

C.V. Publicações 53.a
Tese de Doutorado

Fls.	
Proc.	6
Revis.	

Multilinear Forms on Sequence Spaces
by
Tarcisio Praciano Pereira

This thesis is a partial condition for
the doctor degree in Mathematics and
may be presented in English by special
permission.

UPPSALA UNIVERSITY
DEPARTMENT OF
MATHEMATICS



Acknowledgements

This work has been done at the Department of Mathematics of the Uppsala University under the guidance of Docent Sten Kaijser and I have much more to thank him for than purely the scientific guidance. I could not express here, in a clear way, my gratitude for his patient work "to put me in the right way" and for having suggested the topics in this thesis.

My thanks to Inez Hjelm for her typing the manuscript into a beautiful work and to Ragnvald Magnusson for having printed it in a record time.

a ti "que és tão linda que só espalhas sofrimento e tão cheia
de pudor que vives nua". (Vinicius de Moraes)

Summary

1. An inequality of Littlewood and Hardy
2. The exponent λ in the inequality of Littlewood and Hardy is the best one
3. Generalization of the inequality of Littlewood and Hardy on a class of l -spaces
4. The proof of the theorem A
5. Estimation by means of a family of random variables
6. Maximal cases
7. Interpolation theory
8. The proof of the theorem B

§ 1. An inequality of Littlewood and Hardy

In the paper [8], Littlewood considered double arrays of real (or complex) numbers taken as a bilinear form on the space of the bounded sequences and he proved a necessary condition for the continuity of the bilinear form. The result was:

(1.1) Let (a_{ij}) be a real or complex matrix and consider

$$A(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

where $x = (x_i)_i$ and $y = (y_j)_j$ belong to ℓ^∞ . If A is bounded by M as a bilinear form, then

$$(1.1.1) \quad \sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \leq KM$$

$$(1.1.2) \quad \sum_j \left(\sum_i |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \leq KM$$

$$(1.1.3) \quad \sum_i \sum_j |a_{ij}|^{4/3} \leq (KM)^{4/3}.$$

This result was extended later in a joint paper by Littlewood and Hardy [5] as follows:

(1.2) Let (a_{ij}) be a real or complex matrix and consider

$$A(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

where $x = (x_i)_i \in \ell^p$ and $y = (y_j)_j \in \ell^q$; $1/p + 1/q < 1$. If A is bounded by M as a bilinear form, then

$$(1.2.1) \quad \sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{\lambda/2} \leq (KM)^\lambda$$

$$(1.2.2) \quad \sum_j \left(\sum_i |a_{ij}|^2 \right)^{\lambda/2} \leq (KM)^\lambda$$

$$(1.2.3) \quad \sum_i \sum_j |a_{ij}|^\mu \leq (KM)^\mu$$

where

$$(1.2.4) \quad \lambda = \frac{pq}{pq - p - q}, \quad \left(\frac{1}{\lambda} = 1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right)$$

and

$$(1.2.5) \quad \mu = \frac{4}{2 - 2(1/p + 1/q)}, \quad \left(\frac{1}{\mu} = 1/2(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q})\right).$$

The constant K is not displayed in any of the papers, but in [7] S. Kaijser explicitates the way it may be calculated, it comes from Khintchine's inequality and the best value is $\sqrt{2}$, (in [8] Littlewood implicitly obtains $K = \sqrt{3}$).

The first difficulty in a generalization of the results of Littlewood and Hardy lies in the notation. The numbers λ and μ in (1.2) are an obvious indication of this. In [A] we use a multi-index notation which seems useful when considering multilinear forms in general and on ℓ^p -spaces in particular and it is clear that the inspiration comes from the notation used for partial derivatives.

First we wrote summations with multi-index $\beta \in \mathbb{N}^n$ where n is the order of linearity of the forms. But during the whole work we are often dealing with "partial summations" in which one index is dropped and we have therefore defined the multi-index $\beta_i \in \mathbb{N}^{n-1}$ where the i^{th} index is constant.

In this work it becomes apparent once more that the usual notation of ℓ^p -spaces is not the best one. Instead of ℓ^p with $p \geq 1$ we should write ℓ^s with $s \leq 1$ to represent these Banach spaces and then many relations would be written in a quite "natural" way. To respect the notation which we do not aim to change at all, we have defined the multi-index

$$(1.3) \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0, 1]^n$$

with

$$(1.3.1) \quad |\alpha| = \sum_i \alpha_i \text{ as the order of } \alpha,$$

and now, given α we are given a collection of sequence spaces

$$(1.3.2) \quad (\ell^{p_1}, \dots, \ell^{p_n}; \alpha_i = 1/p_i; 1 \leq i \leq n),$$

and denote the cartesian product of the spaces in (1.3.1) by

$$(1.3.3) \quad (\alpha) = \ell^{p_1} \times \dots \times \ell^{p_n}.$$

Then, as we are going to work with multilinear forms defined on such a cartesian product it was convenient to define a compact notation to represent them too:

$$(1.3.4) \quad (\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{K}$$

represents a multilinear form $A = (a_\beta)$ defined on the cartesian product (α) by

$$(1.3.5) \quad Ax = A(x_\beta)_\beta = A(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_n}) = \sum_{\beta} a_{\beta} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_n}$$

with $(x_{\beta_i})_{\beta_i} \in \ell^{p_i}$.

With this notation we can present the main result of [A]:

(1.4) Theorem: Let $(\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ be a multilinear form, bounded by M , $A(x) = \sum_{\beta} a_{\beta} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_n}$; $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$. Then, for all $j = 1, \dots, n$

$$(1.4.1) \quad \sum_{\beta_j} \left(\sum_{\beta_j} |a_{\beta}|^2 \right)^{\lambda/2} \leq (KM)^{\lambda}$$

with $\lambda = \frac{1}{1 - |\alpha|}$,

$$(1.4.2) \quad \sum_{\beta} |a_{\beta}|^{\mu} \leq (KM)^{\mu}, \quad \mu = \frac{n+1}{2n-2|\alpha|}.$$

For the proof of this result, see [A].

§ 2. The exponent λ in the inequality of Littlewood and Hardy is the best one

In their papers, Littlewood, [8], and Littlewood and Hardy, [5], proved that the exponents appearing in their inequality are the best possible and they did this by constructing examples. Several of their examples are based on orthogonal matrices in $\mathbb{R}^N$, ($N \in \mathbb{N}$ is the rank of the matrices), and since there is no natural analogy of such matrices when considering n -linear forms ($n \geq 3$) the problem of constructing examples to show that the exponents are the best possible is more difficult, but S. Kaijser drew our attention to some results of Chevet [2], and these results fitted well into the task of proving that the exponent was the best possible even in this case.

In [2], Chevet defined the gaussian mean of vectors belonging to a Banach space. We have enlarged her definition by using an arbitrary family of independent equidistributed random variables $X = (X_i)_i$ to have:

$$(2.1) \quad \|(x_i)_i\|_{X,r,E} = \sup_n (\mathbb{E} \|\sum_{i \leq n} x_i X_i\|_E^r)^{1/r}$$

where $(x_i)_i \subset E$, E is a Banach space, the capital letter as an index indicates the choice of the family of random variables. Here

$X \in \{R = \text{Rademachers}, G = \text{gaussian}\}$.

With help of the random mean (2.1) Chevet has estimated the norm of 2-tensors which we have generalized to n tensors to have

(2.2) Proposition (Chevet): Let $E_1, \dots, E_n$ be Banach spaces; $x_{\beta_i} \in E_i$, then

$$(2.2.1) \quad \frac{A_{G,r}}{n} \leq \|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{G,r,(E)} \leq \sqrt{n} A_{G,r},$$

where

$$(2.2.2) \quad A_{G,r} = \sum_{k=1}^n S_k \quad \text{and} \quad S_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] \cdot \|(x_{\beta_k})_{\beta_k}\|_{G,r,E_k}$$

and the capital letter G as an index represent the choice of a family of gaussian variables $(g_\beta) = (g_{\beta_1}, \dots, g_{\beta_n})$; $g_{\beta_i} \in N(0,1)$ and $(E)_\epsilon$ stands for the injective tensor product of the family of spaces $E = \{E_1, \dots, E_n\}$.

For the purpose of this work it was easier to consider the family of the Rademacher's functions, where Chevet uses a family of Gaussian variables because this gives us the possibility of taking matrices whose entries were ± 1 at a random choice. This way we have been pushed to the following estimate

(2.3) Proposition: Let $E_1, \dots, E_n$ be Banach spaces and $x_{\beta_i} \in E_i$, then

$$(2.3.1) \quad \frac{A_{R,r}}{n \sqrt{2}} \leq \| (x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n}) \|_{R,r, (E)_\epsilon} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} A_{G,r},$$

where $A_{G,r}$ is the same as in (2.2) and the capital letters G or R as index indicates the choice of family of random variables, G for gaussian and R for the Rademachers. As in (2.2), $(E)_\epsilon$ stands by the injective tensor product of $E = \{E_1, \dots, E_n\}$.

Proposition (2.3) gives us the possibility of considering matrices $A = (a_\beta)_\beta$, where $a_\beta = \pm 1$ and $\beta \in \{1, 2, \dots, N\}$ and with help of the inequality of Chebychev we are able to find a set F of probability $\neq 0$ of matrices $A(s)$; $s \in F$ (s is a choice of sign $\pm$) for which the equality is reached in the theorem of Littlewood and Hardy for $\lambda = \frac{1}{1 - |\alpha|}$.

We first do this with the extremal cases represented by the vertices of a simplex of dimension n to obtain in both sides of the inequality of Littlewood and Hardy numbers having the same order of magnitude in terms of N (the size of the matrix A , $N \in \mathbb{N}$).

Later, using interpolation theory, we are able to express the same result for an arbitrary multi-index α to get:

(2.4) Theorem: The exponent $\lambda = \frac{1}{1 - |\alpha|}$ is the best possible in the
inequality of Littlewood and Hardy, where $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$.

References

- [A] Praciano-Pereira, T., On bounded Multilinear forms on a class of ℓ^p spaces. U.U.D.M. Report no. 1979:4.
- [B] Praciano-Pereira, T., Le meilleur exposant dans une inégalité de Littlewood et Hardy. U.U.D.M. Report no. 1980:4.
- [1] Berg, J. and Löfström, J., Interpolation spaces, an introduction. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 223, Springer-Verlag.
- [2] Chevet, S., Séries de Variables Aléatoires Gaussiennes à Valeur dans $E \hat{\otimes}_c F$ et application aux produits d'espaces de Wiener abstraits. Exposé no. XIX, Séminaire sur la Géométrie des espaces de Banach (77-78) de l'École Polytechnique-Palaiseau, France.
- [3] Chung, K.L., A course in Probability. Academic Press (Series of monographs and textbooks in Probability and Mathematical Statistics) 1974.
- [4] Davie, A.M., Quotient algebras of uniform algebras. J. London Math. Soc. 7 (1) 73.
- [5] Hardy, G. and Littlewood, J.E., Bilinear forms bounded in space $[p,q]$. Quarterly J. of Math. 5 (1934).
- [6] Hardy, G., Littlewood, J.E., Pólya, Inequalities. Cambridge Univ. Press.
- [7] Kaijser, S., Some results in the metric theory of tensor products. Studia Mathematica, T. LXIII (1978).
- [8] Littlewood, J.E., On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. Quarterly J. of Math. 1 (1930).
- [9] Fernique, X., École d'Été de Probabilités de Saint Flour IV - 1974. Lecture Notes in Mathematics, no. 480.
- [10] Zygmund, Trigonometric Series, Vol. II. Cambridge University Press (1968).

LE MEILLEUR EXPOSANT DANS UNE INÉGALITÉ DE
LITTLEWOOD ET HARDY

By

T. Praciano-Pereira

U.U.D.M. Report 1980:4

Uppsala University, Department of Mathematics

Report No. 4, April 1980

Le meilleur exposant dans une inégalité de Littlewood et Hardy

T. Praciano-Pereira

Département de Mathématiques

Uppsala

Sommaire: Nous faisons usage d'une estimation en moyenne de la norme des produits tensoriels pour prouver que l'exposant dans une inégalité de Littlewood et Hardy est le meilleur possible.

- § 1. Introduction: notations et résultats
- § 2. Estimation en moyenne par rapport à une famille de variables aléatoires des produits tensoriels
- § 3. Étude des cas extrémaux
- § 4. Une application de la théorie de l'interpolation
- § 5. Bibliographie

§ 1. Introduction: notations et résultats

Nous présentons dans ce paragraphe la notation employée dans cet article dans l'ordre dans la quelle elle apparaîtra dans la suite aux §§ 2, 3, 4. La seconde moitié du paragraphe consistera d'une liste des lemmes et propositions qui nous ont permis la démonstration du résultat principal ainsi que celui-ci.

Considérons le multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $0 \leq \alpha_i = 1/p_i \leq 1$.

Donné un tel multi-indice nous considérons aussi donné une collection d'espaces de suites $\ell^{p_1}, \dots, \ell^{p_n}$ et nous désignerons par:

$$(1.1.1) \quad (\alpha) = \ell^{p_1} \times \dots \times \ell^{p_n}, \text{ leur produit cartésien,}$$

$$(1.1.2) \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \text{l'ordre du multi-indice } \alpha,$$

$$(1.2) \quad (x_\beta)_\beta = (x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_n}) \in (\alpha) \text{ où } \beta \in \mathbb{N}^n \text{ est un multi-indice.}$$

Donnée une famille d'espaces $E = (E_i)_{i=1}^n$, nous désignerons leur produit tensoriel injectif par

$$(1.3) \quad (E)_E$$

et nous aurons en particulier

$$(1.4) \quad (\alpha)_E = \ell^{p_1} \otimes \dots \otimes \ell^{p_n}.$$

Dans [8] nous avons démontré que si

$$(\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$$

est une forme multilinéaire continue, bornée par M , alors pour tout $i = 1, \dots, n$

$$(1.5) \quad \sum_{\beta_i} (\sum_{\beta_i} |a_{\beta_i}|^2)^{\lambda/2} = S^\lambda \leq (KM)^\lambda \quad (L-H)$$

où $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{1-|\alpha|}$, β_i étant le multi-indice obtenu de $\beta \in \mathbb{N}^n$ par substitution de l'indice β_i par une constante.

Ceci est une généralisation d'un résultat de Littlewood, [7] quand

(*) Nous allons aussi écrire " $\in \text{Ban}$ " à la place de "c'est un espace de Banach"

$\alpha = (0,0)$ repris par lui même et Hardy dans [4] et par Kaijser et Davie, voir [6] et [9], quand $\alpha = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Dans la suite nous aurons plusieurs fois l'occasion de faire référence à l'inégalité de Littlewood et Hardy (1.5) et nous le ferons tout court par (L-H).

Dans [2] Chevet a défini la moyenne gaussienne de la norme d'un produit tensoriel grâce à la quelle il nous a été possible de prouver que l'exposant λ chez (L-H) était le meilleur possible par construction probabiliste d'une famille d'exemples. Nous pouvons, en effet, à l'aide de l'inégalité de Chebychev [3, page 48] assurer l'existence d'un ensemble de probabilité différent de zéro d'applications multilinéaires pour lesquelles l'égalité se vérifie.

Si nous associons à la famille $(x_i)_i \subset E$; $E \in \text{Ban}$ une famille de variables aléatoires $X = (X_i)_i$ indépendantes et equidistribuées définies dans un espace de probabilités (W, F, P) , nous pourrions alors calculer la moyenne des vecteurs x_i par rapport à cette famille de variables aléatoires. Chevet, [2], considère des variables gaussiennes $(g_i)_i$; $g_i \in N(0,1)$, et nous définissons avec elle:

$$(1.6) \quad \|(x_i)_i\|_{X, r, E} = \sup_N (E \|\sum_{i \leq N} x_i X_i\|_E^r)^{1/r}$$

où le grand indice X représente la famille de variables aléatoires choisie. Dans cet article les familles seront $G = (g_i)_i$ de variables gaussiennes, ou $R = (r_i)_i$ les fonctions de Rademacher.

Dans le § 2 nous allons démontrer l'estimation suivante, déjà démontrée par Chevet dans le cas des 2-tenseurs. Nous le ferons dans le cas des n -tenseurs:

(1.7) Proposition: (Chevet). Soient $E_1, \dots, E_n \in \text{Ban}$ et $x_{\beta_i} \in E_i$. Alors

$$(1.7.1) \quad \frac{A_{G, r}}{n} \leq \|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{G, r, (E)} \leq \sqrt{n} A_{G, r}$$

où

$$(1.7.2) \quad A_{G,r} = \sum_{k=1}^n S_k \quad \text{et} \quad S_k = \prod_{j=1}^n M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] \cdot \|(x_{\beta_k})_{\beta_k}\|_{G,r,E_k} \\ j \neq k$$

et

$$(1.7.3) \quad M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] = \sup_{\substack{y \in E_j \\ \|y\| \leq 1}} (\sum_{\beta_j} |\langle y, x_{\beta_j} \rangle|^2)^{1/2},$$

et $G = (g_{\beta_k})_{\beta_k}$ gaussiennes; $g_{\beta_k} \in N(0,1)$ pour tout β_k .

(1.8) Proposition: Si $R = (r_i)_i$ sont les fonctions de Rademacher et
 $G = (g_i)_i$ des gaussiennes indépendantes, $g_i \in N(0,1)$, alors

$$(1.8.1) \quad \frac{A_{R,r}}{\sqrt{2}n} \leq \|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{R,r,(E)_C} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sqrt{n} A_{G,r}.$$

La proposition (1.8) va nous permettre de considérer rien que des matrices $A = (a_{\beta}) = (\pm 1)$.

A l'aide de (1.8) et de l'inégalité de Chebychev nous pourrions garantir l'existence d'un ensemble de probabilité non nulle de formes multilinéaires pour lesquelles l'égalité peut être atteinte dans (L-H) pour

$$\lambda = \frac{1}{1-|\alpha|}.$$

Dans § 3 nous étudierons les cas extrémaux formés par les vertices du simplex de dimension n formé par les multi-indices α ; $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$. Le résultat obtenu est alors que la somme à gauche dans (L-H) et l'estimation à droite de la norme M faite à l'aide de (1.8) ont le même ordre de grandeur.

Dans le § 4 nous pourrions alors appliquer la théorie d'interpolation d'espaces de Banach, la méthode complexe, pour étendre le résultat à un point arbitraire α du simplex $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ ce qui prouve le

(1.9) Théorème: L'exposant $\lambda = \frac{1}{1-|\alpha|}$ dans l'inégalité de Littlewood et
Hardy est le meilleur possible pour $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$.

C'est un plaisir de remercier A. Gut et P. Sjögren pour les nombreuses occasions de conversation que nous avons eu au sujet de cet article. C'est aussi un plaisir de remercier S. Kaijser pour m'avoir attiré l'attention sur l'article de Chevet et pour m'avoir encouragé plusieurs fois dans tout le développement de ce travail.

Maria Teresa Sala Sjögren a pris la peine de faire la révision du texte français, nous en sommes obligés.

Inez Rjels est la responsable pour la composition dactylographique de cet travail et Ragnvald Magnusson de l'impression, à tous les deux nos remerciements.

en fêtes vous de cette page, il n'y a rien que des remerciements....pas lisibles, pourtant une des personnes est déjà morte!

§ 2. Estimation en moyenne par rapport à une famille de variables aléatoires de produits tensoriels

La proposition suivante a été démontrée par Chevet, [2], dans le cas des 2-tenseurs:

(2.1) Proposition: (Chevet) Soient $E_1, \dots, E_n \in \text{Ban}$ et $x_{\beta_i} \in E_i$. Alors

$$(2.1.1) \quad \frac{A_{G,r}}{n} \leq \|x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n}\|_{G,r,(E)_c} \leq \sqrt{n} A_{G,r}$$

où

$$(2.1.2) \quad A_{G,r} = \sum_{k=1}^n S_k \quad \text{et} \quad S_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] \cdot \|(x_{\beta_k})_{\beta_k}\|_{G,r,E_k}.$$

Démonstration. Il suffit de considérer des sommes finies.

Pour démontrer l'inégalité à droite nous avons besoin d'un théorème de Sudakov-Fernique énoncé dans [2], dont nous présentons ici une version simplifiée:

(2.1.3) Lemme: (Sudakov-Fernique) Soit $T \xrightarrow{X} L^0(W,F,P)$ et $T \xrightarrow{Y} L^0(W,F,P)$ deux variables aléatoires réelles, gaussiennes, centrées, qui sont des restrictions à une partie symétrique T d'un espace vectoriel de variables aléatoires linéaires. Si la condition suivante est vérifiée

$$(2.1.3.1) \quad \mathbb{E}(|Y(t) - Y(s)|^2) \leq \mathbb{E}(|X(t) - X(s)|^2)$$

pour tout $(s,t) \in T \times T$, alors, pour tout $r \geq 1$ nous aurons

$$(2.1.3.2) \quad (\mathbb{E}(\sup_{s \in T} |Y(s)|^r))^{1/r} \leq (\mathbb{E}(\sup_{s \in T} |X(s)|^r))^{1/r}.$$

Démonstration. Voir [10].

Nous allons définir maintenant deux fonctions X, Y qui, nous allons le démontrer, remplissent la condition (2.1.3.1), l'hypothèse du théorème de Sudakov-Fernique.

(2.1.4) Définition: Soient U_k^- les boules unité des espaces E_k^- . Pour tout $(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_n}) \in E_1 \times \dots \times E_n$ donné, posons pour

$$(w, a_1^- \otimes \dots \otimes a_n^-) \in W \times U_1^- \otimes \dots \otimes U_n^- :$$

$$(2.1.4.1) \quad Y(w)(a_1^- \otimes \dots \otimes a_n^-) = \sum_{\beta} \langle a_1^- \otimes \dots \otimes a_n^-, x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n} \rangle g_{\beta}(w),$$

où $(g_{\beta})_{\beta}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes de même loi $N(0,1)$. De même nous définirons pour

$$(w, a_1^-, \dots, a_n^-) \in W \times U_1^- \times \dots \times U_n^-$$

$$(2.1.4.2) \quad X(w)(a_1^-, \dots, a_n^-) = (X_1(w)(a_1^-), \dots, X_n(w)(a_n^-)) \text{ avec}$$

$$X_j(w)(a_j^-) = \sqrt{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(M_2[(x_{\beta_k})_{\beta_k/\beta_j}] \right) \sum \langle a_j^-, x_{\beta_j} \rangle g_{\beta_j}(w).$$

(2.1.5) Lemme: (L'hypothèse dans le théorème de Sudakov-Fernique). Pour les fonctions X, Y définies dans (2.1.4) nous avons

$$\begin{aligned} & E(|Y(a_1^- \otimes \dots \otimes a_n^-) - Y(b_1^- \otimes \dots \otimes b_n^-)|^2) \leq \\ & \leq E(\|X(a_1^-, \dots, a_n^-) - X(b_1^-, \dots, b_n^-)\|_{\mathbb{R}^n}^2). \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & E(|Y(a_1^- \otimes \dots \otimes a_n^-) - Y(b_1^- \otimes \dots \otimes b_n^-)|^2) \leq \\ & \leq E(\sum_{\beta} |\langle a_1^-, x_{\beta_1} \rangle \dots \langle a_n^-, x_{\beta_n} \rangle - \langle b_1^-, x_{\beta_1} \rangle \dots \langle b_n^-, x_{\beta_n} \rangle|^2 |g_{\beta}|^2) = \\ (2.1.5.1) \quad & = \sum_{\beta} |\langle a_1^-, x_{\beta_1} \rangle \dots \langle a_n^-, x_{\beta_n} \rangle - \langle b_1^-, x_{\beta_1} \rangle \dots \langle b_n^-, x_{\beta_n} \rangle|^2 = S_1. \end{aligned}$$

Nous écrirons, maintenant, pour un moment, pour simplifier:

$$A_{1i} = A_{1i}(\beta) = \langle a_i^-, x_{\beta_i} \rangle \text{ et } A_{2i} = A_{2i}(\beta) = \langle b_i^-, x_{\beta_i} \rangle$$

et nous sommes menés à l'égalité:

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta} |A_{11}A_{12} \dots A_{1n} - A_{21}A_{22} \dots A_{2n}|^2 = \\ (2.1.5.2) \quad & = \sum_{\beta} |(A_{11} - A_{21})A_{12} \dots A_{1n} \pm \dots \pm (A_{1n} - A_{2n})A_{21} \dots A_{2n-1}|^2 \end{aligned}$$

on peut changer l'ordre de ces normes à l'aide de l'inégalité de Minkowski, [5, page 32], pour écrire

$$\begin{aligned} N_1 &\leq \|(\otimes \sup_{a_i' \in U_i'} |X_i(a_i')|^r)^{1/r}_{i=1}^n\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq \|(\otimes \sup_{a_i' \in U_i'} |X_i(a_i')|^r)^{1/r}_{i=1}^n\|_{\lambda_1^n} \leq \sqrt{n} A_{G,r}. \end{aligned}$$

Si $r \leq 2$ on peut majorer N_1 de la manière suivante: on applique l'inégalité de Jensen deux fois, avec $r/2 < 1$ et avec $1/r < 1$ pour obtenir finalement

$$N_1 \leq \sqrt{n} A_{G,r}.$$

L'inégalité à gauche: Nous aurons besoin du lemme suivant, voir [2]:

(2.1.6) Lemme: Pour toute suite de nombres réels $(t_i)_i$ et toute suite $(x_j)_j \subset E$, nous avons

$$\|(t_i x_j)_{i,j}\|_{G,r,E} = (\sum_i t_i^2)^{1/2} \|(x_i)_i\|_{G,r,E}$$

avec la condition $0 \cdot \infty = 0$.

Nous pouvons définir la forme multilinéaire:

$$(2.1.7) \quad (E)_{\epsilon} \xrightarrow{A_i} E_i; x_1 \otimes \dots \otimes x_n \leadsto x_i \cdot \prod_{k \neq i} \langle x_k, y_k^- \rangle$$

où $(y_k^-)_{k \neq i}$ est une collection de vecteurs unités des espaces duaux E_i' . Les formes A_i ainsi définies sont de norme au plus égal à 1 quelque soit le choix des $(y_k^-)_{k \neq i}$. Maintenant on peut appliquer (2.1.6) avec

$$t_i = \prod_{k \neq i} |\langle x_k, y_k^- \rangle|$$

et la définition de $M_2[(x_k)_k]$ pour avoir la majoration:

$$(2.1.8) \quad \|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})_{\beta}\|_{G,r,(E)_{\epsilon}} \geq \prod_{k \neq j} M_2[(x_{\beta_k})_{\beta_k}] \cdot \|(x_{\beta_j})_{\beta_j}\|_{G,r,E_j}.$$

Le membre à droite dans (2.1.8) dépend seulement de j et l'inégalité est aussi vraie pour la moyenne arithmétique d'où (2.1.1).

(2.2) Lemme: Si G désigne une famille de variables gaussiennes $(g_i)_i$, $g_i \in N(0,1)$ et R désigne les fonctions de Rademacher, alors

$$(2.2.1) \quad \|(x_i)_i\|_{R,r,E} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \|(x_i)_i\|_{G,r,E}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|(x_i)_i\|_{G,r,E} &= \sup_N \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \sum_{i \leq N} x_i t_i \right\|_E^r dG(t) \right)^{1/r} = I \\ \text{avec } dG(t) &= (2\pi)^{-N/2} \exp\left(-\frac{\|t\|^2}{2}\right) dt_1 \dots dt_N. \\ I &= \sup_N \left(\frac{1}{2^N} \sum_{\epsilon = \pm 1} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \left\| \sum_{i \leq N} \epsilon x_i t_i \right\|_E^r dG(t) \right)^{1/r} \geq \\ &\geq \sup_N \left(\frac{1}{2^N} \sum_{\epsilon = \pm 1} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \sum_{i \leq N} x_i t_i dG(t) \right)^{1/r} = \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-1/2} \|(x_i)_i\|_{R,r,E}. \end{aligned}$$

(2.3) Proposition: Si $A_{X,r}$ est la somme définie en (2.1.2) dans la quelle le grand indice représente le choix de la famille de variables aléatoires, (G , pour les gaussiennes ou R , pour les Rademachers), alors

$$\frac{1}{n\sqrt{2}} A_{R,r} \leq \|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{R,r,(E)_c} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} A_{G,r}.$$

Démonstration. A droite nous pourrions majorer $\|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{R,r,(E)_c}$ à l'aide du lemme (2.2) par

$$\|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{R,r,(E)_c} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{G,r,(E)_c}$$

et ensuite nous obtiendrons la majoration finale à l'aide de la proposition (2.1).

A gauche: Nous avons besoin du lemme suivant

$$(2.3.1) \quad \text{Lemme: } \|(t_i x_j)_{i,j}\|_{R,r,E} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_i t_i^2 \right)^{1/2} \|(x_i)_i\|_{R,r,E},$$

où le grand indice R représente les fonctions de Rademacher et les définitions et notations sont celles du (1.6), et la famille $(t_i)_i$ est une famille de nombres réels.

Démonstration. Supposons $(t_i)_i$ indépendante sur $\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \|(t_i x_j)_{ij}\|_{R, r, E} &= \sup_N (\mathbb{E}(\|\sum_{i, j \leq N} t_i x_j r_{ij}\|_E^r))^{1/r} = \\ &= \sup_N (\mathbb{E}(\|\sum_{j \leq N} f_j x_j\|_E^r))^{1/r} = I_1 \end{aligned}$$

où les fonctions $f_j = \sum_i t_i r_{ij}$.

Nous définirons maintenant les fonctions $s_j = \text{sgn}(f_j)$. Comme les t_i sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$ les s_j sont en effet les fonctions de Rademacher. Soit aussi F_s la tribu engendrée par $s = (s_j)_j$. Si nous prenons maintenant l'espérance conditionnelle de I_1 par rapport à F_s nous aurons:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sup_N (\mathbb{E}(\mathbb{E}(\|\sum_{j \leq N} f_j x_j\|_E^r | F_s)))^{1/r} \geq \\ &\geq \sup_N (\mathbb{E}(\|\sum_{j \leq N} \mathbb{E}(f_j | F_s) x_j\|_E^r))^{1/r} = I_2. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Khintchine nous aurons:

$$I_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sum_i t_i^2)^{1/2} \sup_N (\mathbb{E}(\|\sum_{j \leq N} x_j s_j\|_E^r))^{1/r}$$

avec les fonctions s_j définies ci-dessus. Pourtant les s_j sont en effet les Rademachers ce qui prouve le lemme, sous l'hypothèse initiale sur les t_i d'être indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Si ce n'est pas le cas, on peut approcher la suite $(t_i)_i$ par des suites $(t_i^n)_i$ qui soient indépendantes sur $\mathbb{Q}$ et le lemme est ainsi démontré. La démonstration de l'inégalité à gauche finit maintenant comme dans (2.1), voir (2.1.7) et la suite.

§ 3. Étude des cas extrémaux

Dans ce paragraphe nous allons obtenir à l'aide de l'estimation (2.3) et de l'inégalité de Chebychev une estimation précise pour les normes d'une forme multilinéaire dans certains cas extrémaux qui sont les vertices d'un simplexe de dimension n , c'est à dire les multi-indices $\alpha^0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha^i \in \mathbb{R}^n$ où tous les indices sont nuls sauf celui d'ordre i qui est alors $\frac{1}{2}$.

Nous commençons par supposer qu'il existe des constantes L_i telles que, $E(\|A(s)\|^2) = E(M_i(s)^2) \leq L_i^2$ où s est un choix arbitraire des signes ± 1 dans la matrice $A = (a_{\beta}) = (\pm 1)$.

$$(3.1) \quad (\alpha^i) \xrightarrow{A} c.$$

Soit maintenant l'ensemble, (l'événement):

$$(3.2.1) \quad E_i = \{s; M_i(s)^2 > t \cdot L_i^2\}; i = 0, \dots, n,$$

où t est grand (nous le prendrons égal à $2n$).

L'inégalité de Chebychev, [3, page 48], nous donne maintenant

$$(3.2.2) \quad P(E_i) < \frac{1}{t}$$

et si nous choisissons $t = 2n$ nous voyons que

$$(3.2.3) \quad P\left(\bigcup_{i=0}^n E_i\right) < \frac{n+1}{2n} < 1 \quad (n \geq 2).$$

Soit donc l'ensemble $F = W - \bigcup_{i=0}^n E_i$. Alors $P(F) \neq 0$.

Donc, par construction, l'ensemble F est celui des s tels que

$$(3.2.4) \quad M_i(s) < \sqrt{2n} L_i, \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, n.$$

La proposition (2.3) nous donne l'estimation $L_i = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} A_{G,2}^i$ et nous définirons:

$$(3.2.5) \quad K_i = \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \sqrt{n} A_{G,2}^i,$$

où la dépendance du second membre de i réside dans $A_{G,2}^i$. Nous avons

ainsi démontré:

(3.2) Proposition: Il existe un ensemble F de probabilité différente de zéro tel que, pour chaque $s \in F$ $A(s)$ est un choix de signes dans la matrice $A = (a_{\beta}) = (\pm 1)$ et la norme $M_i(s)$ de $A(s)$ comme forme multilinéaire

$$(\alpha^i) \xrightarrow{A(s)} \epsilon; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

est plus petite ou égale à

$$(3.2.6) \quad \sqrt{\frac{2n}{\pi}} A_{G,2}^i.$$

Dans le reste de ce paragraphe et dans le suivant nous allons simplifier la notation à l'aide de la proposition (3.2). Nous écrirons simplement A pour la matrice $A(s)$, c'est-à-dire que nous avons fait d'une fois pour toutes le choix des signes s tels que la matrice $A(s) = A$ satisfait la proposition (3.2). Nous écrirons, de même, M_i au lieu de $M_i(s)$. Dans la démonstration de (3.2) nous avons aussi fait le choix $r = 2$, et alors $C_r = C_2 = 1$.

Nous allons maintenant expliciter les calculs des K_i à l'aide de la proposition (2.3).

(3.3) Lemme: Soit $i = 1, \dots, n$ et α^i le multi-index d'ordre $\frac{1}{2}$ ayant tous les index nuls sauf celui d'ordre i qui est égal à $\frac{1}{2}$. La norme M_i de la matrice $A = (a_{\beta})_{\beta} = (\pm 1)$ comme forme multilinéaire

$$(\alpha^i) \xrightarrow{A} \epsilon$$

est majorée par

$$(3.3.1) \quad K_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} n^{\frac{3}{2}} N^{\frac{n}{2}}.$$

Démonstration. Il est évident à partir de la démonstration que tous les cas i sont identiques, il suffit de faire la démonstration pour le cas $i = n$.

Selon la définition (1.7.2)

$$A_{G,2}^n = \sum_{k=1}^n S_k ; S_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] \cdot \|(x_{\beta_k})_{\beta_k}\|_{G,2,E_k}.$$

Ici les familles de vecteurs $(x_{\beta_k})_{\beta_k} = (e_k)_k$ où $e_k = (S_{ki})_i$.

Dans le calcul de S_k il y a deux cas différents: $k = n$ ou $k \neq n$.

Si $k < n$:

$$\begin{aligned} S_k &= (M_2[(e_j)_j]_{\ell^1})^{n-2} \cdot \|(e_j)_j\|_{G,2,\ell^1} \cdot M_2[(e_j)_j]_{\ell^2} \leq \\ &\leq N^{(n-2)/2} \cdot N \cdot 1 = N^{n/2}. \end{aligned}$$

Si $k = n$:

$$S_n = (M_2[(e_j)_j]_{\ell^1})^{n-1} \cdot \|(e_j)_j\|_{G,2,\ell^2} = N^{(n-1)/2} \cdot N^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{n}{2}}.$$

Donc

$$A_{G,2}^n \leq n N^{\frac{n}{2}},$$

que nous allons substituer dans (3.2.6) pour avoir (3.3.1).

(3.4) Remarque: $K_1 = K_2 = \dots = K_n$.

(3.5) Lemme: La norme M_0 de $(\alpha^0) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ comme forme multilinéaire est majorée par

$$(3.5.1) \quad K_0 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}} N^{\frac{n+1}{2}}.$$

Démonstration. Dans ce cas il n'y a pas de différence entre les S_k et nous avons

$$S_k = (M_2[(e_j)_j]_{\ell^1})^{n-1} \cdot \|(e_j)_j\|_{G,r,\ell^1} \leq N^{\frac{n+1}{2}}.$$

Donc

$$A_{G,2}^0 \leq n N^{\frac{n+1}{2}}$$

et

$$M_0 \leq K_0 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3}{n^2} \frac{n+1}{N^2}$$

d'après (3.2.6).



§ 4. Une application de la théorie de l'interpolation

Dans le § 3 nous avons estimé la norme des formes multilinéaires associées aux vertices d'un simplex de dimension n . Maintenant nous allons faire usage de la théorie de l'interpolation d'espaces de Banach pour étendre cette estimation à un multi-indice α arbitraire du simplex. Il est bien connu que la méthode complexe préserve les normes chez les formes multilinéaires extrémales, c'est cette méthode dont nous allons faire usage ici.

Avec la proposition (3.2) nous avons obtenu une borne supérieure K_j pour la norme de A comme forme multilinéaire

$$(4.1) \quad (\alpha^j) \xrightarrow{A} \mathbb{C},$$

$K_j \in \{K_0, K_1\}$, voir remarque (3.4), où α^j parcourt l'ensemble des $n+1$ vertices du simplex $|\alpha^-| \leq \frac{1}{2}$. Maintenant, soit donné un point α arbitraire du simplex, il est trivial qu'il peut être obtenu par combinaison linéaire convexe des vertices, mais nous n'avons pas trouvé dans la littérature un résultat qui nous ait permis d'obtenir la norme de A comme une combinaison multiplicative-convexe des normes de A relative à chacun des vertices. Il nous faut donc choisir le chemin le plus long indiqué par le lemme (4.3).

A titre d'exemple nous allons donner ici deux résultats dont la démonstration peut être trouvée dans [1, chs.1,2] ainsi que le langage des lemmes qui suivront.

Donnés deux espaces ℓ^p et ℓ^q qui nous voulons interpoler nous en ferons référence en disant le couple (ℓ^p, ℓ^q) . Après, quand il s'agira de l'interpolation des produits cartesiens identifiés par des multi-indices nous dirons, par exemple, le couple $((\alpha^i), (\alpha^j))$.

(4.2.1) (Théorème de Riez-Thorin). Si s, s' sont positives, $s + s' = 1$, et donnés p_0, p_1 ; $1 \leq p_0 \leq p_1$ alors, pour p ;

$$1/p = s'/p_0 + s/p_1$$

ℓ^p est un espace d'interpolation entre les espaces ℓ^{p_0} et ℓ^{p_1} , dit l'espace d'exposant s .

(4.2.2) Si A est une forme linéaire

$$\ell^{p_0} \xrightarrow{A} \mathbb{C} \quad \text{avec norme } M_0$$

et

$$\ell^{p_1} \xrightarrow{A} \mathbb{C} \quad \text{avec norme } M_1$$

alors

$$\ell^p \xrightarrow{A} \mathbb{C} \quad \text{avec norme } M_0^{s'} M_1^s,$$

où s, s' et p sont comme dans (4.2.1).

Dans la suite nous réservons les lettres s, s' pour représenter des paires de nombres réels (exposants) conjugués: $s + s' = 1, s, s' \geq 0$. La terminologie décrite plus haut se généralise sans peine pour les produits cartésiens d'espaces (ou de couples) et maintient sa forme. Nous revenons aussi aux formes multilinéaires dans le lemme:

(4.3) Lemme: Soit $(\alpha^0) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ avec norme M_0 et $(\alpha^1) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ avec
norme M_1 . Alors A peut être étendue continûment à

$$(\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$$

avec norme $M_0^{s'} M_1^s$ où $\alpha = s'\alpha^0 + s\alpha^1$ et α^0, α^1 sont deux multi-indices
arbitraires du simplex.

Démonstration. Voir [11, page 106].

(4.4) Lemme: Pour tout multi-indice $\gamma; |\gamma| = \frac{1}{2}$ et pour une matrice A dont la norme aux points extrémaux du simplex $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ est bornée par la
même constante K_1 , la norme de la forme

$$(\gamma) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$$

est bornée par la même constante K_1 .

Démonstration. Puisque un tel multi-indice γ peut-être obtenu par interpolation d'au plus n couples (α^i, α^j) , $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, on applique successivement le lemme (4.3) à chacun des couples de produits cartésien

$$\bar{E}_{ij} = ((\alpha^i), (\alpha^j)).$$

(4.5) Lemme: Il existe un multi-indice γ ; $|\gamma| = \frac{1}{2}$ sur la ligne droite déterminée par les multi-indices $\alpha^0 = (0, \dots, 0)$ et α où α est un multi-indice arbitraire du simplex $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$. Le multi-indice α divise le segment de droite $\alpha^0 \gamma$ déterminée par α^0 et γ dans le rapport

$$(4.5.1) \quad 2|\alpha| = s.$$

(4.6) Lemme: La norme de $(\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ est M_α ;

$$M_\alpha \leq K_\alpha = K_0^s K_1^s = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3}{n^2} \frac{n+1}{2} - |\alpha|$$

puisque $s = 2|\alpha|$.

Démonstration. Par application du lemme (4.3) au couple

$$\bar{E} = ((\alpha^0), (\gamma))$$

en tenant compte de (4.5.1), (3.3) et (3.5).

(4.7) Théorème: L'exposant $\lambda = \frac{1}{1-|\alpha|}$ dans l'inégalité (L-H) est le meilleur possible.

Démonstration. Il faut comparer les membres à gauche et à droite dans (L-H). Nous avons maintenant

$$S_\alpha^\lambda = \sum_{\beta_i} \left(\sum_{\beta_i} |a_{\beta_i}|^2 \right)^{\lambda/2}$$

et donc

$$S_\alpha = N^{((n-1)\lambda+2)/2\lambda} = N^{(n+\frac{2-\lambda}{\lambda})/2}.$$

Mais

$$\frac{2-\lambda}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} - 1 = 2 - 2|\alpha| - 1 = 1 - 2|\alpha| = s'$$

selon (4.5.1), c'est à dire:

$$(4.7.1) \quad S_{\alpha} = N \frac{n+1}{2} - |\alpha|, \text{ puisque } s = 2|\alpha|.$$

D'après (4.6) nous avons:

$$(4.7.2) \quad K_{\alpha} = C N \frac{n+1}{2} - |\alpha|, \quad C = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}}.$$

C'est à dire que S_{α} et K_{α} sont de même ordre de grandeur par rapport à N et ce ne serait pas le cas pour $\lambda' = \lambda - \epsilon$; $\epsilon > 0$, ce qui prouve le théorème.

Le tableau suivant réunit toute l'information des §§ 3,4 :

(4.8)

	α^0	α	α^1
λ	1	$\frac{1}{1- \alpha }$	2
$ \alpha $	0	$ \alpha $	$\frac{1}{2}$
S_{α}	$N \frac{n+1}{2}$	$N \frac{n+1}{2} - \alpha $	$\frac{n}{N^2}$
K_{α}	$C N \frac{n+1}{2}$	$C N \frac{n+1}{2} - \alpha $	$\frac{n}{C N^2}$

(4.9) Rémarque: Si nous considérons les résultat de [8] nous pouvons maintenant écrire l'estimation suivante:

$$\frac{1}{C} S_{\alpha} \leq M_{\alpha} = \|A\| \leq K_{\alpha},$$

où C est la constante explicitée dans (4.7.2).

§ 5. Bibliographie

- [1] Bergh, J. and Löfström, J., Interpolation Spaces, an introduction.
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 223, Springer-Verlag.
- [2] Chevet, S., Séries de Variables Aléatoires Gaussiennes à valeurs dans $E \hat{\otimes}_c F$ et application aux produits d'espaces de Wiener abstraits.
Exposé no XIX, Séminaire sur la Géométrie des espaces de Banach (1977-1978) de l'École Polytechnique - Palaiseau, France.
- [3] Chung, K.L., A course in Probability. Academic Press (Series of monographs and textbooks in Probability and Mathematical Statistics) 1974.
- [4] Hardy, G. and Littlewood, J.E., Bilinear forms bounded in space $[p, q]$.
Quarterly J. of Mathematics 5 (1934).
- [5] Hardy, G., Littlewood, J.E. and Pólya, Inequalities. Cambridge University Press.
- [6] Kaijser, S., Some results in the metric theory of tensor products.
Studia Mathematica, T. LXIII (1978).
- [7] Littlewood, J.E., On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. Quarterly J. of Mathematics, 1 (1930).
- [8] Praciano-Pereira, T., On bounded multilinear forms on a class of ℓ^p spaces. U.U.D.M. Report No. 1979:4 .
- [9] Davie, A.M., Quotients of uniform Algebras. J. London Math. Soc (2) 7 (1973).
- [10] Fernique, X., École d'Été de probabilités de Saint-Flour IV - 1974,
Lectures Notes in Mathematics, nr 480.
- [11] Zygmund, A., Trigonometric Series, Vol. II. Cambridge University Press 1968.