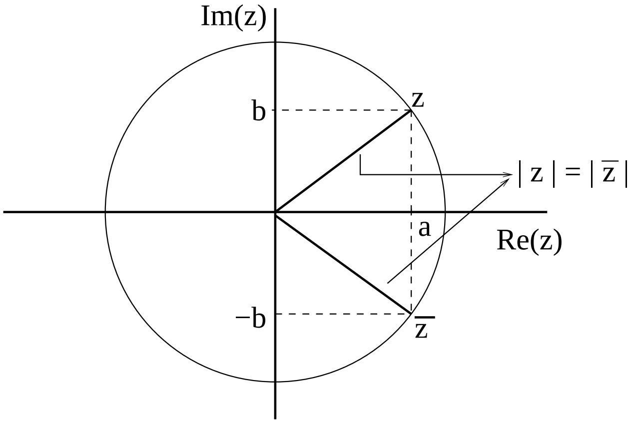

Figura 4.8: $|z| = |\overline{z}|$

Temos também para cada $z \in \mathbb{C}$ seu inverso aditivo ou elemento simétrico. Donde, o inverso aditivo de um número complexo qualquer é encontrado da mesma forma que fazemos no plano, com uma rotação de π. Pois $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, basta substituirmos a parte real e imaginário pelos seus respectivos inversos aditivos. Daí,

$$z = a + bi \Rightarrow z_s = -a - bi \Rightarrow z + z_s = (0, 0)$$

Evidentemente no plano temos,

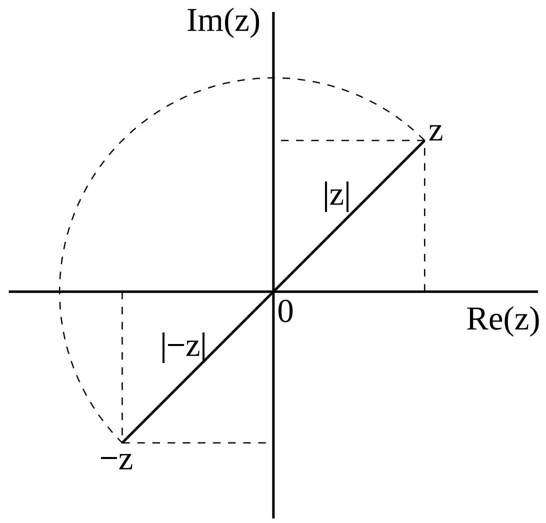

Figura 4.9: Inverso aditivo ou simétrico.

4.0.16 Propriedades em $\mathbb{C}$

Assim como fizemos para os demais conjuntos visto aqui, é importante também conhecermos as propriedades no conjunto $\mathbb{C}$. As propriedades são as "defesas" de um conjunto, é que fala mais alto em um grupo de elementos, são elas que mostram o quão é abrangente e autônomo o conjunto.

Sobre a adição

Observe que temos agora o conjunto de pares ordenados com coordenadas reais, o conjunto dos números complexos, onde $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. Assim teremos;

- A soma é comutativa. Dados $z = a + bi$ e $w = c + di$. Daí segue-se que

$$z + w = w + z$$

- Também é validada a associatividade da soma. Para quaisquer $z, w, k \in \mathbb{C}$ temos,

$$z + (w + k) = (z + w) + k$$

- O número complexo $e = 0 + 0i \equiv (0, 0)$ é o elemento neutro para essa operação. Onde, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z + e = z$$

- Como vimos anteriormente existe para cada $z = a + bi \in \mathbb{C}$ seu inverso aditivo ou elemento simétrico $z_s = -a - bi$ talque,

$$z + z_s = (0, 0)$$

Logo, conlcui-se que a estrutura $(\mathbb{C}, +)$ forma `grupo aditivo abeliano.`

Não vamos demonstrar todas as proprieadedes citadas neste capítulo, mas podemos dar um suporte ao leitor, uma dica de como tais propriedades podem ser verificadas.

Como os complexos representa o plano formado por pontos com coordenadas reais, então observe o caso da comutatividade relativamente à soma.

Dados $z = a + bi$ e $w = c + di$, da soma segue-se que

$$\begin{array}{rcc} z + w & = & (a + bi) + (c + di) \\ & = & (a, b) + (c, d) \\ & = & (a + c, b + d) \\ & = & (c + a, d + b) \\ & = & w + z \\ \Rightarrow z + w & = & w + z \end{array}$$

Note que comutamos $a + c$ e $b + d$ dentro do par ordenado, isso se justifica pois já sabemos somar números reias, além disso a soma de segmentos da reta real é comutativa, como vimos no capítulo anterior.

A verificação das outras propriedades em relação a soma seque um caso análogo a este último. Um bom exercício para o leitor.

Sobre o produto

- É válida a associatividade. Dados $z, w, k \in \mathbb{C}$ tem-se.

$$z \cdot (w \cdot k) = (z \cdot w) \cdot k$$

- Elemento neutro. $\forall z \in \ \mathbb{C}$ existe $e = 1 + 0i$ donde,

$$z \cdot (1 + 0i) = z$$

- Inverso multiplicativo. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Existe um elemento denotado por z^{-1} talque,

$$z \cdot z^{-1} = 1 + 0i$$

em particular z^{-1} é dado por,

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right) i$$

- É válida a distibutividade relativamente á soma. Sejam $z, w, k \in \mathbb{C}$ tem-se,

$$z(w + k) = z \cdot w + z \cdot k$$

- O produto é comutativo. Dados $z, w \in \ \mathbb{C}$. Temos,

$$z \cdot w = w \cdot z$$

Portanto, a estrutura $(\mathbb{C}, \cdot)$ forma `grupo multiplicativo abeliano.`

Assim como foi feito nas propriedades da adição, vamos fornecer a idéia de como fazer as demonstrações, faremos a demonstrção de uma dessas propriedades, daí o restante segue-se como um método análogo.

`Inverso multiplicativo.`

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Queremos encontrar $z^{-1} = x + yi$ onde $z \cdot z^{-1} = 1 + 0i$. Do produto segue-se que,

$$\begin{array}{rcl} z \cdot z^{-1} & = & 1 + 0i \\ (a + bi) \cdot (x + iy) & = & 1 + 0i \\ (a, b) \cdot (x, y) & = & (1, 0) \\ (ax - by, bx + ay) & = & (1, 0) \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ax - by & = & 1 \\ bx + ay & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} (ax - by) \cdot (-b) & = & -b \\ (bx + ay)a & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} -abx + b^2y & = & -b \\ abx + a^2y & = & 0 \end{array} \right.$$

Somando as parcelas do último sistema temos,

$$a^2y + b^2y = -b \ \Rightarrow (a^2 + b^2)y = -b \ \Rightarrow y = \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

E ainda, multiplicando a equação de cima do sistma $\left\{ \begin{array}{rcl} -abx + b^2y & = & -b \\ abx + a^2y & = & 0 \end{array} \right.$ por $\left(\frac{-a}{b} \right)$ e a de baixo por $\left(\frac{b}{a} \right)$ temos,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-abx + b^2y) \cdot (\frac{-a}{b}) & = & -b \cdot (\frac{-a}{b}) \\ (abx + a^2y) \cdot (\frac{b}{a}) & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} a^2x - aby & = & a \\ b^2x + aby & = & 0 \end{array} \right.$$

Daí somando os membros do último sistema vamos ter,

$$a^2x + b^2x = a \ \Rightarrow (a^2 + b^2)x = a \ \Rightarrow x = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right)$$

Portanto, quando tivermos

$$(a + bi) \cdot (x + yi) = 1 + 0i \ \Rightarrow x = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) ; \ y = \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Sobre o conjugado

Com relação ao conjugado de um números complexo, podemos citar as seguintes propriedades importantes.

Seja $z \in \mathbb{C}$ temos,

- O conjugado do conjugado de z é o próprio z.

$$\overline{\overline{z}} = z$$

- A soma de z com seu conjugado é o dobro da parte real de z .

$$z + \overline{z} = 2Re(z)$$

- Já a diferenca de z pelo seu conjugado é o dobro da parte imaginária de z.

$$z - \overline{z} = 2Im(z)$$

- O produto de z pelo seu conjugado é o quadrado do módulo de z.

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

TEOREMA 01. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Então.

(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Provemos **(i)**.

Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, com $z = a + bi$ e $w = c + di$. Assim teremos.

$$\begin{array}{rcccc} z+w & = & (a+c) & + & (b+d)i \ \Rightarrow \\ \overline{z+w} & = & (a+c) & - & (b+d)i \\ & = & a+c & - & bi-di \\ & = & a-bi & + & c-di \\ & = & \overline{z} & + & \overline{w} \ \Rightarrow \\ \overline{z+w} & = & \overline{z}+\overline{w} & & \end{array}$$

Sobre o módulo

Em relação ao módulo de um número complexo temos algumas propriedades que precisam ser destacadas.

(i) O módulo é sempre maior ou igual a zero. Ou seja, $\forall z \in \mathbb{C}\ |z| \geq 0$.

(ii) $|z| = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0 + 0i$.

(iii) $|z| = |\overline{z}|$

(iv) $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$

(v) $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$

TEOREMA 02 Dados $z, w \in \mathbb{C}$. Então,

(i) O módulo do produto é o produto dos módulos

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

(ii) O módulo do quociente é o quociente dos módulos

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \ \textit{com } w \neq 0 + 0i$$

Agora que já conhemos bem o conjunto $\mathbb{C}$, analisemos como é definida a divisão de números complexos.

Definição 22 ***DIVISÃO***. *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ com $w \neq 0 + 0i$. O quociente $\frac{z}{w}$ é definido múltiplicando numerado e denomindor pelo conjugado de w. Assim temos,*

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}}$$

Em particular, sejam $z, w \in \mathbb{C}$, com $z = a + bi$ e $w = c + di$. Teremos,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} \\
&= \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)} \\
&= \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2+b^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{z}{w} &= \left[\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}\right] + \left[\frac{(-ad+bc)}{c^2+d^2}\right] i
\end{aligned}$$

Voltando a analisar o plano complexo, veremos outra forma de representar um número complexo $z = a + bi$, tomando como referência as projeções que o ponto determina nos eixos ortogonais.

4.0.17 Forma polar de um número complexo.

Dado um número complexo

$$z = a + bi \ (*)$$

Sabemos que z forma um segmento de reta no plano complexo, com origem no ponto $(0, 0)$ e extremidade no seu afixo. Além disso, z determina um ângulo θ com o eixo $\overline{0x}$ chamado $arg(z)$. Como mostra a figura abaixo.

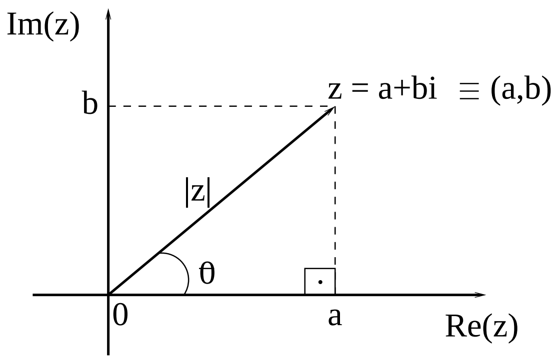

Figura 4.10: Representação geométrica.

Observe que a e b são segmentos de reta. Assim, do $\Delta 0az$(triângulo de vértices 0, a e z) retângulo em a temos.

$$cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot cos(\theta)$$

$$sen(\theta) = \frac{a}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot sen(\theta)$$

Substituindo a e b em $(*)$ teremos

$$z = |z| \cdot cos(\theta) + i \cdot (|z| \cdot sen(\theta)) \Rightarrow \mathbf{z = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)}$$

$\mathbf{z = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)}$ é donominada forma polar de z

Na verdade, quando usamos um números complexo qualquer dessa forma, tanto podemos chamá-la de forma polar como forma de Moivre, em referência ao matemático francês `Abraham de Moivre`, pois foi Moivre quem introduziu a forma polar utilizando conceitos da trigonometria.

4.0.18 Contexto histórico

O plano de Argan-Gauss

A representação gráfica dos números complexos foi introduzida através de estudos de Gaspar Wessel(1745-1818), publicados em 1789 na Revista da Academia Dinamarquesa. No entanto, a idéia só começou a ser conhecida a partir de 1806 quando Jean Robert Argand(1768-1822) publicou sua exposição. A incorporação definitiva da representação gráfica à matemática só se deu quando divulgado os trabalhos de Carl Friedrich Gauss(1777-1855), durante a segunda década do século XIX.

Por isso, quando o plano cartesiano é utilizado para representar números complexos é costume chamá-lo de Plano de Argand-Gauss.

4.0.19 Operações na forma polar

Voltando a representação polar, podemos generalizar o caso de

$$z = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

Ao utilizarmos um números complexo através dos conceitos trigonométricos, estamos particularizando o caso geral da fórmula de Moivre que leva a seguinte igualdade.

$$z^n = |z|^n \cdot [cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)] \ ; \ \forall z \in \mathbb{Z}$$

Para se ter idéia da expressão acima, bastar lembrarmos da definição que já foi citada neste capítulo.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ temos.

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

com,

$$arg(zw) = arg(z) + arg(w)$$

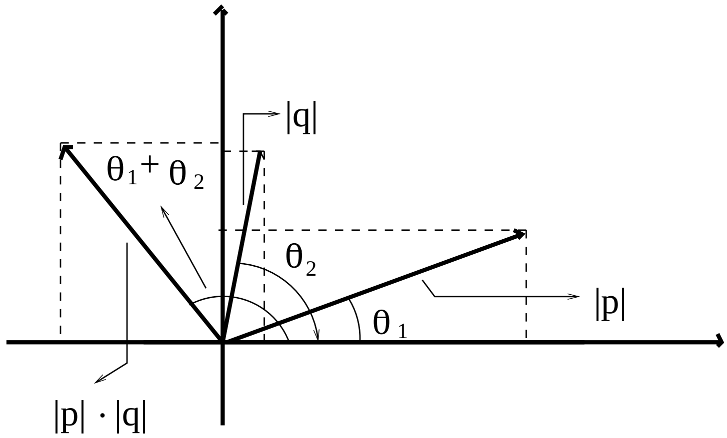

Figura 4.11: Representação geométrica.

Assim acontece o mesmo na forma polar. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ com,

$$z = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta) \; e \; w = |w| \cdot (cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$$

Então o produto $z \cdot w$ é definido por

$$z \cdot w = |z||w| \cdot [cos(\theta + \alpha) + i \cdot sen(\theta + \alpha)]$$

Já para o caso genérico de z^n temos,

$$z^n = \underbrace{(|z| \cdot |z| \cdot ... \cdot |z|)}_{n \; vezes} \cdot [cos \underbrace{(\theta + \theta + ... + \theta)}_{n \; vezes} + i \cdot sen \underbrace{(\theta + \theta + ... + \theta)}_{n \; vezes}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^n = |z|^n \cdot [cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)]$$

Divisão

Em consequência do produto na forma polar é possível deteminar também a divisão. Assim dados $z, w \in \mathbb{C}$ com

$$z = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta) \; e \; w = |w| \cdot (cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$$

Da divisão segue-se que

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [cos(\theta - \alpha) + i \cdot sen(\theta - \alpha)]$$

Para melhor interpretação da definição, basta lambrarmos que divisão é contrária ao produto. Além disso sabemos

$$\frac{|z|}{|w|} = \left|\frac{z}{w}\right| \quad Donde \quad arg(\frac{z}{w}) = arg(z) - arg(w)$$

No plano teremes algo do tipo.

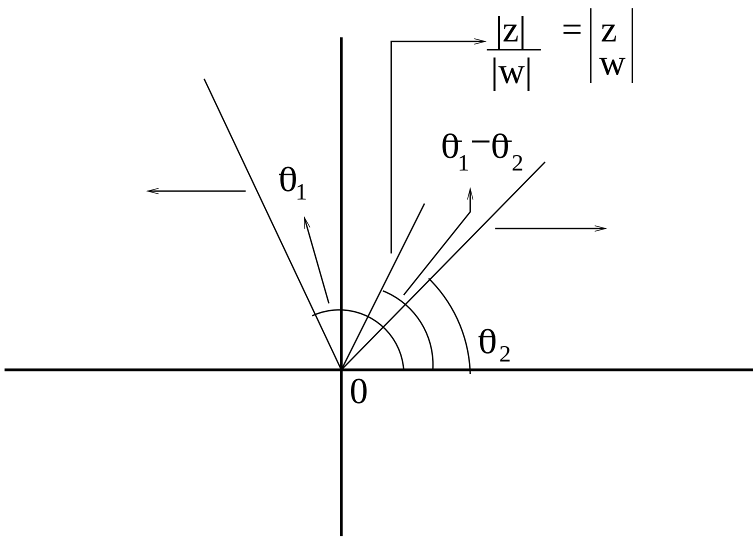

Figura 4.12: Representação geométrica do quociente.

É também interessante vermos uma síntese da aplicação da fórmula de Moivre para a `radiciação`. Isso explica muitos casos comuns no conjunto dos números reais.

Radiciação

Ao trabalharmos com equações matemáticas, muitas vezes encontramos dois resultados para a incógnita, como por exemplo, as raízes quadradas de números que formam quadrados perfeitos como,

$$x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{1} \;\Rightarrow\; x = \pm 1$$

$$x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{4} \;\Rightarrow\; x = \pm 2$$

Entre outras inúmeras equações.

Vamos tomar como ponto de partida a primeira equação, assim

$$x = \sqrt{1} \Rightarrow x^2 = 1$$

A unidade(1) é um número complexo, mais precisamente é um real puro. Representando o na forma polar temos,

$$1 = 1 \cdot [cos(0) + i \cdot sen(0)]$$

Como solução de $x^2 = 1$ temos 1 e -1, correspondem a dois pontos no plano. Como $-1 \in \mathbb{R}^-$ na forma polar temos,

$$-1 = 1 \cdot [cos(\pi) + i \cdot sen(\pi)]$$

Sem perda de generalidade teremos,

$$[cos(\pi) + i \cdot sen(\pi)]^2 = [cos(0) + i \cdot sen(0)]^2 = 1 = cos(0) + i \cdot sen(0)$$

Cosidere a circunferência de raio unitário no plano complexo abaixo.

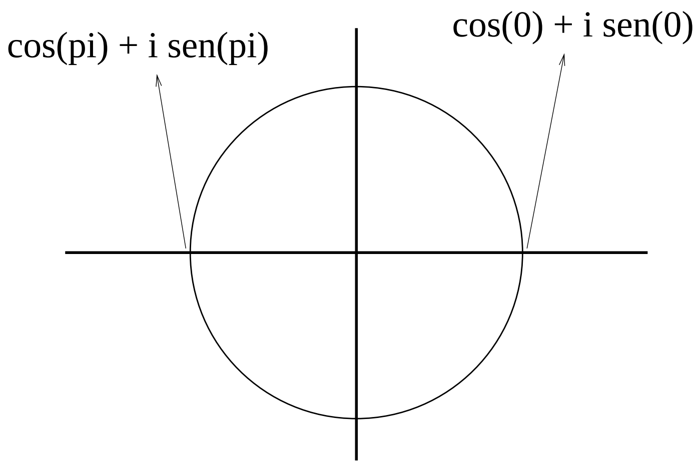

Figura 4.13: Observação: $pi = \pi$

Obseve que bastou fazermos uma rotação de π para encontrarmos as raízes quadradas da unidade.

O caso segue análogo para outras raízes da unidade. Assim teremos para

$$x = \sqrt[3]{1} \Rightarrow x^3 = 1$$

Vamos adotar o um método axiomático por enquanto. No exemplo anterior tivemos duas soluções, pois se tratava de raiz quadrada, para este outro caso teremos três soluções, já que é raiz cúbica. Na circunferência anterior de raio unitário fizemos uma rotação de $\frac{2\pi}{2}$, agora faremos uma rotação de $\frac{2\pi}{3}$ e teremos a segunda raiz, em seguida rotacionamos novamente apartir do último complexo encontrado. Como mostra afigura abaixo.

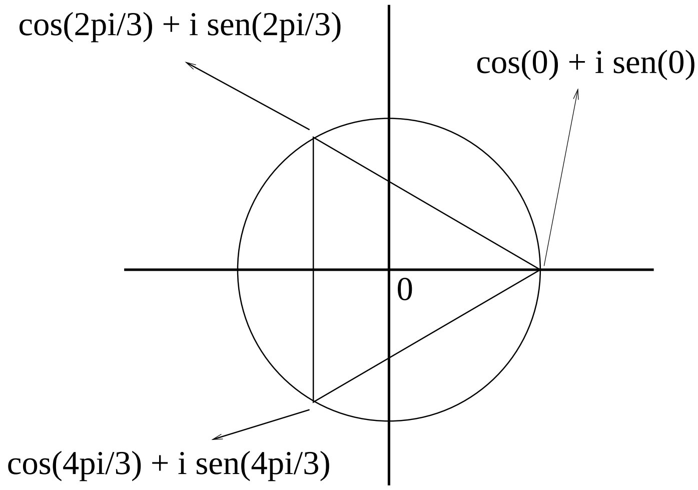

Figura 4.14: Observação: $pi = \pi$

Da mesma forma, o método será válido para $x = \sqrt[4]{1} \;\Rightarrow\; x^4 = 1$ e assim sucessivamente.

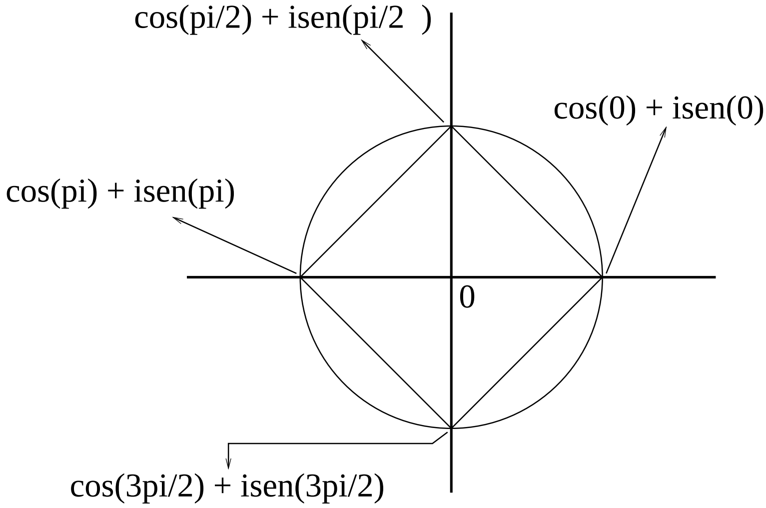

Figura 4.15: Observação: $pi = \pi$

O bom das raízes da unidade é que se encontram no mesmo círculo de raio unitário, assim como a unidade. Mas esse fato não é válido para outras ráizes como, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{7}$ e assim por diante. Na verdade, o método feito para encontrar as raízes da unidade, é uma particularidade do que a fórmula de Abraham de Moivre nos fornece, embora não vamos demonstrá-la aqui, mas da potenciação, ou seja,

$$z^n = |z|^n \cdot [cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)]$$

é possível extrair também um método genérico para a radiciação de números complexos. Assim dados,

$$w = \sqrt[n]{z} \ \Rightarrow w^n = z$$

onde teremos,

$$w = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

com,

$$k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

Assim teremos n raízes da raiz n-ésima de z.

Em particular, logo, raízes n-ésimas de 1

$$\sqrt[n]{1} = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Visto todos os conceitos, definições e propriedades no conjunto dos números complexos, podemos ainda ressaltar a estrutrura que este conjunto representa.

Tomando como base as operações de soma e produto em $\mathbb{C}$ como também as propriedades vista até então, basta acrescentarmos uma última propriedade.

Definição 23 *O cojunto complexo não possui divisores de zero. Dados $z, w \in \mathbb{C}$ temos.*

$$z \cdot w = 0 + 0i \ \Leftrightarrow \ z = 0 + 0i \ ou \ w = 0 + 0i$$

<u>TEOREMA</u>

O conjunto dos números complexos munido das operações de soma e produto, além de ser um ***ANEL*** *forma um* ***CORPO****.*

São essas e outras propriedades que os números complexos nos fornecem, tanto escritos na forma algébrica como na forma geométrica(forma polar). Assim os números complexos surgiram para que podecemos trabalhar com os pontos do plano de forma mais prática e detalhada. Assim como foi difícil para os matemáticos interpretar e assumir a existência dos números `irracionais`, o mesmo aconteceu também com o conjunto dos números complexos, ficando subtendido o porque do nome adotado. Toda via, apartir do momento que o conjunto $\mathbb{C}$ pôde ser estudado através dos conceitos geométricos, tirou-se indiretamete o sentido máximo da palavra `complexos`, uma vez que não seria algo estranho ao que se conhecia.