Álgebra Linear
e geometria analítica

Tarcisio Praciano-Pereira[1]

Primeira Edição
Edições Eletrônicas da
Sobral Matemática
2 de abril de 2015

[1]tarcisio@sobralmatematica.org

Sumário

Introdução 2

I Geometria do plano 5

1 plano cartesiano 7

2 Números complexos 23
2.1 incompletitude, **R** 23
2.1.1 números complexos 24
2.1.2 A representação geométrica dos complexos 26
2.2 Números complexos: extensão dos reais 30
2.3 Módulo, argumento e conjugado 35
2.4 Intepretação geométrica do produto 36
2.4.1 Para melhorar a arte de fazer contas 40

II Geometria Analítica plana 41

3 Equação da reta 43
3.1 Introdução 43

4 Equação do círculo 69

Lista de Figuras

1 o caminho da Rosetta em direção ao cometa 67P/C-G 2

1.1 reta numérica, representação geométrica de $\mathbf{R}$ 7
1.2 frações triângulos semelhantes 8
1.3 segmentos de reta na reta orientada 8
1.4 Sistema de coordenadas cartesianas 10
1.5 Distância entre dois pontos e o teorema de Pitágoras 13
1.6 o ângulo entre dois vetores do $\mathbf{R}^n$ 14
1.7 Parte da curva algébrica 16
1.8 programa para traçar curvas de nível 17
1.9 Plano paralelo ao eixo do cone: hipérboles 18
1.10 Quando o plano é paralelo à geratriz: parábola 19
1.11 A elipse degenerada: círculo 19
1.12 imagem das cônicas no plano XOY 20
1.13 Interseções do plano ZOY com o cone 21

2.1 Representação geométrica dos complexos 26
2.2 Produto de números complexos 26
2.3 27
2.4 Propriedades dos números complexos 30
2.5 Conjugado de um número complexo 33
2.6 A projeção de $a + bi$ sobre $\mathbf{S}^1$. 36

3.1 gráfico da equação $y = x$ no plano 45
3.2 Coeficiente angular e coeficiente linear 47
3.3 retas e suas equações no plano 49
3.4 retas e coeficiente angular 50
3.5 números reais na reta numérica 51
3.6 52
3.7 O plano cartesiano 53
3.8 O produto geométrico 54
3.9 Média aritmética ponderada 55
3.10 produto por um número complexo 59
3.11 produto vetorial e produto escalar 61
3.12 Círculo mede a distância 62

3.13 Retas r, s 64
3.14 equação vetorial da reta: cosenos diretores 66

4.1 círculo de raio r e centro (a, b) 70
4.2 círculos e reta 73
4.3 81

Esta é uma versão preliminar deste livro e a introdução tem o papel de planejamento do livro portanto não leve muito a sério este texto introdutório uma vez que nem sempre será verdade o que for afirmado aqui uma vez que o planejamento pode ser alterado sem aviso prévio.

O meu objetivo é fazer Álgebra Linear usando a Geometria Analítica como laboratório de trabalho. Por um lado isto representa uma Álgebra Linear menos avançada mas também mais aplicada. Por outro lado a Geometria Analítica vai ser apresentada com tratamento vetorial e potencialmente mais viva e mais motivadora. Por exemplo, estou lançando mão dum acontecimento recente que foi a nave Rosetta do Programa Espacial Europeu que se aproximou do cometa 67P/C-G, confira a figura (fig 1), página 2, lançando nele um robot que em

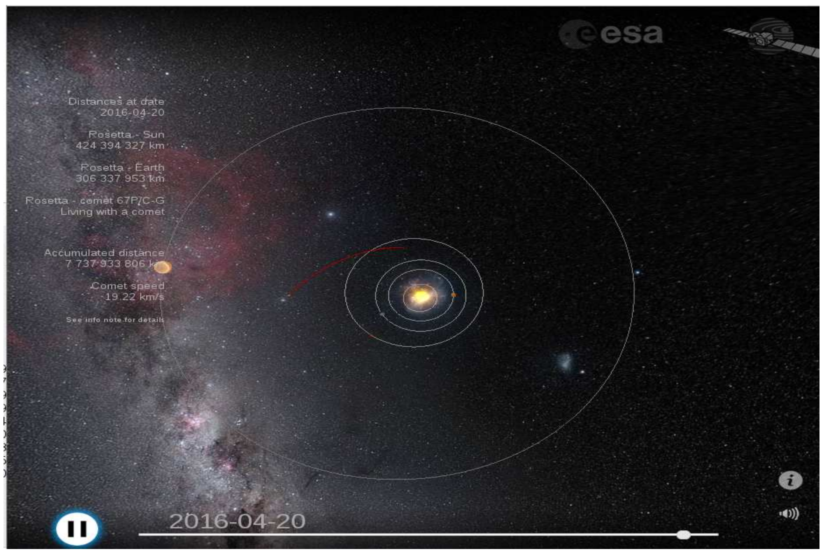


Figura 1: o caminho da Rosetta em direção ao cometa 67P/C-G

seguida começou a envir dados de análises químicas e geológicas de amostras da superfície do cometa.

Se, por um lado, isto é um tremendo gasto feito num momento em que Humanidade está agonizando, tendo no horizonte uma possibilidade de extermínio e portanto este projeto pode ser simplesmente inútil e seus recursos poderiam ser dirigidos para alterar o modo de vida na Terra abrindo possibilidade de sobrevivência para todos que vivemos aqui, por outro lado representa um exemplo de aplicação de alguns aspectos da Matemática que vamos estudar neste livro.

Observe que a Matemática deste livro oferece apenas parte da tecnologia utilizada para levar Rosetta às vizinhanças do cometa 67P/C-G, as elipses e as parábolas, que são as trajetórias de grande parte dos astros no Universo e em particular dos planetas do sistema solar, e Rosetta foi lançada para entrar nestas elipses aproveitando oportunidades para pular duma elipse para outra ganhando velocidade com as acelerações gravitacionais de Marte, Venus, do Sol e da Terra para ser catapultada entre as elipses e finalmente ser jogada na exteira do cometa com velocidade suficiente para alcança-lo ficando próximo o suficiente para lançar o robot sobre a superfície do cometa. Para isto se usou:

- Geometria Analítica;
- Equações diferenciais;
- muita Computação;
- muito dinheiro.

Então não vou poder fazer isto tudo neste livro em parte pela restrições orçamentárias que são muito grandes do meu lado... mas vou poder mostar-lhe parte do processo e motivação para que em outras disciplinas mais a frente você chegue mais próximo de compreender todas as etapas do projeto. O livro não se dedica à Rosetta, mas vou usar esta motivação em vários pontos do texto, sobretudo quando estudarmos as *elipses* e as *parábolas* que são as duas curvas usadas na base dos cálculos.

Geometria Analítica é o estudo das cônicas, *elipses e parábolas* são exemplos de cônicas.

Uma prévia do projeto é a seguinte:

- No primeiro capítulo estou tratando do plano mas como ele coincide com os números complexos vou aproveitar para fazer duas coisas numa só, estudar os números complexos como se fosse o plano.
- No segundo capítulo vou dedicar-me às cônicas como curvas planas e apresentar todas as equações da Geometria Analitica plana.
- No terceiro capítulo vou tratar do $\mathbf{R}^3$ mais ou menos expandindo o que tiver sido feito nos outros capítulos agora para o espaço tridimensional porém com as matrizes no foco. Neste momento já estaremos em plena Álgebra Linear.
- O quarto capítulo será o estudo do espaço $\mathbf{R}^4$ mas com o pensamento num espaço de dimensão n qualquer porque $\mathbf{R}^4$ é o primeiro espaço de baixa dimensão em que acontecem *coisas extranhas* relativamente à nossa *dimensão habitual*. Desta forma vou usar o $\mathbf{R}^4$ como suporte para generalização para uma dimensão qualquer.

Mas como já lhe fiz o alerta, o livro ainda não está escrito, este é apenas o plano do trabalho que pode ser alterado sem aviso prévio.

Sobral, fevereiro de 2015

Tarcisio

Parte I

Geometria do plano

Capítulo 1

O plano cartesiano

____________________ - **geometria analítica** foi criada para aplicar os métodos da álgebra e da ari-tmética às relações geométricas, comumente ligada ao nome de *René Descartes* que teria sido o idealizador do sistema de *coordenadas cartesianas.*

A Geometria Analítica define as equações de alguns lugares geométricos, como retas, planos, círculos, elipses, parábolas, hipérboles, as chamadas cônicas. Confira

- equação do círculo, equação da elípse, equação da hipérbole, equação da parábola,
- equação da reta;
- plano coordenado, eixos coordenados;

O sistema de coordenadas cartesianas basicamente identifica os pontos da *reta numérica* com um número real e é isto que chamamos de *coordenada* dum ponto na reta.

Se identificarmos um ponto, numa reta qualquer, como sendo o *zero*, à direita do qual, por convenção se identifica um outro ponto como sendo o 1 como você pode ver na figura (fig 1.1), página 7, então criamos uma sistema para

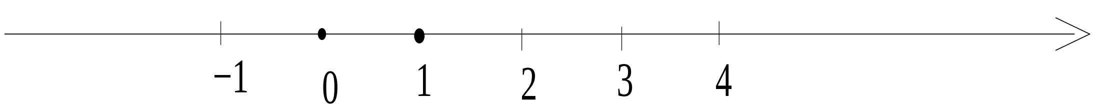


Figura 1.1: reta numérica, representação geométrica de **R**

"numerizar a reta" ou "digitalizar a reta". Desta forma a reta deixa de ser apenas um ente geométrico e passa agora a ser uma representação do conjunto dos números reais **R**.

- A escolha dum ponto para representar o zero dividiu a reta em duas semiretas.

- A escolha dum ponto para representar o número 1 selecionou uma das semiretas como a *semireta positiva*, mas fez mais do que isto definiu um segmento de reta com medida 1 o que nos permite propagar pela reta numérica todos os números inteiros usando, por exemplo, um compasso para marcar os inteiros positivos e negativos.

- Os números negativos são marcados na *semireta negativa*, naturalmente.

A semelhança de triângulos nos permite registrar a posição dos números racionais que não sejam inteiros, confira a figura (fig 1.2), página 8, onde você

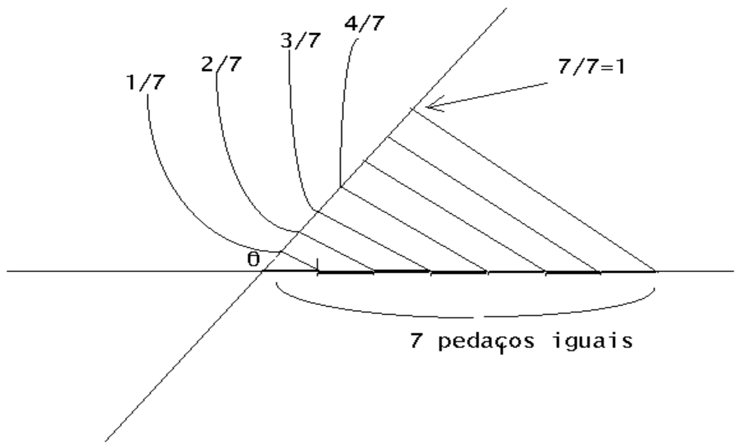


Figura 1.2: frações triângulos semelhantes

pode ver as frações da forma $\frac{p}{7}; 0 \le p \le 7$.

A *reta numérica* herda da *reta geométrica* uma propriedade importante dos segmentos de reta, confira a figura (fig 1.3), página 8,

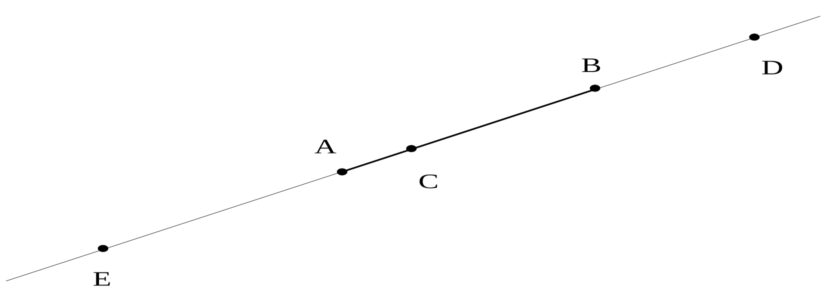


Figura 1.3: segmentos de reta na reta orientada

- dois pontos diferentes, A, B determinam um segmento de reta,

- no segmento de reta $\overline{AB}$ tem um ponto, C diferente dos extremos

- e um quarto ponto D fica fora do segmento.
- Como a reta real é orientada então o ponto que fica fora do segmento de reta, que agora chamamos de *intervalo*, pode ser maior do que B ou menor do que A, confira a figura (fig 1.3).

Para os números a propriedade adquire a redação "*entre dois números diferentes quaisquer, sempre tem outro entre eles, um terceiro que é maior dos que estes dois e um quarto que é menor do que eles todos*".

Isto é consequência da escolha do 0 e do 1 criando uma *ordem na reta.*

Em símbolos ficaria assim, em que **R** representa a reta numérica

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \;\; \Rightarrow \;\; (\exists\ c \in \mathbf{R})(a \leq c \leq b); \tag{1.1}$$
$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \;\; \Rightarrow \;\; (\exists\ d \in \mathbf{R})(a \leq b \leq d); \tag{1.2}$$
$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \;\; \Rightarrow \;\; (\exists\ e \in \mathbf{R})(e \leq a \leq b \leq d); \tag{1.3}$$

e podemos iterar esta propriedade indefinidamente *porque a reta é infinita.*

Todas as propriedades da *reta geométrica* se aplicam a *reta numérica*, mas a reta numérica é uma reta especializada que tem mais propriedades o que a tranforma no conjunto dos números reais.

Se além disto considerarmos um par de retas numéricas concorrentes no zero como mostra a figura (fig 1.4), página 10, podemos agora "numerisar" o plano. Com três retas podemos numerizar o espaço $3D$ e assim por diante. A figura (fig 1.4) é uma representação do produto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ criando o *plano numérico.* Mas esta denominação não é usada, dizemos *o plano coordenado*, a *reta numérica.*

Com três *retas numerizadas* se cortando perpendicularmente na origem, poderiamos representar geométricamente $\mathbf{R}^3$, ou numerizar o espaço $\mathbf{R}^3$.

Na figura (fig 1.4) estão representados vários pontos do plano, os pontos

$$\{(-2, 0), (-1, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$$

todos no que chamamos *eixo* OX, o eixo horizontal. Também estão marcados os pontos

$$\{(0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2)\}$$

no eixo OY, e o ponto $(3, 2)$, que não pertence a nenhum dos eixos, também está marcado.

Agora é possível fazer referência a conjuntos geométricos com equações. Por exemplo, se estabelecermos a convenção de que a primeira coordenada ficará representada pela variável x e que a segunda coordenada será representada pela variável y então a equação da primeira bissetriz dos eixos, a reta que divide ao meio o ângulo determinado pelos eixos OX e OY, é $y = x$, porque todos os pontos sobre a primeira bissetriz tem as duas coordenadas iguais.

As duas coordenadas dum ponto no plano algumas vezes são chamadas de *abcissa*, a primeira coordenada, e *ordenada*, a segunda coordenada. Então sobre a primeira bissetriz dos eixos qualquer ponto tem *abcissa* igual â *ordenada.*

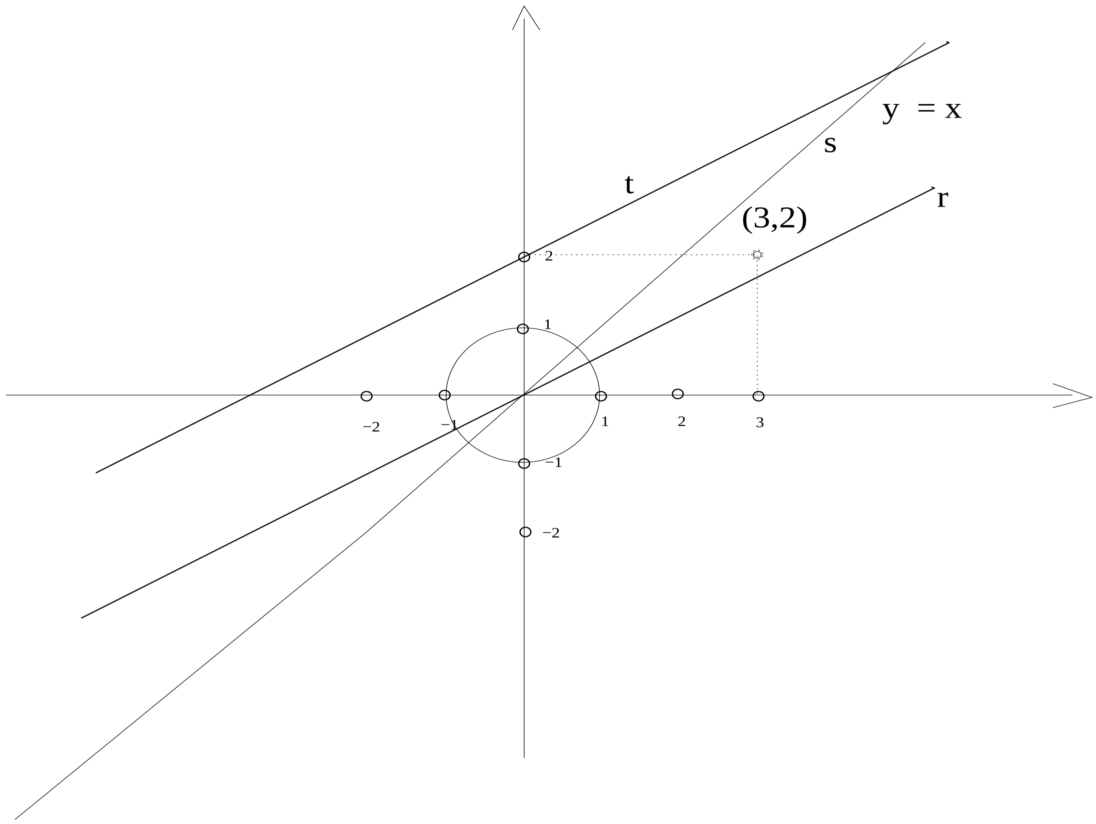


Figura 1.4: Sistema de coordenadas cartesianas

Reciprocamente, se um ponto do plano tiver *abcissa* igual â *ordenada*, então é um ponto da forma (x, z), quer dizer que satisfaz à equação $y = x$.

Com exemplo estou mostrando que o lugar geométrico do plano designado como primeira bissetriz fica inequivocamente identificado pela equação $y = x$. Você pode traduzir a equação $y = x$ com a frase *é o lugar geométrico dos pontos* $P = (x, y)$ *do plano tal que a abcissa de* P *é igual a ordenada de de* P.

Observação 1 *As cônicas no Universo*

Qualquer lugar geométrico do plano, ou do espaço, poderia, em princípio ser identificado com uma equação, mas nem sempre seria fácil encontrar uma equação para um conjunto arbitrário do plano. As cônicas, retas, planos, círculos, elipses, hipérboles e parábolas são bem conhecidas e sabemos encontrar as equações destes lugares geométricos.

Também estes entes geométricos, as cônicas, respondem de forma muito boa às nossas necessidades de descrever a Natureza.

A forma esférica é um bom exemplo para começar. As circunferências ou esferas, são as formas geométricas naturais quando todas as forças estiverem equilibradas. No espaço, afastado de fortes influências gravitacionais, qualquer líquido toma a forma esférica.

A trajetória dos planetas no espaço tende a ser do tipo elipse que podemos entender como uma deformação do círculo. Se um corpo no espaço não estiver numa trajetória elíptica é quase certo que estará sobre uma parábola.

Retas é que praticamente não existem em nenhum ponto do Universo, devido força gravitacional entre os planetas da qual nem mesmo a luz escapa.

Podemos identificar o *coeficiente angular* de algumas retas[1] estabelecendo uma proporção entre as coordenadas horizontais e verticais de cada ponto sobre ela. No caso da reta $y = x$ esta proporção é 1 e então escrevemos $y = 1x$ e neste caso se segue a convenção da álgebra não escrevendo 1.

A outra reta que aparece na figura (fig 1.4) teria um *coeficiente angular* positivo e menor do que 1 porque a coordenada vertical será sempre, em módulo, menor do que a coordenada horizontal, escrevemos $y = mx$ em que o número $m < 1$.

Este coeficiente pode ser calculado, considerando a reta que aparece na figura, podemos medir o comprimento do segmento de reta que parte do ponto $(1, 0)$ até encontrar a reta e este valor é m, no caso da reta r este valor é $m = 0.56$ aproximadamente. Então a equação da reta r é $y = 0.56x$. Observe que o plano, agora, é uma região "métrica", podemos medir as distâncias entre os pontos do plano, neste caso usamos uma régua para fazê-lo.

Isto vale para as retas que passem na origem. Para outra reta qualquer, que não passe na origem, confira na figura (fig 1.4), é o caso da reta t, podemos encontrar-lhe uma paralela passando na origem e aplicar o mesmo método para encontrar m porém a equação que podemos escrever facilmente seria a da reta paralela passando na origem: $y = mx$. É o caso da reta t que é paralela a reta r, na figura (fig 1.4).

Você pode ver que precisamos duma metodologia mais avançada para escrever a equação de qualquer reta. Podemos construir um método sem grandes dificuldades se aceitarmos algumas afirmações como óbvias, por exemplo, que a equação de *quase todas*[2] as retas seria da forma $y = mx + b$ então o número b é a distância ao longo do eixo OY entre as duas paralelas que no caso da reta t é 2 então a equação da reta t é $y = 0.56x + 2$.

Estes dois coeficientes recebem os nomes de *coeficiente angular* e *coeficiente linear* e na construção que acabei de fazer você viu as razões dos nomes escolhidos: m,*coeficiente angular*, é a razão de proporcionalidade entre as coordenadas horizontal e vertical, quando a reta passa na origem, mas ainda tem o mesmo sentido em qualquer reta paralela a elas. b é a distância de uma reta, ao longo do eixo OY à paralela que passa na origem, o *coeficiente linear*.

Agora, com uma expressão do tipo $y = mx + b$, em que você escolhe os valores de m e de b você pode facilmente fazer o gráfico da reta que tenha esta equação. Experimente com `gnuplot`, e aqui está o código

```
m1 = 0.5; m2 = 1; m3 = 1.5; m4 = -0.5; m5 = -1; m6 = -1.5;
b = 0.5; b = 1; b = 1.5; b = -0.5; b = -1; b = -1.5;
r1(x) = m1*x + b;  r2(x) = m2*x + b; r3(x) = m3*x + b;
r4(x) = m4*x + b;  r5(x) = m5*x + b; r6(x) = m6*x + b;
plot r1(x), r2(x), r3(x), r4(x), r5(x), r6(x), 0;
pause -2 "Aperte enter para terminar "
```

[1] O coeficiente angular tem um defeito importante: as retas perpendiculares ao eixo OX não têm coeficiente angular.

[2] Este método não serve para as retas paralelas ao eixo OY, voltarei a seguir a este questão.

raspe e cole num terminal do `gnuplot` e você vai ver o gráfico das retas. `gnuplot` vai ler todos os valores da segunda linha mas vai usar o último apenas. Basta você apagar o último para ver novos gráficos. Ou digite, no terminal do `gnuplot`

```
b = 3;
replot;
```

e novos gráficos de retas, agora $b = 3$ serão desenhados. Identifique os coeficientes angulares em cada gráfico para adquirir intuição a respeito do coeficiente angular.

Mais uma correção correção pode ser introduzida na equação da reta para encontrarmos sua equação usando duas informações:

- a reta pelo ponto (a, b);
- o seu coeficiente angular é m

esta reta tem por equação

$$y = m(x - a) + b; \tag{1.4}$$

esta é a formulação ideal para trabalhar com equações de retas tangentes aos gráficos de funções no Cálculo.

O método que descrevi não vale para as retas que sejam perpendiculares ao eixo OX, mas a equação duma reta deste tipo é facil de ser obtida, nelas a primeira coordenada será sempre constante, o valor, no eixo OX onde elas passam. Por exemplo $x = 0$ é a equação do eixo OY, e $x = 4$ é a equação de uma reta paralela ao eixo OY passando no ponto 4 do eixo OX. Mais geral, se a reta passa pelo ponto (a, b) e é paralela ao eixo OY então sua equação será $x = a$.

——————————— - **distância entre dois pontos** é conceito da Geometria Analítica generalizado na *teoria dos espaços métricos* que define *distância* abstraindo o sentido geométrico mas guardando as propriedades fundamentais da distância. Confira *distância*.

A Geometria Analítica *digitalizou* o espaço e a geometria euclidiana, tornando possível a algebrização da geometria. Assim (x, y) para dois números reais dados representam um ponto do espaço $\mathbf{R}^2$, que é um plano ou um espaço bidimensional, ou (x, y, z), para três números reais dados representam um ponto do espaço $\mathbf{R}^3$, um espaço tridimensional, ou

$$P = (x_1, x_2, \dots x_n); x_k \in \mathbf{R}; \quad P \in \mathbf{R}^n \text{ um espaço de dimensão } n; \tag{1.5}$$

Dados dois pontos no $P, Q \in \mathbf{R}^2$, confira a figura (fig 1.5), página 13, podemos *calcular* a distância entre eles usando o teorema de Pitágoras,

$$d(P, Q) = \sqrt{(m - a)^2 + (n - b)^2} = \sqrt{(a - m)^2 + (b - n)^2}; \tag{1.6}$$

Observe que o módulo das diferenças que aparecem na equação (eq. 6) medem o comprimento dos lados do triângulo retângulo que o segmento $\overline{PQ}$ determina com retas paralelas aos eixos coordenados.

As propriedades da distância são

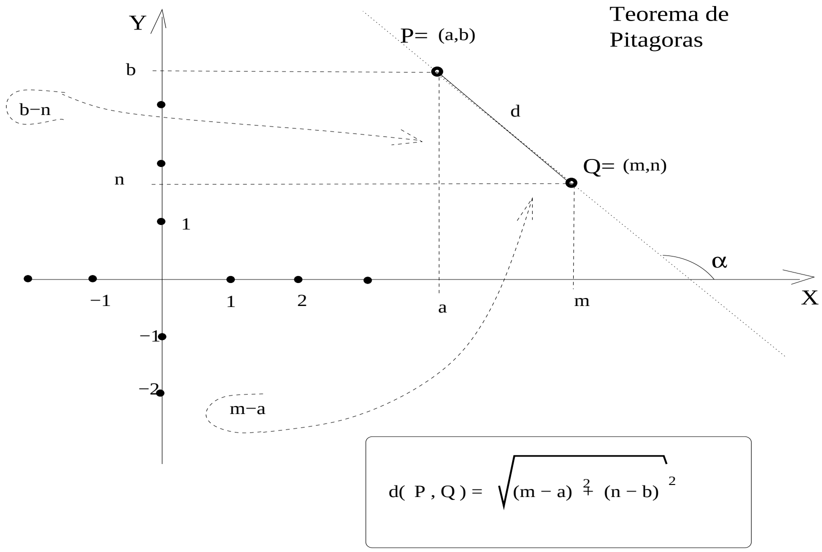


Figura 1.5: Distância entre dois pontos e o teorema de Pitágoras

1. reflexividade $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$
2. simetria $d(P,Q) = d(Q,P)$;
3. desigualdade triangular $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$

Qualquer função de duas variáveis que tenha estas propriedades define uma distância num conjunto M e é quando se diz que (M,d) é um espaço métrico.

A distância é uma propriedade bidimensional porque envolve em suas propriedades no máximo três elementos do espaço que determinam um plano deste espaço, o que facilita muito nas demonstrações das propriedades mais gerais da distância. Para o $\mathbf{R}^n$ a fórmula na equação (eq. 6) fica

$$\begin{cases} d(P,Q) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(p_k - q_k)^2}; \\ P = (p_1, \ldots, p_n); Q = (q_1, \ldots, q_n); \end{cases} \tag{1.7}$$

Uma forma de definir a distância passa pelo *produto interno* ou *produto escalar* que está definido em todos os espaços de dimensão finita e também em espaços de dimensão não finita. O *produto escalar*, como meio de definir distância também pode ser definido de várias maneiras. A definição usual no $\mathbf{R}^n$ é

$$< P, Q >= \sum_{k=1}^{n} p_k q_k = \|P\|\|Q\| \cos(\gamma); \tag{1.8}$$

em que γ é o ângulo entre P e Q.

A primeira expressão na (eq. 8) é uma *forma bilinear* definida em $\mathbf{R}^n$ e a segunda é a expressão bidimensional da mesma no plano determinado pelos dois vetores.

Observe que a equação (eq. 8) nos oferece a oportunidade de definir ângulo entre dois vetores dum espaço qualquer em que esteja definido um produto escalar, usando a função *acos*(). Tais espaços se chamam *espaço com produto interno*.

Confira *produto escalar* ou *produto interno*.

Observação 2 *triedro positivo*

A ordenação de vetores no espaço é uma questão importante e apenas traduz as leis da Física ou da Natureza. Observe como isto é feito usando a regra do sacarolhas *que também poderia ser chamada de regra do parafuso.*

Como dois vetores no $\mathbf{R}^n$ *determinam um plano do* $\mathbf{R}^n$*, então o ângulo é um conceito geométrico claro, é o menor segmento do círculo trigonométrico que os dois vetores determinam. Na figura (fig 1.6), página 14, você vê dois vetores do* $\mathbf{R}^n$ *que determinam um plano*

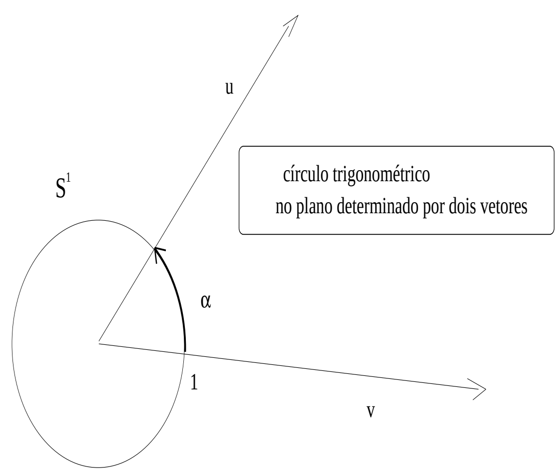


Figura 1.6: o ângulo entre dois vetores do $\mathbf{R}^n$

e tomando a origem comum aos dois vetores como centro de um círculo de raio 1 um dos vetores corta o círculo trigonométrico na origem do círculo.

Aqui parece haver alguns conceitos difusos, mas não é bem assim. Existe uma orientação padrão para os vetores no espaço, dada pela regra do sacarolha. O sacarolha segue a orientação dos parafusos, para enfiá-lo na rolha a rotação é negativa, é a mesma orientação para enfiar um parafuso numa peça. Com esta regra a figura (fig 1.6), mostra no círculo trigonométrico o ponto inicial marcado pela reta suporte do vetor $\vec{v}$*, estando os vetores* $\vec{v}, \vec{u}$ *orientados positivamente pela regra do sacarolhas. Se houver um terceiro vetor ele vai ocupar a posição do sacarolhas pronto para "*sacar uma rolha*" mostrando a posição de tres vetores formando um* triedro com ordenação positiva.

Para que você se convença de que esta regra está consistente, deixe-me sugerir-lhe um experimento: considere dois vetores perpendiculares, tome a figura (fig 1.6) como padrão, pensando nos dois vetores $\vec{v}, \vec{u}$ *cortando o círculo trigonométrico na quarta parte,* $\frac{\pi}{2}$.

Mas agora considere que $|\vec{v}| = |\vec{u}| = 1$*, por construção, você selecionou* $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbf{S^1}$*, no círculo trigonométrico.*

O sacarolhas na origem dos eixos, o ponto comum dos vetores $\vec{v}, \vec{u}$*, representando um terceiro vetor "arrancando a rolha", na direção positiva, é o vetor* $\vec{z}$ *e também* $|\vec{z}| = 1$*, tudo por construção.*

Os dois vetores $\vec{u}, \vec{z}$*, determinam um plano e o vetor* $\vec{v}$ *é o sacarolhas nesta nova situação. O* produto vetorial *de vetores executa, algebricamente, esta operação:*

$$\vec{v} \times \vec{u} = \vec{z}; \vec{u} \times \vec{z} = \vec{v}; \tag{1.9}$$

ou ainda, como na Física:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \tag{1.10}$$

sendo que esta operação não é comutativa...

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \tag{1.11}$$

A eletricidade se comporta de acordo com esta regra para definir o sentido da corrente positiva gerada por gerador montado com imãns eletromagnéticos. A regra do sacarolhas apenas traduz o que se passa no mundo eletromagnético. Se você inverter as conexões nos polos duma bateria, o eletroimã vai rodar no sentido inverso:

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \tag{1.12}$$

Uma propriedade que tem uso intenso é a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$| < P, Q > | \leq \|P\|\|Q\| \tag{1.13}$$

que tem uma demonstração simples no plano, mas eu já observei que, dados dois vetores, eles determinam um plano do espaço a que eles pertencem portanto demonstrá-la num plano não é uma restrição.

Para isto preciso mostrar que a forma trigonométrica da definição na equação (eq. 8) é idêntica à expressão da soma de produtos na mesma equação <u>porque</u>

$$| < P, Q > | = \|P\|\|Q\|| \cos(\gamma)| \leq \|P\|\|Q\|;$$

$\boxed{\textbf{Dem}}$:

Se $n = 2$ é consequência direta da *fórmula de Euler* porque, dividindo pelo módulo dos vetores teremos:

$$< \frac{P}{\|P\|}, \frac{Q}{\|Q\|} >= \frac{|<P,Q>|}{\|P\|\|Q\|} \leq 1; \tag{1.14}$$

$$< \frac{P}{\|P\|}, \frac{Q}{\|Q\|} >=< (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), (\cos(\beta), \sin(\beta)) >; \tag{1.15}$$

$$< \frac{P}{\|P\|}, \frac{Q}{\|Q\|} >= \cos(\alpha - \beta) = \cos(\gamma); \tag{1.16}$$

Na equação (eq. 14) usei a propriedade das formas bilineares que permite a distribuição dos coeficientes $\|P\|, \|Q\|$ entre os dois fatores[3].

Na equação(eq. 15) usei uma representação plana dos dois vetores que podem ser expressos como pontos do círculo trigonétrico sendo α, β os seus ângulos e γ é o ângulo entre eles. Na passagem da equação(eq. 15) para a equação(eq. 16) usei a expressão do produto escalar

$$< (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), (\cos(\beta), \sin(\beta)) >= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta); \tag{1.17}$$

Os cálculos mostram que posso me reduzir, na demonstração, ao caso dos vetores unitários. Então, na sequência vou supor que $\|P\| = \|Q\| = 1$.

A passagem crítica, na demonstração por indução que está na passagem de $n - 1$ para n que é semelhante à passagem da dimensão 2 para 3, mas esta é mais intuitiva. Deixe-me agora considerar $P, Q \in \mathbf{R}^3$, vetores unitários, portanto pontos de $\mathbf{S}^2$ a esfera unitária do $\mathbf{R}^3$. Mas estes dois vetores determinam um plano que corta $\mathbf{S}^2$ segundo um círculo unitário, uma curva plana, e, pela demonstração anterior, $\cos(\gamma)$ é o valor do produto escalar entre eles, em que γ é ângulo entre os vetores.

Mas esta demonstração não seria necessária dentro do escopo duma demonstração por indução, ela é simplesmente tomada como verdadeira para todo $N \leq n - 1$ e temos que considerar agora $P, Q \in \mathbf{R}^n$, dois vetores unitários. Mas estes vetores definem um plano do $\mathbf{R}^n$ e o valor do produto escalar para dois vetores, no plano, em dimensão $N < n$, por hipótese de indução, é $\cos(\gamma)$, em que γ é o ângulo entre os vetores, o que termina a demonstração.

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

[3]as forma bilineares generalizam o produto de números que um exemplo de forma bilinear.

Um outro exemplo simples de lugar geométrico é o círculo. A geometria o define como *é o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja distância a um ponto fixo C é constante.* Esta distância constante de P a C é o raio r.

A equação do círculo que aparece na figura (fig. 1.4) é simples de ser obtida. Observe que é o círculo trigonométrico. Qualquer ponto em cima deste círculo fica à distância 1 da *origem* $(0,0)$ *dos eixos*. Chamando de (x,y) um ponto genérico sobre o círculo e aplicando o teorema de Pitágoras para representar a distância dele até a *origem* encontramos $\sqrt{x^2+y^2}=1$ ou ainda:

$$x^2+y^2=1 \text{ equação do círculo trigonométrico} \tag{1.18}$$

A equação de um círculo de raio R com centro no ponto (a,b) do plano seria

$$d((x,y),(a,b))=R; d((x,y),(a,b))^2=(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{1.19}$$

que você pode obter usando novamente o teorema de Pitágoras e a definição de círculo.

Muito mais difícil seria, dada uma equação, como

$$x^3+3x^2y+xy^2+y^3=4 \tag{1.20}$$

descobrir que figura seria representada por esta equação. Mas é possível com um programa de computador encontrar alguns pontos que satisfaçam esta equação e obter um gráfico de uma parte da tal figura, aproximadamente, se for possível, se a equação representar alguma figura "real". A geometria algébrica é a parte da Matemática que tenta responder a esta questão para caso das expressões algébricas. Na figura (fig 1.7), página 16, você pode ver parte da curva algébrica

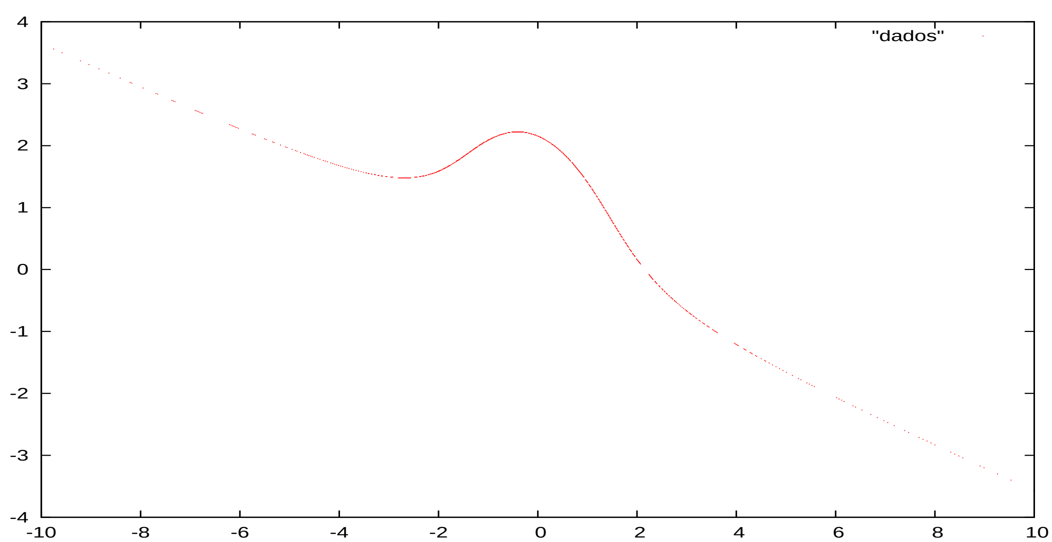


Figura 1.7: Parte da curva algébrica

cuja equação se encontra na (eq.20). Ela foi obtida com um programa escrito em `Python` que varreu um retângulo do plano procurando por pontos que estivessem próximos desta equação. Do gráfico se pode produzir a pergunta: “teria este gráfico uma reta assíntota ?”. Uma tal pergunta se pode resolver com métodos avançados do Cálculo.

O programa pode ser visto na figura (fig 1.8), página 17, E você pode alterar

```
#! /usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-
import sys
from posix import popen
from math import *

def F(x,y):
  return pow(x,3) + 3*pow(x,2)*y + x*pow(y,2) + pow(y,3);

def cria_dados(inicio, fim, passo, delta,valor):
       dados = open('dados','w')
       x=inicio; y=fim; A=valor;
       while(x<fim):
              y = inicio;
              while(y<fim):
                     if (abs(F(x,y) - A) < delta):
                            dados.write(str(x)+" "+str(y)+"\n");
                     y +=passo;
              x +=passo;
       dados.close();

def cria_transfere():                                          Terminal
       transfere = open('transfere','w')
       transfere.write( "set pointsize 0.1 \n");
       transfere.write('plot \"dados\" with points\n')
       transfere.write( "set terminal postscript  eps enhanced color  \n");
       transfere.write( "set output \"GeometriaAnalitica_03.eps\" \n");
       transfere.write('plot \"dados\" with points\n')
       transfere.write( "pause -2 \"Aperte enter para terminar\" \n");
       transfere.close();

def principal():
       print "Lados do retângulo para o gráfico"
       inicio = input("na horizontal,  inicio =");
       fim    = input("na horizontal,  fim =")
       passo  = input("O passo da malha,  passo = ");
       delta  = input("Precisão para resolver a desigualdade,  delta = ")
       print "Vou na verdade calcular uma curva de nível e preciso o \n",\
              "o valor de A na expressão F(x,y) = A ";
       A      = input("O valor de A = ");
       cria_dados(inicio, fim, passo, delta,A);
       cria_transfere();
       popen("gnuplot transfere");
```

Figura 1.8: programa para traçar curvas de nível

a equação de `F(x,y)` para visualizar o gráfico de outra equação, se este gráfico puder ser feito.

Entenda como funciona o programa e modifique-o para obter outras visualizações desta curva ou de outras. Na figura (fig 1.8), há uma indicação sobre ”terminal”o programa está preparado para produzir um arquivo ”postscript”, se você quiser que `gnuplot` exiba o gráfico na tela, simplesmente comente as linhas:

```
# transfere.write( "set terminal postscript  eps enhanced color  \n");
# transfere.write( "set output \"GeometriaAnalitica_03.eps\" \n");
```

isto é feito colocando o sinal do “jogo da velha na primeira posição da linha, em `python`, respeitando a tabulação.

Na imagem do programa, há mais duas setas indicando os pontos onde selecionar a precisão do gráfico, `passo` é a precisão da malha, e `delta` é a precisão com a desigualdade vai ser resolvida. Experimente que não há riscos. Tente o valor grande, por exemplo, 0.5 para `delta` e você verá uma “faixa” no centro da qual se encontra a curva. Na verdade, para qualquer valor escolhido o resultado será uma “faixa”.

Manipule os valores da precisão onde está indicado na figura para conseguir melhor resultado mas comece com valores não muito pequenos, tente algo em torno de $\delta = 0.1$ para começar, depois use um δ menor. O tempo de processamento é consequência do incremento dado a x e a y guardado na variável `passo`, o valor dado a esta variável será o responsável pelo tempo de processamento. Se você escolher um valor muito pequeno prepare-se para aguardar algumas horas até que o gráfico apareça na tela.

Você pode baixar o programa da página

`http://calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas//CurvaAlgebrica.py`

Algebricamente, e com algum trabalho, podemos escrever as equações de muitos dos subconjuntos do plano, em particular círculos, hipérboles e parábolas são estudadas na Geometria Analítica, são as chamadas *cônicas*.

Esta curvas se originam geometricamente de cortes de um cone com duas folhas. Na figura (1.9) página 18, você vé um cone cortado por um plano paralelo

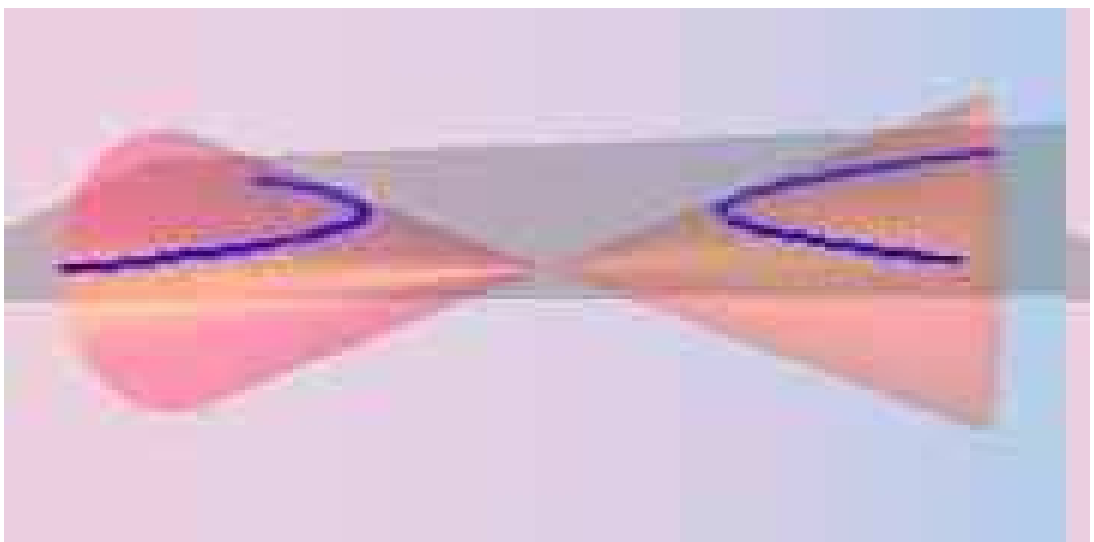


Figura 1.9: Plano paralelo ao eixo do cone: hipérboles

ao eixo do cone, mas não precisava que o plano fosse paralelo ao eixo, apenas não podia chegar a ser paralelo à geratriz do cone. Este detalhe pode ser melhor discutido na construção da equação da hipérbole, confira esta equação em outro lugar.

Se o plano for paralelo à geratriz o resultado é uma parábola que pode ser vista na figura (1.10) página 19, Mas também aqui se tem variantes, o plano pode cortar a folha do cone em vários pontos resultando numa parábola mais ou menos aberta, vou discutir isto quando construir a equação da parábola na última seção.

Se o plano tiver inclinação maior do que a da geratriz o resultado será uma curva fechada que pode ir de elipse até círculo, vou discutir isto na próxima seção com a equação do círculo quando vou mostrar que o círculo é uma elipse degenerada que é o contrário do que todo mundo diz. . . a figura (1.11) página 19,

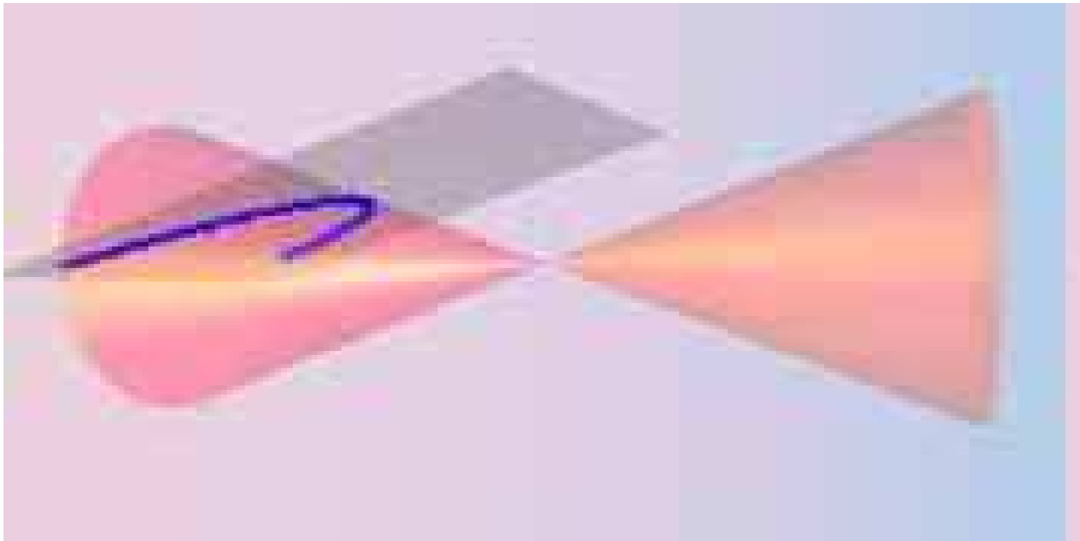


Figura 1.10: Quando o plano é paralelo à geratriz: parábola

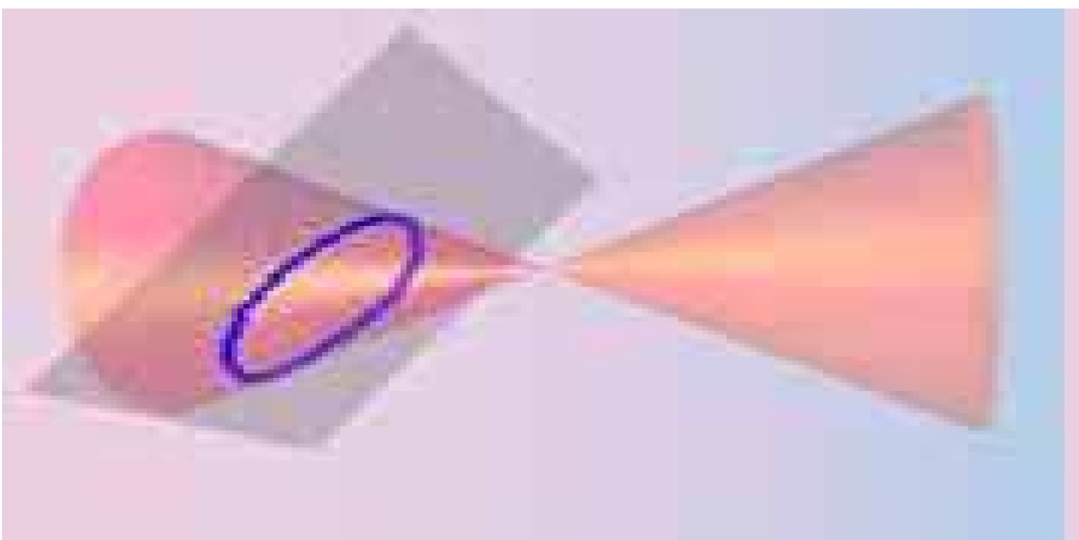


Figura 1.11: A elipse degenerada: círculo

As fotos das interseções do cone foram copiadas, com autorização, da página do Dr. Anthony Rynne, University of Limerick

`http://www3.ul.ie/ rynnet/swconics/planes_cutting_coneA.htm`

Na figura (1.12) página 20, você vê plano XOY e o eixo do cone que aparece nas figuras 1.9-1.11 é perpendicular ao plano XOY passando pelo ponto $(0,0)$. No plano ZOY se podem ver duas retas que se cruzam no ponto $(0,0,0)$ a interseção do cone com este plano. Análise que corresponde às figuras 1.9-1.11 é relativa às possíveis forma como um plano intercepte o plano com o plano ZOY que estão representadas na figura (1.13) página 21,

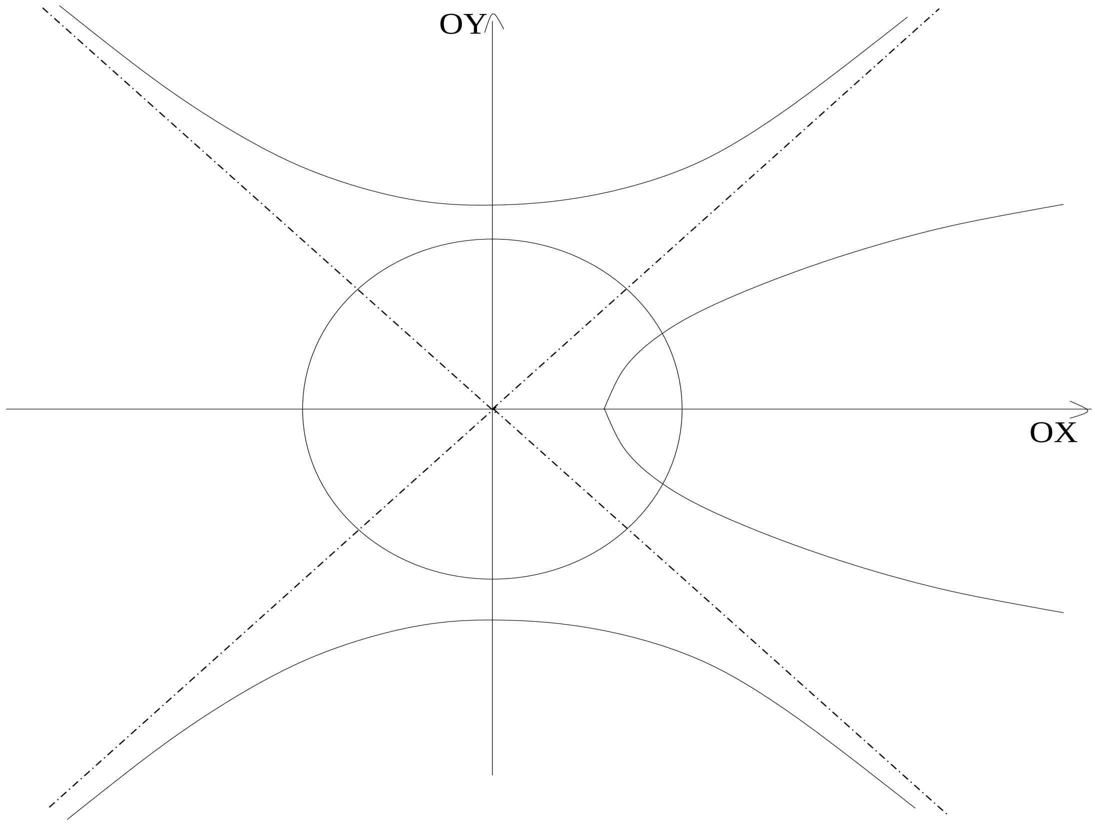


Figura 1.12: imagem das cônicas no plano XOY

A região hachuriada é a projeção do cone no plano ZOY. Se um plano cortar perpendicularmente ZOY com inclinação **entre** os limites da região hachuriada, corta o cone segundo uma hipérbole. Se o plano tiver **exatamente** a inclinação das retas que limitam a região hachuriada irá cortar uma das folhas do cone segundo uma parábola. Se a inclinação do plano estiver **fora** da região hachuriada irá cortar uma das folhas do cone segundo um curva fechada, elipse ou círculo e o caso do círculo corresponde **exatamente** ao eixo OZ.

Há uma infinidade de variantes para as equações de cônicas que podem ser assim obtidas, mas basicamente elas dependem da inclinação da *geratriz do cone* e do ponto $(0, a, b)$ por onde passa o eixo do cone e isto pode dar um livro de 400 páginas como o livro de Lehmann, ou qualquer outro que se tenha ao trabalho de descrever estas possibilidades. A minha opção é descrever o caso que vou chamar de "*padrão*" em que a interseção do cone que aparece na figura 1.13 são as bissetrizes dos eixos do plano YOZ. Qualquer outra variante pode ser obtida com uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

em que x, y são as coordenadas usada pela equação padrão e x', y' são as novas coordenadas depois da transformação. A matriz quadrada deve ter determinante

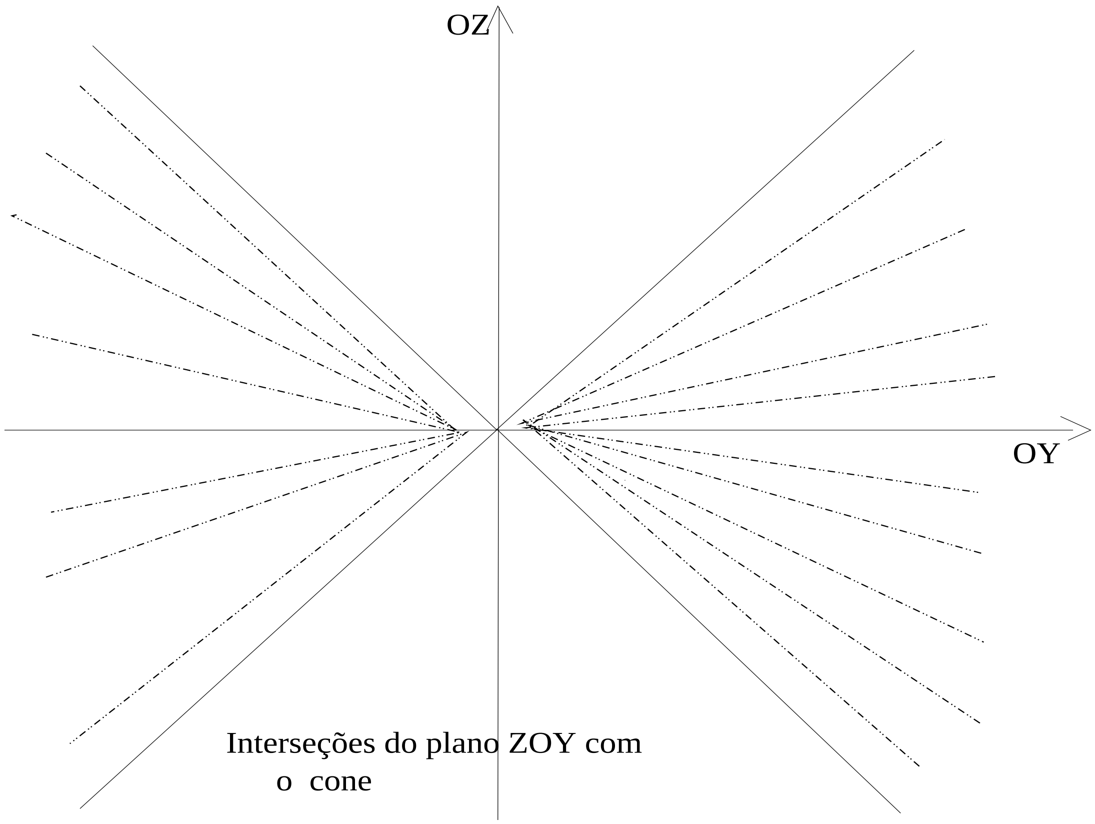


Figura 1.13: Interseções do plano ZOY com o cone

diferente de zero para que seja possível desfazer a mudança. O resultado desta mudança de variáveis será uma forma quadrática

$$Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + Dx' + Ey' + F = 0 \tag{1.22}$$

e existe uma análise da relação dos coeficientes que expressa qual é a forma padrão que originou esta forma quadrática. É importante repetir esta análise rigorosamente porque a expressão na equação (22) serve também de padrão para classificação das equações diferenciais parciais entre parabólicas, elípticas ou hiperbólicas.

Capítulo 2

O plano complexo

No esforço para resolver equações que nos tempos modernos se pode dizer que começa com Cardano e seus contemporâneos no século 16. Cardano mesmo não conhecia os números complexos mas fez uma operação incluindo raiz quadrada de número negativo que é reconhecida com um dos primeiros passos na descoberta destes números.
Como o próprio nome registra, os matemáticos criaram aos poucos uma entidade estranha, chamada número imaginário, que apareceu como solução da equação do segundo grau.
Com os números imaginários se criaram os "números complexos" outro tipo estranho que funcionava muito muito bem como se fosse um número... o resultado é um objeto geométrico que vamos usar aqui como modelo de vetor.

Os números complexos são assunto ainda da Matemática Elementar, aqui nós os vamos recordar com um sabor de Matemática Universitária e assim utilizá-los como uma introdução aos vetores, porque eles são vetores desde sua origem.

2.1 Incompletitude algébrica de R

A fórmula para resolver equações do segundo grau produz a solução

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac, \tag{2.1}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.2}$$

Se Δ for negativo a equação não tem soluções reais. Aos poucos os matemáticos foram experimentando a idéia de aceitar um significado para $\sqrt{\Delta}$; $\Delta < 0$ começando com uma pequena experiênicia, $i = \sqrt{-1}$ estendendo a regra estrita sobre raizes:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \tag{2.3}$$

que valia apenas quando $x, y \geq 0$. Com esta estensão se poderia calcular

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i \cdot 2 \tag{2.4}$$

e enfim qualquer raiz de número negativo poderia agora ser calculada.

Em particular, *as equações do segundo grau* passam a ter <u>sempre</u> solução apesar de que, cuidadosamente, se acrescente a observação, "*raizes imaginárias*" quando $\Delta < 0$.

Exemplo 1 *Resolvendo uma equação do segundo grau*

$$4x^2 - 12x + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -256$$
$$x' = \frac{12+16i}{8} \;;\; x'' = \frac{12-16i}{8}$$
$$x' = \frac{3}{2} + 2i; x'' = \frac{3}{2} - 2i$$

em que vemos aparecer um "número" do tipo

$$z = a + bi, \tag{2.5}$$

formado por um par de números reais separados pela *unidade imaginária* $\boxed{i}$.

Um "número" desta forma se chama "número complexo" e foram precisos vários séculos para que eles fossem admitidos como um número comum, *sem complexos.*

2.1.1 Algebra dos números complexos

Repetindo o que fizeram os nossos antepassados, os números complexos foram inicialmente tratados como uma expressão algébrica em que $\boxed{\;i\;}$ era considerado como uma "variável" mas obedecendo a regra

$$\boxed{\sqrt{-1} = i \iff i^2 = -1. \qquad (2.6)}$$

Assim, $z = 2 + 3i, w = 5 - 2i$ são somados segundo as regras da álgebra:

- "quem tem "i" é somado com quem tem "i"
- e os que não tiverem "i" são somados entre si":

$$z + w = (2 + 3i) + (5 - 2i) = (2 + 5) + (3 - 2)i = 7 + i$$

e de maneira idêntica se procede com a multiplicação:

$$(2 + 3i)(5 - 2i) \tag{2.7}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & +3i & \\ 5 & -2i & \\ \hline 10 & 15i & \\ & -4i & -6i^2 \\ \hline 10 & +11i & -6(-1) \\ \hline 16 & +11i & \end{array}$$

veja a figura (2.2) na página 26.

Usando estas regras da álgebra podemos escrever uma definição formal para a adição e para a multiplicação de números complexos. Primeiro vamos banir a expressão “quem tem i” do texto porque ela não é uma *expressão técnica* e nós somos extremamente ligados em *expressões técnicas*.

Definição 1 *Parte real e imaginária de um número complexo*
Dado um número complexo, escrito como

$$z = a + bi \equiv (a, b)$$

designaremos

$$\Re(z) = a \text{ a parte real de } z \tag{2.8}$$

$$\Im(z) = b \text{ a parte imaginária de } z \tag{2.9}$$

Definição 2 (Adição de números complexos) *Dados dois números complexos*

$$v = a + bi \equiv (a, b) \tag{2.10}$$

$$w = c + di \equiv (c, d) \tag{2.11}$$

definimos

$$v + w = (a + c, b + d) \tag{2.12}$$

$$\equiv v + w = (a + c) + (b + d)i \tag{2.13}$$

a soma se faz “coordenada por coordenada”, ou ainda

$$\Re(v + w) = \Re(v) + \Re(w) \tag{2.14}$$

$$\Im(v + w) = \Im(v) + \Im(w) \tag{2.15}$$

As duas formas

$$a + bi, (a, b)$$

são equivalentes e usamos uma ou a outra conforme for mais conveniente:

$$\boxed{\text{expressão algébrica}}\ \mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2\ \boxed{\text{entidade geométrica.}} \tag{2.16}$$

Observe que a última parte, na expressão acima, $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, é uma *representação geométrica* para os números complexos, uma vez que estamos dizendo que existe um ponto do plano,

$$(c, d) \in \mathbf{R}^2 \tag{2.17}$$

que é “equivalente” ao número complexo

$$c + di \in \mathbf{C}. \tag{2.18}$$

Quando foi descoberta a *representação geométrica* para os números complexos, um *salto qualitativo* foi dado. Como eles tinham uma *representação geométrica*, não podiam ser tão estranhos, *imaginários*, como no começo pareciam. Veja a figura (2.1).

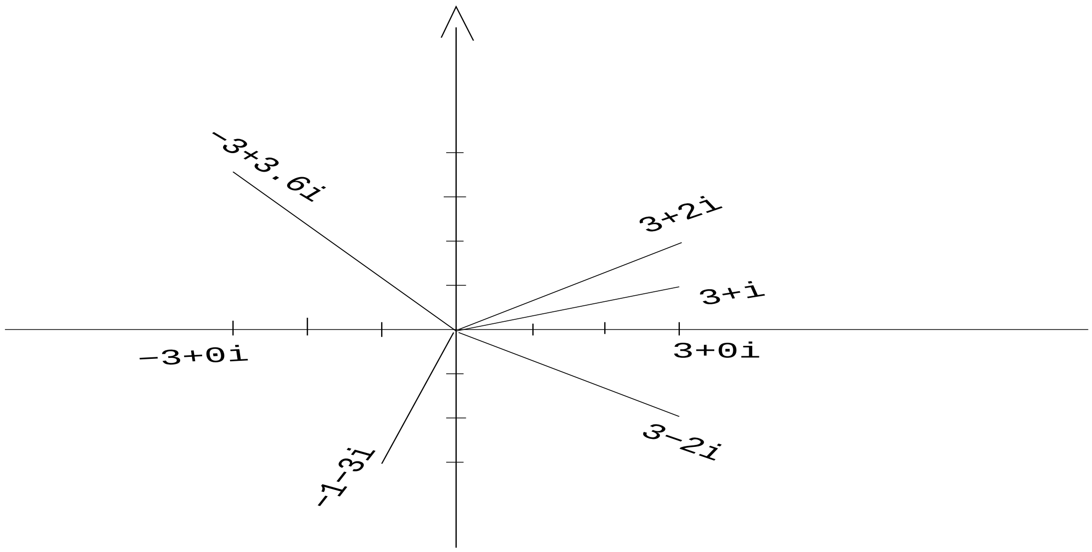


Figura 2.1: Representação geométrica dos complexos

Definição 3 *Produto de números complexos*
Dados dois números complexos $z = a + bi, w = c + di$ *o produto deles é:*

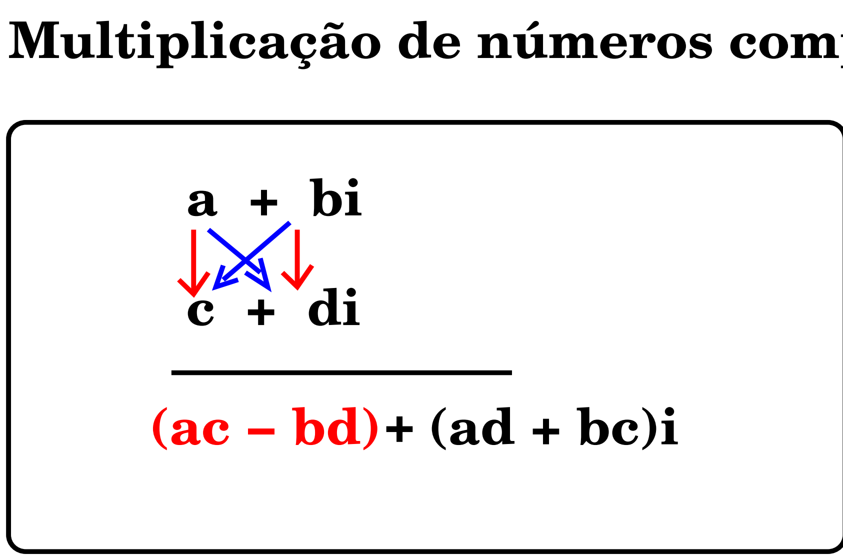


Figura 2.2: Produto de números complexos

$$(ab - bd) + (ad + bc)i$$

2.1.2 A representação geométrica dos complexos

Falamos acima na equivalência

$$\mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2, \tag{2.19}$$

o par (c, d) é um ponto do plano e, assim, estamos *representando* um número complexo com uma entidade geométrica, um ponto.

Os números complexos trouxeram, para o reino dos números, os conceitos da geometria: ângulo, módulo, direção e sentido. A Física, desde cedo, lançou mão deles, com muito sucesso, por exemplo, na eletricidade.

A figura (2.3) na página 27 descreve alguns aspectos geométricos dos números complexos, como o módulo e o argumento.

- o vetor z O ponto do plano, $z = (a, b)$ determina com a origem um segmento de reta que identificamos, também, com o número complexo z e que vamos chamar de *vetor*;
- argumento de z é o ângulo que o *vetor* z determina com o semi eixo positivo OX, no sentido anti-horário, partido do semi-eixo OX. Notação $arg(z)$
- módulo de $z = (a, b)$ é o comprimento do segmento de reta que subentende o vetor z. Notação
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
pelo teorema de Pitágoras;

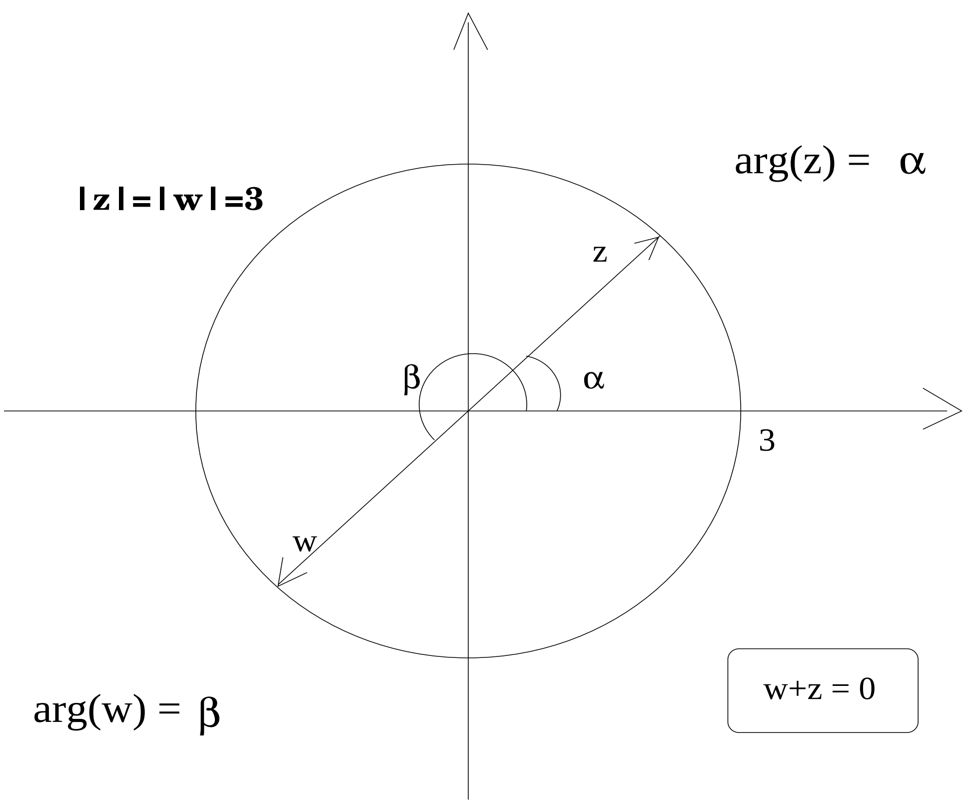


Figura 2.3:

A próxima lista é um *laboratório* que deve preparar a sua intuição para as construções que faremos depois.

Laboratório 1 (O plano complexo) *A interpretação geométrica*

1. *Encontre as soluções da equação:* $x^2 - 3x + 1 = 0$.

2. *Encontre as soluções da equação:* $x^2 + 1 = 0$.

3. *Verifique, experimentando na equação, que os números* $i, -i$ *são soluções da equação* $x^2 + 1 = 0$.

4. *Some algebricamente e represente geometricamente: u+v;*

a) $u = 3 + 2i; v = 2 + 3i$	*b)* $u = 3 - 2i; v = 3 + 2i$
c) $u = 3 + 2i; v = -3 - 2i$	*d)* $u = 3 - 2i; v = 2i - 3$
e) $u = 2i - 3; v = 3 - 2i$	*f)* $u = 2 - 3i; v = 3i - 2$

5. <u>*Efeitos da multiplicação*</u>

   (a) *Multiplique* 3+2i *pelos inteiros 2,3,5,10. Represente geometricamente os resultados.*

   (b) *Multiplique* $3 + 2i$ *por 2i, 3i, 5i,10i. Represente geometricamente os resultados. Elabore uma teoria a partir da semelhança dos resultados obtidos.*

6. *Verifique que o número complexo* $1 + 0i$ *é o elemento neutro da multiplicação.*

7. *Calcule o inverso multiplicativo de* $3 + 2i$ *e represente ambos geometricamente.*

8. *Multiplique* $z = 3 + 2i$ *por si próprio, represente geometricamente e verifique o qual a relação entre* $arg(z), arg(z^2)$.

9. *Multiplique* $3 + 2i$ *por* $3 - 2i$ *e represente geometricamente estes vetores e o produto deles.*

10. <u>*Módulo de um número complexo*</u>

    Uma das razões que tornam os números complexos *um tipo de número a parte, é o seu* envolvimento *com a geometria. Como um número real, os números complexos tem módulo, mas neste caso o método de cálculo se deduz direto do Teorema de Pitágoras.*

    Definição 4 *Módulo do número complexo* $a + bi$.

    $$||(a + bi)|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

11. *Calcule o módulo de*

    $$u \; ; \; u \in \{3 + 2i, 2 + 3i, 3 - 2i, 2 - 3i\}$$

12. <u>*distância*</u> *Observe que nos reais,* $|a-b|$ *é a distância,* $d(a,b)$*, entre os dois números* a, b*. Da mesma forma, entre dois números complexos* u, v *a distância entre eles vem do Teorema de Pitágoras e é o módulo da diferença* $|u-v|$*. Faça alguns exercícios para adquirir intuição: Encontre o lugar geométrico dos números complexos* u *tal que*

a) $\|u\| = 1$	*b)* $\|u\| = 2$	*c)* $\|u-3\| = 1$
d) $\|u-3\| = 2$	*e)* $\|u-(2+3i)\| = 1$	*f)* $\|u-(2+3i)\| = 2$
g) $\|u\| \le 1$	*h)* $\|u\| < 1$	*i)* $\|u\| \le 2$
j) $\|u-3\| < 1$	*k)* $\|u-(2-3i)\| < 2$	*l)* $\|2u-(2-3i)\| < 2$

<u>*a solução do exercício anterior*</u> *Pontos equidistantes de um* ponto dado *se encontram sobre uma circunferência. No caso das desigualdades vamos ter discos (com ou sem fronteira). Traduza as questões anteriores com a linguagem da equação de círculos, no plano* $\mathbf{R}^2$*,* <u>**Notação:**</u> $(\mathcal{C}(a,b), r)$ *é o círculo de centro no ponto* (a,b) *e raio* r*.*

13. <u>*Potências de i*</u>

    (a) *Calcule as 10 primeiras potências de* i *e encontre uma lei formação que estas potências obedeçam.*

    (b) *Escolha abaixo qual é o resultado impossível para a soma*

$$i^n - i^m \; ; \; n, m \in \mathbf{N}$$

☐ $\pm(1+i)$ ☐ $\pm(1-i)$ ☐ 0 ☐ i ☐ $2i$ ☐ $-2i$

14. <u>*Relações de Girard, caso complexo*</u> *Mostre que as relações de Girard, também são válidas para raízes complexas isto é, quando* $\Delta < 0$*.*

    Para a equação $x^2 + bx + c = 0, a = 1,$ *temos*

    (a) $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b$

    (b) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = c$

    Assim, a equação $x^2 + bx + c = 0$*, pode ser escrita da seguinte forma:*

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

15. *Encontre uma equação do segundo grau cujas raízes somem 6 e o produto seja 13.*

2.2 Números complexos: extensão dos reais

Um número complexo é um par de números reais, portanto coïncide, com o conjunto, com o $\mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2.$$

A diferença é que existe em $\mathbf{C}$ uma multiplicação que estende a multiplicação dos números reais
Usaremos as duas notações para um número complexo

$$(a, b) \equiv a + bi$$

sem mais nos preocuparmos com observações a respeito.

Uma terminologia existe em torno dos números complexos que vamos relembrar. A figura (2.4) página 30, ilustra os fatos descritos na próxima definição.

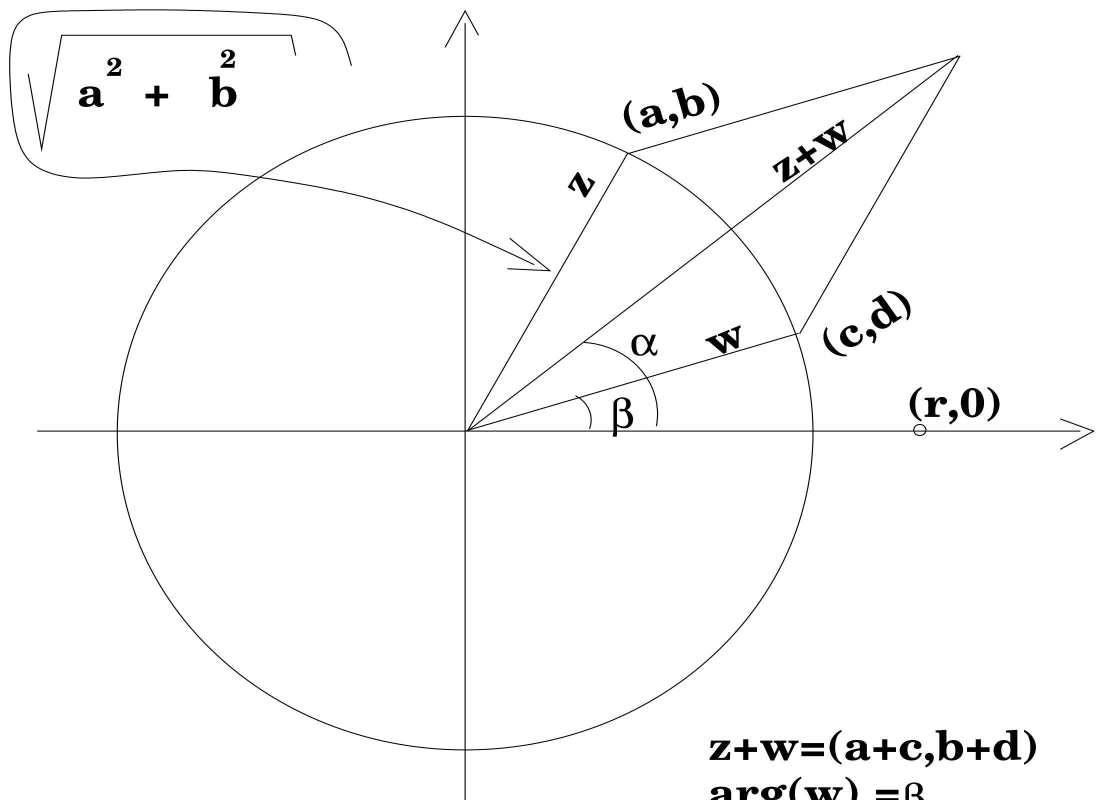


Figura 2.4: Propriedades dos números complexos

Definição 5 *Parte real e imaginária*
Dado um número complexo $z = (a, b)$ diremos

- *<u>parte real</u> a é a parte real de z;* $\boxed{a = Re(z)}$
- *<u>parte imaginária</u> b é a parte imaginária de z ;* $\boxed{b = Im(z)}$

- *<u>módulo</u> O número complexo $z = (a, b)$ determina com a origem $(0, 0)$ um segmento do plano que usamos para visualizar o número complexo z. O comprimento deste segmento é*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

o módulo de z.

- *<u>argumento de um número complexo</u> é o ângulo que o segmento de reta que representa geométricamente o número complexo faz com o semi-eixo positivo dos números reais medido na direção anti-horária. Quer dizer que se um número complexo for real, o seu argumento pode será zero quando for positivo, ou π quando for negativo.*

  Na figura (2.4) o argumento de w é β e o argumento de $z + w$ é α.

$$arg(w) = \beta \; ; arg(z + w) = \alpha$$

- *<u>Os números reais</u>*

  1. *O conjunto dos números reais positivos é o subconjunto de* $\mathbf{C}$ *formado pelos números complexos cuja* parte imaginária *é zero, e* argumento *zero,*

$$\mathbf{R}_+ = \{w = (x, 0) \; ; x \in \mathbf{R} \; ; arg(w) = 0\}$$

     é o semi-eixo positivo OX_+

  2. *O conjunto dos números reais negativos é o subconjunto de* $\mathbf{C}$ *formado pelos números complexos cuja* parte imaginária *é zero e o* argumento *é π:*

$$\mathbf{R}_- = \{w = (x, 0) \; ; x \in \mathbf{R} \; ; arg(w) = \pi\}$$

     é o semi-eixo positivo OX_-

Teorema 1 (Extensão da multiplicação dos reais)
A multiplicação de números complexos é uma extensão da multiplicação de números reais.

Dem *:*

Dados dois números complexos

$$z = (a_1, b_1) = a_1 + b_1 i, \;\; w = (a_2, b_2) = a_2 + b_2 i$$

temos

$$zw = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = \tag{2.20}$$
$$(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) = \tag{2.21}$$
$$a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i \tag{2.22}$$

Considere agora dois número reais: r_1, r_2. Eles determinam os dois números complexos

$$z = (r_1, 0), \;\; w = (r_2, 0).$$

Se os multiplicarmos vamos ter

$$z, w \in \mathbf{R} \tag{2.23}$$
$$zw = (r_1, 0)(r_2, 0) = \tag{2.24}$$
$$(r_1 r_2 - 0, 0) = \tag{2.25}$$
$$r_1 r_2 + 0i = r_1 r_2 = zw \in \mathbf{R} \tag{2.26}$$
$$\tag{2.27}$$

Como $\Im(r_1 r_2, 0) = 0$ *podemos dizer, com certo abuso de linguagem, que* $(r_1 r_2, 0) \in \mathbf{R}$

Consequentemente o produto de dois números complexos que sejam reais resulta no produto dos números reais que eles representam. Assim dizemos que a multiplicação de números complexos é uma extenção da multiplicação dos números reais.

q.e.d .

Como $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$ então o conjunto dos números complexos é um grupo abeliano com a adição de pares ordenados que já conhecemos.

Vamos agora resolver o exercício (ex. , 7), página 28. Adotaremos uma expressão mais geral: calcular o inverso de (a, b).

Por definição, o número complexo (x, y) será o inverso multiplicativo de (a, b), se, e somente se, o produto dos dois for o elemento neutro da multiplicação $(1, 0) = 1 + 0i$. Vamos forçar esta igualdade para determinar (x, y) :

$$(x, y)(a, b) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \equiv \tag{2.28}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \tag{2.29}$$
$$\equiv \left\{ \begin{array}{rl} ax - by = & 1 \\ bx + ay = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \tag{2.30}$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} abx - b^2 y = & b \\ abx + a^2 y = & 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{rl} a^2 x - aby = & a \\ b^2 x + aby = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \tag{2.31}$$
$$\Rightarrow (a^2 + b^2) y = -b \; ; \; (a^2 + b^2) x = a \Rightarrow \tag{2.32}$$
$$\Rightarrow y = \tfrac{-b}{a^2 + b^2} \; ; \; x = \tfrac{a}{a^2 + b^2} \tag{2.33}$$

Se o número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ a solução encontrada é possível o que demontra o teorema:

Teorema 2 *Inverso multiplicativo em* $\mathbf{C}$

Todo número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ *tem um* único *inverso multiplicativo em* $\mathbf{C}$ *que é da forma*

$$\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \tag{2.34}$$

Podemos simplificar a expressão do inverso se adotarmos uma notação que depois será muito útil:

Definição 6 *Conjugado de um número complexo*

Chamamos de conjugado de $z = (a, b)$ *ao número complexo* $\overline{z} = (a, -b)$

Veja na figura (2.5) o número complexo z, o seu conjugado, o seu inverso aditivo e sua projeção em $\mathbf{S}^1$.

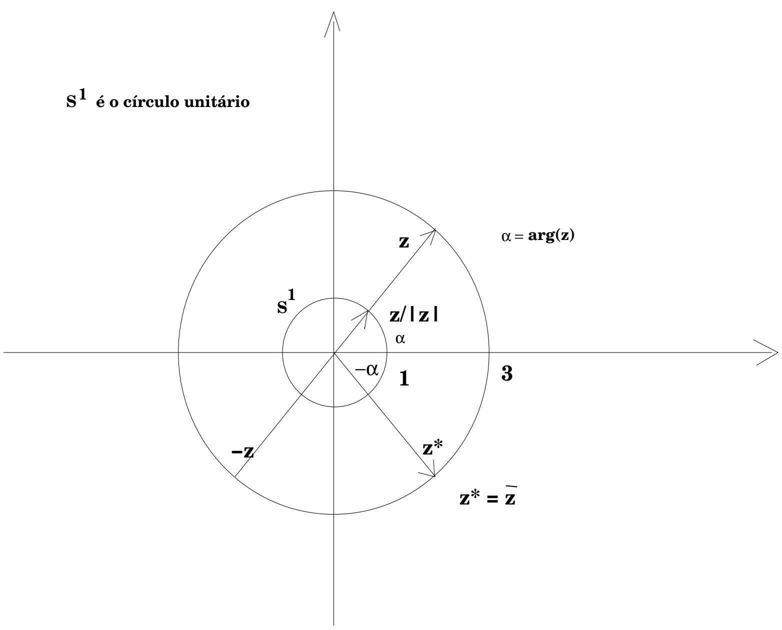


Figura 2.5: Conjugado de um número complexo

Em alguns textos o conjugado $\overline{z}$ de z é designado por z^*.
Vejamos agora que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(a,b)} = \frac{1}{a^2+b^2}(a,-b) = \tag{2.35}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2+b^2}\overline{z} \tag{2.36}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \tag{2.37}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{2.38}$$

e agora, atendendo a promessa de resolver o (ex. , 7) temos o inverso multiplicativo de $3 + 2i = (3, 2)$ é

$$z = (3,2) \mapsto \overline{z} = (3,-2) \tag{2.39}$$
$$z = (3,2) \mapsto |z|^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \tag{2.40}$$
$$z = (3,2) \mapsto \frac{1}{z} = \frac{1}{13}(3,-2) = (\frac{3}{13}, \frac{-2}{13}) \tag{2.41}$$

Podemos usar a última expressão da sequência de equações acima para mostrar um uso frequente do “conjugado”, veja a sequência

$$z = (a,b) \ ; \ \overline{z} = (a,-b) \ ; \ z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \tag{2.42}$$
$$\tfrac{1}{z} = \tfrac{\overline{z}}{\overline{z}z} \tag{2.43}$$
$$\tfrac{1}{z} = \tfrac{\overline{z}}{\overline{z}z} = \tfrac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{2.44}$$

que mostra que podemos usar o conjugado para fazer surgir um número real no denominador, o que, muitas vezes, é 'util.

O próximo teorema reune as propriedades do conjungado:

Teorema 3 *Propriedades da conjugação*
Considere os números complexos u, v e o número real λ.

1. *Linearidade*
   (a) $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$
   (b) $\overline{\lambda u} = \lambda \overline{u}$
2. *reflexividade* $\overline{\overline{u}} = u$
3. *produto* $\overline{uv} = \overline{u}\overline{v}$
4. *divisão* $\overline{\frac{u}{v}} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$
5. *reais* *Se* $u = \overline{u}$ *se e somente se* $u \in \mathbf{R}$.

Laboratório 2 *Módulo, argumento, forma polar*

1. *Resolva as equações*

a) $4z = -5$	*b)* $(4+3i)z = -5$	*c)* $4z^2 + 2z = -1$	*d)* $z^2 = -1$
e) $(4+3i)z = -2i$	*f)* $\frac{z}{4+3i} = -50$	*g)* $z^2 = 1$	*h)* $z^2 + 2z = 1$
i) $\frac{z+5-3i}{3-2i} = 0$	*j)* $3z + i = 5z - 7$	*k)* $z^2 + 3z = -10$	*l)* $4z^2 = 1$

2. *forma polar de um número complexo*
   (a) *módulo*
   Calcule o módulo dos números complexos dados abaixo:

   a) $2+3i$ *b)* $2-3i$ *c)* $0.4+0.2i$ *d)* $\frac{1+i}{2}$

   (b) *argumento*
   Calcule a projeção dos números complexos abaixo, no círculo trigonométrico, $\mathbf{S}^1$.

   a) $2+3i$ *b)* $2-3i$ *c)* $0.4+0.2i$ *d)* $\frac{1+i}{2}$

   (c) *módulo e argumento*
   Calcule a projeção de $a+bi$ *sobre* $\mathbf{S}^1$ *determinando quando isto não for possível.*

3. <u>*forma matricial I*</u>

   Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ por $x+iy$, nesta ordem, equivale ao produto de matrizes

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

4. <u>*forma matricial II*</u>

   Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ por $x+iy$, nesta ordem, equivale ao produto de matrizes

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

5. <u>*produto e rotação*</u>

   (a) *Considere dois pontos A, P sobre o círculo trigonométrico $\mathbf{S}^1$,*

$$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni A = cos\theta + isen\theta \equiv (cos\theta, sen\theta) \in \mathbf{R}^2 \tag{2.47}$$
$$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni P = cos\alpha + isen\alpha \equiv (cos\alpha, sen\alpha) \in \mathbf{R}^2 \tag{2.48}$$

   Identifique no produto AP a expressão do arco soma.

   (b) *Mostre que AP, nesta ordem, produz uma rotação de θ sobre o vetor $\vec{P}$ no sentido horário (positivo).*

   (c) *Como a multiplicação de números complexos é comutativa, procure a contradição, ou corrija o item anterior.*

   (d) *Conclua do item anterior que*

$$z, w \in \mathbf{S}^1 \Rightarrow zw \in S$$

   ou seja, o círculo unitário é estável sob a multiplicação.

   (e) <u>*O grupo dos complexos de módulo 1*</u> *Verifique que S, o conjunto dos números complexos de módulo 1, é um grupo comutativo com a multiplicação.*

2.3 Módulo, argumento e conjugado

Vamos *formalizar* algumas experiências que foram feitas nas seções precedentes: *parece que o produto de números complexos pode ser descrito de uma forma geométrica.* Vamos ver que de fato é assim e deduzir as propriedades do produto, de forma bem simples, usando a representação geométrica.

2.4 Intepretação geométrica do produto

Há duas largas estradas correndo em paralelo: Os números complexos, um par de números reais da forma $a + bi$ e um *puro par de números reais* (a, b).

São, em essência, duas coisas diferentes, com propriedades distintas mas também com muita coisa em comum. Por exemplo

- em $\mathbf{C}$ tem um multiplicação
- em $\mathbf{R}^2$ não tem nenhuma multiplicação
- a adição em $\mathbf{C}$ é exatamente a mesma adição de $\mathbf{R}^2$

A forma polar de um número complexo

Um dos exercícios de laboratório que lhe foram propostos pedia que você *projetasse* um número complexo $a + bi$ sobre o círculo unitário $\mathbf{S}^1$.

Geometricamente, veja a figura (fig. 2.6), podemos obter esta projeção traçando a reta *determinada* pelo ponto $P = (a, b)$ e pelo centro de $\mathbf{S}^1$, veja a figura (2.6).

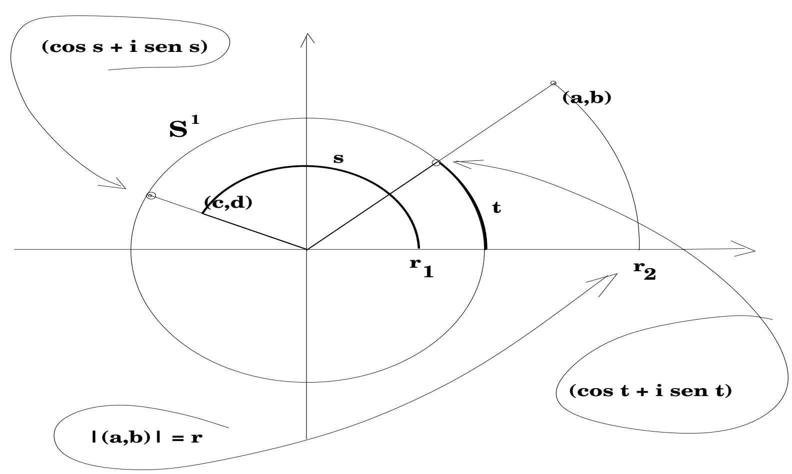


Figura 2.6: A projeção de $a + bi$ sobre $\mathbf{S}^1$.

Algebricamente isto se faz dividindo (a, b) pelo seu módulo, resultando assim num vetor de módulo 1, portanto, sobre $\mathbf{S}^1$. Usando a notação da (fig. 2.6), temos

$$(cost, sent) = cost + isent = \frac{a+bi}{|(a+bi)|} = \frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Estamos vendo assim a intimidade que existe entre os *números complexos* e a trigonometria. O importante neste momento é escrever o caminho de volta de $(cost, sent)$ para o número complexo (a,b) :

$$(a,b) = r(cost, sent)\ ;\ r = |(a,b)|. \tag{2.49}$$

com o que obtivemos a *forma polar* de (a,b). Nela vemos representados os dois conceitos geométricos que formam um número complexo: *módulo* e *argumento*. Vamos re-escrever esta fórmula colocando em evidência estes dois conceitos:

$$z = (a,b) = |z|(cosarg(z), senarg(z)); \tag{2.50}$$

$$z = r(cost, sent); \tag{2.51}$$

$$|z| = r = |(a,b)| \tag{2.52}$$

Laboratório 3 *Forma polar, trigonometria conjugação*

1. *Verifique as igualdades abaixo e faça uma representação geométrica das mesmas:*
   (a) *Verifique que* $2\mathcal{R}e(z) = z + \overline{z} \in \mathbf{R}$
   (b) *Verifique que* $2i\mathcal{I}m(z) = z - \overline{z} \in i\mathbf{R}$
   (c) *Verifique que* $z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbf{R}$
2. *Calcule* $(a+bi)^2$
3. *Fórmula de Moivre*
   (a) *forma polar Quando escrevemos um número complexo usando a fórmula de Moivre, dizemos que* usamos a forma polar *do número. Escreva os números*

   $$z_1 = 4+3i\ ;\ z_2 = 3-4i\ ;\ z_3 = -3-4i\ ;\ z_4 = 3+4i$$

   na fórmula polar.

   (b) *potência Calcule* z^2 *com* $z = r(cos\theta, sen\theta)$.

   (c) *potência Suponha que a expressão encontrada para* z^2 *também valha para* z^n. *Escreva esta expressão. Deduza a expressão de* z^{n+1}.
   Resposta Este exercício mostra, por indução finita a fórmula de Moivre

   $$z = r(cos\theta, sen\theta) \Rightarrow z^n = r^n(cos(n\theta), sen(n\theta))$$

   (d) *Use a fórmula de Moivre para expressar* $cos(3\theta)$ *em função de* $cos(\theta), sen(\theta)$.

Solução 1

$$cos(3\theta) = \mathcal{R}e((cos(\theta) + isen(\theta))^3 \tag{2.53}$$

$$(cos(\theta) + isen(\theta))^3 = \tag{2.54}$$

$$= cos(\theta)^3 + 3icos(\theta)^2 sen(\theta) - 3cos(\theta)sen(\theta)^2 - isen(\theta)^3 = \tag{2.55}$$

$$= cos(\theta)^3 - 3cos(\theta)sen(\theta)^2 + (3cos(\theta)^2 sen(\theta) - sen(\theta)^3)i \tag{2.56}$$

$$cos(3\theta) = cos(\theta)^3 - 3cos(\theta)sen(\theta)^2 \tag{2.57}$$

4. *As raizes de um número complexo*

   (a) *forma polar* *Use a fórmula de Moivre calcular* $\sqrt[3]{z_i}$ *com*

   $$z_1 = 4 + 3i \ ; \ z_2 = 3 - 4i \ ; \ z_3 = -3 - 4i \ ; \ z_4 = 3 + 4i$$

5. *Ache todos os valores de* $z \in \mathbf{C}$ *tal que* $z^2 + |z| = 0$.

6. *Encontre todos os complexos* z *que satisfaçam à condição*

   $$|z - 25i| < 15$$

7. *Qual o valor máximo do módulo do número complexo* z *se*

   $$|z + \frac{1}{z}| = 1$$

8. *Resolva a equação* $(1 - i)^x = 2^x$. **Solução:**

   $$(1 - i)^x = 2^x \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow |1 - i|^x = 2^x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^x$$

   Mas a última igualdade somente é possível para $x = 0$.

9. *Mostre que vale a fórmula do binômio de Newton*

   $$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{(n-k)} \ ; z, w \in \mathbf{C}$$

10. *Inteiros de Gauss*

    Definição 7 *Inteiros de Gauss*

    Chamamos de Inteiros de Gauss *ao conjunto* $Z + iZ$ *de todos os números complexos com* parte real *e* parte imaginária *inteiras.*

    (a) *Anel dos inteiros de Gauss* *Verifique que o conjunto dos inteiros de Gauss com a adição e multiplicação dos complexos é um anel.*

    Solução

    $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ *é um corpo, como* $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ *mas se fizermos a restrição de coordenadas inteiras para os números complexos deixa de existir o inverso multiplicativo, portanto em* $\mathbf{Z}+i\mathbf{Z}$ *não vale a propriedade da existência do inverso multiplicativo e assim* $(\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}, +, \cdot)$ *é um anel, comutativo com unidade.*

(b) *Prove que se z for um* inteiro de Gauss *então qualquer potência inteira de z também será um* inteiro de Gauss.

Solução

Isto é consequência direta do Teorema do Binômio de Newton. Logo z^n é um inteiro de Gauss.

(c) *Prove que para todo número complexo e todo inteiro n vale*

$$(|z|^n) = |z^n|$$

Solução:

Usando a fórmula de Abel-Euler temos

$$z = r(cos(\theta) + isen(\theta)) \; ; \; z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$
$$|z| = r \; ; \; |z^n| = r^n = |z|^n$$

Observe que n não precisa ser inteiro.

(d) *Verifique, em particular, que se z for um inteiro de Gauss, então $|z^2|^n \in \mathbf{Z}$.*

(e) *Se $a, b, n \in \mathbf{Z}_+$, prove que existem inteiros x, y tais que*

$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

Solução:

O módulo de um inteiro de Gauss *não será, em geral, um inteiro, mas o o quadrado do seu módulo será um número inteiro.*

Considere $z = a + bi$ um inteiro de Gauss, construído com os inteiros a, b dados, e um número inteiro n também dado.

$$z = a + bi \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$
$$z, z^n, (z^n)^2 \text{ são inteiros de Gauss}$$
$$\exists\ x, y \in \mathbf{Z}; z^n = x + iy \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$
$$(|z|^n)^2 = (|z|^2)^n = (a^2 + b^2)^n$$
$$(|z|^n)^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$$
$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

Os inteiros x, y são as partes reais e imaginárias *de z^n quando $z = a + bi \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$. Por exemplo, considere $a, b, n = 2, 3, 4$ nesta ordem.*

$$z = a + bi = 2 + 3i \Longrightarrow z^4 = (2 + 3i)^4 = -(119 + 120i)$$
$$(a^2 + b^2)^n = 28561 = 119^2 + 120^2$$
$$\text{os inteiros procurados } x, y \text{ são } 119, 120$$

11. *Prove que se $z + \frac{1}{z} = 2cos(\alpha)$ então*

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2cos(n\alpha)$$

Solução:

$$
\begin{array}{c}
z + \frac{1}{z} = 2cos(\alpha) \in \mathbf{R} \Longrightarrow \\
z \in \mathbf{S}^1 \equiv z = cos(\alpha) + isen(\alpha) \\
z^n = cos(n\alpha) + isen(n\alpha) \\
\frac{1}{z^n} = cos(n\alpha) - isen(n\alpha) \\
z^n + \frac{1}{z^n} = 2cos(n\alpha)
\end{array}
$$

2.4.1 Para melhorar a arte de fazer contas

Nenhum dos exercícios abaixo será utilizado em qualquer ponto deste livro, no futuro, você pode, tranquilamente, ignorá-los.

Exercícios 1 *Desafios...*

1. *Escreva na forma polar* $z = cos(\theta) + cos(\phi) + i(sin(\theta) + sin(\phi))$
2. *Sendo* $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^4-1}$ *calcular* $f(2+3i)$.
3. *Mostre que se*
$$(z-p)(\overline{z}-\overline{p}) = p\overline{p}$$
então o ponto z *descreve um círculo de centro no ponto* p *passando pela origem dos eixos.*
4. *Considere* $w = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})$. *Mostre que se* z_1, z_2, z_3 *satisfizerem a relação*
$$z_1 + wz_2\overline{w}z_3 = 0$$
então eles são, respectivamente, paralelos aos lados de um triângulo equilátero.
5. *<u>módulo máximo</u> Calcule o* módulo máximo[1] *e o* módulo mínimo *da função*
$$f(z) = z^2 + 3z. \tag{2.58}$$
6. *Se* $z = 2 + i(w - \frac{1}{w})$ *calcule as partes reais e imaginárias de* z *em função das partes reais e imaginárias de* w. *Descreva o lugar geométrico do ponto* w *quando* $z \in \mathbf{R}$.
7. *Prove que se* $|z| = 1$ *então* $\mathcal{R}e(\frac{1-z}{1+z}) = 0$

[1] é o maior valor do módulo de $f(z)$

Parte II

Geometria Analítica plana

Capítulo 3

Equação da reta

3.1 Introdução

- **equação da reta**, é um tópico da Geometria Analítica.

Usando uma *linguagem moderna*, podemos dizer que *Geometria Analítica* digitaliza algumas figuras geométricas criando equações o que torna possível, por exemplo, usar estas figuras em programas de computação. A *Geometria Analítica* pode ser vista como uma introdução à *geometria algébrica* no sentido em que esta disciplina da Matemática trata os entes geométricos que podem ser definidos através de equações algébricas, mais precisamente, como expressões polinomiais.

A reta é uma figura básica da *geometria euclidiana* e não teria sentid dar-lhe uma definição. Vou estabelecer algumas relações que vão abrir caminho para construir a equação da reta repetindo alguns postulados da *geometria euclidiana*. Ao mesmo tempo é preciso que você se alerte para o fato de que é a *geometria euclidiana* que se encontra nos fundamentos da *Geometria Analítica* e que existem outras geometrias *não euclidianas*.

A *geometria euclidiana* estabelece como determinar retas:

Teorema 4 (axioma) *dos dois pontos*

Dados dois pontos, P, Q, eles determinam uma reta r e podemos dizer que $P, Q \in r$ entendendo que retas são conjuntos de pontos.

Confira a figura (fig 3.2), página 47, e considere os pontos P, Q. A *geometria euclidiana* também afirma que as retas são conjuntos infinitos de pontos:

Teorema 5 (axioma) *infinidade de pontos na reta*

Dados dois pontos diferentes, P, Q, na reta r, existe um terceiro ponto entre *os pontos P, Q e um quarto ponto X fora do segmento determinado pelos pontos P, Q.*

Com esta afirmação a *geometria euclidiana* garante que numa reta existe uma infinidade de pontos *entre* os pontos P, Q assim como também fora do segmento de reta que eles determinam ....

Finalmente a *geometria euclidiana*[1] garante existência de paralelas:

Teorema **6 (axioma)** *da paralela da geometria euclidiana*
Dado um ponto Q e uma reta r, existe uma única reta paralela a esta reta passando pelo ponto Q,

Na figura (fig 3.2), página 47 selecionei os pontos $P, Q, X \in r$ e baseado no axioma 6, eu posso traçar retas paralelas ao eixo OX passando por X e por Q assim como posso traçar retas parelalas ao eixo OY passando por P e por Q construindo assim dois triângulos retângulos semelhantes, confira a figura (fig 3.2). Esta construção me permite escrever a proporção:

$$\frac{x-a}{y-b} = \frac{p-a}{q-b} \tag{3.1}$$

se a reta r não for paralela com o eixo OX, porque neste caso

$$y - b = q - b = 0$$

e logo vou discutir este caso.

Aplicando a lei das proporções *produto dos meios é igual ao produto dos extremos* posso escrever, sucessivamente:

$$(x-a)(q-b) = (y-b)(p-a); \tag{3.2}$$

$$(q-b)x - a(q-b) = (p-a)y - (p-a)b; \tag{3.3}$$

$$A = (q-b); B = -(p-a); C = (p-a)b - a(q-b); \tag{3.4}$$

$$Ax + By + C = 0; \tag{3.5}$$

Considerando agora o caso da reta paralela com o eixo OX, ela vai cortar o eixo OY num único ponto em que $y = y_0$ numa aplicação reversa do axioma 6. E qualquer ponto sobre esta reta tem y_0 por ordenada então a equação

$$y = y_0 \tag{3.6}$$

identifica esta reta no sentido que *permite encontrar qualquer ponto sobre a mesma* e ela tem o formato da equação (eq. 2) se fizermos $A = 0; B = 1; C = -y_0$.

A afirmação "$Ax + By + C = 0$ é a equação da reta" é, infelizmente, falsa, poderia ser a equação dum plano ou dum hiperplano. Para evitar esta ambiguidade é preciso acrescentar "no plano",

"$Ax + By + C = 0$ é a equação da reta no plano" é a afirmação correta porque num espaço de dimensão três esta equação representa um plano.

A Geometria Analítica trata basicamente das cônicas, no plano, são *reta, círculo, elípse, parábola e hiperbole* e no espaço tridimensional, *plano, esfera, elipsóide, parabolóide e hiperbolóide.*

Vou restringir-me ao plano, aqui. Então uma equação como $y = x$ que também pode ser escrita como $y - x = 0$ representa uma reta. Se você rodar

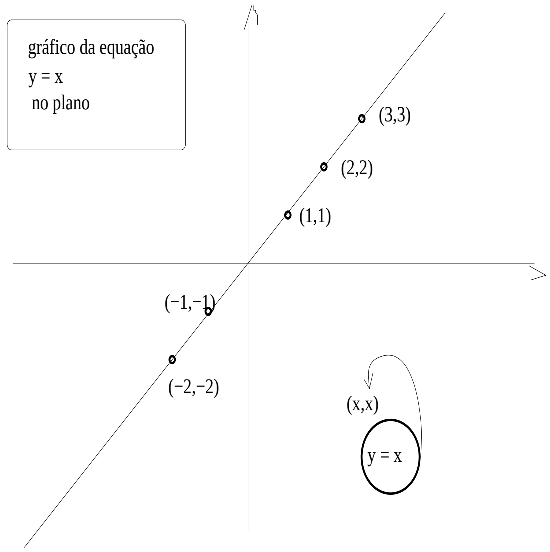


Figura 3.1: gráfico da equação $y = x$ no plano

algum programa que produza gráficos, com esta equação você vai visualizar o que a figura (fig 3.1), página 45, lhe mostra. Esta figura foi desenhada com `xfig` que é um editor gráfico. Você pode obter um gráfico semelhante a este usando `gnuplot`. Num terminal do `gnuplot` execute os comandos:

```
f(x) = x
plot f(x), 0
pause -2 "Aperte para terminar"
```

para ver um gráfico semelhante ao da figura (fig 3.1).

Explicando, `gnuplot` "*não sabe*" fazer gráficos de equações, mas sabe gráficos de funções. Então defini $f(x) = x$ ou ainda

$$y = f(x) = x \tag{3.7}$$

e depois o comando

`plot f(x), 0`

pede que `gnuplot` faça os gráficos das duas funções

$$y = f(x) = x; y = 0; \tag{3.8}$$

a segunda função é o eixo OX. Confira *eixos coordenados.*

Há várias formas de representar algébricamente uma reta, *equação vetorial, equação paramétrica* da reta. Confira *equações paramétricas.*

A equação vetorial, ou paramétrica da reta, é mais precisa. Uma reta é uma curva, confira *curva*, que é a imagem de uma função que depende de um parâmetro, o que caracteriza sua dimensão como sendo 1. Genericamente uma curva α seria um objeto definido por

$$\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)); \ n \ \text{ é a dimensão do espaço}; \tag{3.9}$$

[1] Esta é a "verdade" que separa a geometria euclidiana das geometrias não euclidianas...

Este é a equação duma curva definida no $\mathbf{R}^n$, é uma *variedade* de dimensão 1 imersa num espaço de dimensão n.

O que caracteriza uma reta é que todas as equações $x_k(t)$ sejam do primeiro grau. Assim

$$\alpha(t) = (t, \dots, t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \tag{3.10}$$

é a equação da primeira bissetriz no $\mathbf{R}^n$, assim como

$$\alpha(t) = (t, t) \tag{3.11}$$

é a equação da primeira bissetriz do plano. As equações que aparecem nas equações (eq. 10), (eq. 11) passam na origem. A equação paramétrica da reta na direção do vetor $\vec{u}$ passando pelo ponto P é

$$P + t\vec{u}; \tag{3.12}$$

Escolha P e $\vec{u}$ para obter a equação paramétrica da reta na dimensão que você desejar. Por exemplo, se você escolher

$$\vec{u} = (1, 2, 1) \in \mathbf{R}^3; P = (0, 0, 0)$$

o resultado da equação, (eq. 12), será o gráfico duma reta paralela ao vetor $\vec{u} = (1, 2, 1)$ passando pelo ponto $P = (0, 0, 0)$, portanto uma reta paralela ao vetor $\vec{u} = (1, 2, 1)$ passando na origem no espaço tridimensional $\mathbf{R}^3$.

Se você escolher

$$\vec{u} = (1, 2, 0, 1) \in \mathbf{R}^4; P = (-1, 2, 3, -2)$$

o resultado será uma reta do espaço de dimensão 4 passando pelo ponto $P = (-1, 2, 3, -2)$.

Esta equação é também chamada de *equação vetorial da reta.*

A equação cartesiana da reta, no plano, é uma expressão do primeiro grau envolvendo duas variáveis:

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.13}$$

se aceitarmos que é a equação duma figura plana, o resultado é uma reta. Aqui você pode observar a indefinição das equações cartesianas, é preciso indicar em que dimensão estamos para saber o que uma equação cartesiana representa.

Podemos isolar y, escrevendo

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}; \text{ quando } B \neq 0; \tag{3.14}$$

Se calcularmos, fazendo $x = 0$, ainda supondo que $B \neq 0$, vamos obter o ponto $(0, -\frac{C}{B})$ na equação (eq. 14) e assim sabemos que esta reta passa neste ponto.

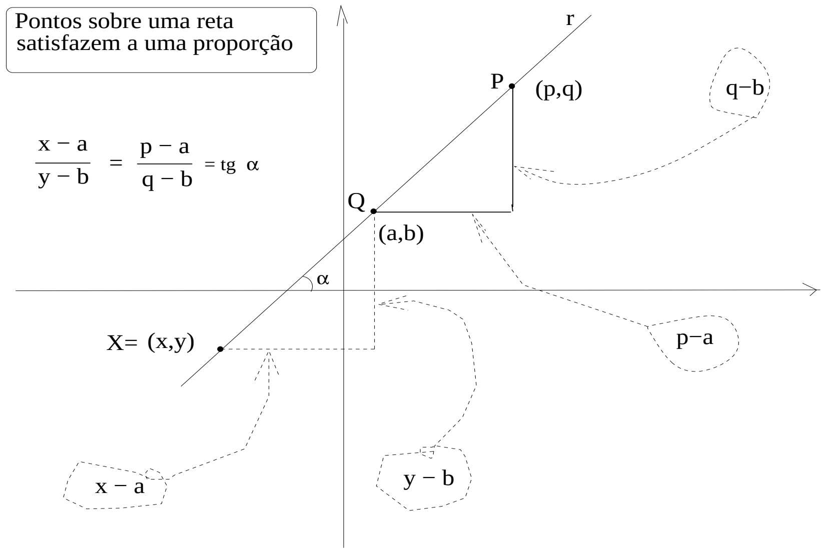


Figura 3.2: Coeficiente angular e coeficiente linear

O coeficiente de x na equação (eq. 14) é o *coeficiente angular da reta*, $-\frac{A}{B}$, é a tangente trigonométrica[2] do ângulo α que a reta faz com o eixo OX. Confira o significado geométrico na figura (fig 3.2), página 47,

Os pontos sobre a reta satisfazem a uma proporção porque com eles montamos razões iguais entre os lados homológos dos triângulos semelhantes que eles determinam com uma reta que lhe seja obliqua. Na figura (fig 3.2) a reta r é obliqua ao eixo OX e determina com ele o ângulo α cuja tangente é a razão entre os catetos *oposto* e *adjacente* de qualquer um dos triângulos que você pode ver nesta figura.

Na figura (fig 3.2) marquei os pontos $(a, b), (p, q)$ que determinam a reta e mais um ponto genérico, (x, y) que é a variável que vai permitir-me montar uma equação. Os lados homólogos são proporcionais:

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{q-b}{p-a} = tg(\alpha) = m; \tag{3.15}$$

é a proporção obtida fazendo uso dos catetos do triângulo de vértices $(a, b), (p, q)$ juntamente com triângulo formado pelos pontos (x, y) e (a, b). Desta proporção saem alguma das expressões que são bem conhecidas como "*equação da reta*":

$$(q-b)(x-a) = (p-a)(y-b); \tag{3.16}$$

$$(q-b)x - (q-b)a = (p-a)y - (p-a)b; \tag{3.17}$$

$$p \neq a \quad \Rightarrow \quad y - b = \tfrac{q-b}{p-a}(x-a); \tag{3.18}$$

$$m = \tfrac{q-b}{p-a} \quad \Rightarrow \quad y = m(x-a) + b; \tag{3.19}$$

$$(q-b)x - (p-a)y - (q-b)a + (p-a)b; \tag{3.20}$$

[2]Se $B = 0$ então $x = -\frac{C}{A}$ porque não tem sentido que também $A = 0$. Se $A = 0$ não tem sentido que $B = 0$.

$$\text{faça: } A = (q-b); B = -(p-a); C = -(q-b)a + (p-a)b; \tag{3.21}$$
$$Ax + By + C = 0; \tag{3.22}$$
$$B \neq 0; y = -\tfrac{A}{B}x - \tfrac{C}{B}; m = -\tfrac{A}{B}; n = -\tfrac{C}{B}; \tag{3.23}$$
$$y = mx + n; \tag{3.24}$$

- Na equação (eq. 19) obtive a equação na forma $y = m(x-a) + b$ que evidencia que esta reta passa no ponto (a, b) e tem coeficiente angular m. Esta é uma das melhores formas de apresentar a equação da reta em situações em que você precise dum ponto onde a reta passe com uma inclinação adequada. Seria por exemplo o caso do módulo espacial Rosetta da Agência Espacial Européia que no momento certo despachou um robot para aterrisar na superfície do cometa *67P/Churyumov–Gerasimenko*. O módulo contendo o robot deve ter sido lançado num trajetória tangencial à trajetória da nave Rosetta para otimizar energia usando a direção em que trafegava a nave mãe que seguia numa rota sob atração gravitacional do cometa. Este é o formato requerido por muitas das aplicações do Cálculo Diferencial e Integral.

  Por exemplo, a equação da *reta tangente ao gráfico da função diferenciável* $y = f(x)$ *no ponto* $(a, f(a))$ é

  $$y = f'(a)(x-a) + f(a); m = f'(a); b = f(a); \tag{3.25}$$

- A equação (eq. 22) é comumente chamada de *equação geral da reta* porque apresenta a reta como consequência da combinação linear de dois números dados A, B. Observe o desprezo dado ao C que é apenas um coeficiente posicional: se $C = 0$ a reta passa na origem ...

- Na equação (eq. 24) ficaram expressos dois coeficientes, o *coeficiente angular*, m e o *coeficiente linear* n. O *coeficiente angular* expressa a inclinação relativa da reta com o eico OX e o *coeficiente linear* mostra em que ponto do eixo OY a reta passa.

O *coeficiente angular* é um conceito preso ao sistema de coordenadas cartesiano e de certo forma restritivo. Por exemplo, as retas paralelas ao eixo OY não tem *coeficiente angular*. Não teria sentido, também, falar no *coeficiente angular* com que a nave Rosetta expeliu o módulo em direção ao cometa *67P/Churyumov–Gerasimenko*.

Na verdade o caso da nave Rosetta e dos eventos espaciais caem no estudo vetorial das equações com o qual se resolve a deficiência do geométrica do *coeficiente angular*

Entretanto o *coeficiente angular*, pese sua restrição, ele tem usos e deixe-me mostrar algumas retas associadas aos seus *coeficientes angulares*

$$y = -x + 1; \text{ coeficiente angular } -1, \text{ passando em } (0, 1); \tag{3.26}$$

$$y = x + 1; \text{ coeficiente angular } 1, \text{ passando em } (0, 1); \tag{3.27}$$
$$y = 2x - 1; \text{ coeficiente angular } 2, \text{ passando em } (0, -1); \tag{3.28}$$
$$y = -2x - 1; \text{ coeficiente angular } 2, \text{ passando em } (0, -1); \tag{3.29}$$
$$y = 0.5x - 2; \text{ coeficiente angular } \tfrac{1}{2}, \text{ passando em } (0, -2); \tag{3.30}$$

Você pode ver os gráficos destas retas na figura (fig 3.3), página 49,

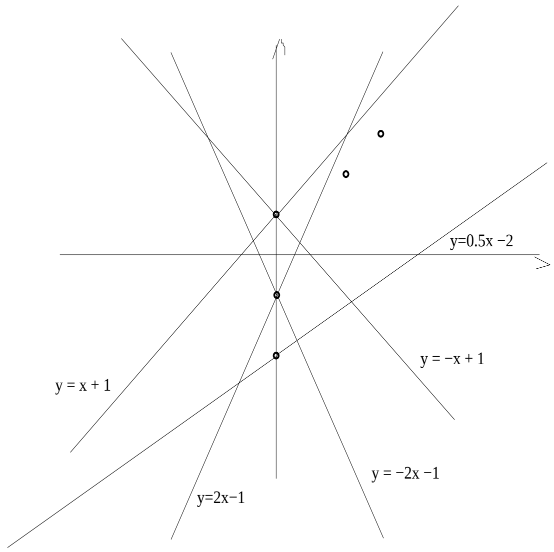


Figura 3.3: retas e suas equações no plano

O padrão para todas estas equações são as equações

$$y = mx + n \text{ coeficiente angular } m, \text{ passando em } (0, n); \tag{3.31}$$
$$y = m(x - a) + b; \text{ coeficiente angular } m, \text{ passando em } (a, b); \tag{3.32}$$
$$y - b = m(x - a); \text{ coeficiente angular } m, \text{ passando em } (a, b); \tag{3.33}$$

e os dois números m, n recebem os nomes *coeficiente angular* e *coeficiente linear*, respectivamente.

Se você deslizar estas figuras, paralelamente, usando um esquadro, para que passem no ponto $(0, 0)$, na origem dos eixos, a equação das retas assim obtidas, serão:

$$y = -x; \text{ coeficiente angular } -1, \text{ passando em } (0, 0); \tag{3.34}$$
$$y = x; \text{ coeficiente angular } 1, \text{ passando em } (0, 0); \tag{3.35}$$
$$y = 2x; \text{ coeficiente angular } 2, \text{ passando em } (0, 0); \tag{3.36}$$
$$y = -2x; \text{ coeficiente angular } 2, \text{ passando em } (0, 0); \tag{3.37}$$
$$y = 0.5x; \text{ coeficiente angular } \tfrac{1}{2}, \text{ passando em } (0, 0); \tag{3.38}$$

e você pode ver o resultado obtido com `xfig` na figura (fig 3.4), página 50,

Você pode repetir os gráficos que se encontram nas figuras (fig 3.3) e (fig 3.4) com este código do `gnuplot`:

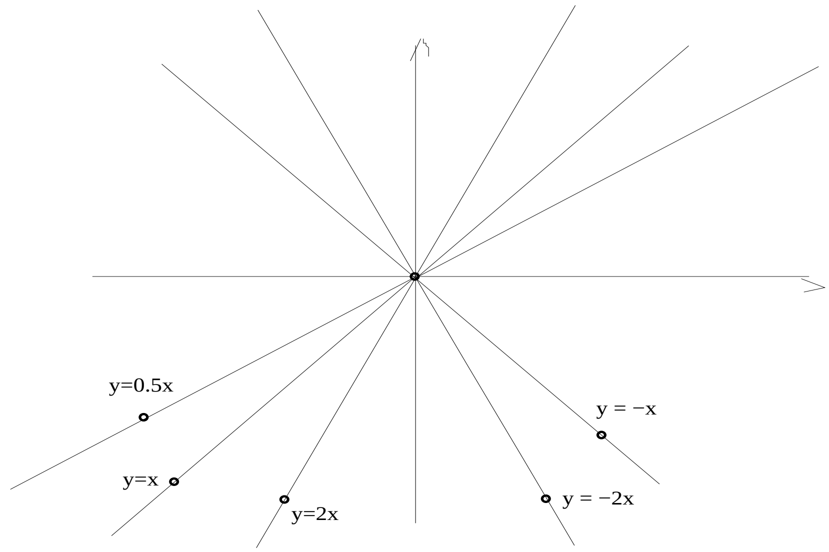


Figura 3.4: retas e coeficiente angular

```
m = 1; a=-2; b = -3; f(x) = m*(x-a);
set arrow from 0,-15 to 0,15 nohead;
plot f(x),0;
```

trocando os valores de a, b, m para ver distintas retas. Se você quiser ver os gráficos simultâneos, inclua índices, observe como:

```
m1 = 1; a1=-2; b1 = -3; f1(x) = m1*(x-a1);
set arrow from 0,-15 to 0,15 nohead;
plot f1(x),0;
m2 = 2; a2=-2; b2 = -3; f2(x) = m2*(x-a2);
plot f2(x), f1(x), 0;
m3 = 3; a3=-2; b3 = -3; f3(x) = m3*(x-a3);
plot f3(x),f2(x), f1(x), 0;
```

e você pode alterar o ponto onde passa algumas das retas, raspe o texto e cole num terminal do `gnuplot` ou num arquivo para depois chamar este arquivo com `gnuplot`.

Exercícios 2 *Plano Cartesiano*
objetivo: *Induzir @s alun@s a recuperarem as propriedades da geometria usando a algebrização oferecida pela Geometria Analítica e desta forma* usando *a Geometria Analítica sentirem sua potência como instrumento para dominar a geometria.*

1. *A reta numérica*

   A reta tem propriedades que são copiadas pelos números reais: "entre dois pontos da reta sempre tem outro ponto"*, é um exemplo. Selecione as afirmações verdadeiras das semelhanças entre números e a reta da geometria.*

Leia o texto na página, mas dê prioridade ao trabalho direto com as questões.

Trace uma reta e nela marque o ponto zero.

(a) *(V)[ ](F)[ ] Ao selecionar um outro ponto na reta e identificá-lo com o número 1 você selecionou a semireta que contém todos os números reais positivos.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 4.2), página 73, está identificado um seg-*

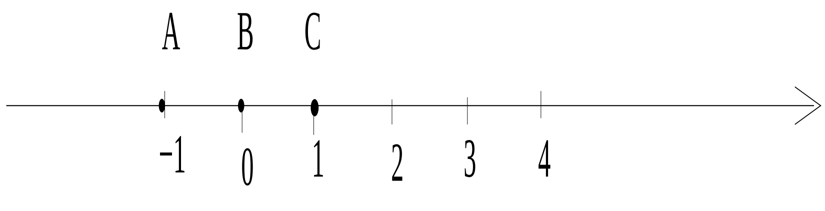


Figura 3.5: números reais na reta numérica

mento de reta que mede uma unidade.

(c) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 4.2), página 73, o semento de reta que mede uma unidade é* $\overline{AC}$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 4.2), página 73, está identificado um semento de reta que mede uma unidade que tanto pode ser o segmento* $\overline{BA}$ *como o segmento* $\overline{BC}$

(e) *(V)[ ](F)[ ] Pela escolha dum segmento que mede uma unidade podemos, usando compasso, marcar qualquer inteiro na reta numérica. Também podemos marcar a posição de qualquer número fracionário.*

2. *relação de ordem, ou desigualdade A definição "algébrica" da desigualdade é*

$$x \le y \iff x - y \le 0$$

mas na reta numérica, escolhi a posição do 1 *à direita do zero*[3], *então, na reta numérica*

$$x \le y \iff x \text{ está à esquerda de } y;$$

*Algumas vezes chamamos a reta formatada de "*reta orientada*" porque nela está definida uma ordem.*

(a) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 3.6), página 52, as duas retas são concorrentes no zero, são duas instâncias da* reta orientada *e numa delas podemos identificar, pela equivalência de triângulos, as frações*

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}; \tag{3.39}$$

[3]Um "problema" de *convenção*, o que seria mesmo "direita" ou "esquerda" se a reta estivesse perpendicular à linha do Horizonte?

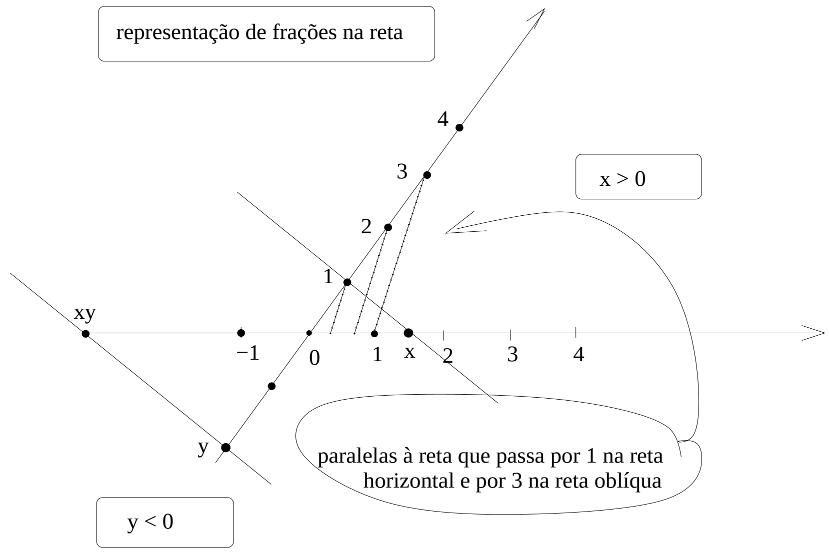


Figura 3.6:

(b) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 3.6), página 52, identifique o "terceiro lado" do triângulo que une os pontos* 1 *e* 3 *em distintas reta. Passando uma paralela ao "terceiro lado" pelo ponto* 4 *da reta horizontal, ela irá encontra a reta que lhe é obliqua no ponto* 12 *o que mostra como multiplicar ab usando retas orientadas concorrentes em zero.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] A figura (fig 3.6), página 52 mostra que se* $x > 0$ *e* $y < 0$ *então* $xy < 0$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] a definição geométrica da desigualdade é incompatível com definição algébrica da desigualdade.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] Dados dois pontos* x, y *na reta numérica, se* x *estiver à direita de* y *então* $x - y$ *estará à direta de zero e isto se conclue, com difererença de segmentos,*

$$\overline{Ox} - \overline{Oy} \tag{3.40}$$

"é o segmento que tem por origem y e extremidade x *portanto está orientado no* sentido negativo *da reta numérica", então* $x - y \leq 0$ *ou ainda, pela definição algébrica,* $x \leq y$. *Assim a* definição geométrica *e a* definição algébrica *são compatíveis.*

3. *álgebra geométrica definição geométrica do módulo. Um círculo centrado no zero da* reta numérica *encontra esta em dois pontos que tem o mesmo módulo e consequentemente o raio do círculo é o módulo de qualquer destes números. Esta é uma definição geométrica de módulo.*

(a) *(V)[ ](F)[ ] Se* $|x| < 1$ *e* $|y| < 1$ *então* $|xy| < 1$.

(b) *(V)[ ](F)[ ] Se* $0 < a < b$ *e* $c > 0$ *então* $0 < ac < bc$.

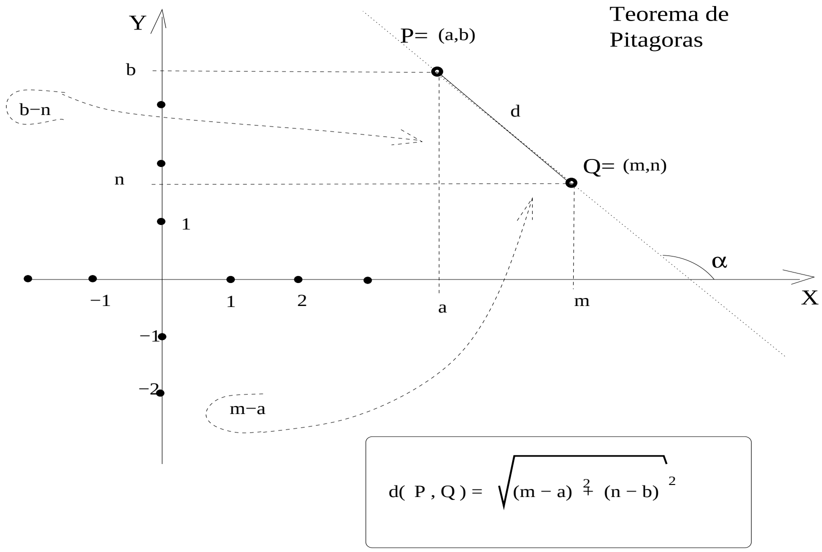


Figura 3.7: O plano cartesiano

(c) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 3.7), página 53, você pode ver que a distância entre dois pontos é calculada com auxílio do teorema de Pitágoras.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] Se* $P = (3,5), Q = (7,2)$ *então a distância* $d(P,Q) = (7-3)+(2-5)$.

(e) *(V)[ ](F)[ ] Se* $P = (3,5), Q = (7,2)$ *então a distância*

$$d(P,Q) = \sqrt{(7-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(3-7)^2 + (5-2)^2} \qquad (3.41)$$

4. *Multiplicação geométrica e desigualdade Na (fig 3.8) identique a* "reta orientada horizontal" *e a* "reta orientada que é obliqua à horizontal". *Vou me referir a estas duas retas apenas com os adjetivos* "horizontal" *e* "obliqua".

Na figura (fig 3.8), página 54,

- *Identifique* x *selecionado na* reta horizontal, *e* y *selecionado na reta obliqua.*
- *O ponto* x *na* reta horizontal *está ligado pelo segmento de reta* $\overline{x1}$ *à unidade na* reta oblíqua.
- *A paralela ao segmento de reta* $x1$ *passando pelo ponto* y *na* reta oblíqua, *encontra a* reta horizontal *no ponto* xy.

(a) *(V)[ ](F)[ ] Os pontos* $x, 1, 0$ *determinam um triângulo que não é semelhante ao triângulo determinado pelos os pontos* $0, y, xy$, *porque os dois triângulos têm alturas com sinais contrários.*

(b) *(V)[ ](F)[ ]Os pontos* $x, 1, 0$ *determinam um triângulo semelhante ao triângulo que os pontos* $0, y, xy$ *determinam.*

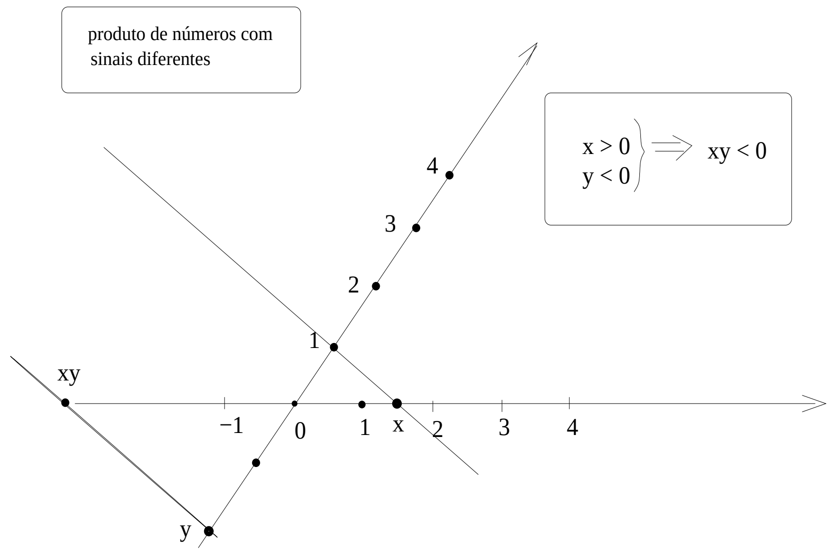


Figura 3.8: O produto geométrico

(c) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Os lados homológos nos dois nos triângulos* $x, 1, 0$ *e* $0, y, xy$ *são, respectivamente:*

- $x, 1$ *e* $0, y$ *;*
- $1, 0$ *e* y, xy*;*
- $0, x$ *e* $xy, 0$

(d) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Os lados homológos nos dois nos triângulos* $x10$ *e* $0yxy$ *são, respectivamente:*

- $x1$ *e* yxy*;*
- 10 *e* $0y$ *;*
- $0x$ *e* $xy0$

(e) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A paralela ao segmento* $x, 1$*, pelo ponto* y*, encontra o ponto* xy*. A justificativa destas operações é a semelhança de triângulos da geometria e mostra que podemos efetuar, geometricamente, a multiplicação.*

5. <u>*Plano Cartesiano*</u>

(a) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Dados os pontos* A, B, C, D *sobre uma mesma reta, então*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}; \tag{3.42}$$

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA}; \tag{3.43}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DD} = \overline{AD}; \tag{3.44}$$

Este cálculos mostram que é possivel "geometrizar" a "álgebra" no sentido de traduzir geometricamente as propriedades algébricas.

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Considere dois pontos,* P, Q*,*

$$P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2); \tag{3.45}$$

$$R = (sx_1 + tx_2, sy_1 + ty_2); s, t \geq 0; s + t = 1; \tag{3.46}$$

O ponto R *é média aritmética ponderada de* P, Q *e consequentemente se encontram sobre o segmento de reta* $\overline{PQ}$*.*

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O segmento de reta* $\overline{PQ}$ *é o* lugar geometrico das médias aritméticas ponderadas entre os pontos P e Q.

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Sendo* $P = (1, 0), Q = (0, 1)eR = (1, 1)$ *então é possível encontrar* $s, t \geq 0; s + t = 1;$ *tal que*

$$R = sP + tQ$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Na figura (fig 3.14), página 66, está representada a* média

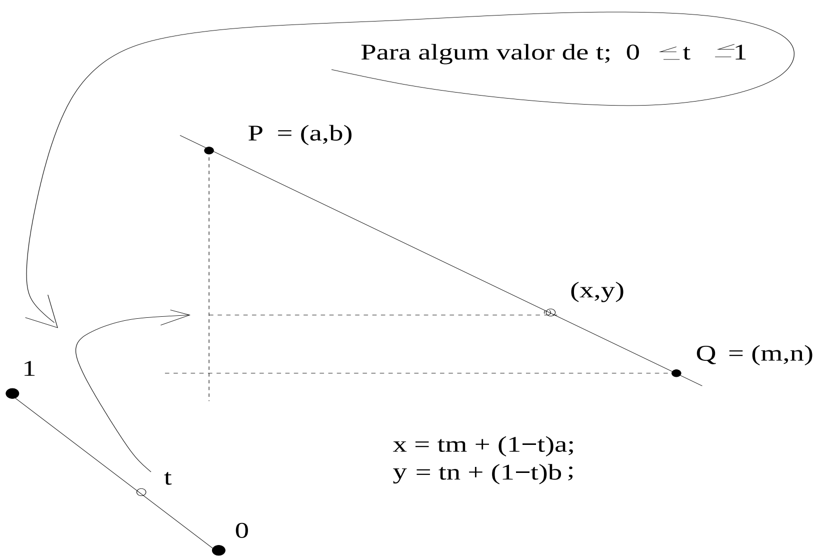


Figura 3.9: Média aritmética ponderada

aritmética ponderada *entre dois pontos* P, Q *do plano. Então*

$$\begin{cases} t \neq 0; \\ x = t\left(m + \frac{1-t}{t}a\right); \\ y = t\left(n + \frac{1-t}{t}b\right); \\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = P = (a, b); \end{cases} \tag{3.47}$$

t *ou* $(1 - t)$*, é a razão em que o segmento* PQ *está sendo dividido por* (x, y)*.*

6. <u>*Plano Cartesiano*</u>

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O ponto médio do segmento determinado por* $P = (7, -9)$ *e* $Q = (-5, 15)$ *é* $R = (0.5, 3.5)$*.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] O ponto médio do segmento determinado por* $P = (7, -9)$ *e* $Q = (-5, 15)$ *é* $R = (1, 3)$*,*

(c) *(V)[ ](F)[ ] Um ponto que divide o segmento*

$$\overline{PQ}; P = (7, -9); Q = (-5, 15);$$

na razão $\frac{1}{3}$ *é* $(x, y) = (-1, 7)$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] Um ponto que divide o segmento* $\overline{PQ}; P = (7, -9); Q = (-5, 15)$ *na razão* $\frac{1}{3}$ *é*

$$(x, y) = (3, -1);$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] A distância entre os pontos*

$$P = (7, -9); Q = (-5, 15)$$

é $\sqrt{12^2 + (-24)^2} \approx 26.832815$.

7. *Distância entre dois pontos*

A expressão

```
define dist(x1,y1,x2,y2) {
          return sqrt(power(x1-x2,2) + power(y1-y2,2));
}
```

define uma função, da liguagem `calc`*, [6], que calcula a distância entre dois pontos*

$$P_1 = (x_1, y_1) \text{ e } P_2 = (x_2, y_2) \tag{3.48}$$

no plano. `calc`*, [6], é uma linguagem de programação interpretada e distribuida com a licença* `GPL` *e pode ser encontrada aqui, [6], e também nas maioria das distribuições de* `GNU/Linux`*.*

```
dist(-3,-1,-5,-10) --> 9.21954445729288731
```

é a distância entre os pontos $(-3, -1), (-5, -10)$ *calculada com esta função.*

(a) *(V)[ ](F)[ ] Do segmento de reta* $\overline{PQ}$ *sabemos que* $P = (-3, 7)$ *e que o ponto médio é* $(7, 11)$ *então*

$$Q = (10, -5)$$

(b) *(V)[ ](F)[ ] Do segmento de reta* $\overline{PQ}$ *sabemos que* $P = (-3, 7)$ *e que o ponto médio é* $(7, 11)$ *então*

$$Q = (15, -5)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] *Um quadrado cujo lado mede* <u>a</u> *tem o centro na origem dos eixos e lados paralelos com as bissetrizes dos eixos.*
Seus vértices são:

$$P_1 = (-d, d), P_2 = (-d, -d), P_3 = (d, d), P_4 = (d, -d);$$

com $d = d = \frac{\sqrt{2a^2}}{2}$.

(d) (V)[ ](F)[ ] *Um quadrado cujo lado mede a tem o centro na origem dos eixos e lados paralelos com as bissetrizes dos eixos. Seus vértices são:*

$$P_1 = (-d, 0), P_2 = (d, 0), P_3 = (0, d), P_4 = (0, -d);$$

com $d = d = \frac{\sqrt{2a^2}}{2}$.

(e) (V)[ ](F)[ ] *Três vértices dum quadrilátero retângulo são*

$$P_1 = (2, -1), P_2 = (7, -1), P_3 = (7, 3)$$

O quarto vértice é $P_4 = (2, -1)$.

8. <u>*ângulo entre vetores*</u>
Para esta questão é interessante usar o produto escalar de vetores:

Definição 8 () *Produto escalar*

$$< (a, b), (m, n) >= |(a, b)||(m, n)| \cos(\alpha) = am + bn;$$

em que α *é o ângulo entre os vetores* $(a, b), (m, n)$.

O produto escalar serve para verificar quando dois vetores são ortogonais usando a identidade entre as duas formas da definição.
Posso definir uma função `calc`, *[6], para efetuar esta conta:*

```
define ProdEscalar(a,b,m,n) { return a*m + b*n; }
```

Os vértices dum triângulo são $P_1 = (1, 1), P_2 = (4, 4), P_3 = (1, 4)$.

(a) (V)[ ](F)[ ] *O triângulo* $P_1P_2P_3$ *é isosceles.*

(b) (V)[ ](F)[ ] *O triângulo* $P_1P_2P_3$ *é retângulo e a hipotenusa mede* $3\sqrt{2}$.

(c) (V)[ ](F)[ ] *Os lados do triângulo* $P_1P_2P_3$ *medem* $3, 3, 3\sqrt{2}$.

(d) (V)[ ](F)[ ] *Os pontos médios das lados do triângulo* $P_1P_2P_3$ *são,* $(2.5, 2.5), (4, 2.5), (2.5, 4)$.

(e) (V)[ ](F)[ ] *O centro de gravidade do triângulo* $P_1P_2P_3$ *é* $(2, 3)$.

9. *Plano Cartesiano*
Defina $d = \sqrt[3]{5}; \theta = \frac{2\pi}{3}$; *Num triângulo equilátero dois vértices são* $d(\cos(\theta), \sin(\theta)), d(\cos(2\theta)$

   (a) *(V)[ ](F)[ ] o terceiro vértice é* $(d, 0)$.
   (b) *(V)[ ](F)[ ] O tamanho comum dos lados do triângulo é* d.

   Solução 2 *Chame os lados do triângulo* R_1, R_2, R_3, *todos tem mesmo comprimento.*

   d é o raio do círculo onde o triângulo está inscrito e portanto é o tamanho do lado dum hexágono regular convexo inscrito no círculo do qual o triângulo em questão é formado por diagonais do hexágono. Então posso calcular o comprimento dos lados do triângulo usando a lei do coseno. Se h_1, h_2 *forem dois lados sucessivos do hexágono, subentendo o lado* R_1 *do triângulo tem-se*

$$h_1^2 + h_2^2 + 2 * h_1 * h_2 * cos(\beta) = R_1^2 \tag{3.49}$$
$$\beta = \tag{3.50}$$
$$\tag{3.51}$$

   ———————————————————

   (c) *(V)[ ](F)[ ] O tamanho comum dos lados do triângulo é* $\approx 2.96176521936472847706$
   (d) *(V)[ ](F)[ ] A área deste triângulo é*

$$\approx 2.96176521936472847706(d - cos(\theta);$$

   (e) *(V)[ ](F)[ ] O centro de massa, também chamado de baricentro, do triângulo é a origem dos eixos.*

10. *Plano Cartesiano O módulo dum número complexo,* $z = (a + bi)$, *é a distância do ponto* (a, b) *à origem, e o argumento do número complexo* $z = (a + bi)$ *é o ângulo entre entre o raio vetor* $\vec{a + bi}$ *e o eixo* OX. *Desta forma podemos representar o número complexo* $z = (a + bi)$ *usando sua representação trigonométrica:*

$$z = (a + bi) = \rho\,(\cos(\theta), \sin(\theta))\,; \tag{3.52}$$
$$\theta = arg(z); \rho = |z|; \tag{3.53}$$

confira a figura (fig 3.10), página 59. As equações (52) (53) trazem as expressões da forma trigonométrica *do número complexo também dita* representaçao do número complexo em coordenadas polares. *Neste exercício você vai ver que os números complexos produzem rotações e dilatações no plano. Eles são precursores dos* quaternions *que fazem isto no espaço tridimensional.*

Depois, com matrizes, podemos produzir tais efeitos em qualquer dimensão.

Considere o triângulo de vértices

$$P_1 = (3,3); P_2 = (-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}); P_3 = (-3,-3);$$

Confira a figura (fig 3.10), página 59.

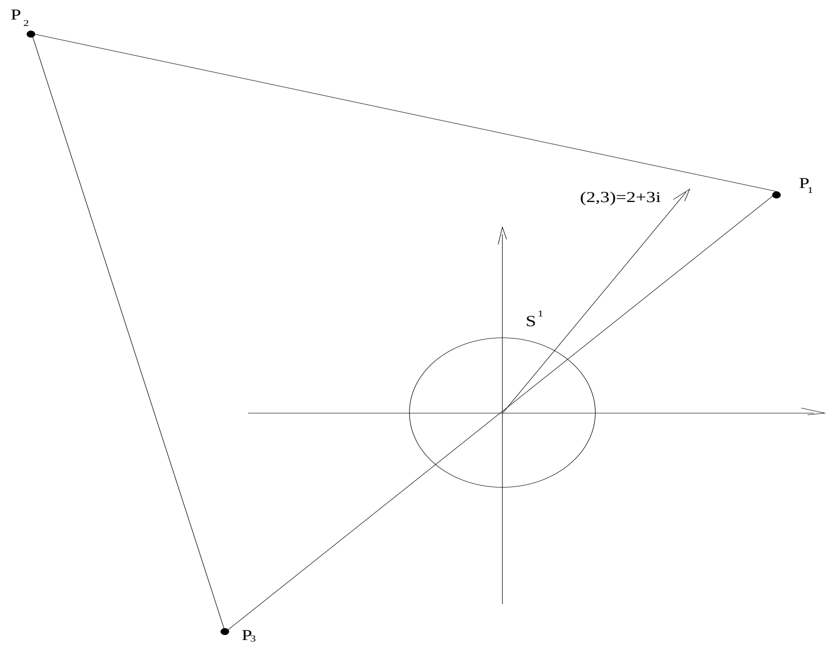


Figura 3.10: produto por um número complexo

(a) *(V)[ ](F)[ ] O triângulo $P_1P_2P_3$ é equilátero.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2+3i$ produz o triângulo $Q_1Q_2Q_3$ que é um triângulo equilátero.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2+3i$ produz o triângulo $Q_1Q_2Q_3$ que não é mais um triângulo equilátero.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2+3i$ produz o triângulo equilátero $Q_1Q_2Q_3$ cujos lados ficaram dilatados pelo coeficiente*

$$|z| = \sqrt{2^2+3^2};$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2+3i$ produz o triângulo equilátero $Q_1Q_2Q_3$ cujos lados ficaram dilatados pelo coeficiente*

$$|z| = \sqrt{2^2+3^2}$$

tendo lhe sido aplicada uma rotação de $arg(z) = Atan(3/2)$ relativa ao triângulo original.

11. <u>*Plano Cartesiano*</u>

    A função

```
define ProdEsc(x1,y1,x2,y2) {return x1*x2 + y1*y2;}
```

    define o produto escalar entre dois vetores na linguagem **`calc`**, *[6]*

$$\overrightarrow{(x_1, y_1)}, \overrightarrow{(x_2, y_2)} \tag{3.54}$$

    e o produto escalar é definido geometricamente como

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = |(x_1, y_1)||(x_2, y_2)| \cos(\alpha) \tag{3.55}$$

    em que $\cos(\alpha)$ *é o ângulo entre as retas suporte destes vetores tomado no sentido trigonométrico positivo. O produto escalar mostra se os dois vetores são ou não ortogonais quando ele se anular e serve para definir o ângulo entre dois vetores.*

    A função

```
define dist(x1,y1,x2,y2)
   {return sqrt(power(x1-x2,2) + power(y1-y2,2));}
```

    define, na linguagem **`calc`** *a distância entre os pontos*

$$P_1 = (x_1, y_1); P_2 = (x_2, y_2) \tag{3.56}$$

    O produto vetorial entre dois vetores é definido como

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = |(x_1, y_1)||(x_2, y_2)| \sin(\alpha) \tag{3.57}$$

    e corresponde ao módulo do determinante

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

    O produto vetorial é também chamado de produto externo porque dois vetores, que determinam um plano, definem, como produto externo *um terceiro vetor que lhes é perpendicular, devido aos vetores da Física* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. *O módulo do produto vetorial corresponde à área do paralelogramo que se pode obter com os dois vetores* $\vec{u}, \vec{v}$, *como mostra a figura (fig 4.3), página 81.*

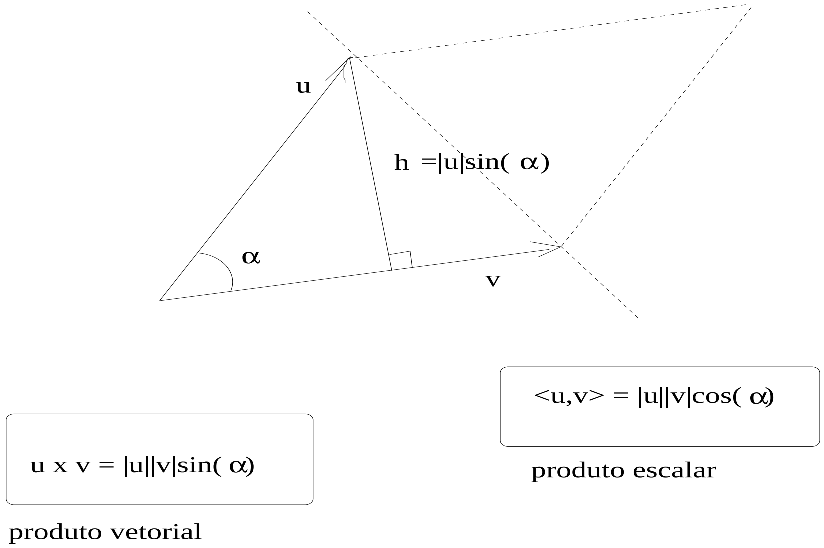


Figura 3.11: produto vetorial e produto escalar

(a) *(V)[ ](F)[ ] O perímetro do quadrilátero cujos vértices são*

$$P_1 = (-3, -1), P_1 = (0, 3), P_1 = (3, 4), P_1 = (-5, 10) \quad (3.59)$$

é aproximadamente 29.342617547667327814O5.

(b) *(V)[ ](F)[ ] Os pontos*

$$P_1 = (2, -2), P_2 = (-8, 4), P_3 = (5, 3)$$

são os vértices dum triângulo retângulo cuja área vale 30

(c) *(V)[ ](F)[ ] Os pontos*

$$P_1 = (2, -2), P_2 = (-8, 4), P_3 = (5, 3)$$

são os vértices dum triângulo retângulo cuja área vale 68

(d) *(V)[ ](F)[ ] Um dos extremos dum segmento de reta cujo comprimento é* 5 *é o ponto* $(3, -2)$ *e o outro extremo é o ponto* $(0, -7)$.

(e) *(V)[ ](F)[ ] Um dos extremos dum segmento de reta cujo comprimento é* 5 *é o ponto* $(3, -2)$ *e o outro extremo é o ponto* $(0, -6)$.

A figura (fig 3.12), página 62, mostra como círculos servem para medir distâncias.

ALGA **Lista 3**
Reta tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira **Dep. de Física**

alun@:

2 de abril de 2015 **Univ. Estadual Vale do Acaraú**
Produzido com LaTeX sis. op. Debian/GNU/Linux
www.geometria.sobralmatematica.org/

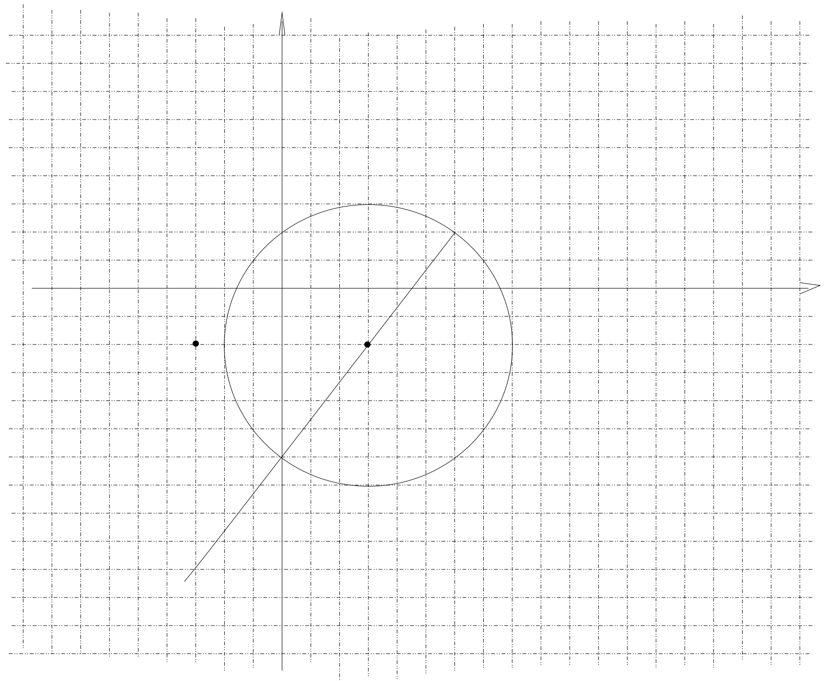


Figura 3.12: Círculo mede a distância

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 3 *Reta*
Objetivo: *as retas e suas equações*
palavras chave: equação cartesiana da reta, equação paramétrica da reta, equação vetorial da reta.

1. **Equação da reta A reta r passa nos pontos $P = (-4, 5)$ e $Q = (3, 1)$.**

   (a) **(V)[ ](F)[ ] A reta r é decrescente e o seu coeficiente angular é $-\frac{4}{7}$**

   (b) **(V)[ ](F)[ ] A equação cartesiana de r é**

$$P = (a, b) = (-4, 5); Q = (p, q) = (3, 1); X = (x, y); \tag{3.60}$$
$$\frac{b-q}{a-p} = \frac{y-q}{x-p}; \tag{3.61}$$
$$(b - q)(x - p) = (a - p)(y - q); \tag{3.62}$$
$$(5 - 1)(x - 3) = (-4 - 3)(y - 1); \tag{3.63}$$
$$4(x - 3) = -7(y - 1); 4x - 12 = -7y + 7; \tag{3.64}$$
$$4x + 7y - 19 = 0 \text{ é a equação cartesiana de } r; \tag{3.65}$$

   (c) **(V)[ ](F)[ ] O ponto $(0, \frac{19}{7}) \in r$;**

   (d) **(V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular de r é $m = \frac{-4}{7}$;**

   (e) **(V)[ ](F)[ ] A reta corta o eixo OY acima do eixo OX.**

2. **Equação da reta**

   A equação da *reta* r é

$$3x - 5y + 2 = 0;$$

   (a) **(V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular da *reta* r é $\frac{3}{5}$.**

   (b) **(V)[ ](F)[ ] A *reta* r passa no ponto $(0, 4/10)$.**

   (c) **(V)[ ](F)[ ] O ponto $(10, 32/5)$ pertence a *reta* r.**

   (d) **(V)[ ](F)[ ] O coeficiente linear da *reta* r é $\frac{4}{10}$**

   (e) **(V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular da *reta* r é $\frac{1}{2}$**

3. **Equação vetorial da reta**

   A *reta* r tem a mesma direção do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{(3, 4)}$ e passa pelo ponto $(-3, 7)$.

   (a) **(V)[ ](F)[ ] A equação vetorial da *reta* r é**

$$X = (x(t), y(t)) = \overrightarrow{(-3, 7)} + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}; \tag{3.66}$$
$$\begin{cases} x(t) = -3 + 3t; \\ y(t) = 7 + 4t; \end{cases} \tag{3.67}$$

(b) **(V)[ ](F)[ ] O conjunto e**

$$U = \{(-12,-5),(-6,3),(-3,7),(0,11),(6,19)\} \subset r;$$

é um subconjunto de pontos da *reta* r.

(c) **(V)[ ](F)[ ] Os vetores $\vec{u} = (4,\vec{-3}), \vec{v} = (3,\vec{4})$ são perpendiculares;**

(d) **(V)[ ](F)[ ] A *reta* s que tem a mesma direção do vetor $\vec{v} = (3,\vec{4})$ passa pelo ponto $(-3,7)$. A equação vetorial da reta s é**

$$X_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (-\vec{3},7) + t\vec{v}; t \in \mathbf{R}; \tag{3.68}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = -3 + 4t; \\ y_2(t) = 7 - 3t; \end{cases} \tag{3.69}$$

(e) **(V)[ ](F)[ ] Confira a figura (fig 3.13), página 64. As *retas* r, s são perpendiculares e passam pelo ponto $(-3,7)$.**

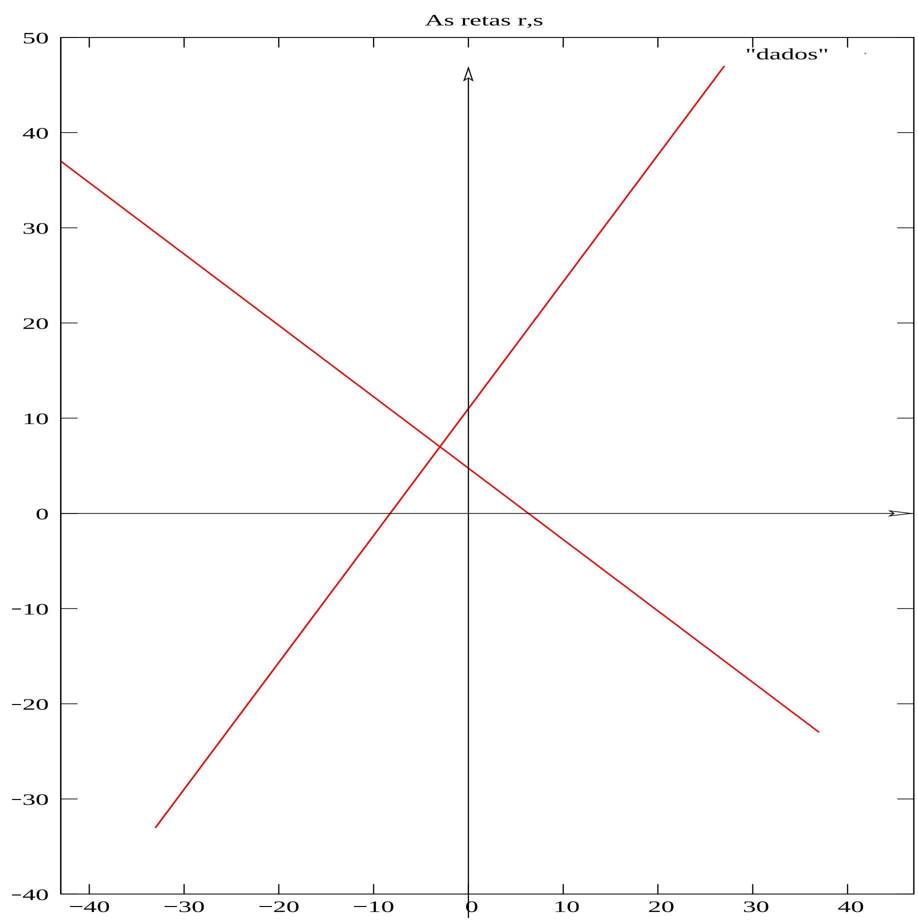


Figura 3.13: Retas r, s

$$X_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (-\vec{3,7}) + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}; \tag{3.70}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -3 + 3t; \\ y_1(t) = 7 + 4t; \end{cases} \tag{3.71}$$

$$X_2 = (x_2(t), y_2(t)) = (-\vec{3,7}) + t\vec{v}; t \in \mathbf{R}; \tag{3.72}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = -3 + 4t; \\ y_2(t) = 7 - 3t; \end{cases} \tag{3.73}$$

4. **<u>Cosenos diretores duma reta</u>**

   As retas paralelas ao eixo OY não tem *coeficiente angular* o que mostra que este conceito é limitado. Solução são os chamados *cosenos diretores* que é a *equação polar da reta*:

   A *reta* r é paralela ao vetor $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$ e passa pelo ponto $P = (p,q)$. Ela é também paralela ao vetor unitário da direção do vetor $\vec{u}$ que é o vetor

   $$(\cos(\alpha), \sin(\alpha));$$

   α é o ângulo entre o vetor $\vec{u}$ e o eixo OX.

   $$\vec{u} = \begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{a}{|\vec{u}|}; \\ \sin(\alpha) = \frac{b}{|\vec{u}|}; \end{cases} \tag{3.74}$$

   $$X = vecP + t\vec{u}; \tag{3.75}$$

   $$X = vecP + t\left(\cos(\alpha), \sin(\alpha)\right); t \in \mathbf{R}; \tag{3.76}$$

   X é um *vetor posição* sobre a reta, um ponto genérico sobre a reta. Confira a figura (fig 3.14), página 66, as coordenadas de X são determinadas como um múltiplo dos *cosenos diretores* da reta somados ao vetor P por onde a reta passa.

   (a) **<u>(V)[ ](F)[ ]</u> A *reta* r é paralela ao vetor $\vec{u} = \overrightarrow{(1,2)}$ e passa pelo ponto $P = (-1,1)$. A equação vetorial da *reta* r é**

   $$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+4}}; \sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{1+4}}; \tag{3.77}$$

   $$X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (1, \vec{2}, 3) + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}; \tag{3.78}$$

   $$\begin{cases} x_1(t) = 1 + t; \\ x_2(t) = 2 - t; \\ x_3(t) = 3 + 3t; \end{cases} \tag{3.79}$$

   (b) **<u>(V)[ ](F)[ ]</u> O ponto $P = (1,-2,3) \in r$.**

   (c) **<u>(V)[ ](F)[ ]</u>**

   (d) **<u>(V)[ ](F)[ ]</u>**

   (e) **<u>(V)[ ](F)[ ]</u>**

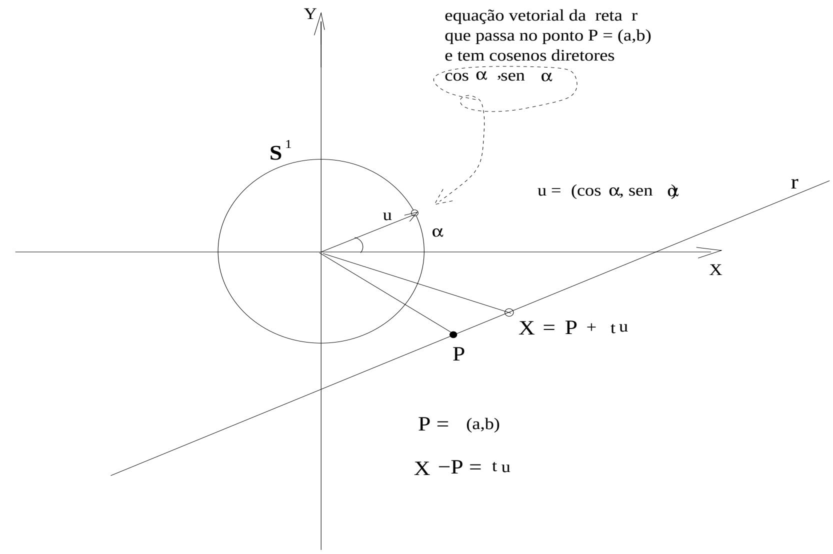


Figura 3.14: equação vetorial da reta: cosenos diretores

5. **Equação vetorial da reta no espaço**

   (a) **(V)[ ](F)[ ]**

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+4}}; \sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{1+4}}; \tag{3.80}$$

$$X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (1, \vec{2}, 3) + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}; \tag{3.81}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + t; \\ x_2(t) = 2 - t; \\ x_3(t) = 3 + 3t; \end{cases} \tag{3.82}$$

   (b) **(V)[ ](F)[ ]**
   (c) **(V)[ ](F)[ ]**
   (d) **(V)[ ](F)[ ]**
   (e) **(V)[ ](F)[ ]**

6. **Plano Cartesiano**

   (a) **(V)[ ](F)[ ]**
   (b) **(V)[ ](F)[ ]**
   (c) **(V)[ ](F)[ ]**
   (d) **(V)[ ](F)[ ]**
   (e) **(V)[ ](F)[ ]**

7. **Plano Cartesiano**

   (a) **(V)[ ](F)[ ]**

(b) **(V)[ ](F)[ ]**
(c) **(V)[ ](F)[ ]**
(d) **(V)[ ](F)[ ]**
(e) **(V)[ ](F)[ ]**

8. **Plano Cartesiano**

(a) **(V)[ ](F)[ ]**
(b) **(V)[ ](F)[ ]**
(c) **(V)[ ](F)[ ]**
(d) **(V)[ ](F)[ ]**
(e) **(V)[ ](F)[ ]**

9. **Plano Cartesiano**

(a) **(V)[ ](F)[ ]**
(b) **(V)[ ](F)[ ]**
(c) **(V)[ ](F)[ ]**
(d) **(V)[ ](F)[ ]**
(e) **(V)[ ](F)[ ]**

10. **Plano Cartesiano**

(a) **(V)[ ](F)[ ]**
(b) **(V)[ ](F)[ ]**
(c) **(V)[ ](F)[ ]**
(d) **(V)[ ](F)[ ]**
(e) **(V)[ ](F)[ ]**

Capítulo 4

Equação do círculo

—————————— - **equação do círculo**, é um item da *geometria analítica*. Usando uma *linguagem moderna*, podemos dizer que a *geometria analítica* "*digitaliza*" algumas figuras geométricas criando equações o que torna possível, por exemplo, usar estas figuras em programas de computação. A *geometria analítica* pode ser vista como uma introdução à *geometria algébrica* no sentido em que esta disciplina da Matemática trata os entes geométricos que podem ser definidos através de equações algébricas, mais precisamente como expressões polinomiais.

O círculo é uma cônica, quer dizer uma curva determinada pela interseção dum plano com um cone de duas folhas, e aqui estou me referindo a uma curva espacial. Confira também a *equação da elipse* para uma análise destas inteseções que geral elipses, parábolas, hipérboles ou retas...

Há um erro neste texto que será corrigido mais a frente, mas procure descobrí-lo você mesma.

Equação geral do círculo

A definição , da geometria, de *círculo* é "*o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dum ponto chamado centro*". Deixe-me identificar o centro com as coordenadas $C = (a, b)$ e um ponto genérico, P, do plano com as coordenadas (x, y). A frase da geometria que define círculo pode então ser traduzida algébricamente como

$$d(P, C) = r; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \tag{4.1}$$

em que r é a *distância* constante entre P e C. A figura (fig 4.1), página 70, lhe apresenta a ideia , da geometria, contida na definição do círculo.

A expressão na equação (eq. 1) poderia ser considerada a equação do círculo, mas não é nesta forma que vamos encontrá-la, habitualmente, mas sim na forma

$$P(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2; \tag{4.2}$$

entretanto qualquer uma das duas equações é perfeita para representar o círculo apenas no primeiro caso podem surgir problemas se for usada num programa de computador pela presença da raíz que exige que o seu "parâmetro" seja positivo.

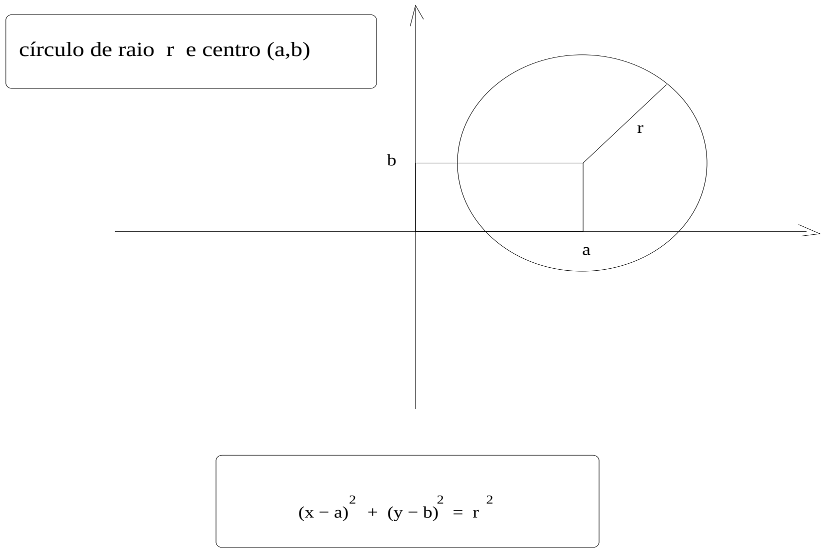


Figura 4.1: círculo de raio r e centro (a, b)

Um caso importante da equação do círculo é quando a origem é o centro do círculo quando a equação fica

$$P(x, y) = x^2 + y^2 = r^2; \tag{4.3}$$

Basta que você substitua $a =: 0, b =: 0$ na equação (eq. 2).

Identificando um lugar geométrico

O objetivo da *geometria analítica* é duplo, por um lado, codificar em equações algumas figuras geométricas, as cônicas, e por outro lado, identificar numa expressão algébrica "geral" que tipo de figura algébrica se encontra codificada na expressão. Este segundo problema não é nada fácil e na verdade melhor faz parte do ambiente matemático mais amplo que é a *geometria algébrica*, mas é exatamente este segundo problema que aparece na maioria dos exercícios de *geometria analítica*: "*dado o polinômio*

$$P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4.4}$$

em que A, B, C, D, E, F são constantes dadas, identifique qual é a cônica que a equação (eq. 4) representa".

No caso do círculo posso encontrar as regras para fazer esta identificação se expandir a equação (eq. 2) quando vou encontrar a expressão

$$P(x, y) = x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2 - r^2 = 0 \tag{4.5}$$

e comparando as duas equações deduzo que $A = C$ e se $A \neq C$ a expressão pode representar uma elipse, uma hipérbole ou nenhuma cônica. Também

$$B = 0; D = 2a; E = 2b; F = a^2 + b^2 - r^2; \tag{4.6}$$

e desta forma, se a equação (eq. 5) representar um círculo é então possível encontrar o centro, C, e o raio, r. Analise um exemplo, considere a sequência de cálculos, que vou considerar "validados" porque $A = C$, então poderá ser um círculo.

$$P(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0; \tag{4.7}$$
$$P(x,y) = x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0; \tag{4.8}$$
$$P(x,y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 - 4 = 0; \tag{4.9}$$
$$P(x,y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 16 = 0; \tag{4.10}$$
$$P(x,y) = (x-2)^2 + (y+3)^2 - 4^2; \tag{4.11}$$
$$(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 4^2; \tag{4.12}$$

que é a representação algébrica do círculo de centro $C = (2, -3)$ e raio $r = 4$. Na sequência de contas das equações (eq. 7) -(eq. 12) usei uma técnica denominada completação de quadrados em vez de procurar identificar os coeficientes da equação geral (eq. 4). Quando identificamos $A = C$, é mais prático seguir por este método para verificar se a expressão representa um círculo. Para dominar as técnicas envolvidas no trabalho com *geometria analítica*, como em qualquer disciplina ou atividade humana, a regra é bem simples: fazer uns mil exercícios... e você os encontra aos milhares em textos livres distribuídos na Internet.

O erro mencionado incialmente se encontra em que, ao escrever-se uma expressão $P(x,y)$ não está implicitamente identificada a dimensão do espaço em que esta expressão "codifica" algum objeto. Por exemplo, no espaço de dimensão 3,

$$x^2 + y^2 = 1;$$

representa o cilíndro cuja base é o círculo unitário do plano XOY e a geratriz é o eixo OZ. Apenas mencionar esta equação sem identificar o universo em que ela estiver sendo considerada deixa uma indefinição. Este erro é muito comum nos textos, mas é dificil de ser corrigido sem criar uma redação muito complexa, em geral se admite implicitamente que se houver apenas duas variáveis, então a dimensão do universo é dois.

É interessante responder a uma pergunta que sempre é feita. Porque a $P(x,y) = 0$ é que representa a equação do círculo e não apenas $P(x,y)$? É que escrevendo "apenas $P(x,y)$ você tem uma expressão livre que pode assumir qualquer valor em função dos valores dados às variáveis x, y e consequentemente $P(x,y)$ se refere a qualquer ponto (x,y,z) do $\mathbf{R}^3$ em que $z = P(x,y)$. A restrição $P(x,y) = 0$ limita esta expressão a $z = 0$. Outra forma de dizê-lo, é que $P(x,y) = 0$ corresponde ao sistema de equações

$$\begin{cases} z = P(x,y); \\ z = 0; \end{cases} \tag{4.13}$$

em que a primeira equação representa o gráfico da função bivariada $z = P(x,y)$ e a segunda equação representa o gráfico da função bivariada $z = 0$ cuja gráfico é o plano XOY ou seja, a equação (eq. 13) representa a interseção de duas superfícies o que pode ser uma curva. As curvas num espaço de dimensão maior, como aqui seria o $\mathbf{R}^3$, são determinadas por interseção de superfícies. Assim, o erro mencionado acima fica amenizado com um sistema de equações como a equação (eq. 13). Mas indefinição persiste... uma curva é uma variedade de dimensão 1 e a expressão $P(x, y) = 0$ apenas sugere que existam duas variáveis o que daria para calcular a dimensão por uma regra prática que diz que a dimensão é uma unidade menor do que o número de variáveis. Mas escrever

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$$

não contém nenhuma informação sobre a variável z ou significa que ela pode ter qualquer valor então esta expressão no $\mathbf{R}^3$ é um cilindro uma vez que não está estabelecida nenhuma restrição sobre a mesma e existe restrições sobre os valores de x, y.

Entre escrever textos extremamente complicados termina valendo o bom senso que é determinado pelo contexto.

O círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico, ou círculo unitário, é uma figura geométrica que aparece em muitas situações merecendo assim um tratamento especial. Posso partir da equação (eq. 3), basta dar o valor 1 ao $r = 1$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 = 1; \tag{4.14}$$

$$x = \cos(\theta); y = \sin(\theta); (x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta)); \tag{4.15}$$

A afirmação contida na equação (eq. 15) é a da relação fundamental da trigonometria e vale sempre que a soma de dois quadrados for 1. Explicando melhor, se a soma de dois quadrados for 1, como na equação (eq. 14) então os números x, y são, respectivamente coseno e seno de algum ângulo. Temos assim a forma polar do círculo.

ALGA	**Lista numero 2**
Equação do círculo	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**
alun@:	
2 de abril de 2015	**Faculdades INTA**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.geometria.sobralmatematica.org/`

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 4 *Equação do círculo*
objetivo: *Círculos e retas*
palavras chave: círculo, reta, lugar geométrico.

1. *Equação do círculo*

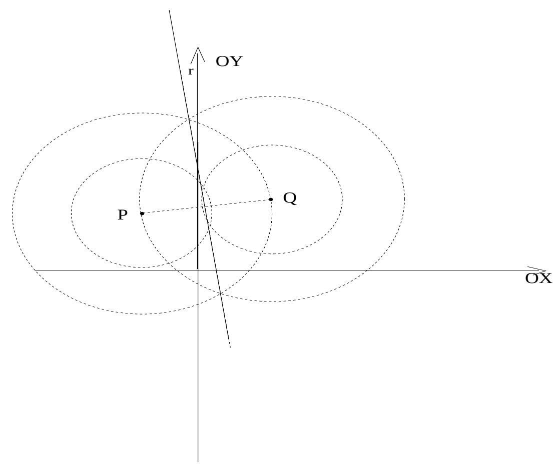


Figura 4.2: círculos e reta

Dados dois pontos $P = (-3, 4), Q = (4, 5)$ podemos dizer que

(a) *(V)[ ](F)[ ] Se o ponto $X = (x, y)$ estiver à mesma distância de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ então os pontos P, Q, X determinam um triângulo equilátero.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] Se o ponto $X = (x, y)$ estiver à mesma distância de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ então os pontos P, Q, X determinam um triângulo isósceles, mas pode ser um* triângulo isósceles degenerado...

(c) *(V)[ ](F)[ ] Quaisquer dois círculos com centros nos pontos P e Q, respectivamente, determinam dois pontos X_1, X_2 equidistantes de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] Dois círculos com centros nos pontos P e Q, respectivamente, determinam dois pontos X_1, X_2 equidistantes de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ se tiverem o mesmo raio.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] Dois círculos com centros nos pontos P e Q, respectivamente, determinam dois pontos diferentes X_1, X_2 equidistantes de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ se tiverem o mesmo raio e se este for maior que $\frac{d(P,Q)}{2}$.*

2. *Equação do círculo O símbolo $d(P, Q)$ representa a fórmula*

$$d(P, Q) = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2};\ P = (a, b), Q = (p, q); \tag{4.16}$$

(a) *(V)[ ](F)[ ]* *A equação algébrica que expressa que um ponto* $X = (x, y)$ *é equidistante de dois pontos dados* $P = (a, b), Q = (p, q)$ *é*

$$d(X, P) = d(X, Q); \tag{4.17}$$

(b) *(V)[ ](F)[ ]* *A equação algébrica que expressa que um ponto* $X = (x, y)$ *é equidistante de dois pontos dados* $P = (a, b), Q = (p, q)$ *é*

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(q-x)^2 + (p-y)^2} \tag{4.18}$$

(c) *(V)[ ](F)[ ]* *A equação algébrica que expressa que um ponto* $X = (x, y)$ *é equidistante de dois pontos dados* $P = (a, b), Q = (p, q)$ *é*

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2} \tag{4.19}$$

(d) *(V)[ ](F)[ ]* *Se o ponto* $X = (x, y)$ *for equidistante de dois pontos dados* $P = (a, b), Q = (p, q)$, *então*

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}; \tag{4.20}$$
$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = (q-x)^2 + (p-y)^2 \tag{4.21}$$

(e) *(V)[ ](F)[ ]* *Se o ponto* $X = (x, y)$ *for equidistante de dois pontos dados* $P = (a, b), Q = (p, q)$, *então*

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}; \tag{4.22}$$
$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = (p-x)^2 + (q-y)^2; \tag{4.23}$$
$$-2ax - 2by = -2px - 2qy; \tag{4.24}$$
$$(p-a)x = -(q-b)y; \tag{4.25}$$
$$(p-a)x + (q-b)y = 0; \tag{4.26}$$

então o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos dados é uma reta cujo coeficiente angular, se houver, é o negativo do inverso multiplicativo do coeficiente angular da reta que une os dois pontos $P = (a, b), Q = (p, q)$, *se esta reta tiver coeficiente angular.*

3. *Equação do círculo*

(a) *(V)[ ](F)[ ]* *A reta r corta o círculo* $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 7$ *passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é* 7.

(b) *(V)[ ](F)[ ]* *A reta r corta o círculo* $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 7$ *passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é* $\sqrt{7}$.

(c) *(V)[ ](F)[ ]* *A reta r corta o círculo* $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 7$ *passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é* $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A reta r corta o círculo $(x-3)^2+(y-5)^2=7$ passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é $2\sqrt{7}$.*

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A reta r corta o círculo $(x-3)^2+(y-5)^2=7$ passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é $\frac{7}{2}$.*

4. <u>*Equação do círculo*</u>

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A reta r tem coeficiente angular -3 e passa pelo ponto $P=(3,4)$. A equação da reta r é*

$$y+4=-3(x+3) \tag{4.27}$$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A reta r tem coeficiente angular -3 e passa pelo ponto $P=(3,4)$. A equação da reta r é*

$$y-4=3(x-3) \tag{4.28}$$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A reta r tem coeficiente angular -3 e passa pelo ponto $P=(3,4)$. A equação da reta r é*

$$y-4=-3(x-3) \tag{4.29}$$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A reta r é perpendicular à reta que une os pontos $P=(-3,4)$ e $Q=(4,5)$ e passa pelo ponto $P=(-3,4)$. Sua equação é*

$$m=(5-4)/(4-3); y-4=m(x-5); \tag{4.30}$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A reta r é perpendicular à reta que une os pontos $P=(-3,4)$ e $Q=(4,5)$ e passa pelo ponto $P=(-3,4)$. Sua equação é*

$$m=-(4+3)/(5-4); y-4=m(x+3); \tag{4.31}$$

5. <u>*Equação do círculo*</u>

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O lugar geométrico dos pontos (x,y) tais que*

$$3x^2+4y^3-5=0 \tag{4.32}$$

é uma reta.

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O lugar geométrico dos pontos (x,y) tais que*

$$3\frac{x-5}{5}+4\frac{5}{y}-5=0 \tag{4.33}$$

é uma reta.

(c) *(V)[ ](F)[ ]* *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$3\frac{x-5}{5} - 4\frac{y+7}{x} - 5 = 0 \tag{4.34}$$

é uma reta de coeficiente angular $\frac{3}{4}$.

(d) *(V)[ ](F)[ ]* *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$3\frac{x-5}{5} + 4\frac{y+7}{5} = 0 \tag{4.35}$$

é uma reta que passa na origem e tem coeficiente angular $-\frac{3}{4}$

(e) *(V)[ ](F)[ ]* *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$3\frac{(x-5)^2}{5} + 4\frac{(y+7)^2}{10} - 5 = 0 \tag{4.36}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (5, -7)$.

6. *Equação do círculo*

(a) *(V)[ ](F)[ ]* *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \tag{4.37}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (-5, 3)$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \tag{4.38}$$
$$x^2 + y^2 - 2 * 3 * x + 2 * 5 * y + 3^2 + 5^2 - 10 = 0; \tag{4.39}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10 = 0; \tag{4.40}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{4.41}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{4.42}$$

(b) *(V)[ ](F)[ ]* *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \tag{4.43}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (-3, 5)$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \tag{4.44}$$
$$x^2 + y^2 - 2 * 3 * x + 2 * 5 * y + 3^2 + 5^2 - 10 = 0; \tag{4.45}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10 = 0; \tag{4.46}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{4.47}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{4.48}$$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \tag{4.49}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (3, -5)$ *e raio* $\sqrt{10}$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \tag{4.50}$$
$$x^2 + y^2 - 2 * 3 * x + 2 * 5 * y + 3^2 + 5^2 - 10 = 0; \tag{4.51}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10 = 0; \tag{4.52}$$
$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 10 = 0; \tag{4.53}$$
$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 10; \tag{4.54}$$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \tag{4.55}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (-5, 3)$ *e raio* $\sqrt{10}$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \tag{4.56}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 = 0; \tag{4.57}$$
$$x^2 - 2 * 3 * x + 3^2 + y^2 + 2 * 5 * y + 5^2 - 10 = 0; \tag{4.58}$$
$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 10 = 0; \tag{4.59}$$
$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = (\sqrt{10})^2; \tag{4.60}$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2; C((a, b), r); \tag{4.61}$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y = 0 \tag{4.62}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (1, -1)$ *e raio* $\sqrt{2}$

$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y = 0; \tag{4.63}$$
$$5\left(x^2 + y^2 - 2x + 2y+\right) = 0; \tag{4.64}$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0; \tag{4.65}$$
$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0; \tag{4.66}$$
$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 2 = 0; \tag{4.67}$$
$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2; \tag{4.68}$$

7. <u>*Equação do círculo*</u>

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0 \tag{4.69}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (\frac{3}{4}, \frac{-5}{4})$.

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0; \tag{4.70}$$
$$4(x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10) = 0; \tag{4.71}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 = 0; \tag{4.72}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{4.73}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{4.74}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0 \tag{4.75}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (3, -5)$ *e raio* $\sqrt{10}$.

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0; \tag{4.76}$$
$$4(x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10) = 0; \tag{4.77}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 = 0; \tag{4.78}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{4.79}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{4.80}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 10 = 0 \tag{4.81}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (3, -5)$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 10 = 0; \tag{4.82}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y = -10; \tag{4.83}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 24; \tag{4.84}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 + 10 = 0; \tag{4.85}$$
$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = -10; \tag{4.86}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] $y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 2 = 0$ *é a equação dum círculo.*

(e) (V)[ ](F)[ ] $y^2x^2 - 18x - 8y - 2 = 0$ *é a equação dum círculo.*

8. *Curva fechada limitada*

(a) (V)[ ](F)[ ] *A equação* $(x-1)(x+3)y = 0$ *descreve uma curva cuja projeção do gráfico cobre o eixo* OX.

(b) (V)[ ](F)[ ] *A equação* $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$ *descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo* OX *é o intervalo* $[-10, 10]$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0; \tag{4.87}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 - 34 = 10; \tag{4.88}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 10; \tag{4.89}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 - 10 = 0; \tag{4.90}$$
$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{4.91}$$

(c) *(V)[ ](F)[ ] A equação $x^2+y^2-6x+10y-10=0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OX é o intervalo*

$$[-3-\sqrt{10}, -3+\sqrt{10}];$$

$$x^2+y^2-6x+10y-10=0; \tag{4.92}$$
$$x^2+y^2-6x+10y+34-34=10; \tag{4.93}$$
$$x^2+y^2+6x+10y=10; \tag{4.94}$$
$$x^2+y^2+6x+10y+9+25-34-10=0; \tag{4.95}$$
$$(x+3)^2+(y+5)^2=10; \tag{4.96}$$

(d) *(V)[ ](F)[ ] A equação $x^2+y^2-6x+10y-10=0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OY é o intervalo* $[-13, 7]$

$$x^2+y^2-6x+10y-10=0; \tag{4.97}$$
$$x^2+y^2-6x+10y+34-34=10; \tag{4.98}$$
$$x^2+y^2+6x+10y=10; \tag{4.99}$$
$$x^2+y^2+6x+10y+9+25-34-10=0; \tag{4.100}$$
$$(x+3)^2+(y+5)^2=10; \tag{4.101}$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] A equação $x^2+y^2-6x+10y-10=0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OY é o intervalo*

$$[-5-\sqrt{10}, -5+\sqrt{10}];$$

$$x^2+y^2-6x+10y-10=0; \tag{4.102}$$
$$x^2+y^2-6x+10y+34-34=10; \tag{4.103}$$
$$x^2+y^2+6x+10y=10; \tag{4.104}$$
$$x^2+y^2+6x+10y+9+25-34-10=0; \tag{4.105}$$
$$(x+3)^2+(y+5)^2=10; \tag{4.106}$$

9. *Lugar geométrico e sua equação*

   (a) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano tal que $x^2-2xy+y^2=0$ é um círculo de centro na origem.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano tal que $x^2-2xy+y^2=0$ é uma reta,* a primeira bissetriz dos eixos coordenados.

   (c) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano tal que $x^2-y^2=0$ é uma reta:* a primeira bissetriz dos eixos coordenados.

   (d) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano tal que $x^2-y^2=0$ é* a segunda bissetriz dos eixos.

(e) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *do plano tal que* $x^2 - y^2 = 0$ *é o conjunto formado pelas* duas bissetrizes dos eixos coordenados.

10. <u>*Equação normal da reta*</u> *Se*

$$Ax + By = 0; \tag{4.107}$$

então o conjunto dos pontos (x, y) *que satisfizerem à equação (107) é* a reta r, que passa na origem e, é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{(A, B)}$.

Considere os cálculos

$$Ax + By + C = 0; \tag{4.108}$$

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}; \frac{A}{r} = \cos(\alpha); \frac{B}{r} = \sin(\alpha); \tag{4.109}$$

$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y = 0; \tag{4.110}$$

$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y + \frac{C}{r} = 0; \tag{4.111}$$

e decida quais das afirmações seguintes são verdadeiras.

(a) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Se a reta* r *tiver coeficiente angular será* $-cotg(\alpha)$*.*

(b) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Se* $X = (x, y)$ *for um ponto genérico sobre a reta* r*, então o produto escalar*

$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \tag{4.112}$$

mede a projeção do vetor $\vec{X}$ *na direção do vetor* $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ *que é unitário e perpendicular à reta* r*. Confira a figura (fig 4.3), página 81.*

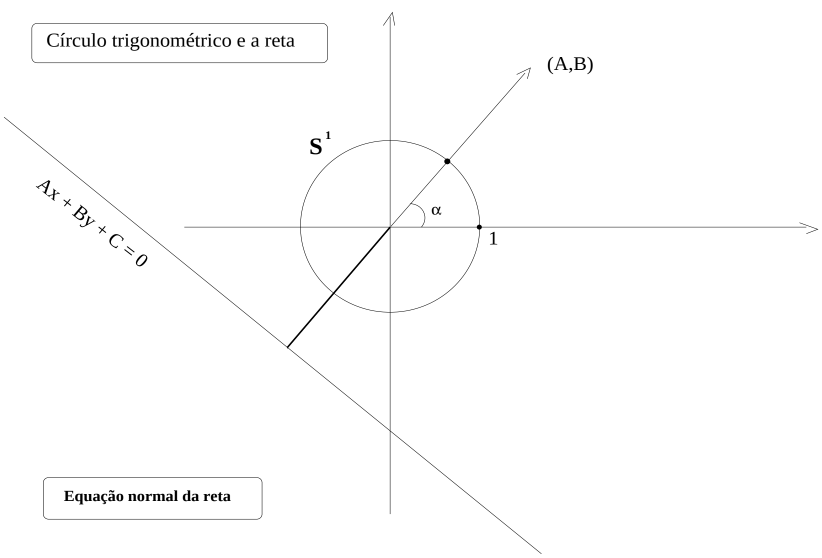
(c) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Como para qualquer* (x, y) *sobre a reta* r *vale a equação (111), então então o valor constante* $|\frac{C}{r}|$ *mede a distância da reta* $Ax + By + C = 0$ *à origem dos eixos cartesianos. Confira a figura (fig 4.3), página 81.*

(d) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A distância da reta* $Ax + By + C = 0$ *à origem dos eixos cartesianos é* $|\frac{C}{r}|$*. Confira a figura (fig 4.3), página 81.*

(e) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A distância da reta* $5x + 7y - 13 = 0$ *à origem dos eixos coordenados é*

$$\frac{13}{\sqrt{5^2 + 7^2}}; \tag{4.113}$$

Confira a figura (fig 4.3), página 81.



Círculo trigonométrico e a reta
(A,B)
S1
α
1
Ax + By + C = 0
Equação normal da reta

Figura 4.3:

Índice Remissivo

$\mathbf{S}^1$, 34

adição, complexos, 25
algébrica
    geometria, 16, 43, 69
analítica
    geometria, 7, 12, 43, 44, 69
argumento, 27
    número complexo, 31
arg(z)
    argumento, 31

cartesiana
    equação, 46
    equação da reta, 46
cartesianas
    coordenadas, 7
Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz
    desigualdade, 15
Churyumov
    Gerasimenko, 48
círculo, 69
    trigonométrico, 72
    unitário, 72
cônicas, 7, 18, 44
coeficiente
    angular, 11, 48, 49
    linear, 11, 49
cometa
    Churyumov–Gerasimenko, 48
complexo
    argumento, 31
    módulo, 31
    número, 58
        forma polar, 58
        forma trigonométrica, 58
complexos, adição, 25
complexos, inverso multiplicativo, 28
complexos, módulo, 28
complexos, multiplicação, 28
complexos, produto, 26
conjugado, 32, 37

Descartes, 7
distância, 69
    entre dois pontos, 12

equação
    círculo
        trigonométrico, 16
    da reta, 43
equação do círculo, 69
escalar
    produto, 57
espaço
    com produto interno, 14
espaço métrico, 13
eucldiana
    geometria, 12

fórmula de Moivre, 37
figura
    ângulo, 14
    círculo, 70
    cônicas, 20, 21
    circulo
        reta, 73
    coeficiente angular, 47, 50
    coeficiente linear, 47
    cone
        a elipse, 19
        a hipérbole, 18
        a parábola, 19
    conjugado, 33

coordenadas, 10
cosenos diretores, 66
curva plana, 16
distância, 62
entre dois pontos, 13
equação da reta, 49
forma polar, 36
frações, 8
media, 55
número complexo, 59
números complexos, 30
geometria, 27
plano cartesiano, 53
Produto
números complexos, 26
produto escalar, 61
produto geométrico, 54
produto vetorial, 61
programa, 17
reta
equação normal, 81
numérica, 7
reta, equação, 49
reta no plano, 45
reta numérica, 51, 52
reta orientada, 8, 52
retas perpendiculares, 64
Rosetta, 2
forma polar, 34, 36

Gauss
Inteiros de, 38
geometria
analítica, 7, 43
não euclidiana, 43, 45
números complexos, 27
geometria algébrica, 43, 69
geometria analítica, 43, 44, 69
Gerasimenko
Churyumov, 48
geratriz
do cone, 20
Girard
relaç oes, 29
gnuplot, 45
grafico
números complexos, 26

hiperplano
equação, 44

imaginárias, raizes, 24
Inteiros de Gauss, 38

matricial
produto, 35
métrico
espaço, 13
módulo
número complexo, 31
Moivre
fórmula, 37

número
complexo, 58
quaternion, 58
número complexo, 24
números complexos, 23

O plano complexo, 28
ordem
relação de, 9
origem
dos eixos, 16

parte
imaginária, 25, 37
real, 25, 37
parte imaginária, 37
parte real, 37
plano
digitalizar, 9
equação, 44
numerizar, 9
plano coordenado, 9
polar, forma, 34
Potências de i, 29
produto
escalar, 14
interno, 14
produto, complexos, 26
produto e matriz, 35
produto interno

- espaço com, 14
produto, raiz, 23
proporções
    - lei das, 44

quaternion
    - número, 58

raiz do produto, 23
raizes
    - da unidade, 38
    - de um número complexo, 38
raizes imaginárias, 24
razão
    - segmento de reta
        - divisão, 55
real
    - número, 9
representação
    - geométrica, 25, 26
reta
    - coeficiente angular, 48
    - coeficiente linear, 48
    - digitalizar, 7
    - equação, 43
        - paramétrica, 46
        - vetorial, 46
    - geometria euclidiana, 43
    - geométrica, 9
    - numerizar, 7
    - numérica, 9
    - orientada, 51
    - proporção, 44
    - tangente, 48
reta numérica, 9
Rosetta
    - nave espacial, 48
rotação
    - número complexo, 58
    - quaternions, 58

saca rolha
    - regra, 14
segmento
    - razão, 55

triedro
    - positivo, 14
trigonométrico
    - círculo, 16, 34

vetor, 27
vetores
    - orientação, 14

xfig, 45

Referências Bibliográficas

[1] Frank Ayres Jr. *Cálculo - Col. Schaum*. Bookman, 2007.

[2] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 1*. LTC, 2011.

[3] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 2*. LTC, 2011.

[4] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 3*. LTC, 2011.

[5] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 4*. LTC, 2011.

[6] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[7] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[8] James Stewart. *Cáculo Vol I*. Cengage Learning, 2013.

[9] James Stewart. *Cálculo Vol II*. Cengage Learning, 2013.

[10] the free enciclopedia in the Internet Wikipedia. Wikipedia, the free enciclopedia in the internet. http://www.wikipedia.org.