

Análise Harmônica e não Harmônica

Praciano-Pereira, T.

Sobral Matemática

Universidade Estadual Vale do Acaraú

1 de agosto de 2010

tarcisio@member.ams.org

Tarcisio Praciano-Pereira
PhD em Matemática

Análise Harmônica e não Harmônica

Sobral, 2003

Textos para o Ensino
Publicações do
Laboratório de Matemática Computacional
Universidade Estadual do Vale do Acaraú

Copyleft Laboratório de Matemática Computacional

Este livro pode ser livremente copiado para uso individual e não comercial, desde que seja feita cópia de capa a capa sendo preservada a descrição do *copyleft*. Não fazer assim representa um crime contra os direitos autorais. Para distribuir comercialmente contactar tarcisio@member.ams.org.

Praciano-Pereira, Tarcisio

P496c Análise Harmônica e não Harmônica

Sobral: Laboratório de Matemática Computacional - 2003

224.p

Bibliografia

ISBN:

1 - Séries de Fourier -

2 - Transformada de Fourier

3 - Wavelets - 4 - Métodos adaptativos.

I. Título

CDD 517....

Quem não sabe e não sabe que sabe é tolo, *foge dele*
Quem sabe e não sabe que sabe está dormindo, *acorda-o*
Quem não sabe e sabe que não sabe é humilde, *ensina-o*
Quem sabe e sabe que sabe é um sábio, *segue-o*
Mas, . . . *como saber se se sabe?*

. . . autor desconhecido,
comunicação oral: Gerardo Pereira

Introdução.

O assunto deste livro é simples e vou tentar descrevê-lo com poucas palavras.

Quando um *motorista* envelhece junto com o seu carro, aos poucos vai notando *novos ruídos, ondas sonoras, ou harmônicos* novos emitidos pelo motor e pelo carro em geral, que se modifica com o tempo, *como numa orquestra um maestro habituado consegue distinguir os harmônicos que fogem da partitura identificando o instrumento e até quem o toca*. Nos dois casos, no caso do motorista ou do maestro, o conjunto de sons se superpõem, (dizem os físicos), ou se somam, (dizemos os matemáticos), formando um sinal único para o ouvido não habituado, mas para o ouvido treinado surgem diferenças quando algumas “ondas” entram em distorção, o maestro fala de *instrumento desafinado*, o motorista sabe que alguma peça está funcionando mal, também está “desafinada”. Mas este *único* sinal na verdade é uma *soma de harmônicos* e são os *harmônicos* destoantes que o maestro nota, ou são os *harmônicos* que não estavam antes entre os *ruídos normais* do carro que o motorista percebe e que lhe trazem a informação, por exemplo, de um rolamento que chegou ao fim da vida útil.

Na *análise harmônica*, a primeira parte deste livro, os *sinais, as músicas, o som dos motores*, se decompõem de acordo com uma base de vetores ortonormais que ao longo da história desta disciplina foram as senoides $\sin(nx), \cos(nx)$ ¹, que formaram esta base ortonormal de vetores. Cada valor de n representa um dos “instrumentos” para o maestro ou para o motorista e a teria nos ensina a “filtrar” alguns componentes desta *informação*.

A palavra *ruído*, de agora em diante, vai representar um conceito próprio, uma palavra chave da teoria. As informações chegam até nós por diversos canais, alguns naturais, como a luz solar, outros produzidos artificialmente mas usando algum canal existente, como é o caso das ondas eletromagnéticas dos nossos sistemas de comunicação que usam o sistema magnético da Terra como portadora.

Um exemplo simples, ao alcance de todos, consiste em abrir um orifício pequeno², numa caixa de sapatos. Antes pregue na caixa uma folha de papel “transparente” e volte este sistema para a janela. Você nada vai ver! Agora cubra a caixa com uma blusa preta e envie sua cabeça pelo buraco do pescoço da blusa e você vá ver uma imagem do que se passa na rua na folha que você pregou dentro da caixa. Abrindo um pouco mais o orifício finalmente você vai poder identificar alguma imagem. E aqui você vai descobrir o que significa “estar no foco” - a imagem pode estar ou não no foco. Pronto, você terá aprendido assim a razão do sistema complicado de lentes que é usado numa máquina fotográfica (mesmo eletrônica).

Este exemplo mostra que a informação chega até nós diluída dentro de uma quantidade muito grande de informações e precisa haver uma seleção para que finalmente possamos descobrir o que nos interessa. O que não nos interessa é que chamamos de *ruído*.

Cada *expert* dos diferentes tipos de *informação* seleciona o tipo de filtro que lhe interessa o que significa na prática selecionar um subconjunto dos valores de n , no caso das ondas “trigonométricas”, para analisar separadamente. O conjunto dos valores de n forma o *espectro* e subconjuntos do espectro trazem informações preciosas para os que estudam estes “ruídos” que para alguns pode ser uma *sonata*, mas para o trabalhador num certo ramo pode informar do funcionamento correto (que o caso do maestro) das partes de um sistema. Em alguns casos interessa apenas eliminar algum *ruído*, em outros caso pode interessar quem faz o *ruído*...

Mas, partindo da *Álgebra Linear* elementar que algumas vezes nos primeiro períodos da Universidade se chama de *Geometria Analítica Vetorial*, posso dar uma visão intuitiva inicial do que vou descrever neste livro, como um vetor geométrico, um elemento do \mathbf{R}^3 :

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

pode ser decomposto em suas componentes ao longo das direções dos vetores que compõem o referencial:

$$\{e_1, e_2, e_3\},$$

¹Uma forma equivalente se obtém com fórmula de deMoivre-Euler-Abel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

de que vou tratar mais a frente

²Não muito pequeno, a experiência vai mostrar-lhe qual o tamanho, comece com um bem pequeno.

também os ruídos do motor ou a música da orquestra, podem ser decompostos em seus harmônicos básicos que são as senoides a que me referi acima.

Os motoristas não costumam pensar assim, mas uma fábrica que tenha seus motores trabalhando 24/24 tem que se preocupar em fazer análise periódica do “espectro” sonoro produzido por suas máquinas porque, a presença de certos *ruídos* indicam o final da vida útil de algumas peças: eixos, virabrequins, ou dos mancais que os suportam. Uma manutenção feita no momento certo garante uma longa vida para a máquina ao mesmo tempo que garante que ela fique funcionando o tempo máximo parando apenas quando se aproximar o *ponto limite*, antes de se quebrar: o tempo de manutenção.

Esta é uma das aplicações da teoria a que me dedico neste livro. Outra, menos mecânica, mas exatmete do mesmo tipo, pode ser análise da voz humana, sua decomposição e transmissão, como se faz em telecomunicações. Mas também pode ser a decomposição de uma foto ou de uma imagem.

Em síntese, o nosso objetivo é *analisar sinais* o que, posto nestes termos, se torna um projeto muito ambicioso porque tudo no Universo, em última instância, se pode entender como um *sinal* . . .

Apenas para finalizar vou juntar uma outra ideia associada as demais acima descritas. Falo de transmissão de sinais, (voz, imagem arquivos etc..). Quanto maior o arquivo, (e hoje toda informação termina virando um arquivo de computador), tanto mais longo o processo de transmití-lo, guardá-lo etc...Surge então o conceito de compactação de dados. A compactação de dados é um outro aspecto da análise de sinais que pretendo discutir, mas pretender não é uma garantia de que vai ser feito!

Não vou poder examinar ou descrever todo o desenvolvimento em volta destas ideias. O livro de Zygmund, [23], tem quase mil páginas, o livro de Meyer, [8], tem 131 páginas mas representa um exemplo de compressão de dados...uma vez que descreve toda a teoria e suas aplicações envolvendo os assuntos: *dados, compressão, transmissão e análise* como os entendemos hoje.

Vou ter que escolher um atalho para me sair honrosamente pelo meio desta massa enorme de informações.

A ideia central é a da Álgebra linear: *decompor um vetor em suas componentes ou recompor de volta uma aproximação deste vetor a partir de suas componentes*. Porque uma aproximação do vetor? o fato é que raramente conseguimos de volta a *realidade* com precisão. Veja o que acontece com uma integral, uma soma de Riemann é a integral exata de uma aproximação de uma função através de funções constantes por pedaços, esta última representa uma informação finita que aproxima a informação, n’algum sentido infinito, representada pela função³.

Se substituirmos *vetor* por *informação* caímos no espírito deste livro. O primeiro problema é entender o que significa informação, ou ainda mais exatamente, como modelar matematicamente a informação. Este conceito se encontra hoje em sua mais intensa evolução, porisso é difícil defini-lo. Um matemático probabilista, Claude Shannon, [18], foi um dos primeiros que associou: *informação w comunicação*, descontado o erro histórico de personalização que sempre se comete, veja-se o caso das séries de Fourier⁴, mas parece que é com Shannon que a palavra *informação* surge com um sentido matemático.

Os *problemas* das comunicações se podiam caracterizar basicamente em termos de *velocidade* e de *ruido* em 1945. Velocidade e ruido certamente continuarão no centro da questão, mesmo porque a complexidade que se vem associando à informação apenas aumenta. Antes nos comunicavamos com palavras, hoje o fazemos com imagens. Antes o ruido se devia a imperfeição dos canais de comunicação, hoje ele se vai dever ao processo de compactação de uma grande massa de informação que temos que transmitir.

Cheguei assim as palavras-chave deste livro: *informação, comunicação, sinal, transmissão, guarda e análise da informação, análise de sinais, ruídos*.

Começando do começo, e o começo se encontra aí por 1700 quando Euler e um dos irmãos Bernouilli, entre outros muitos que se possam ter perdido na poeira da História, começaram a experimentar com somas do tipo:

$$a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots$$

³Falo aqui de aproximação de integrais usando o método das *somas de Riemann* que é altamente inefetivo, do ponto de vista de aproximação, tem outros melhores, mas de alto valor teórico na construção da teoria das integrais. Mas é uma idéia que se encontra ao alcance de uma grande quantidade de estudantes de Matemática.

⁴que já eram conhecidas de Euler e um dos irmãos Bernouilli

porque observaram que as funções *sen*, *cos* tinham propriedades cíclicas com respeito a derivação, e sendo funções periódicas, modelavam fenômenos oscilatórios que eles queriam entender.

O nome de Fourier surge um século depois ao fazer afirmações que ainda levaram mais um século para serem bem compreendidas quando dizia que toda função periódica podia ser descrita como uma série de cossenos e senos.

Das séries de Fourier, vou passar a transformada de Fourier da qual as séries são um exemplo, e vou chegar a formulação moderna da teoria com as *Wavelets* que são uma liberação da Teoria de Fourier do tipo clássico de ondas representadas pelos *senos* e *cossenos* acelerados e amplificados. Depois de 1985, *de repente* . . . , se entendeu que era isto que se vinha tentando fazer há algum tempo, substituindo ou modificando esta ondas por outras adaptadas a ao contexto. Primeiro vieram os *enjanelamentos* dos senos e cossenos, uma primeira tentativa de *localização* que deram lugar as *transformadas de Fourier enjaneladas*. Depois chegaram as *wavelets* e 1990 foi o ano em que, num encontro feito nos Estados Unidos, o CBMS90, se anunciou que elas definitivamente existiam e eram um instrumento tecnológico, foi o “descobrimento” das *wavelets*...

Você tem nas mãos a primeira versão deste livro. Apesar de que ele se componha de alguns textos que já usei em outros livros, o material é novo e experimental. Eu comecei a escrever este livro em 1995 para dar um curso sobre *análise harmônica* quando incluí também a *análise não harmônica* apenas não consegui ainda o terminar. Não o digo como desculpa pelos possíveis erros, até mesmo porque considero erros uma componente inseparável do trabalho e se tivesse medo dos meus erros a primeira consequência seria não abrir a boca. O convidamos assim para ser crítico e que nos forneçam o resultado de sua análise para o texto seja melhor posteriormente. E quando digo “possíveis erros” é exatamente porque se eu soubesse onde eles estavam eu já os teria corrigido...

Quero comentar o significado dos exercícios neste livro. Eles representam um complemento essencial ao texto, ali coloco o que espero que você possa aprender sozinho e que seria cansativo incluir no livro.

Não é o objetivo, entretanto, fazer todos os exercícios aqui contidos. A regra sempre é: *um exercício que não lhe pareça claro, deve ser feito!* Não se esqueça também que *clareza* pode ser consequência de imprecisão da linguagem... ou de erros. Este livro não se encontra livre de erros.

Usei programas em **Pascal**, **Maple**, na primeira versão e eles ainda se encontram aqui. Depois saltei definitivamente e irreversivelmente para *software livre* e passei a usar **SciLab** como instrumento básico. Todas as referências feitas a programas em Pascal correspondem aos nossos programas de domínio público que podem ser obtidos por e-mail, tarcisio@member.ams.org.

Os interessados podem também conseguir uma cópia do programa Tutorial *Calculo* produzido por Marcelo Pereira Nunes, então aluno do Curso de Computação do Dep. de Matemática da Universidade do Rio Grande, soliciando cópia do arquivo por e-mail,

Todo o material desta versão do livro foi elaborado e testado em ambiente **Debian/GNU/Linux** usando basicamente **SciLab** que é um programa de domínio público feito por um dos grupos do INRIA/França e que pode ser obtido livremente em algum dos sites do INRIA, ver [17]. Recentemente passei a escrever os meus programas em **C++** usando o compilador **g++**.

Sumário

I	Análise Harmônica	9
1	Série de Fourier.	11
1.1	Introdução: ondas e sinais.	11
1.2	Polinômios Trigonométricos.	12
1.2.1	Gráficos de convoluções.	26
1.3	Convergência num espaço vetorial.	29
1.4	Convergência em espaços de funções.	31
1.5	A convergência das séries de Fourier.	32
1.6	Forma complexa da série de Fourier.	46
2	Transformada integral de Fourier.	55
2.1	Transformada de Fourier de funções não-periódicas.	55
2.2	Uma classe de funções onde vale a fórmula integral de Fourier.	58
2.3	Transformadas integrais.	60
2.3.1	Definição e exemplos.	61
2.3.2	Transformada de Fourier.	64
2.4	Sinais limitados no tempo e na frequência.	74
2.5	Transformadas de Fourier enjaneladas.	75
2.6	O método de Shannon.	79
2.6.1	Refinamento da amostragem de Shannon.	82
II	Análise não Harmônica.	85
3	Wavelets.	87
3.1	As primeiras tentativas.	87
4	Dicionários e processos adaptativos.	93
4.1	faixas de frequência e tempo	93
4.2	representação adaptada de som e imagem.	94
4.2.1	Dicionário, em vez de base.	94
4.2.2	A busca de coincidências.	94
4.2.3	A busca sonora.	100
4.3	Filtros.	105

Sumário

Parte I

Análise Harmônica

Capítulo 1

Série de Fourier.

1.1 Introdução: ondas e sinais.

Alguém que use frequentemente uma máquina motorizada, (que produza ruído e portanto ondas sonoras), se acostuma com o *barulho habitual* da mesma e conseqüentemente, quando aparecer o primeiro sintoma de mal funcionamento se irá dar contas do surgimento dum ruído estranho ao habitual. A máquina começa a emitir uma nova onda sonora, possivelmente de pequena intensidade, mas perfeitamente audível para o ouvido acostumado ao *barulho habitual*.

Um exemplo trivial, é o do motorista que envelhece com o seu carro... aos poucos alguma porta começa a “bater”, ou é a descarga que, enferrujada começa se desprender dos seus suportes de borracha, enfim surgem novas ondas sonoras a se super-porem às *habituais* que logo o ouvido acostumado nota e se tiver dinheiro, procura ver a origem da nova *onda* pela indicação que ela lhe dá de um problema.

O *ruído habitual* de uma máquina não é “simples”, ele se compõe de diversos tipos de “ruídos” de cuja soma ou superposição são formados. Com o passar do tempo e com o desgaste novos ruídos se vem superpor aos existentes. Se forem suficientemente grandes o ouvido consegue distinguir um novo componente. O problema é quando um novo ruído não for audível, então precisamos um instrumento com sensibilidade para analisar todos os harmônicos existentes. As séries de Fourier são uma recomposição de um “sinal” a partir de suas ondas, ou seus harmônicos e portanto se podem selecionar parte destes harmônicos que possam interessar por uma razão particular. Um sinal contém uma certa distribuição de energia, que captada por um sensor, por um exemplo um microfone, permite que em seguida se produza a sua série de Fourier ou isolar uma, duas, uma quantidade finita qualquer destes componentes e assim descobrir a presença de um “harmônico indesejável” ou, que, em outras palavras, denuncie um problema se avolumando, como, no caso do chofer habituado com a soma de “harmônicos de sua máquina”, nota a presença de um novo “harmônico” necessariamente indicativo de um problema surgindo.

“Problema” não denuncia presença do indesejável, apenas, esta análise, que se denomina “análise espectral”, permite uma decomposição da emissão energética de um fenômeno em seus componentes e assim uma análise de suas partes.

Uma aplicação simples: a presença de um determinado tipo de onda, com uma frequência específica, presente na “ondulação” da massa de água do mar.

Nós vamos estudar neste livro um método que se iniciou “oficialmente” em 1807, ver [8, pag. 14], quando Fourier afirmou que “toda função 2π -periódica podia ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

e que seguiu evoluindo durante este século para produzir uma variante que hoje se chama “wavelet”. As séries de Fourier são somas de “ondas”

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x)$$

de um tipo muito particular que receberam o nome de harmônicos. Somente entre¹ 1985 e 1990 é que os matemáticos descobriram que uma generalização desta ideia consistia em estudar as “ondas” não harmônicas, ver [8] ou [2] foi quando “oficialmente” foi fundada a *teoria das wavelets*.

¹datas devem ser sempre tomadas com o devido cuidado, estamos citando dois limites sugeridos em por dois dos principais responsáveis pela nova teoria, Ingrid Daubechies e Yves Meyer

É preciso sublinhar a palavra oficialmente, quando Fourier enunciou em 1807 a sua famosa e inacreditável frase, já havia quase um século de matemática usando somas de senos e cossenos ampliados e acelerados, Euler e algum dos irmãos Bernouilli já sabiam que alguma coisa deste tipo valia. Meyer, [8], também vai buscar as origens da nova teoria de ondas não harmônicas no início do século, com Haar em 1909, e prolonga esta descoberta durante os 80 anos que se seguem, ao longo dos quais uma multidão de matemáticos e físicos contribuíram para a nova teoria, (nova? talvez se devesse dizer “reformulação da teoria de Fourier... ou, como estamos fazendo aqui, a criação da análise não harmônica).

O novo ruído que surge numa máquina e que um ouvido acostumado de repente percebe é um caso típico de onda que se decompõe em harmônicos. Mas durante este século as máquinas se tornaram muito especializadas e também os seus ruídos exigindo que um novo tipo de análise aparecesse criando uma nova atividade que se diversificou muito: *análise de sinais*, ver [11, cap. 1, aplicações].

Nós vamos iniciar o desenvolvimento a partir da Análise Harmônica até mesmo porque ela ainda tem aplicações embora possivelmente termine perdendo terreno definitivamente para as “wavelets”. Mas sobretudo faremos assim porque o processo é pedagógico e poderemos acompanhar rapidamente a evolução do assunto. O livro de Meyer, [8], é semelhante a este na ideia, entretanto bastante condensado atingindo uma gama de aplicações mais larga que é a nossa pretensão de atingir aqui.

1.2 Polinômios Trigonométricos.

Em 1822, num artigo apresentado à *Academia Francesa de Ciências*, Joseph Fourier, (1768-1830) afirmou que *todas as funções periódicas* podem ser decompostas em múltiplos das funções

$$x \longrightarrow \text{sen}(nx)$$

e

$$x \longrightarrow \text{cos}(kx)$$

com $n, k \in \mathbf{N}$.

Nãseriam *todas* como se veria com o passar do tempo e da revolução que Fourier provocou no desenvolvimento da Matemática com as suas Séries Trigonométricas, chamadas ainda de *Séries de Fourier*, mas que eram conhecidas de alguns matemáticos anteriores a ele, como Euler, (1707-1783) e alguns dos irmãos Bernouilli.

As funções

$$\text{sen } k : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \text{sen}(kx) \quad (1.1)$$

e

$$\text{cos } j : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \text{cos}(jx) \quad (1.2)$$

formam um sistema de *vetores* linearmente independentes e ortogonais no espaço vetorial das funções contínuas definidas num intervalo fechado e limitado, *num intervalo compacto*, vamos particularizar o problema para apresentar uma teoria pequena tomando o intervalo $[0, 2\pi]$ como base. Depois mostraremos como esta teoria se pode generalizar para um intervalo compacto qualquer. Para provar as propriedades enunciadas, é preciso definir neste espaço $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ um produto escalar, o conceito que nos permite calcular os ângulos entre vetores ou os módulos destes. Lembre-se do seu curso de Geometria Análítica, é o produto escalar que permite *generalizar* os conceitos geométricos, *ângulo*, *módulo*, *distância* a espaços mais gerais. O produto escalar poderia ser definido assim

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx. \quad (1.3)$$

Uma integração por partes mostra que *sen* e *cos* são ortogonais:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\text{cos}(x)dx = \\ & = \text{sen}^2|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\text{cos}(x)dx \Rightarrow \\ \Rightarrow & 2 \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\text{cos}(x)dx = \text{sen}^2|_0^{2\pi} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\text{cos}(x)dx = 0 \end{aligned}$$

De modo análogo se pode mostrar que $senk$ e $cosj$ são ortogonais para quaisquer que sejam k, j ; $j = k$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} sen(kx)cos(kx)dx = \\ & = \frac{1}{k} senkxsen(kx)|_0^{2\pi} - \frac{k}{k} \int_0^{2\pi} sen(kx)cos(kx)dx = \\ & 0 - \int_0^{2\pi} sen(kx)cos(kx)dx = - \int_{-\pi}^{\pi} sen(kx)cos(kx)dx = 0 \end{aligned}$$

a justificativa da última linha no bloco de equações acima sendo que, a integral de $senk, cosj$ não muda se fizermos uma translação² de π e no intervalo $[-\pi, \pi]$ uma das funções é par e a outra é ímpar.

Se $k \neq j$ então uma nova integração por partes nos leva de volta às funções iniciais:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} sen(kx)cos(jx)dx = \\ & = \frac{k^2}{j^2} \int_0^{2\pi} sen(kx)cos(jx)dx \Rightarrow \\ & = (1 - \frac{k^2}{j^2}) \int_0^{2\pi} sen(kx)cos(jx)dx = 0 \Rightarrow \\ & \int_0^{2\pi} sen(kx)cos(jx)dx = 0 \end{aligned}$$

mostrando as relações de ortogonalidade desejadas, que pela sua importância merecem estar registradas sob o nome de teorema:

Teorema 1 da ortogonalidade das funções $senk$ e $cosj$.

Se definirmos em $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ o produto escalar por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

então as funções $senk(x) = sen(x)$ e $cosj(x) = cos(x)$ formam um sistema de vetores ortogonais, para todos os valores de $j, k \in \mathbf{N}$.

Um raciocínio geométrico simples nos conduz a

$$\int_0^{2\pi} sen^2(x)dx = \int_0^{2\pi} cos^2(x)dx$$

porque sen é translação de cos de $\frac{\pi}{2}$, assim

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} sen^2(x)dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (sen^2(x) + cos^2(x))dx = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle sen, sen \rangle = \pi \\ \int_0^{2\pi} cos^2(x)dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (sen^2(x) + cos^2(x))dx = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle cos, cos \rangle = \pi \end{aligned}$$

Com o mesmo argumento geométrico, apoiado numa mudança de variável, se conclue que

$$\langle senk, senk \rangle = \pi \quad (1.4)$$

$$\langle cosk, cosk \rangle = \pi \quad (1.5)$$

portanto o produto escalar é “defeituoso” e pode ser redefinido para que estes vetores sejam “unitários”:

²estamos usando uma propriedade da integral de Riemann, invariância por translação.

Definição 1 Re-definição do produto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx. \quad (1.6)$$

e desta maneira se tem

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{sen}k, \operatorname{sen}k \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(kx)dx = 1 \\ \langle \operatorname{cos}k, \operatorname{cos}k \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{cos}(kx)\operatorname{cos}(kx)dx = 1 \end{aligned}$$

para qualquer que seja k . Isto nos induz a uma correção do teorema anterior que agora ficou incompleto frente a estes novos resultados:

Teorema 2 do sistema trigonométrico ortonormal.

Se definirmos em $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ o produto escalar por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

então as funções $\operatorname{sen}k(x) = \operatorname{sen}(kx)$ e $\operatorname{cos}j(x) = \operatorname{cos}(jx)$ formam um sistema ortonormal de vetores, para todos os valores de $j, k \in \mathbf{N}$.

Podemos agora estender a geometria do \mathbf{R}^3 a este novo espaço. Teremos que discutir a validade desta extensão, obviamente. Em \mathbf{R}^3 , na Geometria Analítica, depois de definido o produto escalar, se chamam os números $\langle u, e_n \rangle$ de *projeções* de u na direção dos vetores e_n , como são habitualmente chamados os vetores unitários das três direções do espaço e depois se recompõe u com uma soma:

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Como agora temos *produto escalar* em $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ e temos duas sucessões de vetores unitários relativamente aos quais podemos calcular as projeções de $f \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$

Definição 2 Coeficientes de Fourier, (preliminar).

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{cos}(kx)dx \quad (1.7)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx \quad (1.8)$$

então a pergunta:

nã poderíamos recompor f a partir destas projeções?

Queremos escrever:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{cos}(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) \quad (1.9)$$

mas logo veremos que esta fórmula está errada. Além disto, como não existem *somas infinitas* ela nos obriga a pensar em *convergência*.

Exemplo 1 *Séries de Fourier de algumas funções.*

1. $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0$$

porque $\cos N$ é par e f é ímpar.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = \\ &= -\frac{x \cos(nx)}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \\ &= -2 \frac{\pi \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(-1)^{(n+1)}}{n} \end{aligned}$$

entãteríamos

$$f(x) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

e se assim o for, se tiver sentido escrever esta série, temos também

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

como $\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})$ assume ciclicamente os valores $\{1, 0, -1, 0\}$ a “série” acima perde os termos de ordem par, ficando entã

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Fazendo o cálculo da soma com um programa em Pascal, com 1000 termos se obtém para o valor 1.56980 enquanto que $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57080$, usando o valor interno do Pascal para π . Entretanto temos discutir a validade destes resultados o que faremos em seguida. Observe que $f(\pi) = \pi$ enquanto que a série trigonométrica vale 0 para $x = \pi$ porque a série representa uma função periódica que é “uma boa aproximação”³ para f sobre $[-\pi, \pi]$, entretanto nos extremos ou em pontos de discontinuidade da função a ser aproximada, ocorrem problemas que ainda voltaremos a discutir. Um programa em Pascal para calcular esta soma pode ser o seguinte:

```
Program Serie;
Var n,teto: LongInt;
    soma : Extended;
Begin
  WriteLn('Teto = ');ReadLn(teto);
  n:=1;soma:=1;
  While (n<=teto) Do
    Begin
      soma := soma - sin(n*pi/2)/(n+2);
      n:= n+2;
    End;
  WriteLn('Valor da soma: ',2*soma:10:5);
  WriteLn('o valor exato da serie eh: ',pi/2:10:5);ReadLn;
End.
```

observe que sen não somente alterna o sinal como elimina os termos de ordem par. A variável “soma” foi inicializada com 1 que é o primeiro termo da série e dentro do “While” a soma se processa a partir do segundo termo o que justifica o sinal “-”.

³Yves Meyer, [8, pag. 14] acrescenta “mas não sentido ingênuo que Fourier podia imaginar”, sem concordar com o “ingênuo”, de fato Fourier não podia entender o que os matemáticos só vieram a perceber no século 20...

2. $f(x) = x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx = \\ &= \frac{x \sin(nx)}{n\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = 0 \end{aligned}$$

se $n \neq 0$ e $a_0 = 2\pi$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = \\ &= -\frac{x \cos(nx)}{n\pi} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \\ &= -\frac{2}{n} \end{aligned}$$

entãteriamos, valendo a convergência,

$$f(x) = 2\pi - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(nx)$$

podemos testar com um programa em Pascal esta soma num valor escolhido de x , por exemplo $x = \frac{\pi}{2}$, entãsen($\frac{n\pi}{2}$) assume ciclicamente os valores $\{1, 0, -1, 0\}$ e assim na soma se eliminam os valores pares de n , com uma alteração do programa acima temos:

$$2\pi - 2 \sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \approx 2\pi - 1.56980 \approx \frac{3\pi}{2}$$

e no entanto o valor $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ portanto temos um erro de π . Veremos abaixo que a fórmula correta é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (1.10)$$

e porque que a_0 tem que vir dividido por 2, mas desde logo este exemplo nos aponta para esta correção.

Se diz que Euler teria feito cálculos de séries usando este método e uma das críticas que as vezes se faz ao seu trabalho inclue a observação de que estas “sommas” foram feitas sem nenhuma comprovação. De certa forma estamos repetindo o caminho de Euler, mas faremos a comprovação rigorosa destes limites no próximo capítulo⁴.

3. $f(x) = x^2 - \pi^2$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Porque $\sin N$ é impar e f é par, entãb_n = 0.

Se $n \neq 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2) \cos(nx) dx = \\ &= \frac{(x^2 - \pi^2) \sin(nx)}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin(nx) dx = \\ &= 0 - \frac{1}{n\pi} \frac{-2x \cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

e quando $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2) dx = -\frac{4\pi^2}{3}.$$

⁴Os que algumas vezes criticam Euler, esquecem-se de que êle estava abrindo uma estrada muito larga e nãtinha tempo para verificar os detalhes, que ficariam para os seus sucessores, e se diz que até recentemente ainda haviam verificações para serem feitas...

Teríamos, com a correção sugerida pelo exemplo anterior:

$$f(x) = -\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

se aplicarmos esta série de cossenos em $x = \frac{\pi}{2}$, como

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \in \{0, -1, 0, 1\},$$

a série numérica resultante se reduz aos termos de ordem par de n :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} \cos(2n\frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{2\pi^2}{3} - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \dots + \frac{(-1)^n}{n^2} + \dots \end{aligned}$$

porque $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Com uma alteração do programa anterior, encontramos o valor aproximado desta soma com $n \leq 1.000$, um valor próximo de $f(\frac{\pi}{2})$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -7.40220$$

confirmando mais uma vez a correção da fórmula com $\frac{a_0}{2}$ em lugar de a_0 .

A fórmula correta para série de Fourier é então:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (1.11)$$

e a explicação para este fato vem consequente com as idéias que desenvolvemos até agora: Queremos vetores *unitários* para gerar um espaço de funções e os vetores $\text{sen}K, \text{cos}K$ satisfazem esta condição com $K \neq 0$, entretanto quando $K = 0$, $\text{sen}(0) \equiv 0$ e $\text{cos}(0) \equiv 1$.

O vetor $\text{sen}(0) = 0$ e nós o descartamos porque êle estraga qualquer base, tornando-a *l.d.*.

O vetor $\text{cos}(0)$ é um candidato a vetor unitário, mas calculando o seu módulo, temos:

$$\|\text{cos}(0)\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 2 \quad (1.12)$$

como não podemos mais *reformatar* o produto escalar, resta-nos *corrigir* o vetor $\text{cos}(0)$ e definiremos:

$$\text{cos}(0) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (1.13)$$

$$\|\text{cos}(0)\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx = 1. \quad (1.14)$$

Isto daria certo, mas *estragaria* o significado usual de $\text{cos}(0)$ e consequentemente toda a trigonometria... O que se fez, foi, manter $\text{cos}(0) = 1$ com sua definição inalterada mas se corrigiu a_0 :

$$a_0 := \frac{a_0}{2}. \quad (1.15)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (1.16)$$

Vamos corrigir a definição anterior, agora de forma definitiva:

Definição 3 Coeficientes de Fourier II.

$$k \neq 0; a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (1.17)$$

$$k = 0; a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (1.18)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (1.19)$$

sendo a série de Fourier a expressão:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (1.20)$$

Definição 4 Transformada discreta de Fourier.

Chamamos de **transformada discreta de Fourier** a aplicação que associa f à sucessão $\mathcal{F}(f)$ dos coeficientes de Fourier de f . Isto é:

$$\mathcal{F}(f) = \left(\left(\frac{a_0}{2}, b_0 \right), (a_1, b_1), \dots \right)$$

em que obviamente $b_0 = 0$

A afirmação de Fourier em 1822, relativamente às funções periódicas, foi: “uma função periódica qualquer pode ser representada pela série trigonométrica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (1.21)$$

O problema é que não existem *somas infinitas* e portanto a expressão acima implica numa discussão sobre convergência. Em vez de enfrentar o problema de frente, vamos nos beneficiar de séculos de História da Matemática e montar uma teoria que vai nos levar indiretamente a boa quantidade dos resultados existentes a respeito das *Séries de Fourier*. Isto será feito na parte final deste capítulo, de imediato veremos alguns exemplos computacionais que nos mostram que o assunto tem sentido.

Exemplo 2 Nos gráficos, (graf.,1.1) e (graf.,1.2) você pode ver a comparação dos polinômios trigonométricos de f com 5 ou com 10 termos. Em ambos os gráficos você pode ver o polinômio trigonométrico da função identidade no intervalo $[-\pi, \pi]$. O gráfico todo se estende ao longo do intervalo $[-5, 5]$ e podemos ver que o gráfico de $P_5(f)$ se aproxima do gráfico de f apenas no intervalo $[-\pi, \pi]$. Fora deste último intervalo não há nenhuma “aproximação”. Os polinômios trigonométricos são funções periódicas, o segundo gráfico mostra a função periódica de quem graf($(P_{10}(f))$) de fato aproxima: a função dente de serrate, uma função descontínua.

Pedimos que você se fixe nesta última observação, estamos dizendo que a sucessão de funções contínuas $P_n(f)_n$ tem como limite uma função descontínua.

Os gráficos (fig.,1.1) e (fig.,1.2) foram obtidos com o programa (Exemplo 3) rodando no Scilab. Possivelmente rodará também no MatLab com alguma pequena modificação.

Exemplo 3 Programa do SciLab para gráficos de polinômios trigonométricos.

```
// [x,sf5,sf10,ser,0] saída de dados.
function [x,sf5,sf10,ser,0]=serfou(inicio,fim)
    // definicao da funcao identidade
    def('y=f(x)', 'y=x'),
    // matriz de pontos, dominio do grafico
    x=[inicio:0.01:fim];lx=length(x),
    0=[0*x];
    // dominio de integracao
    dom=[-pi:0.01:pi], imagem=(0.01/pi)*[f(dom)],
    a0=0.5*sum(imagem)
    // {funcao dente de serrate}
    ser=[pi*(x/pi - round(x/pi))]
    // a0 , 10 coeficientes do pol trig
    for k=[1:10]
        seno=[sin(k*dom)], coseno=[cos(k*dom)],
        a(k)=coseno*imagem', b(k)=seno*imagem',
    end,
    // pol trig com 5 termos
```

```

Amat = [a(1:5)], Bmat=[b(1:5)]
for n=[1:lx],
    coseno=[cos([1:5]*x(n))], seno=[sin([1:5]*x(n))],
    sf5(n)=a0+coseno*Amat+seno*Bmat,
end,
// transposta
sf5=sf5'
// pol trig com 10 termos, complementando...
Amat = [a([6:10])], Bmat = [b([6:10])]
for n=[1:lx],
    coseno=[cos([6:10]*x(n))], seno=[sin([6:10]*x(n))],
    sf10(n)=sf5(n)+coseno*Amat+seno*Bmat,
end,
// transposta
sf10=sf10'
plot2d1('onn',x',[x;0;sf5]', [0.3,0.5,0.7,0.7,0.8])
end,

```

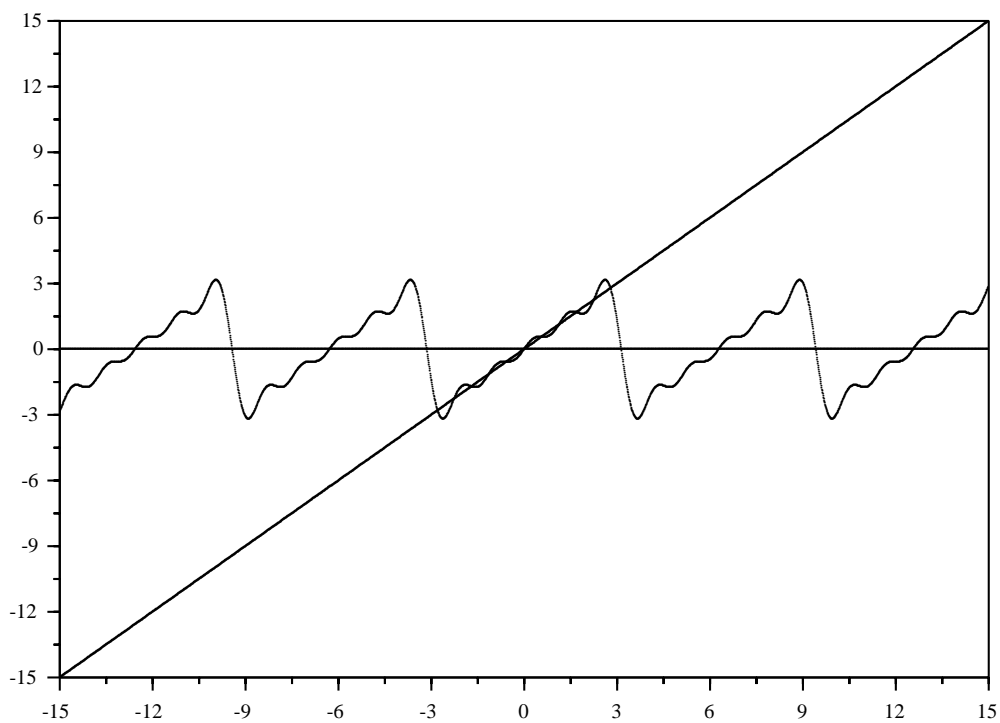


Figura 1.1: polinômio trigonométrico com 5 termos para $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$

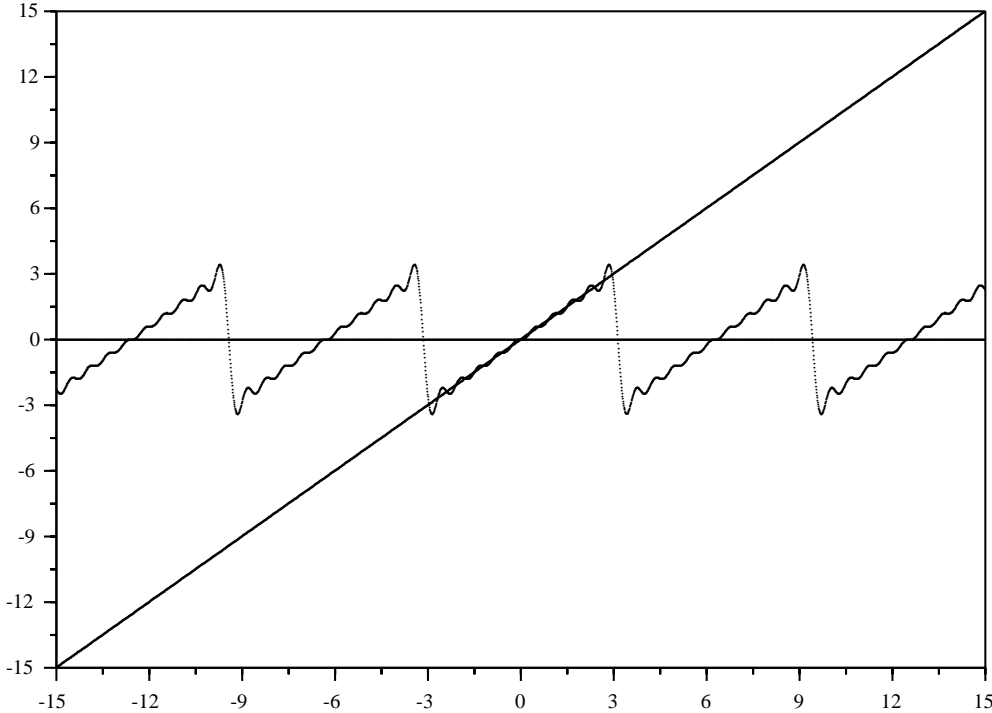


Figura 1.2: polinômio trigonométrico com 10 termos para $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$

Na prática o que temos não é uma série e sim um polinômio trigonométrico:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = P_N(f)(x). \quad (1.22)$$

As somas acima são termos de uma sucessão de funções contínuas que desejamos caracterizar como “convergente” e tendo f como limite.

Observação 1 Espaço de funções gerado por $\{\sin k, \cos k\}$.

Acabamos de construir uma base de vetores ortonormais para o espaço $\mathcal{C}([0, 2\pi])$. É uma base que tem uma “quantidade” não numerável de vetores. Como os vetores $\sin k, \cos k$ são funções contínuas, vemos que $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ tem dimensão infinita, ou como é habitual dizer-se, dimensão infinita. O conceito “dimensão” muda obviamente de sentido nos dois casos: finito, infinito, e não é apenas uma questão de “quantidade” muito grande de vetores na base. Ver conjectura de Cantor. Mas uma função não precisa ser contínua para que lhe possamos calcular os coeficientes de Fourier, veja a fórmula 1.6, nada nos impede de calculá-la com uma função descontínua desde que seja integrável.

Assim parece que a teoria se aplica a um espaço mais amplo que $\mathcal{C}([0, 2\pi])$. Também os vetores gerados pela base ortonormal que construímos produzem sucessões que se “aproximam” de vetores que não se encontram em $\mathcal{C}([0, 2\pi])$, parece assim que estes vetores geram um espaço que contém $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ como seu subespaço próprio. Este espaço se chama $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$, mais um fato para demonstrarmos posteriormente. Esta é a metodologia de construção da Matemática: conjecturas são feitas quando temos um resultado aparentemente verdadeiro. A palavra conjectura é uma etiqueta, indica que temos aparentemente um “teorema” que deve ser demonstrado depois ou, se surgir alguma contradição ao considerá-lo na teoria, ele perde a validade com as consequências dele tiradas.

Como complemento a esta observação vamos enunciar dois teoremas e “sugerir” suas demonstrações. A teoria desenvolvida até aqui é fraca para produzir-lhes uma demonstração, mas a importância prática dos mesmos impõe que eles sejam enunciados. O primeiro teorema afirma que a transformada de Fourier é injetiva, quer dizer, identifica as funções.

Teorema 3 *Injetividade da transformada discreta de Fourier.*

Se $f \neq g$ então os coeficientes de Fourier de f , $\hat{f}(n)$ são diferentes dos coeficientes de Fourier de g , $\hat{g}(n)$ ⁵.

Dem: É equivalente mostrar que $\hat{f} = 0 \iff f = 0$. Se

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

para todo n

q.e.d.

Observação 2 *Funções quase iguais, são iguais*

Infelizmente o teorema acima é falso... Se você trocar o valor de f em um determinado ponto,

$$g(x_0) = A \neq f(x_0); \quad g(x) = f(x) \text{ se } x \neq x_0$$

as duas funções diferentes f, g terão os mesmos coeficientes de Fourier.

É preciso uma teoria de funções mais refinada que afirme que estas duas funções que são quase iguais, são iguais. Ou equivalentes, dizemos.

Veja, com um exemplo, porque precisamos deste refinamento. Um dos usos destas transformadas que estamos estudando neste livro, a de Fourier e posteriormente as wavelets é em comunicação, transmissão de imagens, de sinais, compressão de dados. Um pequeno erro na leitura de um sinal, devido a uma súbita alteração da corrente, por exemplo, não deve influenciar na transmissão (ou na compressão dos dados). Dizemos que f, g acima são iguais e que o ocorrido no ponto x_0 é estatisticamente sem valor. Falamos ainda que as duas funções diferem num conjunto de medida zero, e a integral reflete isto produzindo para f ou para g os mesmos coeficientes de Fourier.

Teorema 4 *Decomposição par/ímpar de funções.*

Toda função f pode ser decomposta numa soma $f = f_p + f_i$, em que f_p é uma função par e f_i é uma função ímpar.

Dem:

f_p é a série de cossenos de f e f_i é a série de senos de f . **q.e.d.**

Observação 3 *A conjectura de Cantor.*

Georg Cantor, enunciou uma conjectura que até hoje ninguém conseguiu provar mas que é aceita como um axioma da Matemática estabelecendo “saltos de cardinalidade”. Esta é a extensão do conceito “quantidade dos elementos de um conjunto”. Se esta quantidade for finita, (pleonasma), a cardinalidade é o que se costuma chamar de número de elementos de um conjunto.

Cardinalidade é uma generalização do conceito quantidade de elementos de um conjunto. Falar na quantidade de elementos de um conjunto só é próprio se este conjunto for finito. Se o conjunto for infinito, perde sentido em falar-se na quantidade dos seus elementos, se diz então sua cardinalidade. Ver a respeito [20, capítulo 1], o nível da discussão é avançado mas sem pre-requisitos.

Vamos lhe sugerir alguns experimentos que podem ser feitos com auxílio do programa *Fourier* e que lhe permitirão uma visão complementar caso você se decida a ler mais alguma coisa a este respeito. Ou brinque um pouco com esta ferramenta: *Fourier* é uma coleção de pequenos programas independentes que foram transformados em sub-rotinas de Fourier e se encontram instalados na biblioteca *Tripol.blb*,

⁵a notação $\hat{f}_n = (a_n, b_n)$ é muito usada para os coeficientes de Fourier.

todos no nosso disco de programas em Pascal. Estes programas podem ser encontrado em, [14]. Veja também [9] onde algumas experiências podem ser feitas com polinômios trigonométricos.

Os exercícios abaixo contém algumas experiências interessantes mas que nem sempre se constituem de métodos seguros para obter resultados. *Sãexemplos de experimentos que se podem fazer para ganhar mais intuição com o uso de Polinômios Trigonométricos, sendo exclusivamente este o objetivo destas experiências aqui.*

O programa Fourier pode resolver computacionalmente todos os exercícios.

Exercício 1 *Experiências com Polinômios Trigonométricos*⁶.

1. Use um programa de cálculo de integrais aproximadamente para verificar que $\text{sen}k$ e $\text{cos}j$ são ortogonais para quaisquer que sejam k e j .
2. Verifique numericamente qual é o módulo dos vetores $\text{sen}k$ e $\text{cos}j$ para vários valores de k e j . Primeiro use o produto escalar definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx. \quad (1.23)$$

e depois inclua o coeficiente $\frac{1}{\pi}$ na integral e volte a calcular os módulos destes vetores. Tente uma demonstração formal dos resultados alcançados.

3. Faça um programa que calcule as projeções de

$$f(x) = \text{sen}(4x + 3) + 3x + 1$$

nas direções dos vetores $\text{sen}k$; $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$. Estes números, como na Geometria Analítica, são coeficientes da decomposição do vetor f relativamente ao conjunto de vetores $\text{sen}k$; $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$.⁷ Faça um gráfico, (talvez com menos coeficientes...).

4. Chame b_k aos coeficientes encontrados na questão anterior. Complete o programa para calcular o vetor $g(x) = \sum_{k=1}^{10} b_k \text{sen}k(x)$ e faça os gráficos de f e g num mesmo sistema de eixos.
5. Faça um programa que calcule as projeções de

$$f(x) = \text{sen}(4x + 3) + 3x + 1$$

nas direções dos vetores $\text{cos}K, \text{sen}K$; $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Chame estes coeficientes de a_k, b_k , respectivamente. Complete o programa para calcular o vetor

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{10} a_k \text{cos}K(x) + b_k \text{sen}K(x)$$

fazendo os gráficos de f e g num mesmo sistema de eixos. Lembre que estabelecemos a notação:

$$\text{sen}K(x) = \text{sen}(kx) \quad \text{cos}K(x) = \text{cos}(kx).$$

Estes coeficientes se chamam coeficientes de Fourier de f .

6. Rode o programa Fourier. Ele lhe permite ver um polinômio trigonométrico cujos coeficientes estão previamente definidos como uma sucessão próprio programa.
7. Defina uma das sucessões Fourier como idênticamente zero e verifique que o resultado é uma função par ou ímpar, dependendo de quem é idênticamente zero.
8. Modifique Fourier para imprimir em papel os coeficientes de Fourier (do Polinômio Trigonétrico). Tente descobrir uma lei de formação e teste o resultado com o programa Fourier.

⁶observe que os exercícios tem como objetivo aumentar sua intuição ou preparar fatos futuros. Se algum exercício lhe parecer óbvio, ele não deve ser feito.

⁷Não esqueça, estamos trabalhando dentro de um espaço de funções que neste momento supomos que seja $C([0, 2\pi])$.

9. Modifique o programa Fourier para que seja calculada a derivada aproximada do Polin. Trig. e para que os dois gráficos sejam simultaneamente desenhados. Analise o resultado, do ponto de vista de variação do coeficiente angular do Pol. Trig. em alguns pontos.
10. Verifique se consegue descobrir uma função que gera um determinado Pol. Trigonométrico analisando os gráficos de P e de P' (do polin. trigon. e de sua derivada). Observe que isto nem sempre será possível e que não se trata de um método geral de trabalho.
11. Faça uma tabela para os coeficientes de Fourier para as seguintes funções, todas definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$:

(a) $f(x) = x^n$; $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$

(b) $f(x) = |x|$

(c) $f(x) = x^2 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = x \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(d) $f(x) = -x^2 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = x \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(e) $f(x) = x^3 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = x \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(f) $f(x) = x^2 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = -x^2 \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(g) $f(x) = x^3 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = -x^3 \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(h) $f(x) = x^2 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = -x \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

(i) $f(x) = -x^2 \Leftarrow -\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = -x \Leftarrow 0 < x \leq \pi$

12. Encontre os coeficientes de Fourier dos sinais abaixo.

(a) $f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$

(b) $f(x) = \frac{3}{2}\chi_{[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]}$

(c) $f(x) = 2\chi_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}$

(d) $f(x) = \frac{5}{2}\chi_{[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]}$

Generalize a experiência com os sinais acima encontrando a série de Fourier, (os coeficientes de Fourier), do sinal $f(x) = \frac{1}{2a}\chi_{[-a, a]}$; $a > 0$

13. compactação exata de dados.⁸

(a) Calcule os coeficientes de Fourier da função $f(x) = x$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, quer dizer que ele se estende por periodicidade para \mathbf{R} a partir da definição neste intervalo. O produto escalar \mathcal{I} é feito com uma integral sobre este intervalo.

(b) Calcule exatamente os coeficientes de Fourier de $f(x) = x$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$.

(c) Conclua que podemos transmitir exatamente um fenômeno descrito por esta função em tempo real mínimo. Observe que este exemplo nada tem o que ver os métodos usados em telecomunicações. Esta compactação excelente é um caso acidental.

(d) Calcule exatamente os coeficientes de Fourier de $f(x) = x$ definida no intervalo $[0, 2\pi]$. Rode o programa Fourier e se convença de que tem que ser diferentes dos coeficientes de Fourier de f no intervalo $[-\pi, \pi]$.⁹

14. funções a suporte compacto: Defina-se suporte de uma função por:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}}$$

(a) Mostre que para qualquer polinômio P , $\text{supp}(P) = \mathbf{R}$. Veja a solução na página 69.

⁸este exercício não deve ser levado muito a sério.

⁹A verdade é outra, aproximar $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$ significa aproximar uma função dente de serra que assume valores negativos e positivos simétricos em torno de um ponto. Aproximar $f(x) = x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ significa aproximar uma outra função dente de serra que é sempre positiva. Esta segunda função nem é par, nem é ímpar, e consequentemente tem componentes tanto na direção dos vetores $\text{sen}K$ como na direção do vetor cos .

(b) Mostre que a função de Heaviside

$$H_0(x) = 0 \iff x \leq 0; \quad H_0(x) = 1 \iff x > 0$$

tem por suporte o conjunto dos números reais positivos.

(c) Verifique que o suporte de $G(x) = H_0(x)H_0(-3-x)$ é o intervalo compacto $[0, 3]$.

(d) Defina $G(x) = H_0(x)H_0(-a-x)$; $a > 0$ usando função característica.

(e) Faça o gráfico da função

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \iff x \in [-1, 0]; \\ f(x) &= 1 - x \iff x \in [0, 1]; \\ f(x) &= 0 \text{ nos outros casos} \end{aligned}$$

e verifique que $g_n(x) = nf(nx)$; $n \in \mathbf{N}$ tem a mesma integral de f . Qual é $\text{supp}(f)$? Qual é $\text{supp}(g_n)$?

(f) A convolução: Verifique que a expressão

$$f * \eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\eta(x-t)dt$$

está definida para toda função contínua em \mathbf{R} se η for a suporte compacto. Mostre que

i. $f * g = g * f$

ii. $f * (g * h) = (f * g) * h$ se as respectivas integrais existirem.

iii. $f * (h + g) = f * h + f * g$ se as respectivas integrais existirem.

iv. Mostre que se f for diferenciável e se $f * g$ existir, então $\frac{d}{dx}(f * g) = \frac{df}{dx} * g$ e portanto se f for diferenciável n vezes continuamente então $f * g$ também o será.

(g) Faça o gráfico e encontre uma equação para a função $f * f$ com

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \iff x \in [-1, 0]; \\ f(x) &= 1 - x \iff x \in [0, 1]; \\ f(x) &= 0 \text{ nos outros casos} \end{aligned}$$

nãtenha preconceitos em tentar entender o que acontece, graficamente... Veja ao final da lista de exercícios, página 27, alguns gráficos de $f * g$.

(h) Mostre que $f(x) = \exp(-1/x^2)$ se anula na origem assim como todas as suas derivadas de qualquer ordem inteira. Encontre uma fórmula implícita para a derivação de f usando um quociente adequado de polinômios, (calcule umas quatro ou cinco derivadas até que a fórmula surja, naturalmente).

(i) Mostre que se $f(x) = \exp(-1/x^2)$ então $h(x) = 0 \iff x < 0$; $h(x) = \exp(-1/x^2) \iff x \geq 0$ é uma função de classe C^∞ que se anula na origem assim como todas as suas derivadas de ordem inteira.

(j) Se h for a função definida no item anterior, mostre que $g(x) = h(x+a)h(x-a)$ é uma função de classe C^∞ e a suporte compacto. Veja este exemplo mostra que existem funções de classe C^∞ , tendo todas as derivadas de ordem inteira, mas que nãã analíticas: nã têm série de Taylor no ponto a , mas sãcontínuas e deriváveis em a e em qualquer vizinhança de a .

15. função a suporte compacto no \mathbf{R}^2 .

(a) Determine o suporte de

$$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}; \quad f(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

(b) Determine o suporte da função

$$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbf{R} ; g(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right)H_0(x)H_0(y)$$

(c) Determine o suporte da função

$$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbf{R} ; h(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right)H_0(-x)H_0(-y)$$

(d) Determine o suporte da função

$$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{r} \mathbf{R} ; r(x, y) = h(x, y)h(-x + 3, -y + 3)$$

(e) Verifique que a função r definida no item anterior é de classe C^∞ em \mathbf{R}^2 mas não é uma função analítica.

16. Encontre o suporte de

$$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathbf{R} ; \mathcal{E}(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{4 - x^2 - y^2}\right)$$

17. Encontre o suporte de

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{R} ; \mathcal{F}(x, y) = \\ & = \begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \leq 0 & \Rightarrow 0 \\ 4 - x^2 - y^2 > 0 & \Rightarrow \exp\left(-\frac{1}{4 - x^2 - y^2}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

18. Construa uma função de classe C^∞ em \mathbf{R}^n que seja a suporte compacto.

19. convolução discreta:

Considere os dois polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_4x^4, q(x) = b_0 + b_1x^1 + \dots + b_5x^5$$

Calcule $P(x) = p(x)q(x)$ e verifique que os coeficientes do novo polinômio satisfazem a equação

$$\sum_{j=0}^9 \left(\sum_i a_i b_{j-i} \right) x^j$$

(a) Conclua que ao produto de polinômios corresponde o produto de convolução dos coeficientes destes polinômios.

(b) coeficientes complexo de Fourier: Podemos definir a forma complexa dos coeficientes de Fourier com a fórmula:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} dx ; n \in \mathbf{Z} ; f(x) = \sum_n c_n e^{inx} ;$$

que tem sentido se a série convergir. Verifique que para reduzidas desta série, entre $-N$ e N se pode concluir que

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

a transformada de Fourier leva produto em produto por convolução.

20. convolução bivariada: Defina $f * g$ por

$$f * g(x, y) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(u, v)g(u - x, v - y)dudv$$

em que uma das funções envolvidas é a suporte compacto. Mostre que as propriedades da convolução listadas anteriormente valem. Sobretudo descreva como fica a derivada.

21. média viciada. Suponha que η seja uma função positiva e a suporte compacto. Mostre que

$$\inf f \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\eta(x)dx \leq \sup f$$

justificando que se defina

$$\text{Valor Médio}_{\eta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\eta(x)dx$$

Escreva uma soma de Riemann para $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\eta(x)dx$ e conclua ela pode ser interpretada como uma média aritmética ponderada de uma amostragem de f .

22. Complete um dos sub-programas Fourier para resolver uma equação diferencial de segunda ordem calculando os coeficientes de Fourier da solução. Ver exemplo em [11, cap. 1]

23. Inclua no programa o gráfico da solução.

24. Inclua no programa o gráfico de $P(D)h$ em que h é solução encontrada.

Observação 4 A convolução

Veja os exemplos gráficos que se encontram à página 27 e seguintes, (fig. 1.3), (fig. 1.5), (fig. 1.6), inclusive os comentários feitos ali sobre a média calculada pela convolução. Eles tem o que ver com a média viciada. É importante compreender o efeito geométrico da convolução e ter uma atitude diferente daquela que se teve na primeira metade do século com respeito a esta operação: ela deve ser, sim, calculada com programas de computador. Absolutamente não tem sentido calcular convoluções com o cálculo formal de integrais. Nunca teremos interesse na expressão “algébrica” de $f * g$, aliás, a expressão “algébrica” da convolução, única que interessa, é sua expressão integral.

1.2.1 Gráficos de convoluções.

Na página 27 e na seguinte você pode encontrar alguns gráficos de $f * g$ em que g é uma função a suporte compacto, positiva, com integral 1. Como g é positiva e tem integral 1, o seu efeito multiplicativo relativamente a outras funções é de *calcular uma média, local, da função*. Este fato pode ser observado no gráfico, corresponde à posição intermediária que o gráfico de $f * g$ assume relativamente ao gráfico de f . Isto é visível nos tres exemplos e você deve tentar identificar este fato.

Na (fig. 1.3) a função f tem por equação:

$$f(x) = \begin{cases} |x| \leq 1 & \Rightarrow -x^2 - 2 \\ |x| > 1 & \Rightarrow 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Na (fig. 1.5) temos $f, f * g$ com

$$f(x) = (x - 2)h(x)\chi_{[-1,1]} + \chi_{[-1,1]} + (x + 2)h(x)\chi_{[-1,1]} \quad (1.25)$$

$$h(x) = 3(4 - x^2)\sin(2x) + 3x \quad (1.26)$$

o gráfico de f , neste caso, se encontra na (fig. 1.4) e g é a mesma função a suporte compacto de integral 1.

Na (fig. 1.6) o gráfico de f é composição com pedaços de senoides. $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x - 2)\sin(x) + \chi_{[-1,1]} + \chi_{[-1,1]}(x + 2) * \sin(x)$

Veremos mais a frente que os polinômios trigonométricos são também uma convolução com uma função chamada *núcleo de Dirichlet* cuja integral é também 1, mas que oscila em volta do zero. Compare os gráficos de $f * g$ desta seção com os gráficos dos polinômios trigonométricos nas páginas 19, 20 e 31. Veja também os gráficos do Núcleo de Dirichlet, página 49 ou na página 50. A oscilação em torno de zero deste “núcleo” faz com a convolução com ele oscile em volta do gráfico da função que é o que acontece com os polinômios trigonométricos.

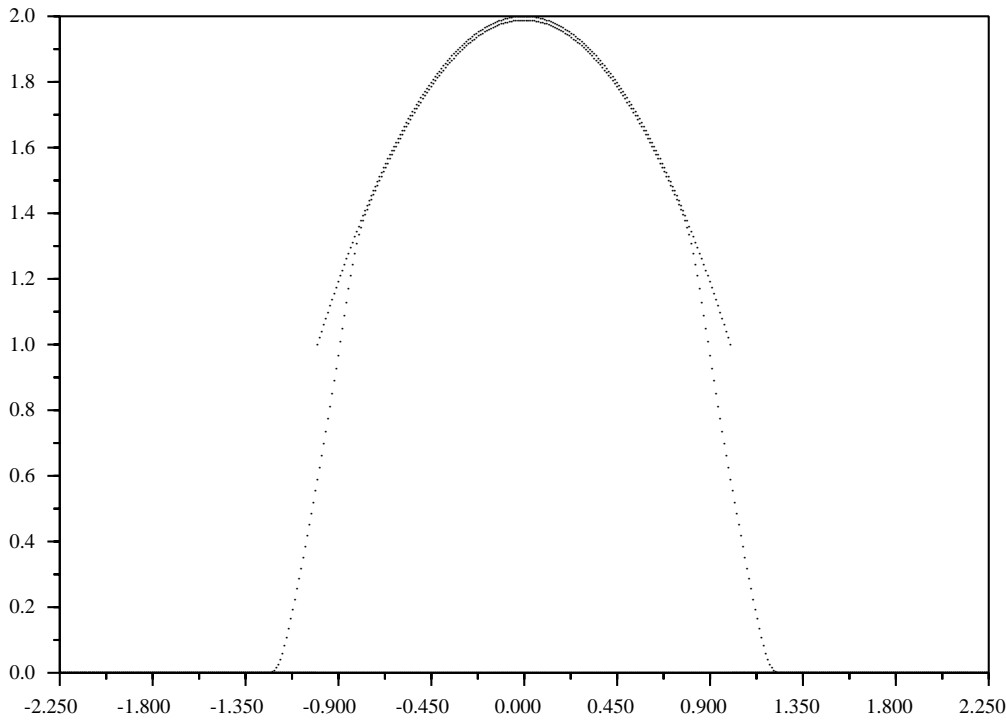


Figura 1.3: Convolução de uma função a suporte compacto com um “segmento” de parábola.

Já dissemos, a convolução é uma operação importante, mas o cálculo formal envolvendo sua definição integral é, em princípio de pouca importância, resguardado o erro que tais afirmações sempre podem conter... Aqui, como em outras aplicações da Matemática, o preconceito contra o cálculo feito usando máquinas tem sido responsável pelo atraso. É absolutamente necessário compreender o que está se passando, antes de usar as máquinas. Calcular uma convolução manualmente, é importante!

Se você não tiver feitos os exercícios sobre convolução, faça-os, agora, mas, use um programa em Pascal ou em **Scilab** para auxiliá-lo. O seguinte código, roda no **Scilab**

```
comment delta = 0.1 produz gr\aficos com baixa precisao.
function y2=con(f,inicio,fim)
    delta = 0.1
    x = [inicio-0.25:delta:fim+0.25], lx = length(x),
    getf('janela.data')
    for k=[1:lx],
        y1(k)=f(x(k)),
        0(k) = 0, a=x(k)
        y2(k)=integrate('impulso(x)*f(a-x)', 'x', -1/4, 1/4),
    end,
    n1=0.6, n2=0.7, n3=0.8
    plot2d1("onn", x', [0, y1, y2], [n1, n2, n3])
function y=f1(x)
```

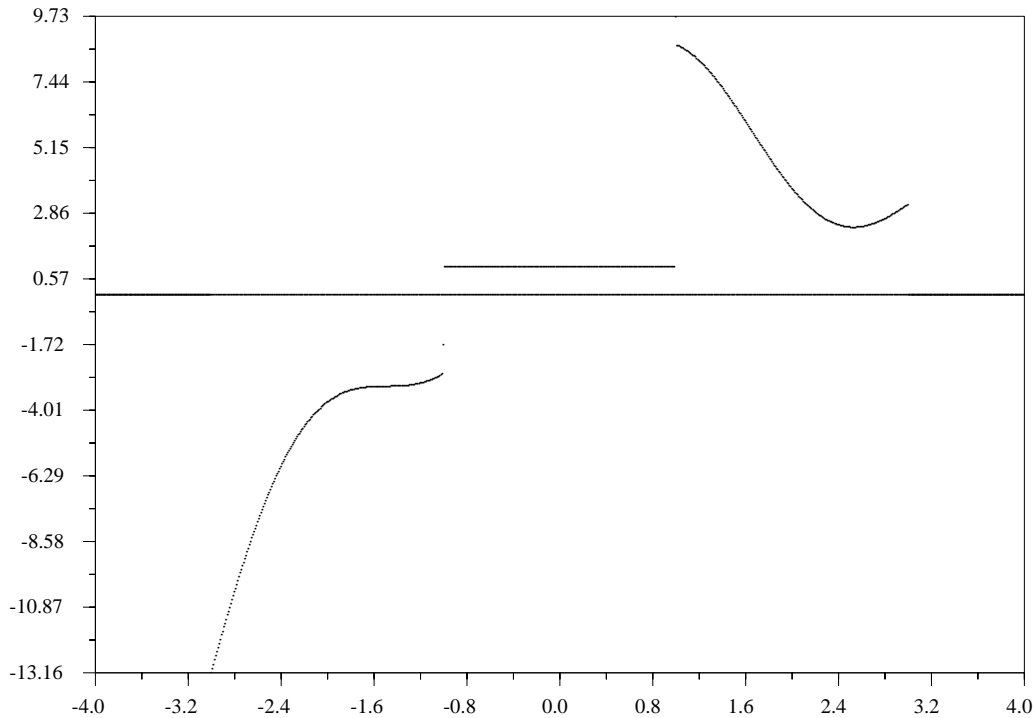


Figura 1.4: $f(x) = (x - 2)h(x)\chi_{[-1,1]} + \chi_{[-1,1]} + (x + 2)h(x)\chi_{[-1,1]}$

```

if and([x>=-1,x<=1]),
    y=1
else y = 0
end,
function y=f2(x)
    y = f1(x)*(2-x^2)
function y =f3(x)
    y = f1(x-2)*sin(x)+f1(x)+f1(x+2)*sin(x)
function y = f4(x)
    y = (4 -x^2) + 3*sin(2*x) + 3*x
function y = f5(x)
    y = f1(x-2)*f4(x)+f1(x)+f1(x+2)*f4(x)

```

Carregue o arquivo `convolucao.data` com o `getf` do **Scilab** e na linha de comandos execute `con(f, inicio, fim)` dando valores para as variáveis `f`, `inicio`, `fim`. A variável `f` deve fazer referência a uma função que **Scilab** reconheça, como `f5`, `f4`, ... definidas em `convolucao.data`. Atribuindo valores menores para a variável `delta`, se podem gráficos com melhor resolução. Com `delta = 0.01` o gráfico da (fig. 1.6) foi feito em 50 min. de processamento num Pentium 200 com 32 Mb de memória RAM rodando em **GnuLinux**, claro. Rodando em **GnuLinux** o tempo de processamento um pouco maior não chega a ser um problema porque enquanto o **Scilab** estiver fazendo este gráfico, você pode usar o computador para fazer outras coisas, inclusive rodando o **Scilab** noutra janela... Os programas escritos para **Scilab** rodam com

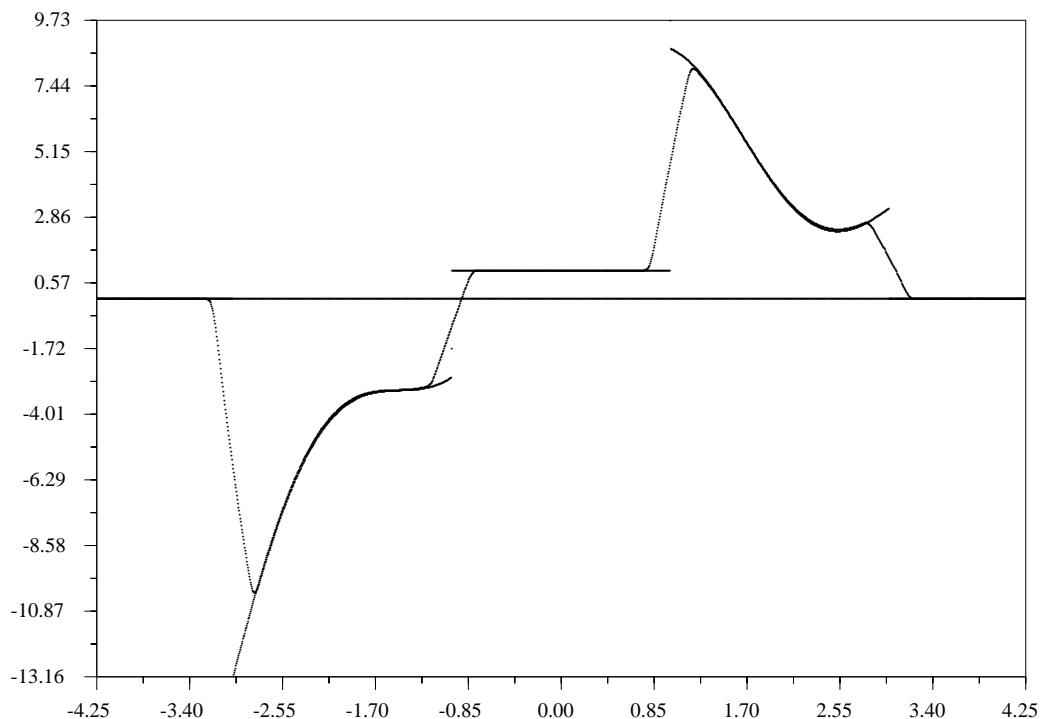


Figura 1.5: gráfico de f e $f * g$. A função f está na (fig. 1.4)

no máximo pequenas modificações em **Matlab** que é um pacote comercial para Algebra Linear. **Scilab** é gratuito.

No **Scilab** ou no **MatLab** e programas similares que estão voltados para *Álgebra Linear aplicada* existe uma função `convol` que é *convolução discreta*, usada para construir filtros de sinais.

1.3 Convergência num espaço vetorial.

Vamos discutir aqui a afirmação de Joseph Fourier, em 1807: “ *uma função qualquer periódica f pode ser escrita como combinação linear das funções $\sin K$, $\cos K$* ”:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx). \quad (1.27)$$

Embora isto seja uma verdade, num sentido que Fourier mal podia imaginar em sua época, em 1873, Paul Du Bois-Reymond construiu um exemplo de função contínua cuja série de Fourier divergia em um determinado ponto, ver [?, vol II, página 224]. Se as séries de Fourier já tinham sido mal recebidas em 1807 pelos acadêmicos franceses, a descoberta de Du Bois-Reymond tornou a questão mais aquecida porque não havia dúvidas sobre a sua real importância, o problema era entender o que significava “convergência” destas séries. Se pode dizer que os matemáticos só conseguiram entender claramente este

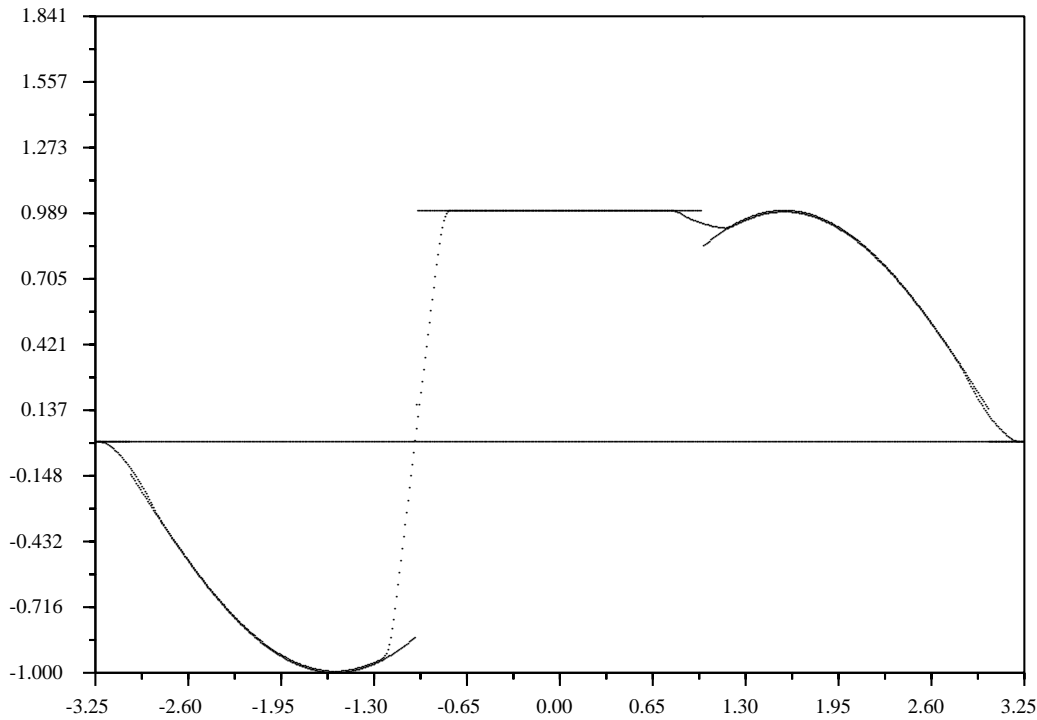


Figura 1.6: Convolução de uma função a suporte compacto com f

tipo de convergência no início do presente século, cerca de 200 anos depois que os primeiros matemáticos iniciaram a calcular com séries trigonométricas, (Euler e alguns dos Bernoulli bem antes de Fourier).

Vamos discutir aqui com maiores detalhes qual o significado da convergência representada por estas séries, entretanto, vejamos logo qual é ideia intuitiva e geométrica que se encontra por traz desta convergência. Análise o gráfico da figura (fig. , 1.7).

Nele você tem os gráficos conjuntos da função identidade $f(x) = x$ e do polinômio trigonométrico $P_n(f)$, para $n = 10$.

Os polinômios trigonométricos descrevem fenômenos oscilatórios como veremos em seguida, então $P_n(f)$ “oscila” em torno de f . É isto que destrói a “convergência” num sentido comum e mais intuitivo e que foi contestado no exemplo de Du Bois-Reymond, entretanto do ponto de vista da *energia* contida em f , ou mais exatamente no fenômeno modelado por f , a aproximação é excelente. A *energia* está representada pela integral de f e agora sim: a integral de $P_n(f)$ se aproxima muito da integral de f no intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$\int_0^{2\pi} P_n(f)(t)dt \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(x)dx \quad (1.28)$$

Polinômios trigonométricos são aproximação de funções periódicas ou então de uma função, mas apenas sobre um intervalo em que ela é considerada como restrição de um função periódica, mas do ponto de vista da *quantidade de fenômeno*, ou ainda, a integral de f , no intervalo $[-\pi, \pi]$, é bem aproximada pela integral de $P_n(f)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

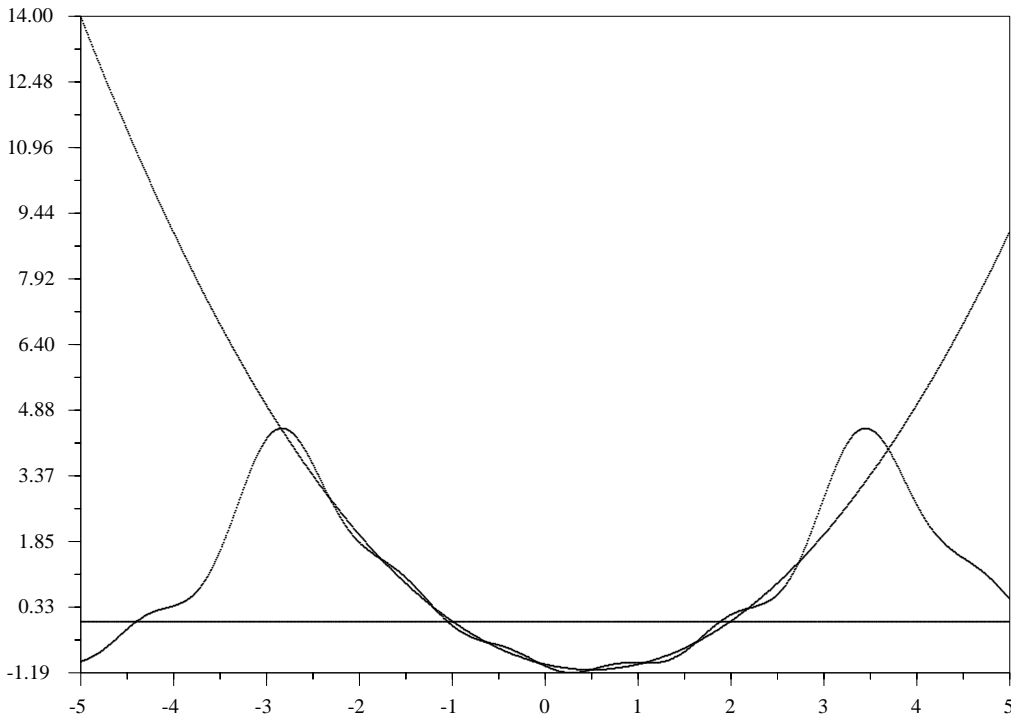


Figura 1.7: gráfico da parábola $x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$ aproximada por um polinômio trigonométrico, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

É preciso abrir uma ressalva: não estamos apresentando polinômios trigonométricos como um *método para calcular integrais aproximadamente*.

As séries de Fourier nos mostraram de modo natural que existem *séries*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (1.29)$$

como não existem somas infinitas temos pela frente um problema de convergência que nos ocupará no restante do presente capítulo.

1.4 Convergência em espaços de funções.

A convergência de sucessões e séries numéricas é relativamente simples, mas quando passamos as séries de funções ela se multiplica em aspectos. Em 1873 Du Bois-Reymond construiu uma função contínua cuja série de Fourier deixava de convergir num ponto do intervalo $[0, 2\pi]$. Numa comparação simples, a sucessão $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}}$ não é convergente se o “*espaço de trabalho*” for o intervalo aberto $(0, 1)$, exatamente por se “*tirou*” do espaço o ponto de convergência.

Este exemplo parece artificial por causa da expressão, “*se tirou do espaço o ponto de convergência*”. O estranho reside no fato de que conhecemos o ponto de convergência e o tiramos. Mas o que ocorre

com as séries de Fourier é parecido. Um dos exemplos numéricos que estudamos no capítulo anterior, ver os gráficos (fig. 1.1), (fig. 1.2), na páginas 19 e 20, temos uma sucessão de polinômios trigonométricos convergindo, logo uma sucessão de funções contínuas, convergindo para a função “dente de serra” que é uma função descontínua. Se passa o mesmo que descrevemos com o caso da sucessão numérica $(\frac{1}{n})_{n \geq 0}$, uma sucessão de pontos do intervalo *aberto* $(0, 1)$ convergindo para o ponto $0 \notin (0, 1)$. Esta é a razão pela qual $(0, 1)$ não é um intervalo fechado: os conjuntos fechados tem todos os seus *pontos de acumulação*.

Veremos que o espaço vetorial $\mathcal{C}([a, b])$ não será um espaço vetorial (*topológico*) fechado se considerarmos a métrica que mede a energia:

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt} \quad (1.30)$$

o que ainda significa que podemos ter uma sucessão de funções contínuas convergindo para uma função descontínua, do ponto de vista da energia. Os polinômios trigonométricos que já apresentamos como exemplos mostram isto.

Os conceitos *fechado*, *aberto* são conceitos *topológicos*, quer dizer, dependem de uma determinada topologia que é um tipo de estrutura. Dependendo da topologia, $\mathcal{C}([a, b])$ pode ser aberto ou fechado. Uma forma fraca de definir *topologia* consiste em definir o método de convergência das sucessões, é fraco no sentido de que descreve apenas um aspecto, a *convergência* de sucessões¹⁰,

Se define fortemente uma topologia quando se define uma norma num espaço vetorial, porque as normas definem as bolas abertas do espaço e estas definem todos os abertos¹¹. Como o produto escalar induz uma norma no espaço, definimos em $\mathcal{C}([a, b])$ uma norma, e o que estamos vendo aqui é que uma situação pelo menos estranha começa a surgir: parece que existem sucessões convergentes para objetos externos ao espaço $\mathcal{C}([a, b])$. Quer dizer que haveria pontos de acumulação de $\mathcal{C}([a, b])$ representados por funções não contínuas.

Quando isto acontece, *fecha-se* o espaço vetorial, definindo-se assim um espaço vetorial *maior*, um super-espaço, em que a normalidade fica restaurada: as sucessões de Cauchy ficam sendo sucessões convergentes.

Esta teoria em sua ampla generalidade é muito difícil e extensa, o livro de Zygmund, [23], tem cerca de 1000 páginas... o que vamos fazer é um atalho honroso para nos sairmos dessa sem escrever um livro de 1000 páginas. Isto não quer dizer que um livro, como de Zygmund, ficou obsoleto, lá se encontra todo o registro feito, é uma fonte histórica, aqui um atalho pedagógico para atingir um objetivo específico.

1.5 A convergência das séries de Fourier.

Observação 5 *A método para descrever a teoria*

O “programa” que nos vai conduzir à convergência das Séries de Fourier consiste dos seguintes passos:

1. A convergência em módulo nos sugere¹² que

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} k(x) + b_k \operatorname{cos} k(x)$$

converge dependendo dos coeficientes $\{a_k, b_k\}$ porque, pela desigualdade triangular temos

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \operatorname{cos}(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| + |b_k|$$

e as funções trigonométricas são menores que 1 em módulo;

¹⁰é bem conhecido o fato de que continuidade sequencial não equivale a continuidade: “continuidade” \Rightarrow “continuidade sequencial”, mas a recíproca é falsa.

¹¹é a definição de todos os abertos do espaço, ou de uma coleção fundamental deles, que representa a forma mais geral de definição de uma topologia.

¹²é o lema de Abel que se encontra por traz da convergência em módulo...

2. **As séries de Fourier** associam sucessões de funções definidas no intervalo $[0, 2\pi]$. Esta linguagem é pleonástica uma vez que sucessões de funções, mas é a linguagem que todos usam. O próximo item do “programa justifica o uso da linguagem, precisamos manter uma distinção entre as funções e as sucessões que elas produzem pelo método de Fourier;
3. **Estabeleceremos uma associação** entre um espaço de sucessões $\mathcal{S}(\mathbf{N})$ e um espaço de funções $\mathcal{F}([0, 2\pi])$.
4. **Finalmente, fecharemos esta associação** mencionada acima caracterizando uma identificação algébrica entre os espaços de sucessões de funções, de modo que seja sempre verdadeiro:

$$(a_k, b_k) \in \mathcal{S}(\mathbf{N}) \iff f \in \mathcal{F}([0, 2\pi]) \quad (1.31)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (1.32)$$

Esta associação será de natureza algébrica, mostraremos a existência de um isomorfismo algébrico entre os dois espaços, e topológica, provaremos que a convergência entre as duas formas de representação coincide;

é este o nosso plano, ele é uma parte pequena da grande massa de resultados acumulada pela Humanidade desde o início do século 17. É uma parte pequena mas significativa para muito do que se aplica hoje ao usarem-se as séries de Fourier, ou as wavelets, as sucessoras dos senos e cosenos que estudaremos na segunda parte deste livro. O lema de Abel é parte encerrada deste plano¹³, começaremos direto dos itens 2 e 3.

Embora já o tenhamos dito, é bom lembrar que “série de Fourier” é “uma transformada”, associa uma sucessão de coeficientes a uma função cuja integral pode ser calculada no intervalo $[0, 2\pi]$ ou em outro intervalo qualquer de amplitude 2π , estamos nos referindo a relação explicitada na equação (eq. 1.32). Veremos ao final, num bloco de exercícios, que este intervalo pode ser qualquer intervalo fechado.

Portanto nos encontramos numa situação muito especial, não se trata apenas de calcular coeficientes de Fourier de uma certa função, mas de estabelecer uma relação entre espaços de sucessões de funções.

Já vimos que o nosso ponto de partida, sendo o espaço $\mathcal{C}([0, 2\pi])$, ele logo fica explodido porque, tanto havia elementos fora de sua fronteira para os quais podíamos calcular coeficientes de Fourier, como a convergência das séries pode se dar para funções não contínuas. Os exemplos gráficos que se podem obter com o programa *Fourier* indicam que alguma aproximação se dá para funções descontínuas pela sua série de Fourier, como a função dente de serrate. Isto nos levou a mencionar a existência de um espaço que chamamos $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ contendo $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ como sub-espaço próprio, uma vez que podemos calcular o produto escalar

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

para funções não contínuas e portanto seus módulos. A definição formal¹⁴ deste espaço é:

Definição 5 $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ é o conjunto das funções f definidas no intervalo $[0, 2\pi]$ com extensão periódica a \mathbf{R} tal que

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

este número¹⁵ é $\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$, o módulo de f ao quadrado, copiado do produto escalar usual de \mathbf{R}^n e adaptado aos espaços de funções.

Toda função contínua e 2π -periódica satisfaz a esta definição, portanto é um teorema imediato que

Teorema 5 $\mathcal{C}_P([0, 2\pi]) \subset \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$

em que $\mathcal{C}_P([0, 2\pi])$ designa o conjunto das funções contínuas e 2π -periódicas definidas em \mathbf{R} .

¹³se você não o conhece, procure-o num bom livro de Cálculo na seção sobre convergência de série de potências, tente associar as séries de Fourier com esse tipo de séries. . .

¹⁴ Há um erro na definição que não cabe discutir aqui, é a questão das funções quase iguais de que já falamos anteriormente

¹⁵O símbolo “ ∞ ” depois da integral é uma forma abreviada de dizer “é um número”.

Observação 6 *Espaços diferentes*

Para abreviar a notação faremos menção apenas ao conjunto $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ como sendo o conjunto das funções periódicas, mas aí se encontra um problema sutil que iremos abordar sob forma de exercícios. Igual observação deveria ser feita relativamente ao espaço $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$. Mas deve ficar claro que $\mathcal{C}_P([0, 2\pi]) \subset \mathcal{C}([0, 2\pi])$, o primeiro espaço pode ser identificado a um sub-conjunto do segundo formada das funções que satisfaçam à condição $f(0) = f(2\pi)$.

 $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ é um espaço vetorial.

Para pelo menos ficar coerente com a construção que fizemos inicialmente em que estendemos o conceito de produto escalar para $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ porque era um espaço o vetorial, teremos que verificar se o novo espaço é também vetorial. Liminarmente falando, devemos verificar se, dados dois vetores f, g , o espaço também contém a soma e o produto destes vetores por escalares quaisquer.

No nosso caso isto se traduz em verificar se

$$f + g \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$$

a partir da hipótese de que

$$f, g \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$$

ou, equivalentemente, se

$$\|f\|_2, \|g\|_2 < \infty \Rightarrow \begin{cases} \|f + g\|_2 < \infty \\ \|\lambda f\| < \infty; \lambda \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (1.33)$$

Vamos ver que as generalizações nos ajudam a ver mais longe. Por definição

$$\|f + g\|_2^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) + g(x))^2 dx > 0 \quad (1.34)$$

se for finito. As implicações abaixo são tipo *equivalência*, valem nos dois sentidos, e vão levar a conclusões que $\|f + g\|_2 < \infty$ se ambas as funções f, g pertencerem a $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$.

Consideremos duas funções $f, g \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$

$$\|f + \alpha g\|_2^2 = \langle f + \alpha g, f + \alpha g \rangle = \quad (1.35)$$

$$= \langle f, f \rangle + 2\alpha \langle f, g \rangle + \alpha^2 \langle g, g \rangle \quad (1.36)$$

pela propriedade de bilinearidade do produto escalar “ \langle, \rangle ”. Agora podemos ver uma expressão segundo grau em α que sendo positiva implica em que o seu discriminante seja *menor ou igual a zero*, logo

$$4 \langle f, g \rangle^2 - 4 \langle g, g \rangle \langle f, f \rangle \leq 0 \quad (1.37)$$

donde se conclue que

$$\langle f, g \rangle^2 \leq \langle g, g \rangle \langle f, f \rangle = \|g\|_2^2 \|f\|_2^2 \quad (1.38)$$

$$\langle f, g \rangle \leq \sqrt{\|g\|_2^2 \|f\|_2^2} = \|g\|_2 \|f\|_2 \quad (1.39)$$

ou ainda que:

Teorema 6 *Desigualdade de Cauchy-Schwarz.*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|g\|_2 \|f\|_2$$

Esta desigualdade posta em termos das integrais que definem \langle, \rangle se escreve ainda

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x)^2 dx} = \\ &= \sqrt{\langle g, g \rangle} \sqrt{\langle f, f \rangle} \end{aligned}$$

Como consequência da *desigualdade de Cauchy-Schwarz* podemos fazer os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \leq \\ &\leq \langle f, f \rangle + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \langle g, g \rangle = \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2; \end{aligned}$$

logo

$$\|f + g\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2. \quad (1.40)$$

Como os dois termos na última desigualdade são positivos, (e finitos, que pleonasmo!), podemos tirar a raiz quadrada da desigualdade e assim demonstramos:

Teorema 7 *Desigualdade triangular*

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

que recebe este nome porque no plano, se $\|f\|$, $\|g\|$ forem os lados de um triângulo, a soma dos comprimentos destes lados é maior ou igual ao comprimento do terceiro lado $\|f + g\|$.

A desigualdade triangular responde a nossa questão sobre o fechamento de $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ relativamente a soma:

$$\|f\|_2, \|g\|_2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \|f + g\|_2 < \infty \quad (1.41)$$

Portanto a hipótese de que $f, g \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ leva a que $f + g \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ como queríamos demonstrar.

A homogeneidade:

$$\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2, \quad (1.42)$$

é um exercício simples que deixamos para o leitor. Estes cálculos mostram:

Lema 1 *A fórmula*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) + g(x))^2 dx};$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$

e mostramos assim que

Teorema 8 $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ é um espaço vetorial.

Como o quadrado de toda função contínua é uma função contínua, então temos o

Teorema 9 $\mathcal{C}([0, 2\pi]) \subset \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$

Concluindo, mostramos que $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ é um espaço vetorial que contém $\mathcal{C}([0, 2\pi])$, e como bi-produto mostramos duas desigualdades importantes bem conhecidas para enuplas de números e que agora se verificaram válidas para funções de quadrado integrável, os elementos do espaço $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$.

Observe que o espaço ser *normado* não garante a convergência das sucessões. O conjunto \mathbf{Q} dos números racionais é um espaço vetorial normado...e incompleto. O que fizemos, comparando, foi construir um conjunto que contém $\mathcal{C}([0, 2\pi])$, mas não sabemos ainda se este novo conjunto é completo. É este o nosso próximo teorema:

Teorema 10 *Completitude de $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$.*

O espaço vetorial $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ com a norma $\|\cdot\|_2$ induzida pelo produto escalar $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ é completo.

Dem:

Para produzir uma ferramenta que nos permita a demonstração vamos imergir $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ num espaço *maior* $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ usando a associação:

$$\mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \ni f \mapsto \tilde{f}$$

em que \tilde{f} é a única¹⁶ função de $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ que coincide com f sendo identicamente nula fora de $[0, 2\pi]$.

Este *artifício* torna legal a expressão

$$f * \eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\eta(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\eta(x-t)dt$$

e nós nos permitiremos de escrever a primeira integral, ainda que ilegal, com a declaração implícita de que deve ser entendida como sendo a segunda...em outras palavras, não faremos nenhuma distinção entre f e \tilde{f} .

Vamos adotar a hipótese de que η seja um núcleo:

Definição 6 *núcleo*.

Chamaremos de núcleo a toda função positiva, integrável, a suporte compacto cuja integral seja 1.

consequentemente todas as convoluções da forma $f * \eta$ estarão definidas. Como você verá, precisaremos de alguma regularidade nos núcleos, vamos apenas supor que são contínuos.

- calcular os erros entre $f_n, \eta * f_n$.

$$\begin{aligned} \|\eta * f - f\|_2^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\eta * f(x) - f(x)|^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)f(x-t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)f(x)dt \right|^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)(f(x-t)dt - f(x)dt) \right|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)|f(x-t)dt - f(x)|dt \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta(t)|f(x-t)dt - f(x)|dt \right)^2 dx \leq \\ &= \frac{\eta_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x-t)dt - f(x)|dt \right)^2 dx = E_1 ; \end{aligned}$$

sendo $\eta_0 = \max(\eta)$, (estamos usando a continuidade do núcleo).

Lema 2 *Desigualdade de Jensen*.

Se ϕ for uma função convexa e X seja um espaço de probabilidades então

$$\phi\left(\int_X f dx\right) \leq \int_X \phi \circ f dx$$

Dem:

Não faremos uma demonstração, ver [15, capítulo 3, pag 63], entretanto para o uso imediato basta-nos uma compreensão seu significado. A desigualdade de Jensen generaliza a ideia geométrica que nas funções convexas as cordas de seus gráficos ficam “dentro” do hipergráfico. A necessidade de que X seja um espaço de probabilidade é para garantir que a generalização da expressão $sA + tB$; $s + t = 1$, $s, t \geq 0$ que se costuma chamar de uma “combinação linear convexa”. Se A, B forem os extremos de um segmento de reta, $sA + tB$ é um ponto interior do mesmo segmento, ou um dos extremos se $s = 0$ ou $t = 0$.

Finalmente para obter um “espaço de probabilidade” basta dividir a integral pela medida do “espaço de integração”, isto é, a desigualdade de Jensen se aplica a

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi \circ f(x)dx$$

em que f é uma função integrável a Riemann e ϕ uma função convexa. **q.e.d.**

Com auxílio da desigualdade de Jensen podemos continuar a cadeia de desigualdades começada acima, usando a função quadrática como ϕ , a função convexa, e dividindo pela medida do intervalo de integração $\frac{1}{2\epsilon}$, para ter um espaço de probabilidades, mas multiplicando a desigualdade por 2ϵ , temos:

$$E_1 = \frac{\eta_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x-t)dt - f(x)|dt \right)^2 dx \leq \quad (1.43)$$

$$\leq \frac{2\epsilon\eta_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x-t)dt - f(x)|^2 dt dx = E_2; \quad (1.44)$$

¹⁶esta maneira de falar está errada, não vamos entrar neste detalhe, apenas queremos adverti-lo do fato, os elementos de $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ são classes de equivalência, como ocorre com os números racionais ou reais...

Se alterarmos a ordem das integrais teremos internamente uma integral em “ x ” que corresponderá a uma diferença entre as t -translatadas de f e nós poderemos continuar com desigualdades. Quem nos permite esta alteração na ordem das integrais é:

Lema 3 Teorema de Fubini.

Se $\int_X \int_Y f(x, y) dx dy$ existir e as integrais “parciais” existirem então

$$\int_X \int_Y f(x, y) dx dy = \int_Y \int_X f(x, y) dy dx$$

Ver uma demonstração em [15, capítulo 8]. Com auxílio do Teorema de Fubini, uma vez que ambas as integrais parciais existem assim como a integral dupla, podemos escrever agora:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{2\epsilon\eta_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x-t) - f(x)|^2 dt dx = \\ &= \frac{2\epsilon\eta_0}{\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|^2 dx dt \\ &= \frac{2\epsilon\eta_0}{\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_t(x) - f(x)|^2 dx \right) dt \\ &= \frac{2\epsilon\eta_0}{\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tau_t(f)(x) - f(x)|^2 dx \right) dt = E_3; \end{aligned}$$

usamos a notação τ para representar a imagem da função translação aplicada a f , o único objetivo é chamar atenção para o fato. Já observamos antes que a as integrais de uma função ou de alguma translação sua se assemelham. Para as integrais de Riemann sobre \mathbf{R} vale a igualdade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_t(f)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

porque a integral de Riemann é invariante por translação assim como a integral relativamente a medida de Lebesgue que é apenas uma completação da integral de Riemann. Isto pode ser visto num contexto um pouco mais geral, vale a pena. Podemos interpretar o parâmetro t com que feita a translação como uma variável de uma função linear:

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) \quad (1.45)$$

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto \tau_t(f) = f_t \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}), \quad (1.46)$$

em que f é a “constante” que define a a função. Vejamos que esta função linear é contínua:

Lema 4 Continuidade da translação.

A translação é uniformemente contínua de \mathbf{R} em $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$.

Dem.

A translação é um operador linear, verificar a sua continuidade se reduz a verificar sua continuidade na origem, é isto que a torna uniformemente contínua, em espaços vetoriais normados as funções lineares tem uma constante de Lipschitz que se calcula na origem:

Lema 5 Constante de Lipschitz para funções lineares.

T é um operador linear contínuo do espaço vetorial normado \mathcal{E} se, e somente se,

$$\|T(x)\| \leq K\|x\| \iff K = \sup_{x \in B(0,1)} \|T(x)\| \iff \|T(x-y)\| \leq K\|x-y\|$$

em que $B(0,1)$ é a bola unitária de \mathcal{E}

Pelo lema temos que calcular a constante de Lipschitz, usando a notação adequada ao nosso caso:

$$K = \sup_{f \in B(0,1)} \|f_t\| = \|f\|$$

porque a integral de Riemann é invariante por translação. **q.e.d.** Portanto a translação é uma isometria. Isto ainda quer dizer

$$\|f_t - f\|_2 \leq 2\|f\|_2$$

como pior hipótese, que nos serve inteiramente, podemos retornar à sequência de desigualdades:

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{2\epsilon\eta_0}{\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tau_t f(x) - f(x)|^2 dx \right) dt \leq \\ &\leq \frac{2\epsilon\eta_0}{\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} 2\|f\|_2^2 dt \\ &= \frac{4\epsilon^2\eta_0}{\pi} \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

mostramos assim que associado a um núcleo de pequeno suporte existe uma função contínua $\frac{4\epsilon^2\eta_0}{\pi} \|f\|_2^2$ próximo de f , no sentido da norma de $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$.

Observação 7 A importância das funções contínuas.

O Cálculo não consegue transmitir a importância teórica das funções contínuas. Uma função “integrável”, quer dizer, $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, pode ser interpretada na prática, como um resultado de uma medição e que pode ter outros valores se outra medição for efetuada devido aos erros do processo de medição. Entretanto, se a medição for válida, a integral nos dois casos difere de quase nada. É esta uma forma de entender que $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ é um espaço de classes de equivalências, como já dissemos. Agora mostramos que para todos os elementos de uma destas classes podemos encontrar uma função contínua arbitrariamente próxima de qualquer elemento.

A vantagem qualitativa deste fato é que as funções contínuas tem um valor bem definido em cada ponto. Se f for contínua, podemos falar de $f(a)$, mas se f for integrável $f(a)$ é indefinido, varia de medição para medição, por exemplo.

- Vamos agora tomar uma sucessãe Cauchy, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ em $\mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \supset (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, quer dizer que

$$\forall N \in \mathbf{N} ; n, m > N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{N}$$

e construir um limite pontual para a mesma. Vamos associar a esta sucessãe de Cauchy dada, a sucessãe $\eta * f_n$ o que nos leva a dizer que temos uma sucessãe de Cauchy de funções contínuas, arbitrariamente próxima da sucessãe de funções integráveis e, como são funções contínuas, podemos falar da função f que é limite ponto a ponto de $\eta * f_n$. Vamos chamar este limite de *limite pontual*

- O próximo passo consiste em verificar se o *limite pontual* é o limite de acordo com a norma do $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$. Um cálculo semelhante ao que fizemos acima mostra que sim:

$$\|\eta * f_n - f\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\eta * f_n(x) - f(x)|^2 dx = \quad (1.47)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \eta * f_n(x) - \int_{\epsilon}^{\epsilon} \eta(t)f(x)dt \right|^2 dx = \quad (1.48)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta(t)f_n(x-t)dt - \int_{\epsilon}^{\epsilon} \eta(t)f(x)dt \right|^2 dx = \quad (1.49)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta(t)(f_n(x-t) - f(x))dt \right|^2 dx = \quad (1.50)$$

$$(1.51)$$

e a última integral tende a zero, com ϵ pela continuidade da translação.

Mostramos assim que para toda sucessãe de Cauchy de \mathcal{L}^2 existe um limite pontual que é também o limite segundo a norma de \mathcal{L}^2 e portanto não pode ter sua integral diferendo muito das integrais dos elementos da sucessãe de Cauchy o que significa que $f \in \mathcal{L}^2$ como queríamos demonstrar. **q.e.d.**

Observação 8 Um espaço vetorial normado completo se designa resumidamente por espaço de Banach e demonstramos assim que $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ é um espaço de Banach. Quando a norma de um espaço de Banach se originar de um produto escalar, se chama um tal espaço o de espaço de Hilbert. Assim $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ é também um espaço de Hilbert.

A demonstração do último teorema lançou mão de vários teoremas que tem hierarquia bem superior a de lemas, como o Teorema de Fubini, a desigualdade de Jensen, a caracterização da continuidade das funções lineares, e a invariância por translação da integral de Riemann e da medida de Lebesgue.

Mas a demonstração deste teorema prova um outro resultado que se encontra implicitamente usado mas que é difícil de ser explicitado:

Teorema 11 densidade do conjunto das funções contínuas. As funções descontínuas e integráveis são limites de sucessões de funções contínuas.

Uma outra forma de enunciar este teorema, no presente contexto, é:

Teorema 12 $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ é um subconjunto denso do espaço vetorial normado $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$.

O conjunto $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ é denso em $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$, como os números racionais na reta.

O método usado foi o de “regularização por convolução” que é um outro resultado contido na demonstração:

Teorema 13 Regularização por convolução. $\eta * f$ tem, pelo menos, a mesma classe de regularidade de η .

quer dizer que se η for diferenciável, $\eta * f$ também o é. Os dois últimos resultados tem uma consequência fortíssima: próximo de qualquer função descontínua, mas integrável, se encontram funções de alta classe de diferenciabilidade. A construção de uma tal função se faz com $\eta * f$ em que η é um núcleo com a classe de diferenciabilidade que se desejar.

A imersã

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2([0, 2\pi]) &\hookrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) ; \\ \mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \ni f &\mapsto \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) ;\end{aligned}$$

permitiu o uso da convolução, é, portanto, uma técnica de demonstração.

Os teoremas que acabamos de ver fazem uso intenso de partes significativas da análise funcional elementar que é difícil encontrar todas num único livro em forma introdutória. Há detalhes em que não entraremos e aqui os vamos apenas mencionar. Em [15, capítulos 1 a 9] esta teoria se encontra desenvolvida em grande detalhe, entretanto o mé todo é de uma grande generalidade. Se quisermos resultados para funções reais, o mé todo da regularização por convolução é o adequado.

Observação 9 *Um exemplo de funções equivalentes.*

Apenas para mostrar um aspecto da relação de equivalência considere duas funções que diferem entre si de um único ponto:

$$f(x) = x^2 \quad \Leftarrow \quad x \neq 0 ; f(0) = 1 ;$$

é diferente de $g(x) = x^2$, entretanto,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx = \|f - g\|_2^2 = 0.$$

Formalmente isto é um grave problema: dois vetores diferentes e cuja distância é zero. Precisamos que vetores nestas circunstâncias sejam iguais, do contrário perderemos a unicidade nas soluções das equações o que implica em ambiguidades inaceitáveis.

A solução formal para problemas deste tipo é a introdução de uma relação de equivalência que torne tais vetores idênticos.

O mé todo de Lebesgue, do início do século resolveu este problema e [15, capítulos 1,4] descreve esta teoria passando pela construção da teoria da medida onde o problema mencionado acima de duas funções que diferem num ponto é ampliado: há funções que diferem sobre um conjunto de medida zero. Para isto é preciso definir medida o que conduziu Lebesgue a criar a classe dos conjuntos mesuráveis.

O lema de Riemann-Lebesgue.

Vamos mostrar agora um passo intermediário importante da nossa teoria. Já vimos que *uma condição necessária, mas não suficiente* para que uma série seja convergente, é que seu termo geral tenha limite zero. O item 1 do nosso programa, ver (obs. 5), página 33, exige que os coeficientes de Fourier tenham limite zero, é este o teorema que precisamos enunciar:

Teorema 14 Lema de Riemann-Lebesgue. Os coeficientes de Fourier de uma função $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ tendem a zero.

Dem:

Seja uma função positiva $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ e consideremos

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx$$

Já vimos que a função $\text{sen}K$ se acelera de modo que o intervalo $[0, 2\pi]$ fica sub-divido em k sub-intervalos de mesma medida em cada um dos quais se tem uma onda completa de $\text{sen}K$, vamos considerar isto para subdividir a integral acima:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen}(kx) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) \text{sen}(kx) dx$$

em que os números a_j são termos da progressão de razão $\frac{2\pi}{k}$ que dividem o intervalo em comprimentos de onda de $\text{sen}K$. Cada um desses sub-intervalos tem um ponto médio que vamos designar por \underline{a}_j onde $\text{sen}K$ troca de sinal de modo que a soma de integrais acima se pode escrever como

$$b_k = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\int_{a_j}^{a_j} f(x) \text{sen}(kx) dx + \int_{\underline{a}_j}^{a_{j+1}} f(x) \text{sen}(kx) dx \right)$$

em que na segunda integral de cada termo fica a parte negativa de $\text{sen}K$. Agora observemos que

$$\begin{aligned} \frac{k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{k}} \text{sen}(kx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx = 2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{k}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{k}} \text{sen}(kx) dx &= \frac{k}{\pi} \int_{a_j}^{a_j} \text{sen}(kx) dx = 2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{k}{\pi} \int_{a_j}^{a_j} \text{sen}(kx) dx &= 2 = -\frac{k}{\pi} \int_{\underline{a}_j}^{a_{j+1}} \text{sen}(kx) dx \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{a_j} \text{sen}(kx) dx &= \frac{2}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_{\underline{a}_j}^{a_{j+1}} \text{sen}(kx) dx \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{k}{2\pi} \int_{a_j}^{a_j} \text{sen}(kx) dx &= 1 = -\frac{k}{2\pi} \int_{\underline{a}_j}^{a_{j+1}} \text{sen}(kx) dx ; \end{aligned}$$

o valor em módulo da integral de cada um das bolhas de uma senoide, o que nos leva a ver cada uma das integrais dos meio-subintervalos como os valores médios viciados de f nestes meio-sub-intervalos:

$$\frac{k}{2\pi} \int_{a_j}^{a_j} f(x) \text{sen}(kx) dx = \text{ValMed}(f)_{[a_j, \underline{a}_j]} = \tag{1.52}$$

$$= -\frac{k}{2\pi} \int_{\underline{a}_j}^{a_{j+1}} f(x) \text{sen}(kx) dx = \text{ValMed}(f)_{[\underline{a}_j, a_{j+1}]} \tag{1.53}$$

f não precisa ser contínua, mas pelo fato de ser p -integrável, (característica dos espaços $\mathcal{L}^p([0, 2\pi])$ ainda chamados de espaços de funções p -integráveis), tem um valor médio viciado¹⁷ finito em cada sub-intervalo. O valor médio deveria ser indexado pela função peso para indicar quem o vicia, mas vamos simplificar a notação escrevendo apenas “ValMed”. Chegamos assim a

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{a_j} f(x) \text{sen}(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\underline{a}_j}^{a_{j+1}} f(x) \text{sen}(kx) dx ; \\ b_k &= \frac{2}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (\text{ValMed}(f)_{[a_j, \underline{a}_j]} - \text{ValMed}(f)_{[\underline{a}_j, a_{j+1}]}) \end{aligned}$$

Como o “valor médio” regulariza a função na “proporção” do peso, e como $\text{sen}K$ é contínua, então valores médios nos sub-intervalos tendem a um valor comum. Como estas diferenças de mé dias são número de k , temos uma média de termos que convergem para zero, convergindo para zero também a média b_k . Os cálculos para demonstrar que a_k tende a zero são semelhantes aos que fizemos acima, com uma pequena dificuldade técnica cujo prazer da descoberta deixaremos para o leitor. **q.e.d .**

O Lema de Riemann-Lebesgue é um resultado fraco, apenas garante que os coeficientes de Fourier convergem para zero. Com que velocidade se dá esta convergência? a importância desta pergunta, (ou melhor, da resposta), está ligada a convergência. Usamos séries para aproximar, séries divergentes não servem para este propósito. Uma demonstração direta da velocidade de convergência dos coeficientes de Fourier é muito difícil. Vamos fazer uma demonstração indireta do resultado. O objeto do nosso estudo é:

$$b_k = \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen}(kx) dx$$

¹⁷desde que a função peso pertença ao sub-espaço dual, ver desigualdade de Hölder, e as funções contínuas pertencem a todos eles.

e se fizermos alguma hipótese sobre f podemos calcular uma integral por partes, por exemplo se f for derivável com derivada integrável podemos prosseguir:

$$b_k = -f(x) \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos(kx) dx$$

sendo f' integrável a expressão acima é da forma

$$b_k = \frac{A}{k}$$

em que A é uma constante. Cálculos análogos se podem fazer com o outro coeficiente de Fourier a_k chegando-se assim à conclusão de que os coeficientes de Fourier decrescem de forma semelhante, (ou mais rápido¹⁸, que a sucessão $\frac{1}{k}$ pertencendo assim ao espaço $l^2(\mathbf{N})$:

Já vimos que $\mathcal{C}([a, b])$ é denso em $\mathcal{L}^2([a, b])$ e, com técnica absolutamente idêntica, apenas usando núcleos de classe de diferenciabilidade mais alta, podemos mostrar que $\mathcal{C}^{(n)}([a, b])$ é denso em $\mathcal{L}^2([a, b])$ o que se pode dizer com outras palavras: *há funções com classe de diferenciabilidade arbitrariamente alta tão próximo quanto se queira de $f \in \mathcal{L}^2([a, b])$* . Consequentemente podemos considerar os cálculos acima feitos com f_n a uma distância¹⁹ $\delta = 2\epsilon \sqrt{\frac{m}{\pi}} \|f\|_2$ de f . Calculamos, entretanto, o comportamento assintótico dos coeficientes de f_n :

$$a_{n,k}, b_{n,k}$$

e seria interessante ver a que distância estes coeficientes se encontram dos coeficientes de f

$$a_k, b_k.$$

Sabemos que f_n e f se ligam pela relação

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f_n(t) - f(t)|^2 dt < \delta$$

logo

$$\begin{aligned} \delta^2 &> \int_0^{2\pi} |f_n(t) \operatorname{sen}(kt) - f(t) \operatorname{sen}(kt)|^2 dt = \\ &= \int_0^{2\pi} |(f_n(t) - f(t)) \operatorname{sen}(kt)|^2 dt < \delta \end{aligned}$$

Definição 7 O espaço $l^2(\mathbf{N})$ É o espaço vetorial de todas as sucessões $(s_n)_n$ tais que

$$\|s\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |s_k|^2 < \infty$$

com a definição

$$\|s\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|^2}.$$

Teorema 15 da convergência dos coeficientes de Fourier.

Se f for uma função diferenciável, 2π -periódica, e sua derivada for integrável, então seus coeficientes de Fourier são quadrado somável.

Veremos abaixo que há hipóteses em excesso neste teorema.

Chamamos o conjunto $l^2(\mathbf{N})$ de espaço, isto nos obriga a provar que se trata de um espaço vetorial.

Vamos fazer isto agora.

¹⁸ muito possivelmente mais rápido, porque se tem uma diferença, $\frac{A}{k} = \frac{A_1(k)}{k} - \frac{A_2(k)}{k}$

¹⁹ δ foi calculado na demonstração de que $\mathcal{C}([a, b])$ é denso em $\mathcal{L}^2([a, b])$.

O espaço vetorial $l^2(\mathbf{N})$.

O plano é o mesmo utilizado na demonstração de que $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ é um espaço vetorial. Tudo se resume em mostrar que se $s, t \in l^2(\mathbf{N})$ onde s, t são duas sucessões, então $s + t \in l^2(\mathbf{N})$ o que ainda se resume em demonstrar a desigualdade de Cauchy-Schwarz para sucessões. O método genérico usado acima se aplica *ipsis literis*.

Além de tudo isto, em $l^2(\mathbf{N})$ se encontra definido um produto escalar que é finíssima generalização do produto escalar de \mathbf{R}^3 :

$$s + t \in l^2(\mathbf{N}) \Rightarrow \langle s, t \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} s_k t_k \quad (1.54)$$

esta série converge pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, verifique isto.

A equação de Parseval.

Tivemos que aumentar nossas hipóteses para melhorar a estimativa do Lema de Riemann-Lebesgue sobre os coeficientes de Fourier. Vamos mostrar, indiretamente, que não é o caso. Se indexarmos nossas séries de Fourier em $l^2(\mathbf{N})$? quer dizer, se considerarmos o conjunto:

$$\left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) ; (a_k)_{k \in \mathbf{N}}, (b_k)_{k \in \mathbf{N}} \in l^2(\mathbf{N}) \right\}$$

temos um novo espaço vetorial porque o “sistema de indexação” é linear:

$$(a_k, b_k)_{k \in \mathbf{N}} \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) ; \quad (1.55)$$

$$(a_k, b_k)_{k \in \mathbf{N}} \in l^2(\mathbf{N}) \quad (1.56)$$

”formalmente”, porque não sabemos que tipo de “objeto” resulta desta indexação²⁰ mas podemos considerar apenas as sucessões finitas de coeficientes e as correspondentes *somas parciais* e nelas aplicar o produto escalar de $\mathcal{C}([0, 2\pi])$, porque são funções contínuas:

$$\begin{aligned} \langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \rangle = \\ = 2 \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{k=0}^N a_k^2 + b_k^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=0}^N a_k^2 + b_k^2 ; \end{aligned}$$

pela ortogonalidade da base $\{\sin kx, \cos kx\}$. Tomando agora N arbitrário vemos que a segunda equação tem limite porque supusemos que o espaço dos coeficientes era $l^2(\mathbf{N})$ o que nos leva a concluir que a sucessão de funções contínuas

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

tem um limite de algum tipo.

Exemplo 4 de função descontínua no espaço indexado por $l^2(\mathbf{N})$.

Considere a função característica $f = \chi_{[-\epsilon, \epsilon]}$ em que ϵ é um número pequeno, (pelo menos menor que π). Então

$$(\hat{f}_k)_{k \in \mathbf{N}} = \left(\frac{2 \sin(k\epsilon)}{k} \right)_{k \in \mathbf{N}} \in l^2(\mathbf{N})$$

e como f não é contínua este exemplo mostra que o espaço obtido com esta indexação não pode ser $\mathcal{C}([0, 2\pi])$.

²⁰ não temos nenhuma informação sobre a convergência da série de Fourier, e séries que não convergem não são funções...

Mas as funções f_N , sendo de $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ são também de $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ e nós mostramos que este último espaço é completo logo uma sucessão de Cauchy nele converge para um elemento dele mesmo, assim

$$f_N \rightarrow f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi]). \quad (1.57)$$

O nosso programa de trabalho foi inteiramente cumprido, verifique-o. Vamos encerrar tornando ainda mais precisas as relações anunciadas no último item do programa. Mostramos que uma função de $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ tem os seus coeficientes em $l^2(\mathbf{N})$, que estes dois conjuntos são espaços vetoriais, (consequências da desigualdade de Cauchy-Schwarz), e finalmente em $l^2(\mathbf{N})$ temos um produto escalar de modo que temos neste espaço uma geometria semelhante a do \mathbf{R}^3 .

Como mostramos que a série de Fourier de $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ converge no sentido deste espaço podemos calcular o produto escalar em $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ de

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

e aplicar-lhe a distributividade e a associatividade resultando em

$$\begin{aligned} \langle S, S \rangle &= \|S\|_2^2 = \\ &= \langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \cdot (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a_k \cos(kx) a_j \cos(jx) dx + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a_k \cos(kx) b_j \sin(jx) dx + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b_k \sin(kx) b_j \sin(jx) dx \end{aligned}$$

Pela ortonormalidade dos vetores $\sin K, \cos J$ de todas as integrais acima restam apenas aquelas de mesmo índice e estas se reduzem aos coeficientes multiplicativos elevados ao quadrado, sendo portanto o resultado:

$$\|S\|_2^2 = \langle S, S \rangle = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 + b_j^2 \approx \langle s, s \rangle = \|s\|_2^2 \quad (1.58)$$

onde s representa a sucessão dos coeficientes de Fourier de f e S representa a série de Fourier f .

O único defeito é o erro no primeiro termo que deveria ser $\frac{a_0^2}{4}$ para que se tivesse uma igualdade. Isto pode ser resolvido introduzindo um fator diferente no produto escalar como fazem alguns autores, ver [15, cap. 9], por exemplo. Podemos adotar outra alternativa que é considerar a norma de $l^2(\mathbf{N})$ “corrigida” pela substituição de $\frac{a_0^2}{4}$ por $\frac{a_0^2}{2}$.

Exercício 2 Uma nova norma para $l^2(\mathbf{N})$.

Prove que se $s = (s_0, \dots, s_k, \dots) \in l^2(\mathbf{N})$ e definirmos

$$\|s\| = \sqrt{\frac{s_0^2}{d} + \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2}; \quad d > 0$$

então $\|\cdot\|$ é uma norma em $l^2(\mathbf{N})$.

Mudando a notação, como objetivos futuros, vamos chamar $s = \hat{f}$. Demonstramos assim:

Teorema 16 de Plancherel

Se $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ então seus coeficientes de Fourier são uma sucessão $\hat{f} \in l^2(\mathbf{N})$ e $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

O teorema de Plancherel estabelece uma isometria entre estes dois espaços vetoriais: uma função linear que preserva o tamanho dos vetores por ela transformados, desde que considere a nova norma que definimos acima.

Definição 8 Transformada de Fourier discreta.

Chamamos de transformada de Fourier a esta transformação linear que associa a $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ os seus coeficientes de Fourier que designamos entãpor $\hat{f}(n) = (a_n, b_n)$.

Demonstramos assim:

Teorema 17 Isomorfismo $l^2(\mathbf{N}) \approx \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$.

- Teorema de Plancherel $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ se e somente se as sucessõ

$$a = (a_k)_k, b = (b_k)_k$$

dos seus coeficientes de Fourier forem elementos do espaço $l^2(\mathbf{N})$, de modo que

$$\|(a, b)\|_{l^2} = \|f\|_{\mathcal{L}^2([0, 2\pi])}$$

- A equação do isomorfismo. A função que associa

$$\mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \ni f \mapsto (a, b) \in l^2(\mathbf{N})$$

é a transformada discreta de Fourier.

- Identidade de Parseval $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{l^2} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2}$ em que \hat{h} é a sucessão dos coeficientes de Fourier de h .

A Identidade de Parseval é apenas uma outra forma de expressar o Teorema de Plancherel.

Observação 10 Convergência e espaços.

Se faz referência a esta transformação linear como transformada discreta de Fourier em oposição a que veremos no próximo capítulo, a transformada integral de Fourier. Esta distinção é histórica, se deve ao fato de que houve uma época em que não se percebia que se tratava de uma mesma coisa, ainda veremos isto.

Observe que também deixamos fechada a polêmica de Du Bois-Reymond sobre a nãoconvergência das séries de Fourier. A convergência não dá ponto a ponto como até se pode ver rodando o programa Fourier. A convergência se dá do ponto de vista da integral, aqui a distância entre duas funções se mede com a integral da diferença elevada ao quadrado.

A teoria das séries de Fourier é bem difícil como atestam os pequenos cálculos que fizemos aqui. Um atestado mais forte é a literatura existente da qual apresentamos uma parte ínfima na bibliografia, até mesmo por razões de espaço...

O Teorema (15) nos deu uma visãrápida da convergência dos coeficientes de Fourier associada a hipótese de diferenciabilidade da função f . Devido a regularização pela convolução sabemos que esta hipótese não é tão forte: “vizinho” de qualquer função integrável existe uma função de classe C^∞ . Ser “integrável” é a propriedade de regularidade mais baixa que se tem, uma função integrável não precisa ser contínua e até pode ter descontinuidades infinitas. O conceito vizinho é que ainda está indefinido. Se dissermos que “vizinho” significa “uniformemente” então funções vizinhas tem que ser ambas contínuas. Mas este conceito de vizinhança é muito excludente e mesmo muito forte. O que precisamos em geral é que a energia seja semelhante. Se f for o resultado de uma medição, fato muito frequente, ou um levantamento estatístico, (sinais coletados de uma conversa telefônica, informações sobre uma imagem coletadas por um scanner a serem transmitidas, ou mesmo por uma câmera fotográfica de alta resolução), todos são discretizações da “realidade” e o que se deseja destas discretizações é que a “energia”, a área, o volume, enfim a integral sejam aproximadamente preservadas:

$$\int_a^b |f(x) - f_N(x)|^p dx < \epsilon$$

em que p é um “coeficiente” interessante por uma razão qualquer.

Aqui nos fizemos em $p = 2$ que é um caso muito comum nas chamadas “aplicações” da matemática.

E, p -perto de qualquer função integrável f , existe uma função de classe $C^\infty \dots$, por exemplo $\eta * f$ em que η é um núcleo de classe C^∞ e a suporte compacto de pequena medida em volta de zero.

O Teorema (15) não estava assim tão afastado da realidade... ele está na forma em que se encontra no livro de Lanczos, [6, pag. 50].

Exercício 3 Estensãda teoria de Fourier a um intervalo $[a, b]$.

1. Calcule os coeficientes de Fourier de $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, se ainda não tiver feito.

2. Use a isometria entre f e sua transformada discreta de Fourier para mostrar que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. A sucessã $(\frac{1}{(n+1)^3})_{n \in \mathbf{N}}$ pode ser considerada como os coeficientes de Fourier de uma função f , Porque?, entã

$$f(x) \approx 1/2 + \sum_{k=1}^N \frac{\text{sen}(kx)}{k^3}.$$

Calcule aproximadamente a série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$$

4. Qual seria um valor aproximado da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}?$$

Verifique se o cálculo via transformada discreta de Fourier oferece mais precisã?

5. Mostre que as funções

$$\text{sen}K : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \text{sen}K : x \mapsto \text{sen}(2k\pi x); k \geq 1$$

$$\text{cos}K : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \text{cos}K : x \mapsto \text{cos}(2k\pi x); k \geq 1$$

se o produto escalar for definido por

$$\langle f, g \rangle = 2 \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

formam um sistema ortornormal ao que se pode acrescentar a função constante $x \mapsto \frac{1}{2}$. Escreva as séries de Fourier correspondentes às funções

$$(a) (1)f(x) = x; \quad (2)f(x) = \pi x; \quad (3)f(x) = \pi^2(1 - x^2);$$

$$(b) (2)f(x) = x^2 - 1; \quad f(x) = 1 - x^2; \quad f(x) = \chi_{[0,1]};$$

6. Escreva as equações lineares dos coeficientes de Fourier da solução da equação diferencial linear de terceira ordem

$$y''' + 3y'' - 2y' + y = g$$

em que $g(x) = \cos(x)$ Obtenha uma solução gráfica particular desta equação.

7. Faça a uma mudança de variáveis para transformar o produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

num produto escalar definido sobre o intervalo $[a, b]$ de modo que os novos vetores $\text{sen}K, \text{cos}K$ formem uma família ortonormal junto com uma função constante. Escreva as séries de Fourier correspondentes às funções

$$(a) (1)f(x) = x - a; \quad (2)f(x) = \pi(x - a); \quad (3)f(x) = \pi^2(b - a)(a^2 - x^2);$$

$$(b) (1)f(x) = x^2 - a^2; \quad (2)f(x) = a^2 - x^2; \quad (3)f(x) = \chi_{[a,b]};$$

8. os conjuntos $\mathcal{C}_P([0, 2\pi])$, das funções periódicas, $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ nã são iguais. Verifique que a função $x \mapsto x^2$ estendida por periodicidade a \mathbf{R} produz uma função descontínua e portanto nã é um elemento de $\mathcal{C}_P([0, 2\pi])$ mas é um elemento de $\mathcal{C}([0, 2\pi])$. Construa mais alguns exemplos e depois enuncie uma regra geral que estabeleça uma relação entre os dois conjuntos.

²¹É preciso considerar resultados deste tipo como acidentes científicos: nã têm nenhum sentido sair em busca de uma função cujos coeficientes de Fourier sejam uma dada sucessã para daí concluir qual é o valor de uma série. Por outro lado há que nã esquecer que a ciência depende de tais acidentes em sua construção. Veja os próximos exercícios para uma aplicação científica deste método. Ver [1, cap. 14] para uma coleção extensa destes acidentes.

1.6 Forma complexa da série de Fourier.

O fenômeno de Gibbs.

Se a função não for contínua existe um erro visível a olho nú entre f e a série de Fourier de f de cerca de 9%, é o fenômeno de Gibbs, (descoberto por Wilbraham em 1848 e descrito por Gibbs na revista *Nature* em 1899). Uma justificativa rápida para este fenômeno é que os polinômios trigonométricos de f representam uma sucessão de funções contínuas que se aproximam de f , mas os polinômios trigonométricos são funções contínuas entretanto não a convergência uniforme o método natural de analisar o comportamento desta sucessão uma vez que o limite não precisa ser uma função contínua...

Feijér provou um resultado que nos ajudará a compreender isto, vamos reconstruir suas ideias. O primeiro passo consiste em reescrever a transformada de Fourier na forma complexa.

Ver outra demonstração e comentários em [3, cap. 1, pag. 43 e seguintes].

Forma complexa da série de Fourier.

A fórmula de Abel-Euler²²:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

nos permite re-escrever a série de Fourier na forma complexa. Um cálculo direto e construtivo seria muito longo e vamos deixá-lo para o leitor interessado na história da Matemática. Faremos uma construção indireta que será mais econômica²³, os exercícios seguintes o levarão a fazer esta construção:

Exercício 4 *Integrais complexas, série de Fourier.*

1. uma integral de linha: Mostre que

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = \delta_0(n) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow n \neq 0 \\ 1 & \Leftarrow n = 0 \end{cases}$$

2. produto escalar complexo: Mostre que a expressão define um produto escalar no conjunto das funções contínuas (ou integráveis) complexas:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} dt$$

e que definindo assim o produto escalar, as funções $e_n(x) = e^{inx}$ formam uma base ortonormal para $\mathcal{L}^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ das funções de quadrado integrável a valores complexos.

3. Calcule os coeficientes de uma função contínua f segundo os vetores ortonormais $e_n \in \mathbb{Z}$. Obs: os coeficientes assim encontrados se chamam coeficientes de Fourier complexos:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$$

e portanto que a série de Fourier complexa é:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

porque agora os coeficientes complexos de Fourier existem para inteiros positivos e negativos.

4. redução da série complexa à usual: Mostre que se f for uma função real, a série complexa de Fourier, (com os coeficientes complexos), se reduzem a série real usual:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

²²em um artigo no Bulletin of America Mathematical Society esta questão é levantada, o nome desta fórmula não seria “de Moivre” e sim “de Abel-Euler”

²³vamos assim otimizar o binômio custo-benefício dentro da ótica dos que nos governam...

5. usando uma série geométrica: Calcule a soma

$$\sum_{k=-N}^N e^{ikt}; \quad N \in \mathbf{N}$$

Os exercícios anteriores nos levam a considerar os coeficientes complexos de uma série de Fourier, (agora escrita sobre os números inteiros e não apenas sobre os números naturais) representando a mesma série de Fourier real. Vamos usar a forma complexa para obter um resultado de aproximação da teoria de Fourier.

A soma seguinte é a dos termos de uma progressão geométrica:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N e^{ikx} &= e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} e^{ikx} = \\ &= e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{-iNx} \frac{(e^{i(2N+1)x} - 1)(e^{-ix} - 1)}{(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} = \\ &= e^{-iNx} \frac{e^{i2Nx} - e^{-ix} - e^{i(2N+1)x} + 1}{2(1 - \cos x)} = \frac{e^{iNx} - e^{-i(N+1)x} - e^{i(N+1)x} + e^{-iNx}}{2(1 - \cos x)} = \\ &= \frac{2\cos(Nx) - 2\cos(N+1)x}{2(1 - \cos x)} = \frac{\cos(Nx) - \cos(N+1)x}{(1 - \cos x)} = \\ &= \frac{\cos(Nx) - (\cos(Nx)\cos(x) - \text{sen}(Nx)\text{sen}(x))}{(1 - \cos x)} = \frac{\cos(Nx)(1 - \cos(x)) + \text{sen}(Nx)\text{sen}(x)}{(1 - \cos(x))} = \\ &= \frac{\cos(Nx)(1 - \cos(x)) + \text{sen}(Nx)\text{sen}(x)}{2\text{sen}^2(x/2)} = \frac{2\cos(Nx)\text{sen}^2(x/2) + \text{sen}(Nx)\text{sen}(x)}{2\text{sen}^2(x/2)} = \\ &= \frac{2\cos(Nx)\text{sen}^2(x/2) + \text{sen}(Nx)2\text{sen}(x/2)\cos(x/2)}{2\text{sen}^2(x/2)} = \frac{\cos(Nx)\text{sen}(x/2) + \text{sen}(Nx)\cos(x/2)}{\text{sen}(x/2)} = \\ &= \frac{\text{sen}(Nx + x/2)}{\text{sen}(x/2)} = \frac{\text{sen}((2N+1)x/2)}{\text{sen}(x/2)} = D_N(x) \end{aligned}$$

conseguimos assim uma fórmula simples para a soma $\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$ e vamos logo aproveitar o ensejo para deduzir algumas propriedades da função D_n que se chama “núcleo de Dirichlet”:

Definição 9 *Núcleo de Dirichlet.*

A função 2π -periódica $D_N(x) = \frac{\text{sen}((2N+1)x/2)}{\text{sen}(x/2)}$ se chama núcleo de Dirichlet de ordem N .

Os próximos teoremas justificam o nome “núcleo” que se dá a esta função:

Teorema 18 Propriedades do núcleo de Dirichlet I.

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \int_0^{2\pi} D_N(x) dx = 1$$

Dem:

Consequência de $\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} = D_N(x)$, por que

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = \delta_0(n) = \begin{cases} 0 & \leftarrow n \neq 0 \\ 1 & \leftarrow n = 0 \end{cases}$$

q.e.d.

Como D_N é o quociente de duas funções ímpares e periódicas de mesmo período, então é par e periódica:

Teorema 19 Propriedades do núcleo de Dirichlet II.

O núcleo de Dirichlet é uma função par e periódica.

Apesar de ser um quociente, devido mesmo a ser igual a uma soma de funções de classe C^∞ o núcleo de Dirichlet tem esta mesma classe:

Teorema 20 Propriedades do núcleo de Dirichlet III.

O núcleo de Dirichlet é uma função de classe C^∞ .

O teorema anterior já disse tudo sobre a regularidade de D_N mas é importante caracterizar o seu valor quando o denominador se anula, que é um limite clássico:

Teorema 21 *Propriedades do núcleo de Dirichlet IV.*
 $\lim_{x \rightarrow 0} D_N(x) = 2N + 1$

Finalmente vejamos a última propriedade importante do núcleo de Dirichlet que é a principal razão de sua importância. Se escrevermos a reduzido de uma série de Fourier em sua forma complexa, teremos:

$$S = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx}$$

e permutando integral e soma temos

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-N}^N e^{-ikt} e^{ikx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-N}^N e^{ik(x-t)} dt$$

e como já temos a fórmula da soma:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_N(x-t) dt = (D_N * f)(x)$$

que resumindo significa:

Teorema 22 *Propriedades do núcleo de Dirichlet V.*

A reduzida de ordem N da série de Fourier de f é a convolução de f com o núcleo de Dirichlet de ordem N , D_N :

$$\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} = (D_N * f)(x)$$

A integral que define a convolução acima só tem sentido se for considerada sobre o grupo dos números reais módulo- 2π caso contrário ela seria infinita. A expressão dentro do teorema está incorreta, se o leitor for atento descobrirá o seu erro lógico... que se encontra devidamente sanado com estas observações agora feitas.

Observação 11 *Núcleo de Dirichlet, aproximação e convolução.*

Durante anos este resultado representou apenas um aspecto teórico sem grande “interesse prático” porque calcular convoluções era uma loucura. Hoje até algoritmos não otimizados calculam convoluções com relativa rapidez o que re-acende o interesse por esta fórmula.

Entretanto estamos em contradição com o que já dissemos anteriormente quando definimos “núcleos”, funções positivas, (1), cuja integral fosse 1, (2) e tivessem suporte limitado, (3). A terceira condição é a de menor importância, em geral. Ter suporte pequeno produz como resultado que as convoluções com um núcleo são aproximações de uma função. Agora temos uma função cuja integral é 1 mas que não é positiva. Entretanto, veja os gráficos (fig. 1.8), (fig. 1.9), página 49 e seguinte, esta função se concentra em volta da origem onde ela é positiva e seus valores “afastados” da origem, (e dos extremos do intervalo $[-\pi, \pi]$), são “pequenos”. Mas para que ela tenha integral 1 é preciso que o valor de sua integral oscile em volta de 0 para compensar a área da bolha principal que é ligeiramente maior do que 1. O resultado disto é a conhecida oscilação das reduzidas da série de Fourier de f em volta do gráfico de f .

Como $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$ então, na linguagem de Shapiro, [19], a convolução com D_N é uma métrica viajante, o valor de $D_N * f$ converge para o valor médio de f no ponto x . Se f for contínua numa grande maioria dos casos esta convergência se vai dar ponto a ponto para $f(x)$. O problema é que esta convergência não é típica do espaço das funções contínuas, a convergência uniforme, e foi aí que Du Bois-Reymond foi buscar um “furo” na teoria de Fourier.

É preciso sublinhar que a convergência típica do espaço das funções contínuas é a convergência uniforme por estar relacionada, (fica definida pela), norma do supremo.

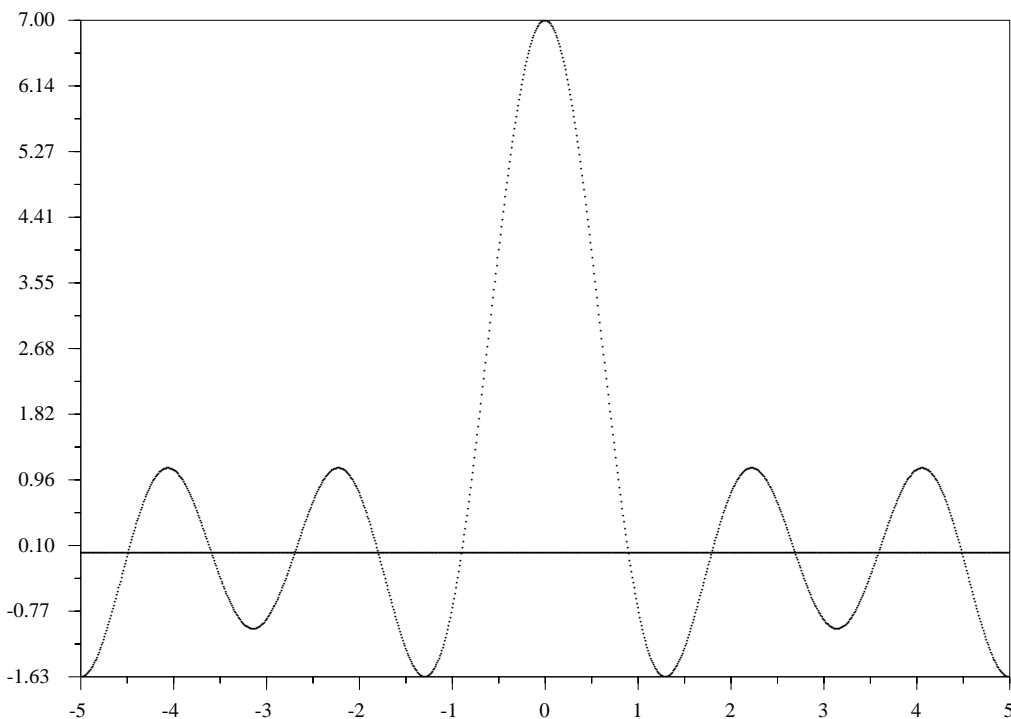


Figura 1.8: Núcleo de Dirichlet de ordem 3.

Exercício 5 *Integral sobre grupos.*²⁴

1. * Verifique que o intervalo $[0, 2\pi]$ pode ser munido de uma estrutura de grupo comutativo de modo semelhante que se faz com os inteiros módulo p . Construa toda a teoria e resolva a equação $3x + 2 = 1$ neste grupo. Observe que o conjunto $\{0, 2\pi\}$ é uma classe de equivalência. Estenda esta relação de equivalência a \mathbf{R} . As classes quocientes módulo esta relação de equivalência com uma definição adequada para a adição, formam um grupo, que se chama grupo dos reais módulo π ou ainda toro de dimensão 1.
2. Porque a equação $7x + 5 = 3$ estaria “mal posta” no toro. Redefina esta equação, verifique a ambiguidade desta correção mas observe que a menos de uma relação de equivalência a ambiguidade fica resolvida.
3. * Escreva um programa para calcular $D_N * f$ para algumas funções, obtenha os gráficos correspondentes, faça uma tabela de comparativa entre o tempo gasto no cálculo da Série de Fourier (soma) e da convolução, (benchmarking...)
4. * Observe que a integral de uma função f multiplicada por um núcleo representa uma média aritmética ponderada. Ver “média viciada”. Use este fato para desenvolver um algoritmo para calcular rapidamente as convoluções. No caso do núcleo de Dirichlet estas médias tem que ser consideradas num sentido “generalizado”...

²⁴exercícios marcados com asterisco podem tomar muito tempo e devem ser considerados opcionais.

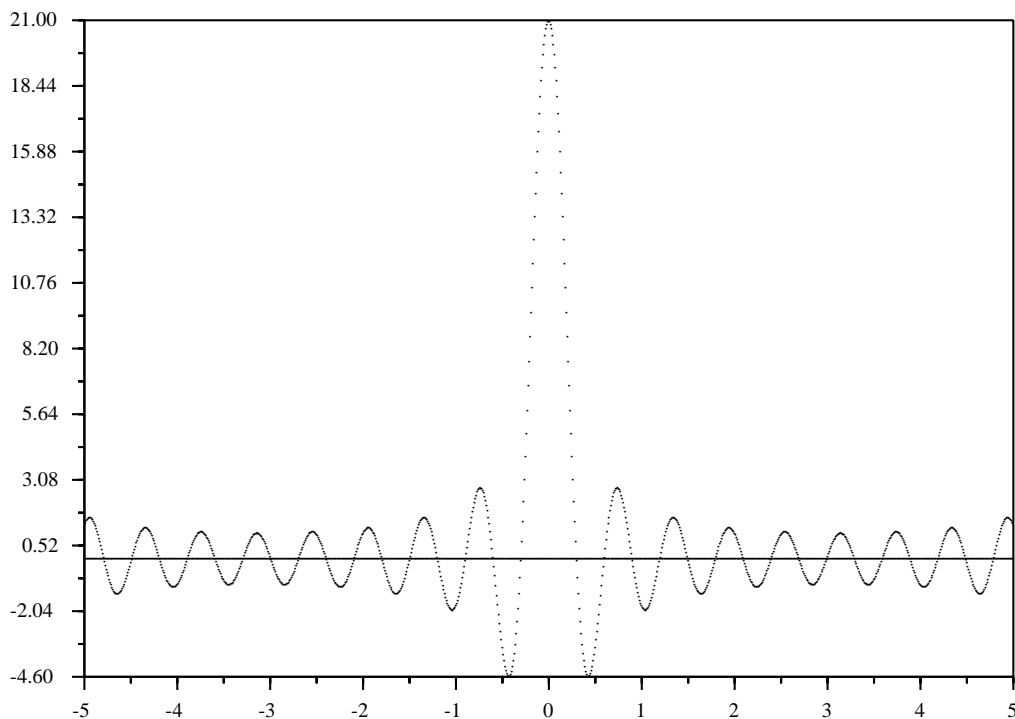


Figura 1.9: Núcleo de Dirichlet de ordem 10.

Convergência em média.

O núcleo de Dirichlet tem um “defeito” grave de ser não positivo. Já vimos com a discussão anterior que este problema pode ser desprezado. Este fato gerou diversas teorias ao longo dos 200 anos de história das séries trigonométricas. Uma solução interessante para o problema foi dada por Fejér que construiu um núcleo, uma função positiva resolvendo o problema levantado por Du Bois-Reymond. Como muitos outros ramos dentro da Análise Harmônica, vamos ter que nos limitar a uma referência a este tópico, indicando onde o leitor poderá ler mais a respeito se desejar, [3, pag. 34-36].

O núcleo de Fejér é obtido em [3] de uma maneira curiosa, mas habitual em livros de análise harmônica. Dizemos de uma maneira curiosa porque ressalta a propriedade mais importante da convolução. Já dissemos isto, e mais de uma vez citamos a frase de Shapiro, caracterizando convoluções como médias volantes. Se o “núcleo” for um núcleo “verdadeiro”, (função positiva, de integral 1, com suporte pequeno), as convoluções com ele serão valores médios da função convolvida. O resultado de Fejér é absolutamente natural: *conseguiu uma convergência em média da série de Fourier expressa como a convolução com um núcleo.*

Retornando ao “pseudo-núcleo” de Dirichlet e a sua²⁵ convergência em “pseudo-média” para uma função, vamos estudar o erro pontual desta convergência.

Se uma função f for descontínua num ponto $x = a$ do intervalo $[-\pi, \pi]$, mas integrável obviamente,

²⁵vamos continuar chamando, como todo mundo faz, D_n de núcleo, o leitor já deve estar suficientemente avisado sobre o que isto significa.

$D_N * f$ converge para o valor médio de f em $x = a$. Se f for integrável este valor médio existe e é dado pelo limite:

$$\lim_n \frac{n}{2} \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt$$

Podemos generalizar a expressão acima:

$$\lim_{s_n} \frac{1}{2s_n} \int_{a-s_n}^{a+s_n} f(t) dt$$

em que s é uma sucessão qualquer positiva cujo limite seja zero, e agora consideraremos a sucessão dos primeiros zeros positivos do núcleo de Dirichlet D_n , $s_n = \frac{2\pi}{2n+1}$, que converge para zero. Seria interessante calcular a integral de D_n no intervalo $[-s_n, s_n]$: um programa em Pascal nos dá estes valores aproximadamente:

$$\int_{-s_n}^{s_n} D_n(x) dx \approx 1.178979424175 \quad \Leftarrow \quad n = 500$$

cujas partes decimais nos indicam aproximadamente o percentual de erro da “média” calculada com o núcleo de Dirichlet: a metade de 17.8% ou seja aproximadamente 9% que é valor indicado em [3, pag. 44], porque, a metade da integral

$$\int_0^{s_n} D_n(x) dx \approx \frac{1.178979424175}{2} \quad \Leftarrow \quad n = 500$$

logo, num ponto de salto, à direita do salto, os valores da função estariam sendo aumentados de aproximadamente 9% o mesmo acontecendo à esquerda do ponto de salto. É isto que se pode constatar graficamente, demonstramos assim:

Teorema 23 *Fenômeno de Gibbs.*

Num ponto de descontinuidade de uma função f que tenha desenvolvimento em série de Fourier, os polinômios trigonométricos que a aproximam tem um máximo e um mínimo locais cuja diferença é aproximadamente 18% maior que o tamanho do salto de f neste ponto, ou equivalentemente, os polinômios trigonométricos dão um salto de cerca de 9% acima do gráfico de f nas vizinhanças de um ponto de descontinuidade finita.

É uma curiosidade, um detalhe, não conhecemos na literatura nenhuma indicação sobre uma tentativa do cálculo exato deste erro. Um tal cálculo não representaria nenhuma grande inovação tecnológica e certamente não teria nenhuma consequência prática retumbante, mas poderia ser interessante...

Exercício 6 1. Fenômeno de Gibbs. Verifique que se $\int_a^b \eta_k(t) dt = 1 + \epsilon_k$ então erro médio de $\eta_k * f$, se a convolução existir, será de $\frac{\epsilon_k}{2}\%$ num ponto de salto de f . Se f for contínua e também $m \eta_k$ o for, o erro médio tenderá a zero se “o suporte encolher para um ponto a medida que k crescer”. Tente encontrar uma definição adequada para a expressão: “o suporte encolher para um ponto, a medida que k crescer”

2. Mostre que as relações entre os coeficientes “reais” da série de Fourier, a_n, b_n , e os coeficientes “complexos”, c_n é:

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \Leftarrow \quad n \geq 0 ; \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & \Leftarrow \quad n \geq 0 ; \\ c_0 = \frac{a_0}{2} \end{cases}$$

3. Mostre que a seguinte forma da série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx - \theta_k)$$

é equivalente a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

com

$$\begin{cases} a_k = \alpha_k \cos(\theta_k); \\ b_k = \alpha_k \sin(\theta_k); \\ \alpha_k^2 = a_k^2 + b_k^2; \tan(\theta_k) = \frac{b_k}{a_k} \end{cases} \quad (1.59)$$

O conjunto dos coeficientes α_k é se chama de espectro de f .

4. Encontre a série de Fourier de

(a) $\chi_{[-1,1]}$ (b) $\chi_{[-1,0]}$ (c) $\chi_{[0,1]}$

(b) (a) $\chi_{[a,b]}$ (b) $\chi_{(a,b]}$ (c) $\chi_{[a,b)}$

5. Encontre a série de Fourier da onda quadrada

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \Leftarrow x \in [-\pi, 0); \\ f(x) = 1 & \Leftarrow x \in [0, \pi] \end{cases} \quad (1.60)$$

e da onda

$$\begin{cases} g(x) = ax(\pi + x) & \Leftarrow x \in [-\pi, 0); \\ g(x) = ax(\pi - x) & \Leftarrow x \in [0, \pi] \end{cases} \quad (1.61)$$

com $a = \frac{1}{\pi}$. Qual das duas séries converge mais rapidamente? Tente encontrar uma justificação heurística, faça os gráficos. Filtre as frequências altas de ambos os gráficos e compare os resultados.

6. impulsos de energia variável ou constante:²⁶ Considere a função $f = \chi_{[-0.5,0.5]} * \chi_{[-0.5,0.5]} * \chi_{[-0.5,0.5]}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x < -1.5 \\ 1 + x + 0.5(x + 0.5)^2 & \Leftarrow x \in [-1.5, -0.5) \\ 1 - 0.5(x - 0.5)^2 - 0.5(x + 0.5)^2 & \Leftarrow x \in [-0.5, 0.5) \\ 1 - x + 0.5(x - 0.5)^2 & \Leftarrow x \in [0.5, 1.5) \\ 0 & \Leftarrow x \geq 1.5 \end{cases}$$

(a) energia constante: Verifique que se $g(x) = af(ax)$ então $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$

(b) Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

(c) energia variável: Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$ se $h(x) = f(ax)$

(d) Calcule os limites das integrais acima quando $a := n \in \mathbf{N}$.

(e) Interprete graficamente as funções dos itens anteriores.

(f) energia variável: Calcule a transformada de Fourier discreta (coeficientes de Fourier de $\overline{h_n(x)} = f(nx)$).

(g) energia variável: Calcule a transformada de Fourier discreta (coeficientes de Fourier de $\overline{g_n(x)} = f(x/n)$).

(h) energia constante: Calcule a transformada de Fourier discreta (coeficientes de Fourier de $\overline{g_n(x)} = \frac{1}{n}f(x/n)$).

²⁶este exercício deve ser feito com auxílio de um programa de computação algébrica ou n'alguma lingua de programação.

7. dilatação e translação de impulsos de energia constante:²⁷ Considere a função $f = \chi_{[-0.5, 0.5]} * \chi_{[-0.5, 0.5]} *$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x < -1.5 \\ 1 + x + 0.5(x + 0.5)^2 & \Leftarrow x \in [-1.5, -0.5) \\ 1 - 0.5(x - 0.5)^2 - 0.5(x + 0.5)^2 & \Leftarrow x \in [-0.5, 0.5) \\ 1 - x + 0.5(x - 0.5)^2 & \Leftarrow x \in [0.5, 1.5) \\ 0 & \Leftarrow x \geq 1.5 \end{cases}$$

(a) Faça os gráficos de $h_{a,b}(x) = af(ax + b)$ para alguns valores de $a, b \in \mathbf{Z}e^{\frac{1}{a}}, \frac{1}{b} \in \mathbf{Z}$.

(b) Calcule algumas transformadas discretas de Fourier de $g(x) = r(x) * h_{a,b}(x)$ para $g(x) = \chi_{[-\pi, \pi]} + \chi_{[-2, 2]} + \chi_{[-1, 1]}$.

(c) Faça um relatório dos valores interessantes de a, b e dos resultados encontrados.

²⁷este exercício deve ser feito com auxílio de um programa de computação algébrica ou n'alguma lingua de programação.

Capítulo 2

Transformada integral de Fourier.

2.1 Transformada de Fourier de funções não periódicas.

Em dois exercícios do capítulo anterior, nós discutimos as séries de Fourier de funções definidas em intervalos diferentes do $[-\pi, \pi]$. Vamos retomar esta discussão agora pensando em funções não periódicas e definidas em \mathbf{R} . As hipóteses surgirão naturalmente durante o trabalho. Faremos um cálculo que nos levará ilegalmente a uma integral dupla, mas vai sugerir uma fórmula importante. Depois legalizaremos o cálculo feito.

Se $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ então podemos estender o método de Fourier para encontrar uma representação para f no intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. O uso do número $\frac{T}{2}$ atende a conveniências que logo ficarão evidentes. Uma mudança de variáveis nos permite transformar as fórmulas das séries de Fourier para o presente caso, e vamos preferir usar a formulação complexa porque os cálculos ficam mais simples, além do mais, logo ficará evidente para o leitor que nem sequer *senos* e *cosenos* são essenciais, mas sim o *método* que estamos usando para trabalhar com eles é que é a *parte importante nesta história*. Queremos encontrar os coeficientes de Fourier relativos ao intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ e para isto comecemos com a expressão de f relativa ao intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \exp(-inx) dx. \quad (2.1)$$

na qual fazendo a mudança de variável para retornar ao intervalo natural de f , $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ nos dá:

$$c_n = \frac{2\pi}{T\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp\left(\frac{-in2\pi x}{T}\right) dx ;$$
$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp\left(\frac{-in2\pi x}{T}\right) dx .$$

Assim, se f tiver uma série de Fourier convergente no intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, então podemos escrever:

$$f(y) \approx \sum_{n=-N}^N \left[\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp\left(\frac{-in2\pi x}{T}\right) dx \right] \exp\left(\frac{in2\pi y}{T}\right)$$
$$\sum_{n=-N}^N [c_n] \exp\left(\frac{in2\pi y}{T}\right)$$

e agora se observarmos que para grandes valores de T a fração $\frac{2\pi}{T}$ representa a medida de um pequeno sub-intervalo, podemos interpretar a série como uma *soma de Riemann* associada a uma partição uniforme

de norma $\frac{2\pi}{T}$ do intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ em que $2N + 1$ é o número de sub-divisões uniformes desta partição. Visto desta maneira temos:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-itx) dx] \exp(iy) dt.$$

uma integral dupla dependendo de um parâmetro y e recompondo o valor de f no ponto y . Agora, por analogia com as séries de Fourier que recompõem o valor de f podemos escrever:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) \exp(iy) dt; \quad (2.2)$$

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-itx) dx; \quad (2.3)$$

Infelizmente as contas feitas acima são inválidas para f qualquer mesmo integrável na reta o que é uma pena porque a “integral dupla” assim resultante sugere um resultado interessante, a *transformada integral* de Fourier:

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-itx) dx.$$

O método foi manhoso, ele tem a vantagem de ao mesmo tempo fazer surgir uma fórmula que aproveitaremos imediatamente para registrar apesar do método inválido que usamos mas a quem, logo a seguir, daremos um sentido.

Definição 10 *Transformada Integral de Fourier*

Chamaremos de transformada integral de Fourier a expressão:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-itx) dx$$

quando esta integral existir.

A constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ foi escolhida para tornar alguns cálculos mais simples mas se justifica também por outros meios, o fato é qualquer constante colocada na frente da integral não altera suas propriedades de linearidades. Na última seção deste capítulo veremos como esta constante se insere naturalmente nos cálculos.

Claramente a classe de todas as funções integráveis na reta tem transformada integral de Fourier. O que não é correto é dizer que o caminho que utilizamos conduz a esta definição.

Uma forma de ver claramente o furo lógico do cálculo feito acima em forma genérica é considerar alguns exemplos que nos vão conduzir a uma saída honrosa na próxima seção.

Exemplo 5 *Largura de faixa na frequência e no tempo.*

Consideremos o sinal $f = \chi_{[-a, a]}$, a função característica do intervalo $[-a, a]$. Então

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwt} dt = \frac{2 \operatorname{sen}(aw)}{w}$$

Este exemplo mostra uma das razões e um dos problemas com que estaremos envolvidos o tempo todo neste livro. De um lado uma função f a suporte compacto cuja integral calculamos escrevendo a ‘variável de integração t ’ para representar o tempo. f é um sinal limitado no tempo¹. Do outro lado a função \hat{f} cuja ‘variável’ designamos por w representando a frequência

Na linguagem da teoria dos sinais, se costuma entender os sinais f como definidos no domínio do tempo enquanto que suas transformadas de Fourier \hat{f} estão definidas no domínio da frequência.

¹uma forma não matemática de falar que significa que a s

1.

uporte compacto na variável tempo

Neste caso temos um sinal limitado no tempo ou ainda com faixa de tempo limitado. Quer dizer a suporte compacto. A transformada deste sinal não é limitado na frequência, ou seja não tem uma faixa de frequência limitada².

Em linguagem técnica se fala de band limited sinal e de time limited sinal

Este é um sintoma de defeito da transformada de Fourier. O ideal seria que sinais limitados na faixa de tempo resultassem em transformadas limitadas na faixa da frequência do ponto de vista de comunicações. Isto vai ficar claro aos poucos.

O curioso, e infelizmente defectivo do ponto de vista de comunicações, é que o fenômeno reverso também ocorre:

Exemplo 6 Sinal ilimitado na faixa do tempo.

Vamos fazer umas contas estranhas! Não há erros, mas a justificativa é complicada. Não aceite sem discutir as razões topológicas envolvidas...

Seja $f = 1$ a função constante para a qual calcularemos a transformada de Fourier.

$$\hat{f}(w) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-iwt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2\text{sen}(aw)}{w}$$

Veja os gráficos com $a \in \{5, 10\}$, (fig. 2.2) e (fig. 2.1). Você pode observar, sobretudo se repetir os gráficos, que a medida que o parâmetro a crescer a função D_a “tende”³ a se aproximar de zero fora do ponto $w = 0$ enquanto que no ponto $w = 0$ ela tende a crescer indefinidamente. Faça uma “mudança de variável” e verifique que o valor da integral de D_a não depende do parâmetro a portanto todas estas funções tem a mesma integral, calcule-a.

Estes fatos todos conduzem a uma situação pelo menos interessante, por exemplo, que esta família de funções poderia ter um limite..., afinal é uma família de funções “limitadas”, pelo menos do ponto de vista de energia⁴.

A questão topológica consiste em que este limite não é uma função, mas uma distribuição que é uma generalização do conceito de função que tem o que ver com o que os estatísticos chamam de distribuição também. Numa rápida comparação, as distribuições completam alguns conjuntos de funções como os números irracionais completam os racionais na reta. A “bolha” principal, que contem o centro de massa de D_a , cresce em altura e decresce em suporte que tende a se aproximar do conjunto $\{0\}$, um ponto. O resto da função D_a tende a se aproximar de zero. No começo do século um físico, Dirac, scandalizou os matemáticos dizendo que estas funções se aproximavam de uma função que era zero na reta inteira exceto no ponto $w = 0$ onde valeria ∞ , mas cuja integral seria finita ... o que tem o que ver com a família de funções limitadas de que falamos acima.

Foi preciso quase meio século para que os matemáticos conseguissem colocar as coisas no lugar com a Teoria das Distribuições.

É difícil concluir, mas a função f que é ilimitada na faixa do tempo, tem uma transformada de Fourier limitada na faixa da frequência que é a distribuição de Dirac δ_0 o que nos mostra o aspecto reverso do outro exemplo.

Estes dois exemplos jogam luz no problema de faixa de tempo e faixa de frequência em que a transformada de Fourier está envolvida. Veja também os gráficos (fig. 2.6) e (fig. 2.7) que se encontram nas páginas 70 e 71 nos quais você poderá ver também o gráfico do sinal junto com a respectiva transformada.

²observe que a palavra *limitada* está sendo usada num sentido não matemático pois \hat{f} é uma função limitada

³aqui há uma questão topológica...

⁴...outra questão topológica.

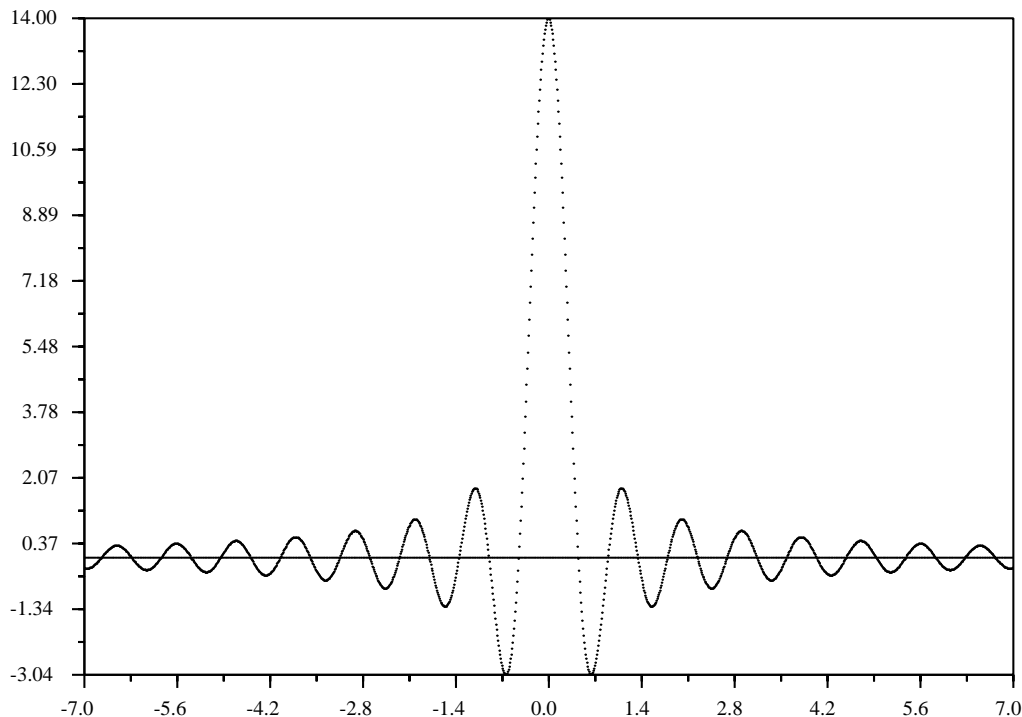


Figura 2.1: Núcleo de Dirichlet $a = 10$

2.2 Uma classe de funções onde vale a fórmula integral de Fourier.

Os dois exemplos que terminaram a seção anterior jogaram pesado. Num caso f era limitada na faixa do tempo, e no outro era ilimitada. No segundo caso \hat{f} nem era função...

E se estudássemos um caso intermediário? em que f seja “praticamente” limitada na faixa do tempo, quer dizer, fora de um conjunto compacto a quantidade de energia de f seja desprezível⁵.

As funções definidas assim são as funções integráveis em \mathbf{R} e o seu conjunto se chama $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$.

Já comentamos acima que se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ então \hat{f} existe.

Uma desigualdade simples mostra que esta hipótese é insuficiente:

$$|\hat{f}(w)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1$$

isto significando que se f for praticamente limitada na faixa de tempo, \hat{f} será apenas uma função limitada, no sentido da Matemática, o que significa que pode ter muita energia: *sua integral pode ser infinita*. Tais sinais não são nada convenientes. Inconvenientes porque só interessam sinais que possamos

⁵o centro da questão será sempre a quantidade de energia.

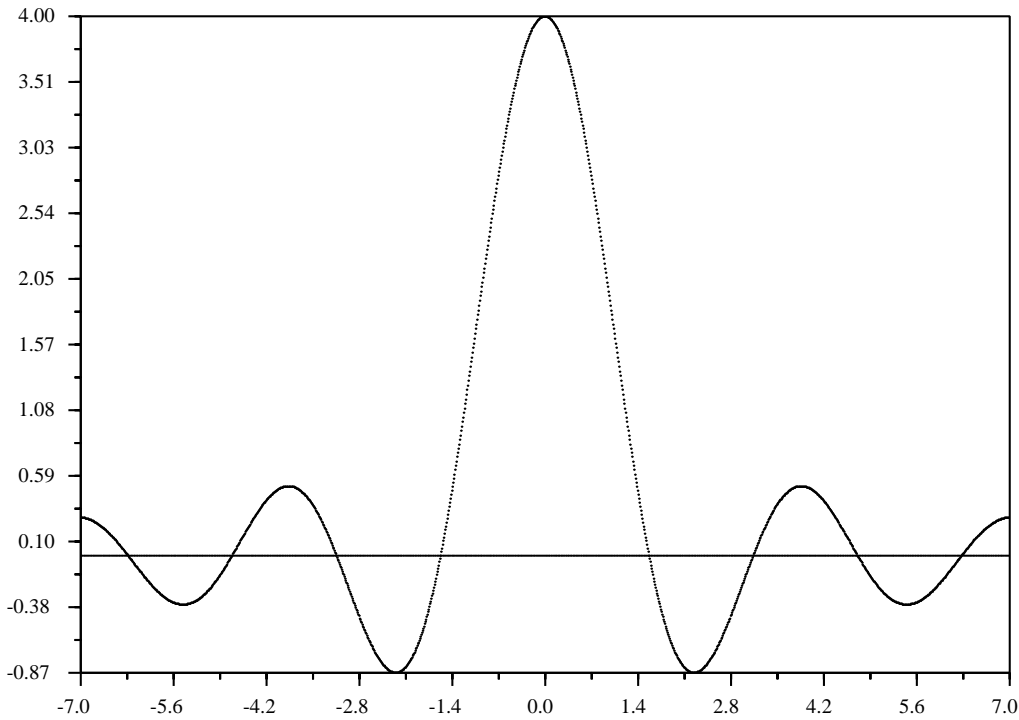


Figura 2.2: Núcleo de Dirichlet $a = 5$

transformar, leia, *codificar*, e depois transformar inversamente, leia, *decodificar*. Dada f qualquer, calculamos, (codificamos) em \hat{f} mas não podemos decodificar calculando a transformada inversa de \hat{f} pois a integral correspondente, veja (equação, 2.3), pode não existir.

Os que nos precederam no tempo e na história sofreram para descobrir o caminho, mas *subindo lhes nos ombros* iremos mais rápido. Se fizermos uma integral por partes, com a hipótese de que f seja continuamente derivável, descobriremos quais são as funções, (sinais), que nos interessam:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itw} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(t)e^{-itw}}{-it} \Big|_{-r}^r - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(t)e^{-itw}}{-it} dt$$

porque estamos trabalhando com funções integráveis na reta e portanto

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} f(r) = 0$$

o que também vale para f' se for suposta integrável na reta. Este resultado toma em módulo toma o aspecto

$$|w\hat{f}(w)| \leq \|f'\|_1$$

porque $(\forall r) (r \in \mathbf{R}) |e^{ir}| = 1$. Se aprofundarmos a hipótese, considerarmos f n vezes diferenciável, poderemos repetir a integração por partes n vezes concluindo que

$$|w^n \hat{f}(w)| \leq \|f^{(n)}\|_1$$

cuja interpretação é \hat{f} decresce para zero mais rápido do que $\frac{1}{w^n}$, porque mesmo sendo multiplicada por w^n , ainda fica menor do que a constante $\|f^{(n)}\|_1$.

Chegamos assim a um modelo de função que tem um comportamento com baixa energia tanto f na faixa de tempo como \hat{f} na faixa de frequência: são as funções integráveis na reta e com classe de diferenciabilidade indefinida, que dizemos de classe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, mas que sejam menores no infinito que $\frac{1}{P}$ em que P é um polinômio qualquer. Este espaço de funções recebe o nome de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, e resolve formalmente o nosso problema de onde fazer *transformação integral de Fourier* com o direito a codificar e decodificar. Para estas funções, os cálculos que fizemos para obter as equações (equ.2.3), página 56, são inteiramente válidos.

Definição 11 Espaço das funções rapidamente decrescentes.

O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é o espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis f tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{P(x)} = 0$ para qualquer que seja o polinômio P e a ordem de derivação n .

É uma obrigação mostrarmos que tratamos de espaços não vazios. Deixamos o seguinte exercício para o leitor se convencer de que existem elementos neste espaço:

Exercício 7 1. Mostre que $g(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. (a) Faça o gráfico de $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ e de $g = f - 1$
 - (b) Mostre que há uma definição que estende a função definida por $g(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) - 1$ a reta de forma que a função assim resultante seja de classe C^∞ . Sugestão, encontre o limite no ponto problema e use-o como valor da função no ponto, tornando-a contínua.
 - (c) Mostre que a função assim definida tem a derivada de ordem n forma $\frac{P_n g}{Q_n}$ em que P_n, Q_n são polinômios. Estime o grau destes polinômios. Mostre que $g^{(n)}$ é zero no infinito. Mostre que $g^{(n)}$ é rapidamente decrescente.
 - (d) Mostre que se P for um polinômio, então Pg é rapidamente decrescente e assim $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ contém pelo menos tantos elementos quanto o conjunto de todos os polinômios.
3. construção artesanal de elemento em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
- (a) Considere $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ e defina com ela uma função que seja nula na semireta negativa e ainda de classe C^∞ .
 - (b) Chame h a função construída na questão anterior. Defina $h_a(x) = h(x - a)$. Faça o seu gráfico para alguns valores de a . Mostre que $g(x) = h_a(x)h_{-a}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Calcule o suporte $\text{supp}(g)$.

Observação 12 Como fazer telecomunicações.

Este livro não é um manual de telecomunicações, você não pode esperar que lhe mostremos como se fizeram as comunicações com transformadas de Fourier, (hoje elas não são mais usadas para isto, espere a segunda parte do livro para ver o que se usa). Mas logo chegaremos perto de lhe mostrar um pouco da técnica de como fazê-las, mesmo assim existe um fosso entre saber como fazer e saber fazer... este fosso contém Física, Química Fina, Eletrônica e muitos interesses econômicos nem sempre dos mais puros, e um governo que aposta em destruir o trabalho universitário nos subtraindo laboratórios em que poderíamos chegar mais perto desta resposta, e muitos "cientistas" que não conseguem ver o erro que existe em tudo isto.

2.3 Transformadas integrais.

Obtivemos, por um método indireto, um domínio em que se pode fazer a *Transformada de Fourier* que é o espaço das funções rapidamente decrescentes, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Isto estaria ótimo se não fosse falar em funções *infinitamente* diferenciáveis que assusta quem é imediatista e deseja apenas ganhar dinheiro... Nas últimas seções vamos contornar *este problema* fazendo correções na *transformada de Fourier*. Nesta seção vamos estudar o ambiente geral em que transformadas integrais se podem definir sendo a *Transformada Integral de Fourier* um exemplo.

Observação 13 As mudanças de “variáveis”.

Uma técnica muito comum em Matemática consiste em fazerem-se mudanças de variáveis. Um exemplo disto são chamadas mudanças de coordenadas que ocorrem em Geometria Analítica permitindo que equações bastante complicadas se reduzam a alguma das cinco cônicas básicas, quando isto for possível. Outro exemplo é a multiplicação por um fator integrante que explode as equações diferenciais com frequência permitindo um hipótese que conduza a uma solução.

Os dois exemplos citados são transformações lineares. Associadas as transformações lineares sempre existe uma “constante”, uma matriz, de modo que a transformação linear fica definida por um fator multiplicativo. Algumas vezes, durante a história da Matemática, foi necessário definir uma multiplicação adequada para que as coisas ficassem como descrito acima, foi desta forma que se inventou o produto de matrizes.

Nesta seção vamos estudar um tipo de transformação que generaliza as transformações matriciais dos espaços vetoriais de dimensão finita. Em lugar de um produto de matrizes teremos uma integral simples ou múltipla. As integrais generalizam as somas e assim teremos uma generalização do produto de matrizes.

Vamos nos especializar em um dos tipos de transformadas: a transformada de Fourier. Primeiro discutiremos transformadas de forma mais geral, depois, particularizaremos chegando a transformada que nos propomos a estudar.

2.3.1 Definição e exemplos.

Um modelo de transformada a que nos referimos é o seguinte:

$$\Phi : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a, b]) ; \quad (2.4)$$

$$\Phi : f \mapsto \Phi(f) = g ; \quad (2.5)$$

$$\Phi(f)(y) = \int_a^b k(x, y)f(x)dx = g(y) ; \quad (2.6)$$

O espaço vetorial de funções não precisa ser $\mathcal{C}([a, b])$, mas preferimos sempre iniciar do particular para o geral.

Falando informalmente, a integral na última linha acima elimina a “variável” x de modo que a única variável existente nesta expressão é y portanto Φ transforma a função f em outra função g que se encontra definida com auxílio da integral e da “matriz” k , que recebe o nome de *núcleo*, ou algumas vezes de *kernel*, da transformada integral.

Análise com cuidado cada um dos exemplos abaixo procurando entender o que eles exemplificam. A notação algumas vezes assusta, o formalismo é um *mal* necessário, entretanto, sem ele não conseguimos sequer escrever programas.

Exemplo 7 Valores de transformadas integrais.

$$g(3) = \int_a^b k(x, 3)f(x)dx \in \mathbf{R}; \quad (2.7)$$

$$\Phi(f)(3) = g(3) = \int_a^b k(x, 3)f(x)dx \in \mathbf{R}; \quad (2.8)$$

$$\Phi(\text{sen})(t) = h(t) = \int_a^b k(x, t)\text{sen}(x)dx \quad h(t) \in \mathbf{R}; \quad (2.9)$$

$$\Phi(\text{sen})(3) = h(3) = \int_a^b k(x, 3)\text{sen}(x)dx \in \mathbf{R}; \quad (2.10)$$

$$k(x, y) := \cos(xy) ; \quad (2.11)$$

$$\Phi(\text{sen})(t) = \int_a^b \cos(xt)\text{sen}(x)dx = h(t) ; \quad (2.12)$$

$$\Phi(\text{sen})(3) = \int_a^b \cos(3x)\text{sen}(x)dx \in \mathbf{R} ; \quad (2.13)$$

Exercício 8 Transformadas integrais.

1. Considere $k(x, y) = \frac{\text{sen}(xy)}{x}$.

(a) Verifique que k é uma função limitada, determine $\|k\|_\infty$.

(b) Defina $\Phi(f) = \int_0^{2\pi} f(t)k(t, y)dt$ e calcule

$$\Phi(\text{sen}), \Phi(\text{cos}), \Phi(x \mapsto x), \Phi(x \mapsto x + x^2)$$

2. Seja $k(x, y) = \phi(y - x)$ em que ϕ é uma função positiva cuja integral é 1, (uma probabilidade), e com suporte $[-\epsilon, \epsilon]$. Mostre que se $\Phi(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)k(t, y)dt$ então

$$-\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f)(y)dy \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy \right|$$

3. Qual é o domínio de $g = \Phi(f)$;

$$\Phi(f)(y) = \int_a^b k(x, y)f(x)dx = g(y);$$

se o núcleo k for uma função contínua definida em $[a, b] \times [c, d]$.

4. Qual é o domínio de $g = \Phi(f)$;

$$\Phi(f)(y) = \int_a^b k(x, y)f(x)dx = g(y);$$

se o núcleo k for uma função contínua com suporte $[a, b] \times [c, d]$.

5. Verifique que o funcional linear

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

transforma a sucessão

$$g_n(x) = g(nx)$$

numa sucessão numérica que converge para zero, com

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x < -1.5 \\ (2/3)(x + 1.5)^2 & \Leftarrow x \in [-1.5, -0.5] \\ 1 - (4/3)x^2 & \Leftarrow x \in [-0.5, 0.5] \\ (2/3)(x - 1.5)^2 & \Leftarrow x \in [0.5, 1.5] \\ 0 & \Leftarrow x \geq 1.5 \end{cases}$$

Como você analisaria este fato, do ponto de vista de continuidade do funcional, se ele estiver definido no espaço das funções contínuas com a norma do sup ?

Teorema 24 Transformada integral.

O operador definido por

$$\Phi : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}([c, d]) ; \quad (2.14)$$

$$\Phi : f \mapsto \Phi(f) = g ; \quad (2.15)$$

$$\Phi(f)(y) = \int_a^b k(x, y)f(x)dx = g(y) ; \quad (2.16)$$

em que k é uma função contínua no retângulo $[a, b] \times [c, d]$ é um operador linear contínuo

$$\Phi : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}([c, d]) ;$$

na norma $\| \cdot \|_{\infty}$

Dem:

A linearidade do operador Φ :

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha f + \beta g) &= \int_a^b k(x, y)[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \\ &= \int_a^b k(x, y)\alpha f(x)dx + \int_a^b k(x, y)\beta g(x)dx = \\ &= \alpha \int_a^b k(x, y)f(x)dx + \beta \int_a^b k(x, y)g(x)dx = \\ &= \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g) \end{aligned}$$

A continuidade de Φ significa que uma pequena *perturbação* de f corresponde a uma pequena perturbação de $\Phi(f)$ relativamente a norma $\|\cdot\|_\infty$. Consideremos duas funções $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty &= \\ \left\| \int_a^b k(x, y)f(x)dx - \int_a^b k(x, y)g(x)dx \right\|_\infty &= \\ \left\| \int_a^b k(x, y)(f(x) - g(x))dx \right\|_\infty &\leq \\ \leq \sup_x |f(x) - g(x)| \sup_y \left| \int_a^b k(x, y)dx \right| \end{aligned}$$

Se supusermos agora que $\sup_x |f(x) - g(x)| \leq \epsilon$ então:

$$\begin{aligned} \|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty &\leq \\ \leq \epsilon \sup_y |K(b, y) - K(a, y)| &\leq 2\epsilon M = \epsilon' \end{aligned}$$

em que M é o máximo absoluto de $|K|$, K é uma primitiva de k e temos assim

$$\forall \epsilon > 0 \exists \epsilon' > 0; \|f - g\|_\infty < \epsilon \Rightarrow \|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty < \epsilon'$$

q.e.d.

Observação 14 Melhorando o teorema 24.

Verifique que o passo central da demonstração do teorema 24 se encontra nas linhas

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b k(x, y)(f(x) - g(x))dx \right\|_\infty &\leq \\ \leq \sup_x |f(x) - g(x)| \sup_y \left| \int_a^b k(x, y)dx \right| \end{aligned}$$

que faz a majoração da diferença entre as duas integrais. A Desigualdade de Hölder estabelece:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx} \sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q dx}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

em particular, como caso um caso particular da desigualdade de Hölder, temos

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \cdot \|g\|_\infty$$

Como os expoentes p, q tem o efeito de “melhorar” a função do ponto de vista de integração, sobre tudo em integrais sobre intervalos não limitados, e quanto maior for o expoente, pior pode ser a função, então vemos que a desigualdade de Hölder caracteriza que o produto de funções tem uma integral convergente quando f e g se “equilibram”. Pior f , melhor g . O pior tipo de função é aquela que é apenas limitada, e aí se tem a última expressada desigualdade de Hölder indicando isto. Finalmente observe que podemos re-escrever a desigualdade de Hölder na forma mais compacta:

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &\leq \|f\|_p \|g\|_q \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= 1 \end{aligned}$$

Com a desigualdade de Hölder podemos ter uma expressãomais geral para o teorema 24 substituindo as duas linhas acima por

$$\|k(f - g)\|_1 \leq \|k\|_\infty \|(f - g)\|_1$$

entãpodemos enfraquecer as hipóteses do teorema 24 estabelecendo que f precisa ser apenas absolutamente integrável e k limitada valendo o teorema com limites não finitos na integral. A desigualdade de Hölder pode ser encontrada em [20, parte 2, pag 218].

Exercício 9 1. Dada uma função integrável f , verifique em que domínio as expressões seguintes definem novas funções integráveis:

$$t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dx$$

$$t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-tx} dx$$

2. Faça o gráfico

$$t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(nx)e^{itx} dx$$

com

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x < -1.5 \\ (2/3)(x+1.5)^2 & \Leftarrow x \in [-1.5, -0.5) \\ 1 - (4/3)x^2 & \Leftarrow x \in [-0.5, 0.5) \\ (2/3)(x-1.5)^2 & \Leftarrow x \in [0.5, 1.5) \\ 0 & \Leftarrow x \geq 1.5 \end{cases}$$

para alguns valores positivos e inteiros de n e faça uma hipótese sobre o comportamento assintótico desta sucessão. Use um programa de Cálculo numérico ou Computação Algébrica para resolver este exercício, você assim poderá executar várias experiências usando diferentes valores do parâmetro.

2.3.2 Transformada de Fourier.

A transformada de Fourier⁶, tem o que ver com as séries de Fourier, na verdade são mesma coisa em situações diferentes.

Se o núcleo for $k(\xi, x) = e^{-i\xi x}$ o operador integral resultante será:

$$T(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

e se chama *transformada de Fourier* de f . A notação \hat{f} para a transformada de Fourier é um hábito bem estabelecido. Por conveniência “tipográfica” algumas vezes usaremos \mathcal{F} em vez de “circunflexo”.

Como $k(\xi, x) = e^{-i\xi x}$ é limitada a transformada de Fourier se aplica a funções que sejam absolutamente integráveis de acordo com a observação 14.

A transformada de Fourier ganhou uma aplicação muito especial durante a primeira metade do século 20, análise e síntese de sinais, basicamente nas comunicações⁷. Se f for um sinal é função do tempo t enquanto que sua transformada *de Fourier* tem como variável a frequência. Para acompanhar esta tradição se costuma escrever a função f tendo como “variável” t enquanto que \hat{f} tem por variável a letra grega ξ .

O estudo de algumas propriedades algébricas da transformada de Fourier conduzem a uma melhor compreensão da mesma e de algumas de suas aplicações.

Derivada e transformada de Fourier.

Vamos calcular a derivada de \hat{f} :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{d\xi} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\xi+h)x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} dx & \end{aligned}$$

⁶a *integral de Fourier* é uma denominação histórica que é preferível evitar, “*integral de M*” significa hoje um método de cálculo de integrais, como *integral de Riemann*, *integral de Lebesgue* ou *integral de Kurzweil-Henstock*, não usaremos a denominação, *integral de Fourier*, no futuro.

⁷embora tenha sido desbancada por outro tipo de transformação, o método é intrinsecamente o mesmo com algumas renovações.

como a última integral converge, o integrando é o produto de uma função integrável por uma função limitada, então limite pode entrar na integral:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} dx &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} dx &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ix) e^{-i\xi x} dx &= -i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

Achamos a transformada de Fourier da função $x \mapsto xf(x)$ multiplicada por $-i$. Podemos definir mais um operador linear que irá simplificar a notação anterior além de ser ele mesmo importante:

Definição 12 *Operador linear Multiplicação.*

Seja $M : f \mapsto (x \mapsto xf(x))$. M é um operador linear, e $M(f)(x) = xf(x)$.

Com esta definição concluímos que

$$\frac{df}{d\xi} = -i\mathcal{F}(M(f))$$

Corolário: a transformada de Fourier de uma função *apenas* integrável, produz uma função diferenciável.

Vamos agora calcular $\mathcal{F}(\frac{df}{dt})$ naturalmente sob a suposição mais forte de que temos uma função diferenciável cuja transformada estamos calculando.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\frac{df}{dt}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)' e^{-i\xi x} dx = \\ f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -i\xi f(x) e^{-i\xi x} dx &= \end{aligned}$$

Observe agora que f é integrável sobre \mathbf{R} e isto significa que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

e como a exponencial $e^{-i\xi x}$ é limitada temos então a avaliação

$$f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0$$

portanto

$$i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi \hat{f}(\xi)$$

Ainda usando a notação do operador Multiplicação, temos

$$\mathcal{F}(\frac{df}{dt})(\xi) = iM(\hat{f})(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$

Estes dois resultados apontam para um “interplay” entre o operador derivada, o operador Multiplicação e a transformada de Fourier. Derivadas de ordem superior evidenciam melhor qual é esta relação, ver [7, pag.368-369], para uma listagem destas propriedades no caso multivariado.

Transformada de Fourier e translação.

A translação é uma transformação importante porque preserva a “integral usual”⁸.

Definição 13 *Translação f_h .*

Seja $f \in \mathcal{E}$; \mathcal{E} é um espaço de funções localmente integráveis sobre \mathbf{R} , e seja $h \in \mathbf{R}$. Definimos uma nova função $f_h(x) = f(x - h)$, a translação de f por h .

⁸usual significa que se usa com grande frequência e este é o caso da integral de Riemann. Esta forma de entender integrais é um caso particular da integral de Lebesgue.

Teorema 25 ⁹

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-h)dx$$

Vamos calcular $\mathcal{F}(f_h)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_h)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-h)e^{-i\xi x} dx = \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h-h)e^{-i\xi x+h}d(x+h) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ih\xi}e^{-i\xi x} dx = \\ e^{ih\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx &= M_{e^{ih\xi}}\mathcal{F}(f)(\xi) \end{aligned}$$

A série de Fourier é um exemplo de transformação integral, veja sua definição no presente contexto:

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{N}) ; \mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}(f) = \hat{f} = \quad (2.17)$$

$$= \left(\frac{a_0}{2}, (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n), \dots\right) ; \quad (2.18)$$

$$(\mathcal{F}(f))(n) = \hat{f}_n = (a_n, b_n) = \quad (2.19)$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sen(nx)dx\right) ; \quad (2.20)$$

As séries de Fourier são ainda chamadas de *transformada discreta de Fourier*, a palavra “discreta” faz menção à série que aparece em lugar de uma integral. Mas as séries são tipo de integral...

Vamos introduzir um tipo particular de sinal que vai representar para a teoria um papel semelhante ao dos *vetores normais* para a *Álgebra Linear*, aliás, tudo que estamos fazendo é apenas um tipo de aplicação da *Álgebra Linear*. São *impulsos*:

Definição 14 *Impulso*.

Um impulso é um sinal positivo de energia 1, (leia-se, integral 1).

Vejam alguns exemplos.

Exemplo 8 *Transformada de Fourier de sinais*.

Funções como $\chi_{[-a,a]} = \chi_a ; a > 0$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow x \in [-a, a] \\ 0 & \Leftarrow x \notin [-a, a] \end{cases} \quad (2.21)$$

são exemplos de sinais. Se $a = \frac{1}{2}$ temos um exemplo de impulso de energia constante 1 durante o intervalo de tempo $[-a, a]$. A transformada de Fourier de χ_a é

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi_a)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\exp(-i\xi x)dx = \\ &= \int_{-a}^a \chi(x)\exp(-i\xi x)dx = \int_{-a}^a 1 \cdot \exp(-i\xi x)dx = \\ &= \frac{\exp(-i\xi x)}{-i\xi} \Big|_{-a}^a = 2 \frac{\sen(a\xi)}{\xi} \end{aligned}$$

relembrando que $\exp(-ia) = \cos(a) + i\sen(a)$. A função $\frac{\sen(a\xi)}{\xi}$ tem uma propriedade de conservação de energia: a integral não depende do parâmetro a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen(at)}{t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen(t)}{t/a} d(t/a) = \\ &= \frac{a}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen(t)}{t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen(t)}{t} dt = \pi \end{aligned}$$

e assim, para dois valores diferentes do parâmetro a , $\frac{\sen(at)}{t}$ tem a mesma energia: π .

⁹este resultado vale apenas para alguns tipos de integrais, vale em particular para a integral de Riemann e sua generalização imediata a integral de Lebesgue

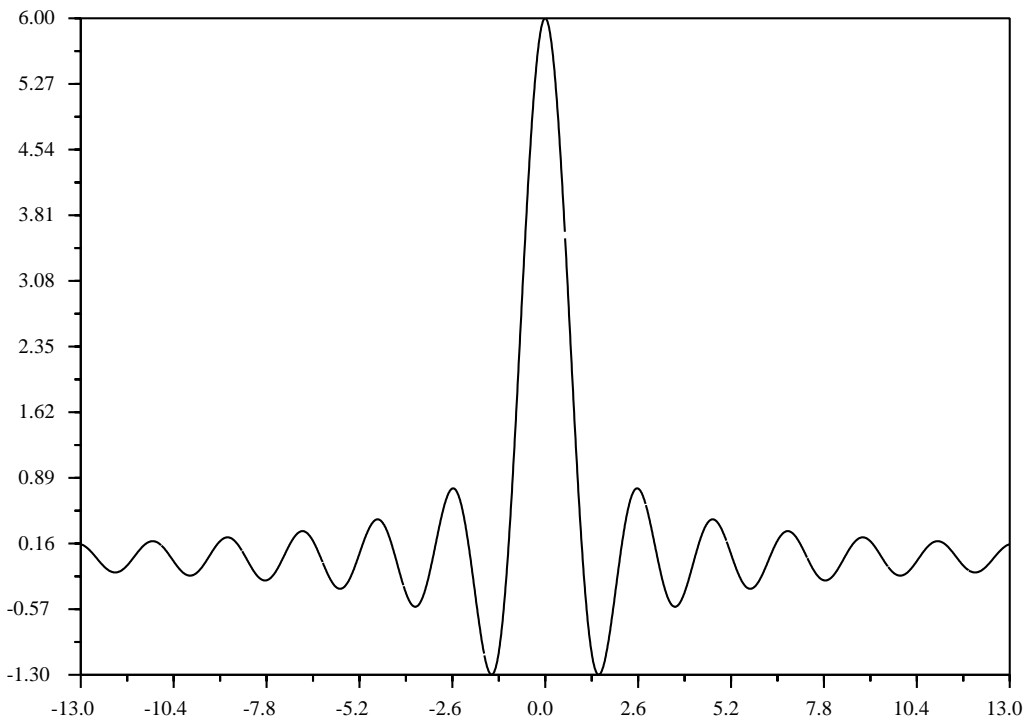


Figura 2.3: A função sinc com parâmetro $a = 3$.

Uma classe de funções particularmente interessantes será a da família dependente do parâmetro \underline{a} :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(at)}{\pi t} \quad (2.22)$$

porque todos os membros desta família tem energia 1. Se afrouxarmos a definição de impulso, omitindo o positivo, teríamos uma família de impulsos dependendo do parâmetro \underline{a} . A ciência é com frequência feita com tais afrouxamentos... lembre a observação feita anteriormente a respeito da distribuição de Dirac.

Estes cálculos demonstram o teorema:

Teorema 26 Unidade aproximada não positiva.

A família \underline{a} um parâmetro

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(at)}{\pi t}$$

é uma unidade aproximada, em outras palavras, uma família que tem como limite a δ_0 quando o parâmetro \underline{a} cresce indefinidamente.

Observação 15 Unidade da convolução.

O teorema contém implicitamente o fato de que as convoluções com os elementos da família, convergem para a função f que seria o resultado de $\delta_0 * f$. A “delta de Dirac” é a unidade da operação de convolução.

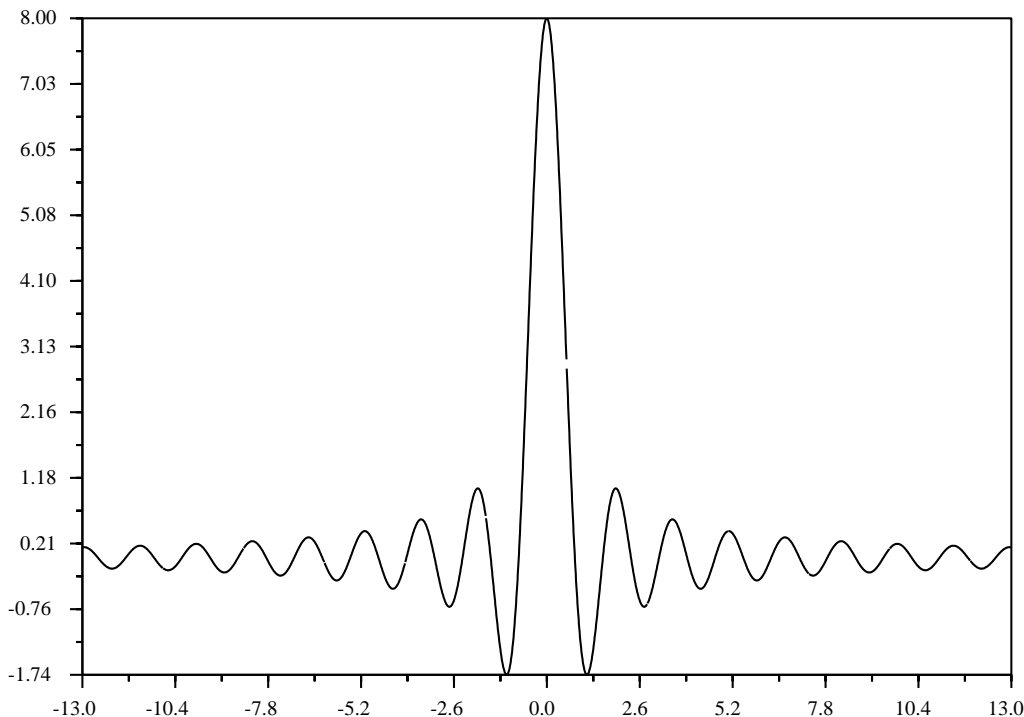


Figura 2.4: A função sinc com parâmetro $a = 4$.

num espaço “maior” formado por distribuições. Esta é uma forma algébrica de se chegar às distribuições, os espaços de funções, em que a convolução é tomada como multiplicação, são anéis sem unidade que podem ser completados, como os racionais são completados pelos reais, se passando a ter um anel com unidade: a “delta de Dirac”.

Os fatos aqui mencionados não são todos óbvios, mas são bem conhecidos.

Os gráficos (fig. 2.6), (fig. 2.7) são dois exemplos de sinais quadrados com suas respectivas transformadas de Fourier. Observe que estes sinais quadrados se podem transformar em impulsos se os multiplicarmos por uma constante: o inverso do valor de suas integrais. Como a transformada de Fourier é linear, se pode obtê-la para os novos impulsos usando o mesmo fator multiplicativo na imagem.

Observe que se a for pequeno, $\frac{\text{sen}(at)}{t}$ fica lenta, diminuindo a frequência. Reveja também a discussão feita na seção anterior relativamente ao efeito das transformadas de Fourier de funções com suporte grande.

Podemos extrapolar o efeito geométrico deste exemplo. A função χ_a tem uma propriedade que permite estender sua transformada de Fourier a outras funções com propriedades semelhantes: seu suporte é limitado.

Exemplo 9 suporte de uma função. No gráfico (fig. 2.6) o suporte da função é o intervalo $[-5, 5]$ enquanto que no gráfico (fig. 2.7) o suporte é o intervalo $[-10, 10]$.

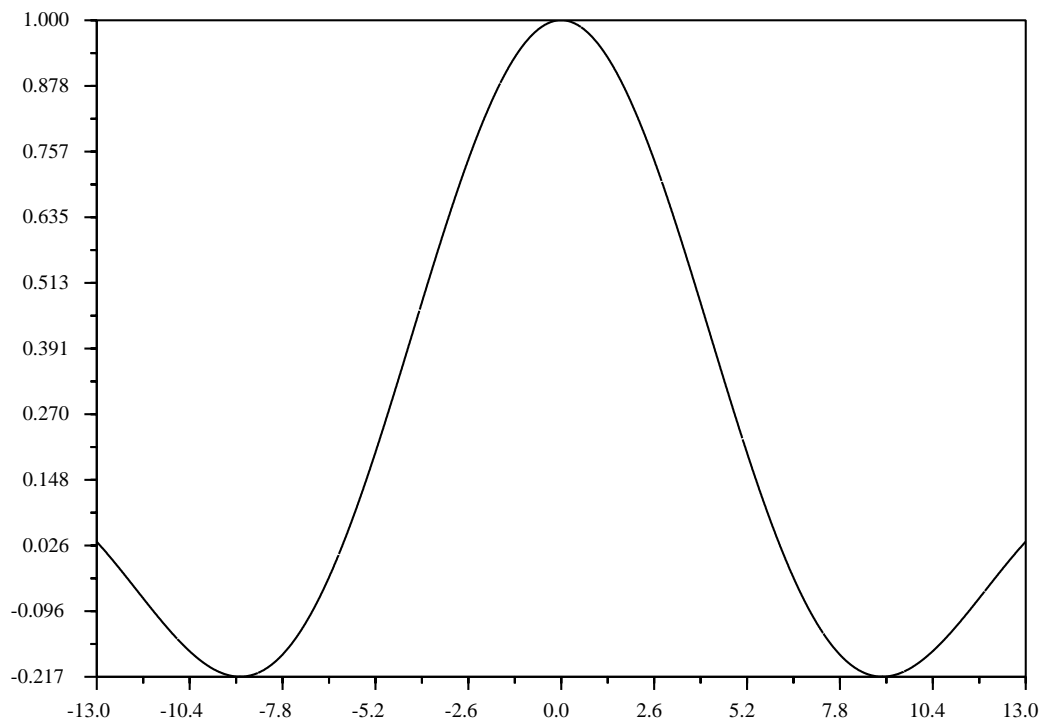


Figura 2.5: A função sinc com parâmetro $a = 1/2$.

Observação 16 *Ponto de acumulação de um conjunto.*

Por exemplo, as raízes de polinômios pertencem ao suporte deles, porque qualquer sucessã que convirja para uma raiz, se não for uma sucessã constante, será formada de pontos em que o polinômio será diferente de zero, pontos típicos do suporte, vemos assim que, embora as raízes não sejam pontos típicos do suporte são pontos de acumulação do suporte. Os pontos de acumulação não satisfazem diretamente à definição dos elementos dum conjunto, entretanto representando o comportamento assintótico de sequências de elementos do conjunto, tem que ser considerados no fecho do conjunto que reúne todos os pontos arbitrariamente próximos ao conjunto. A palavra chave aqui é comportamento assintótico para definir ponto de acumulação.

O gráfico (fig. 2.8) representa uma função de suporte limitado, um *impulso*. Em geral chamamos de *impulsos* às funções positivas cujo suporte seja limitado, e a integral seja 1, como definimos acima, mas isto não é uma unanimidade entre os autores. Com *impulso* sub-entendem funções que representam um pequeno fenômeno de baixa quantidade energia, e como em geral não esperamos encontrar, facilmente, fenômenos com energia negativa, os *impulsos* são positivos e a suporte compacto. Você pode encontrar autores se referindo a *impulsos de energia* ϵ , a idéia tem compatibilidade com a nossa: são sinais de energia pequena. Há quem veja uma gaussiana como um *impulso*..., tem energia finita, (integral finita), e se não tem suporte limitado pelo menos fora de um intervalo limitado, conveniente a uma determinada precisã, os valores da gaussiana são desprezíveis, e uma multiplicação por uma constante adequada reduz sua integral a 1.

As transformadas de *impulsos*, com esta definição acima, se assemelham ao núcleo de Dirichlet $\frac{\text{sen}(at)}{t}$ no sentido de que suas integrais podem ser obtidas aproximadamente sobre um intervalo limitado porque

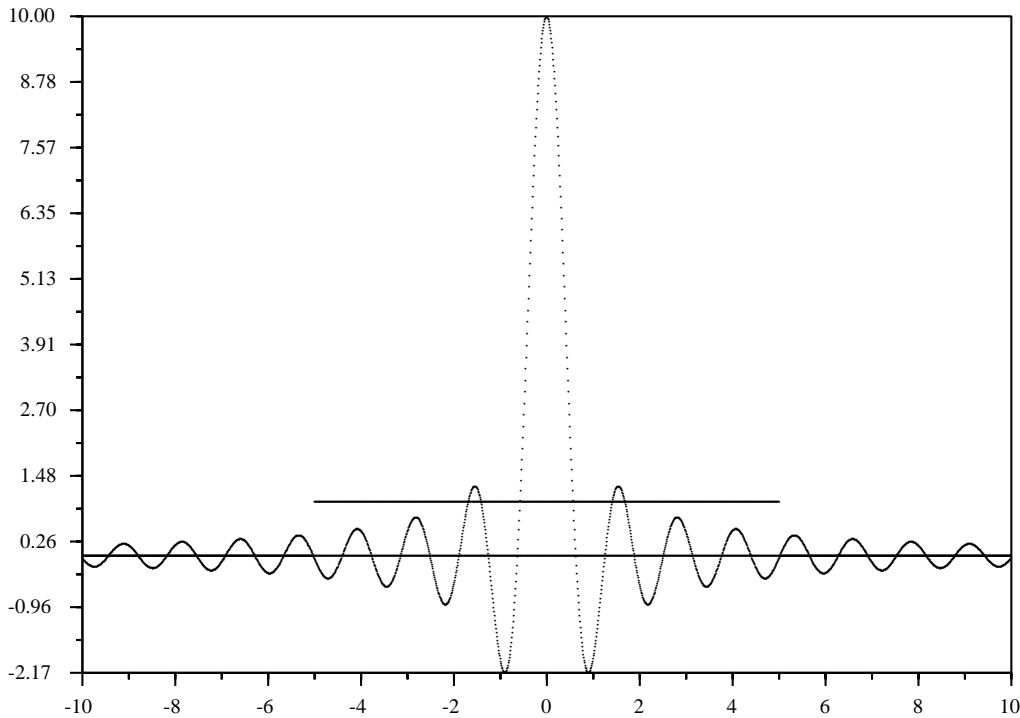


Figura 2.6: $2\frac{\text{sen}(at)}{t}$ é transformada do sinal $\chi_{[-a,a]}$ com $a = 5$

o que sobrar fora deste intervalo é de pequeno valor.

Observação 17 *Gaussiana é uma função da forma*

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{b^2}\right)$$

seu limite em $\pm\infty$ é zero e sua integral é finita valendo um múltiplo de $\sqrt{2\pi}$, tem exatamente este valor se $b = 1$.

O cálculo da integral de uma Gaussiana se faz usando o fato de que $\exp(-x^2 - y^2) = \exp(-x^2)\exp(-y^2)$ consequentemente:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - y^2) dx dy &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy &= \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right)^2 & \end{aligned}$$

agora a integral dupla pode ser calculada usando-se coordenadas polares:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - y^2) dx dy =$$

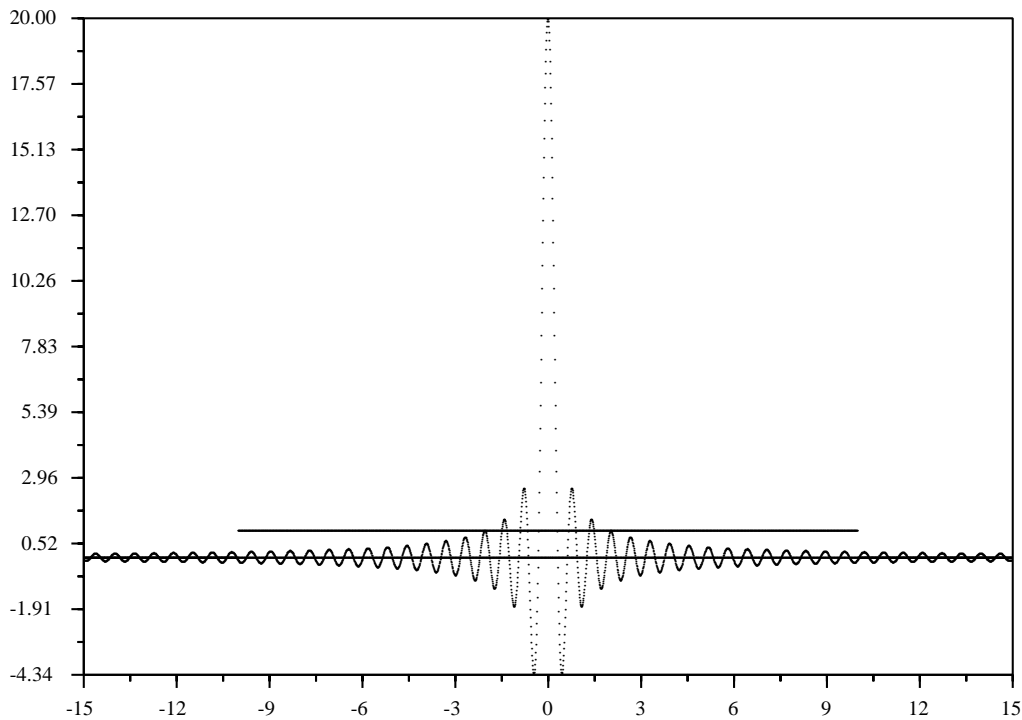


Figura 2.7: $2 \frac{\text{sen}(at)}{t}$ é transformada do sinal $\chi_{[-a,a]}$ com $a = 10$

$$\int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \exp(-\rho^2) \rho d\rho d\theta = 2\pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{2\pi}$$

Exercício 10 Transformadas de Fourier.

1. (a) Faça o gráfico de

$$\begin{cases} |x| \leq 2 & \Rightarrow f(x) = -(x-2)^2(x+2)^2; \\ |x-4| < 1 & \Rightarrow f(x) = (x-3)^2(x+5)^2 - 1; \\ 0 \text{ nos demais casos} \end{cases} \quad (2.23)$$

(b) Qual o suporte de f ?

2. Calcule as transformadas de Fourier de $\chi_a = \chi_{[-a,a]}$ com $a \in \{1, 2, 10, 30\}$ e faça os gráficos correspondentes.
3. Deduza, usando a linearidade, qual é transformada de Fourier de um múltiplo de um sinal: $K\chi_a$.
4. Vamos chamar de núcleo a um sinal cuja integral seja 1. Verifique que $\frac{1}{2a}\chi_a$ é um núcleo e calcule sua transformada de Fourier.

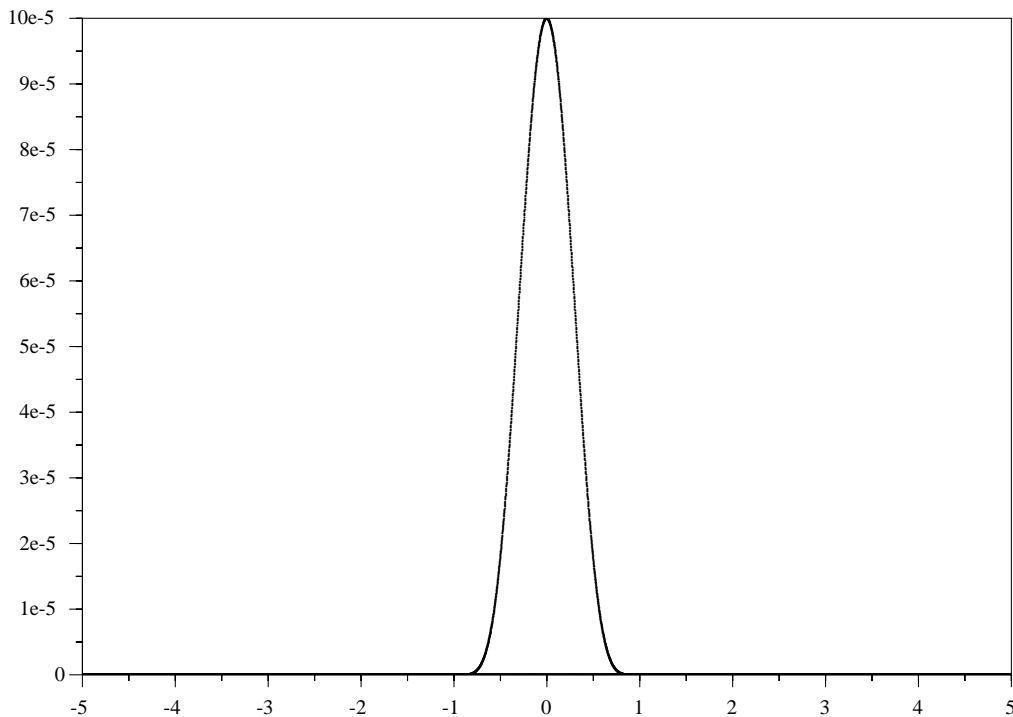


Figura 2.8: gráfico de um sinal, função positiva a suporte compacto, $y = f(x) = e^{(x-1)^{-2}} e^{(x+1)^{-2}}$.

5. Encontre a constante multiplicativa que transforma a função de Dirichlet $\frac{\sin(at)}{t}$ num núcleo, (apesar que ela tenha valores negativos, o conjunto dos pontos em que ela é positiva é percentualmente muito maior do que os pontos em que ela é negativa, e esta comparação percentual aumenta em favor da parte positiva quando n cresce...)
6. Procure descrever, (se inspire em alguns gráficos), os limites:
 - (a) (1) $\lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2a}\chi_a\right) \rightarrow 0$ (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\chi_a) \rightarrow \delta_0$
 - (b) (1) $\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2a}\chi_a\right) \rightarrow 1$ (2) $\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}(\chi_a) \rightarrow 0$
7. Comente, a partir dos experimentos com os núcleos $\frac{1}{2a}\chi_a$ que se $t \mapsto f(t)$ for limitada no tempo, $\omega \mapsto \hat{f}(\omega)$ não será limitada na frequência, de exemplos.
8. Obtenha numericamente o gráfico da transformada de Fourier da gaussiana $x \mapsto \exp(-x^2)$.
9. Calcule a derivada de \hat{f} em que f é uma Gaussiana e conclua que \hat{f} é também uma Gaussiana. Você pode encontrar uma Gaussiana f tal que $\hat{f} = f$, é um ponto fixo da Transformada de Fourier.

Vejamos mais um exemplo de classe diferente dos outros e de fundamental importância, é a transformada de Fourier de uma função que não existe no sentido usual.

Exemplo 10 Transformada de Fourier da exponencial.

É fácil verificar que a transformada de Fourier da função $x \mapsto e^{ix}$ não existe. Entretanto com frequência precisamos de trabalhar com fórmulas em que ela aparece. Vamos mostrar que num certo sentido estendido ela existe. Para isto tomemos a expressão:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} e^{-itw} dt \quad (2.24)$$

que é expressão formal da transformada de Fourier da exponencial complexa mas que representa uma integral divergente. Se, entretanto, multiplicarmos esta função por qualquer função integrável, a função resultante será integrável porque esta exponencial é limitada. Considere então a seguinte seqüência de equações:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{i\xi t} e^{-itw} dt dw = \quad (2.25)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{i\xi t} e^{-itw} dw dt = \quad (2.26)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{-itw} dw dt = \quad (2.27)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{i\xi t} dt = f(\xi) = \delta_{\xi}(f) \quad (2.28)$$

Como estas integrais todas existem, por comparação vamos dizer que a transformada de Fourier de $x \mapsto e^{i\xi x}$ é a medida de Dirac no ponto ξ que só tem sentido de ser pensada como um funcional linear que pode ser aplicado a uma função o que corresponde as integrais calculadas acima.

A propriedade seguinte, das transformada de Fourier, ligada ao produto de funções, repete resultado semelhante ao que já obtivemos no caso da transformada discreta de Fourier.

Teorema 27 Produto ponto a ponto e convolução.

A transformada de Fourier do produto ponto a ponto de duas funções é o produto de convolução das respectivas transformadas:

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

Dem:

$$\begin{aligned} \hat{f} * \hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) \hat{g}(\xi - w) dw = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itw} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-is(\xi - w)} ds \right) dw = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itw} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-is\xi} e^{isw} ds \right) dw = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itw} dt e^{-is\xi} e^{isw} ds dw = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itw} dt e^{isw} dw e^{-is\xi} ds = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) f(s) e^{-is\xi} ds = \mathcal{F}(fg)(\xi)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Há uma *floresta* de possibilidades a partir daqui. Ver por exemplo [3, cap. 2,3] onde, de forma muito resumida, se faz uma descrição bem completa das aplicações das integrais de Fourier, cerca de 12 áreas distintas são cobertas. Vamos nos concentrar numa delas que terá sua sequência natural na segunda parte deste livro.

2.4 Sinais limitados no tempo e na frequência.

Já discutimos que uma situação ideal para *sinais* seria se eles fossem limitados na *faixa de tempo* e simultaneamente também fossem limitados na *faixa de frequência*. Vamos demonstrar formalmente que tais sinais não existem: *limitados no tempo e na frequência*. Já sentimos isto nos exemplos anteriores. Mas veremos que podemos ter aproximações muito boas dos mesmos, e sobretudo vamos analisar porque seria importante ter *sinais limitados no tempo e na frequência*. O espaço $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ que descobrimos como um bom espaço onde fazer *transformação de Fourier* não é uma resposta afirmativa para esta questão de limitação na *faixa* de tempo e na *faixa* de frequência.

Primeiro o que significa sinal? Até agora usamos esta palavra com seu significado intuitivo sem escrever uma definição. Em [8], logo nas primeira página, encontramos a atitude corajosa de descartar uma definição. É uma palavra mal definida que todo mundo entende... pode significar um *átomo* em matéria de comunicações, ou pode significar uma comunicação completa. As comunicações se devem decompor, e as formas mais elementares desta comunicação nos decidimos chamar de *impulsos*. Portanto um sinal compõe de uma *superposição* de *impulsos*. A indefinição em que a própria palavra se encontra pode estar ligada a rapidez com que os métodos envolvendo as comunicações evoluem é tal, que a qualquer momento podemos encontrar uma *forma mais simples e elementar* fazer comunicação... Mas vamos nos fixar em alguma coisa no *tempo* para construir uma teoria.

Definição 15 Sinal.

Chamaremos de **sinal** a uma função f de quadrado integrável em \mathbf{R} , isto é tal que sua norma no sentido de $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, $\|f\|_2$, seja finita.

Os *impulsos* serão assim os sinais η de *potência total* 1^{10} . Um sinal de potência menor que 1 seria imperceptível, e um sinal de potência total 1 geraria um “bit” para transmissões. Estamos usando as definições de [8] apenas usando a palavra *impulso* para representar os *sinais* básicos e deixando a palavra *sinal* para representar *uma comunicação*.

Vamos usar as transformadas de Fourier para a análise dos sinais, e vamos definir duas quantidades α, β , associadas a um sinal f :

$$\begin{aligned}
f ; \alpha^2 &\approx \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt \\
\hat{f} ; \beta^2 &\approx \int_{-b}^b |\hat{f}(\zeta)|^2 d\zeta
\end{aligned}$$

em que a, b são números grandes, mas finitos. Se um sinal fosse limitado na *frequência e no tempo*, então números a, b definiriam as faixas de tempo e de frequência, $[-a, a], [-b, b]$ do sinal f . Os números α e β são respectivamente a *potência total* do sinal e a *potência espectral total* do sinal. Um sinal limitado na frequência significa que sua *potência espectral* está confinada ao intervalo $[-b, b]$.

¹⁰observe que estamos mudando a definição de impulso anterior, antes exigimos que $\|\eta\|_1 = 1$, agora $\|\eta\|_2 = 1$.

Suponhamos que um sinal $f \neq 0$ infinitamente diferenciável, seja limitado no tempo e na frequência: $\alpha = \beta = 1$. Então, para $|t| > a$

$$f(t) = \int_{-b}^b \hat{f}(\zeta) \exp(i\zeta t) d\zeta = 0$$

e derivando n vezes dentro da integral temos:

$$f^{(n)}(t) = (i)^n \int_{-b}^b \hat{f}(\zeta) \zeta^n \exp(i\zeta t) d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{-b}^b \hat{f}(\zeta) \zeta^n \exp(i\zeta t) d\zeta = 0$$

Vamos agora escrever:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-b}^b \hat{f}(\zeta) \exp(i\zeta(t-a)) \exp(i\zeta a) d\zeta = \\ &= \int_{-b}^b \hat{f}(\zeta) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^k \zeta^k}{k!} \right] \exp(i\zeta a) d\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^k}{k!} \int_{-b}^b \hat{f}(\zeta) \exp(i\zeta a) \zeta^k d\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = 0 \\ f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^k}{k!} = 0 \end{aligned}$$

donde se deduz que f e todas suas derivadas se anulam no ponto a , isto é, se f for limitada no tempo e na frequência, f e todas as suas derivadas se anulam num ponto interior do suporte o que é uma contradição com $f \neq 0$, portanto $f \equiv 0$

Uma forma intuitiva de ver o que isto significa sai do ponto fixo da Transformada de Fourier, a Gaussiana. Se uma função for maior que uma Gaussiana, a sua transformada de Fourier será menor que uma Gaussiana, e vice-versa. Isto mostra que sinais a suporte compacto terá transformadas de Fourier maiores que as Gaussianas, não podendo ser a suporte compacto.

Porque seria importante que os sinais fossem limitados na frequência e no tempo? a resposta parece óbvia, sã sinais de energia limitada e com poucas frequências para serem transmitidas ou analisadas. Mas como eles não existem o que fazer? Desde 1960 diversos pesquisadores das áreas de análise de sinais e de transmissão de sinais tentaram limitar o sinal sob forma de “enjanelamento” antes de fazer sua transformada de Fourier. Em suma, começava-se a concluir que o “defeito” se encontrava na *transformada de Fourier* que precisava ser adaptada para lidar melhor com sinais de energia localizada.

2.5 Transformadas de Fourier enjaneladas.

A notação musical é um bom exemplo para começar. Ela informa ao músico **que nota**, frequência, ele deve tocar, em **que momento e por quanto tempo**, para resultar naquilo que se espera como música, *resultado final do conjunto dos sinais sonoros com aspecto agradável pelo menos para alguns...* qualquer coisa que mude, o *momento* da emissão do sinal, sua *duração* ou a *frequência* muda a *música*. O mesmo vai se dar com uma conversa telefônica ou com a leitura dos dados numa fita gravada. São exemplos exatamente semelhantes, apesar de que as técnicas a serem empregadas em cada caso mudem devido ao tipo de decodificador envolvido, no caso do ouvido humano se diz que há um aparato especial de decodificação que aponta para um tipo também especial de análise de sinais, ver [2, pag 22,23] ou [5].

Obviamente que \hat{f} fornece as informações sobre as frequências de f , o problema é que a leitura das informações sobre a localização no tempo não é fácil, ou natural.

A figura (fig. 2.9) é o gráfico da função a suporte compacto, “janela”, g , usada para *localizar* alguma informação em f . Na (fig. 2.10) os gráficos conjuntos das funções g, f, fg .

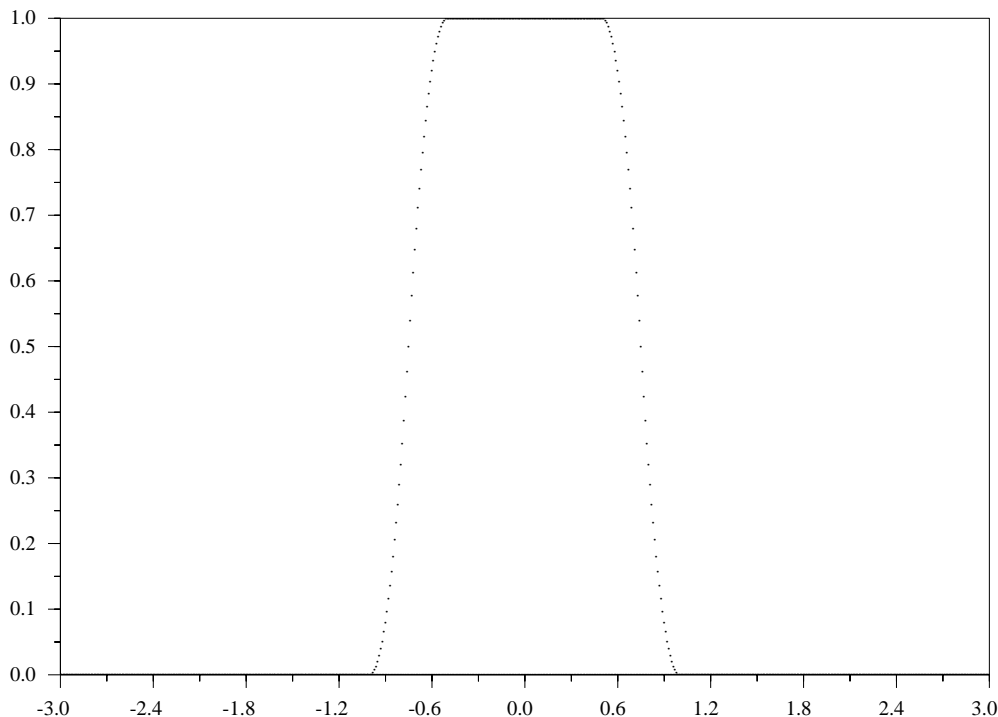


Figura 2.9: função janela constante 1 no intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e nula fora do intervalo $[-1, 1]$.

O objetivo do próximo exercício é de mostrar-lhe que existem, e como se podem construir, janelas. Alguns dos exercícios do pacote abaixo já apareceram anteriormente, e obviamente não é necessário repetí-los, eles aqui formam um conjunto integrado para mostrar a técnica de construção de janelas.

Exercício 11 *Janelas.*

1. Considere a função definida por $f_1(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ estendida por continuidade com $f_1(0) = 0$. Verifique que f_1 assim como todas as suas derivadas, se anulam na origem e que f_1 é uma função de classe $C^\infty(\mathbf{R})$.
2. Seja $H_o(x) = \chi_{[0, \infty]}$ a função característica da semi-reta positiva. Verifique que $f_2(x) = f_1(x)H_o(x)$ é uma função de classe $C^\infty(\mathbf{R})$.
3. Defina agora $f_3(x) = f_2(a-x)f_2(a+x)$. Verifique que f_3 é uma função de classe $C^\infty(\mathbf{R})$, com suporte no intervalo $[-a, a]$.
4. núcleo: Verifique que se $\eta(x) = \frac{f_3(x)}{\int f_3(x)dx}$ então η é uma função positiva, de classe $C^\infty(\mathbf{R})$, a suporte compacto com integral = 1.
5. Verifique que existem núcleos com suporte arbitrariamente grandes ou pequenos, centrados num ponto dado \underline{a} , por exemplo existe um núcleo com suporte de medida ϵ centrado no ponto \underline{a} .
6. Mostre que $\int \eta * g(x)dx = \int g(x)dx$ para qualquer função g a suporte compacto e integrável. Mostre que se g for contínua numa vizinhança do ponto \underline{a} então existe existe um núcleo η tal que

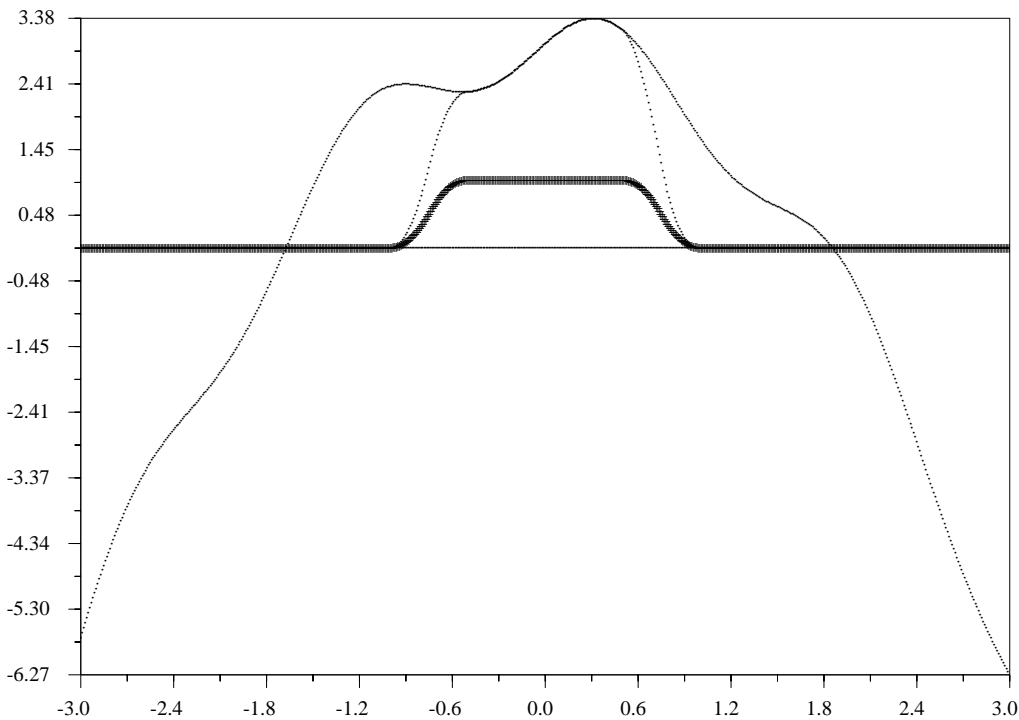


Figura 2.10: enjanelamento de um sinal f por multiplicação por uma função a suporte compacto g . Gráfico conjunto de g, f, fg .

$(\forall x)(x \in \square(a) \Rightarrow \eta * g(x) = g(x))$. Verifique também que se \underline{a} for um ponto de salto, $g^+(a) - g^-(a) = d$, então $\eta * g(a) = \frac{d}{2}$. Compare este resultado com o gráfico (fig. 1.2).

O significado do enjanelamento representa uma localização no tempo de um sinal que não precisa ser limitado no tempo. Definimos então a *transformada de Fourier enjanelada* como

Definição 16 *Transformada de Fourier enjanelada.*

$$T_a^{jan}(\zeta) = \int f(x)g(x-a)e^{-i\zeta x} dx \quad (2.29)$$

em que g é uma função a suporte compacto identicamente 1 sobre “um aberto” do suporte. Ver figuras (fig. 2.9) e (fig. 2.10).

Esta definição tem diversos defeitos que é preciso pelo menos discutir. A função a suporte compacto não está particularizada o que significa que existem muitos possíveis “enjanelamentos”, ou ainda que o “enjanelamento” depende da escolha de g , na verdade na escolha do *conjunto aberto*. Isto é um fato que não chega a ser incômodo, a função g tem que ser um amaciamento de uma função característica como mostra a figura 2.10 afim de alterar f o mínimo possível, tem ser diferenciável para não alterar as características de diferenciabilidade de f de forma muito rude. Enfim há poucas escolhas possíveis para g . Voltaremos depois a esta indefinição. Vamos melhorar a definição sob outro aspecto que veremos ser muito importante posteriormente.

Na definição 16 o que é importante mesmo é o “fator” de translação a , entretanto ele pode ser melhorado para produzir efeitos mais contundentes nesta análise local do sinal. Por exemplo, se em vez de

$$T_a^{jan}(\zeta) = \int f(x)g(x-a)e^{-i\zeta x} dx$$

tivermos

$$a_{n,m} = T_{n,m}^{jan}(a, \zeta_0) = \int f(x)g(x-ma)e^{-in\zeta_0 x} dx \quad (2.30)$$

o resultado será um levantamento acurado do que acontece em volta do ponto a e relativamente à frequência ζ_0 , para um valor fixo da frequência ζ , produzindo assim os coeficientes $a_{n,m}$.

Definição 17 *Transformada Enjanelada Discreta de Fourier.*

Os números definidos na (eq. 2.30) se chamam coeficientes de da transformada de Fourier enjanelada.

O seguinte código do **SciLab** lhe permite visualizar sucessivos gráficos mostrando o efeito do enjanelamento. Código semelhante deve funcionar no **MatLab**.

```
function [x,y1,y2,y3,0]=fourloc(inicio,fim,a,n)
  x = [inicio:0.01:fim], lx = length(x),
  getf('janela.data')
  deff('y=f(x)', 'y=-x**2 +0.5*sin(4*x) + 3')
  for k=[1:lx],
    y1(k)=f(x(k)),
    0(k) = 0,
    y2(k)=f(x(k))*janela(x(k)-n*a),
    y3(k)=janela(x(k)-n*a),
  end,
  n1=0.3,n2=0.5,n3=0.7,n4=0.81
  plot2d1("onn",x', [0,y1,y2,y3], [n1,n2,n3,n4])
end,
```

A equação deste enjanelamento é:

```
function y=janela(x)
  if x <= -1 then
    y = 0
  elseif and([x > -1,x<=-0.75]) then
    y = 8*(x+1)**2,
  elseif and([x>-0.75,x<=-0.5]) then
    y = -8*(x+0.5)**2 + 1,
  elseif and([x>-0.5,x<=0.5]) then
    y = 1
  elseif and([x>0.5,x<=0.75]) then
    y = -8*(x-0.5)**2 + 1
  elseif and([x>0.75,x<=1]) then
    y = 8*(x-1)**2
  else y = 0
  end,
```

end,

que precisa se encontrar no arquivo *janela.data* para ser lido pelo **SciLab**.

Depois de lidos os arquivos acima pelo **SciLab**, você pode executar o código seguinte:

```
for k=[1:10], fourloc(-3,3,0.1,k);end
```

para ver *um filme* dos sucessivos “cortes”feitos na função f pelo enjanelamento g .

Concluindo, relativamente à transformada de Fourier não sinais limitados na faixa do tempo e da frequência o que aponta para um defeito desta transformada que mesmo assim, com algumas correções, foi usada por mais de meio século, como suporte teórico para as telecomunicações com o sucesso que a história registrou. Foram as sucesivas correções, nesta velha transformada, que abriram caminho para outro suporte teórico. Vamos desenvolver na próxima seção estas correções como um método pedagógico e *registro histórico* que nos colocarão no ponto de apresentar a teoria atual no próximo capítulo. Seguiremos de perto o método de [2, capítulos 1 e 2].

Não daremos maior importância às transformadas de Fourier enjaneladas, porque discutiremos *wavelets* no capítulo 3 que contém em si mesmo a técnica do enjanelamento. Na ocasião adequada faremos comparações sobre a transformada enjanelada de Fourier e as *wavelets*.

2.6 O método de Shannon.

A *idéia básica* consiste em substituir $\mathcal{F}(f)$ por uma amostragem adequada e transmitir esta amostragem que será um conjunto finito de informações. Veremos que esta *idéia* evoluiu junto com os demais métodos nas comunicações e na própria análise de sinais.

Um sinal f agora será $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, uma função de quadrado integrável. Suponhamos inicialmente que f seja limitada na faixa de frequência $[-\pi, \pi]$, (*band limited* em *linguagem técnica*). A escolha desta faixa de frequência apenas vai tornar os cálculos mais simples do que escolhendo $[-\Omega, \Omega]$, com Ω *arbitrário*.

Logo \hat{f} tem uma série de Fourier convergente:

$$\hat{f}(w) \approx \sum_{-N}^N c_n e^{inw} \quad (2.31)$$

em que, por “hábito”, escrevemos a série de Fourier de \hat{f} com sinal “+” no expoente deixando para usar o sinal “-” na série de Fourier de f ¹¹. com

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w) e^{-inw} dw = \quad (2.32)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-inw} dw = \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-inw} dw \right) = \quad (2.34)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-n) \quad (2.35)$$

portanto

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-n) \quad (2.36)$$

Como *quase tudo* é pura questão de interpretação, vamos traduzir a última equação dizendo que os *coeficientes de Fourier* de \hat{f} são uma *amostragem* de f sobre os inteiros. Quer dizer que se calcularmos os “coeficientes de Fourier” sobre números não inteiros, racionais por exemplo, poderíamos ter uma amostragem mais fina de f . Façamos isto escrevendo a fórmula de inversão que já encontramos antes:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwt} dw = \sqrt{2\pi} c_t \quad (2.37)$$

¹¹Os sinais tem que ser contrários para que se produza a inversão, mas é uma questão de “hábito” decidir onde colocar “-”.

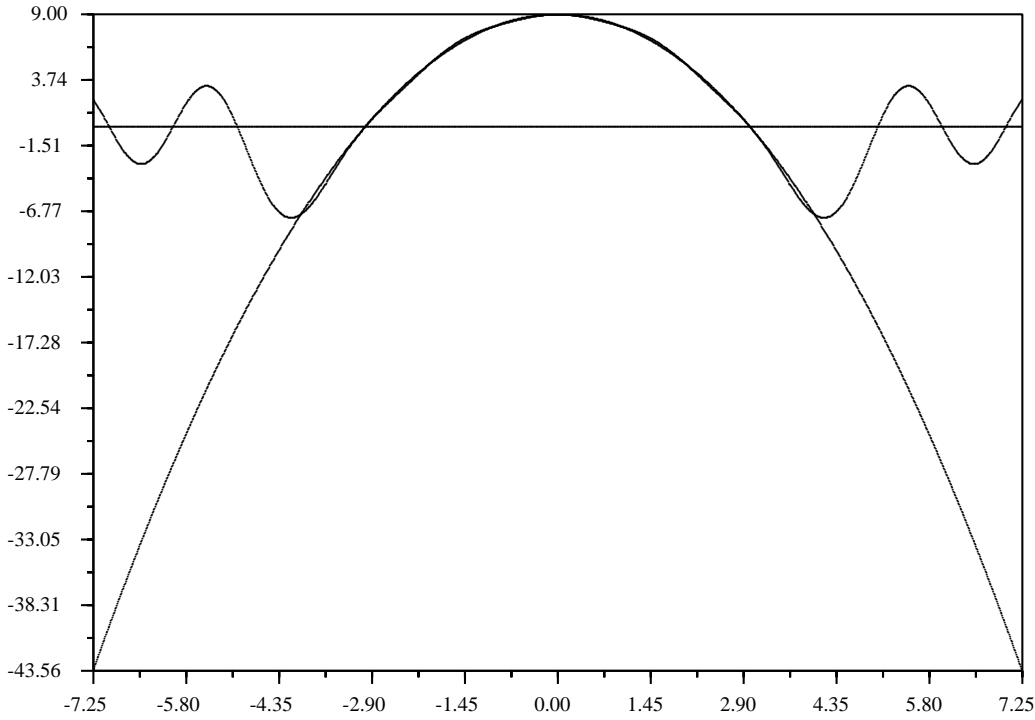


Figura 2.11: Aproximação pela amostragem de Shannon de uma parábola.

para um número t qualquer. Como, por hipótese, \hat{f} é limitada na frequência sobre $[-\pi, \pi]$ então, usando agora a expansão em série de Fourier de \hat{f} podemos escrever:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inw} e^{iwt} dw = \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{inw} e^{iwt} dw = \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_n f(-n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{iw(n+t)} dw = \quad (2.40)$$

$$= \sum_n f(-n) \frac{\sin \pi(t+n)}{\pi(t+n)} = \sum_n f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \quad (2.41)$$

Demonstramos assim o

Teorema 28 *Teorema da amostragem de Shannon.*

Para um inteiro N suficientemente grande,

$$f(x) \approx \sum_{-N}^N f(n) D(x-n)$$

em que $D(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

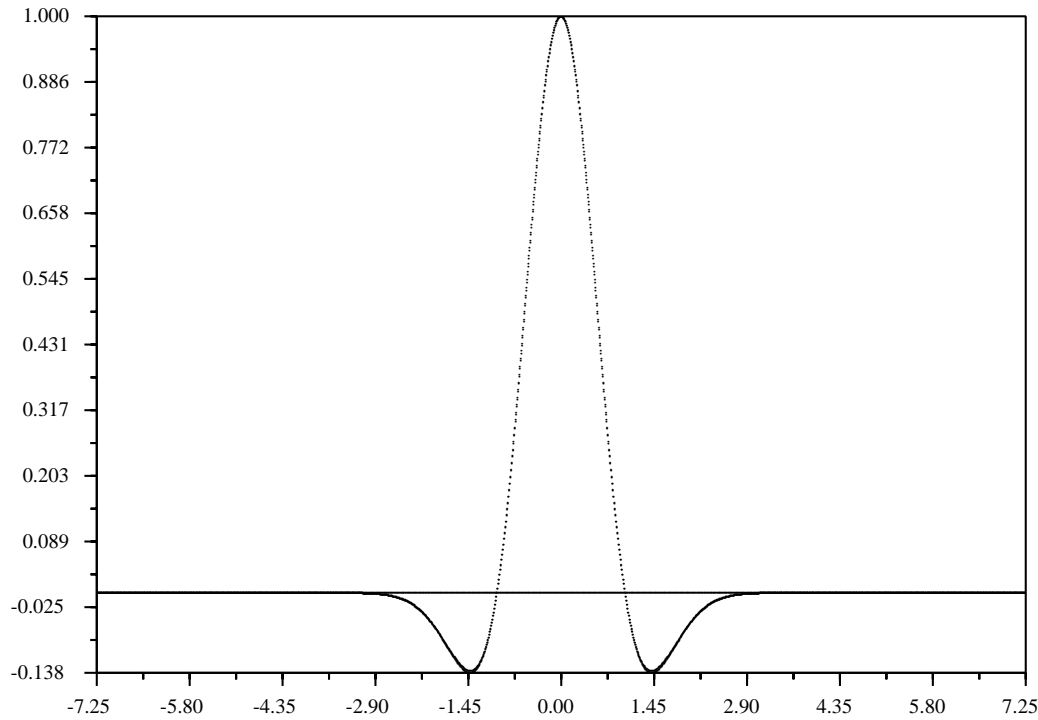


Figura 2.12: Aproximação pela amostragem de Shannon do “chapeu mexicano” g que tem pouca energia fora de um compacto, $g(x) = (1 - x^2)(e^{-x^2})$.

Observação 18 *A constante multiplicativa na transformada de Fourier*

Aqui podemos ver o que prometemos no início do capítulo, que a escolha da constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ obedecia a razões de simplificação. Observe que alteramos, com o mesmo objetivo a constante que multiplica o produto escalar que define os coeficientes de Fourier. Também trocamos a ordem da integral com a da soma o que pode ser feito porque, por hipótese sobre \hat{f} os seus coeficientes de Fourier formam uma série absolutamente convergente. Finalmente concluímos que o valor de f num ponto t qualquer fica determinado por uma amostragem sobre os inteiros dos valores de f o que já é uma compactação de dados embora não muito útil... a utilidade vem ao observarmos que como $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(-n)$, e os coeficientes c_n formam uma série absolutamente convergente, então uma quantidade finita deles é representativa do seu conjunto, em outras palavras podemos desprezar $f(n)$ fora de um conjunto finito, naturalmente cometendo um erro.

Veja nos gráficos (fig. 2.11), (fig. 2.12), (fig. 2.13) como a convergência é significativa, mesmo fora do intervalo $n \in [-4, 4]$ em que tomamos o parâmetro n para fazer as translações do núcleo de Dirichlet.

No caso da (fig. 2.12) não é visível a diferença entre f e $g(x) = \sum_{n=-4}^4 f(n)D(x - n)$, o caso do “chapeu

mexicano” que tem pouca energia fora do intervalo $[-1, 1]$. Isto é, quando a função for “praticamente” de energia nula fora de um compacto, a aproximação é excelente já para 9 termos. O significado disto para as telecomunicações foi revolucionário nos anos que se seguiram a descoberta de Claude Shannon, [18], em 1949. Com apenas 9 números se decodifica muito bem um sinal e portanto a transmissão destes 9 números contém parte significativa da informação contida no sinal.

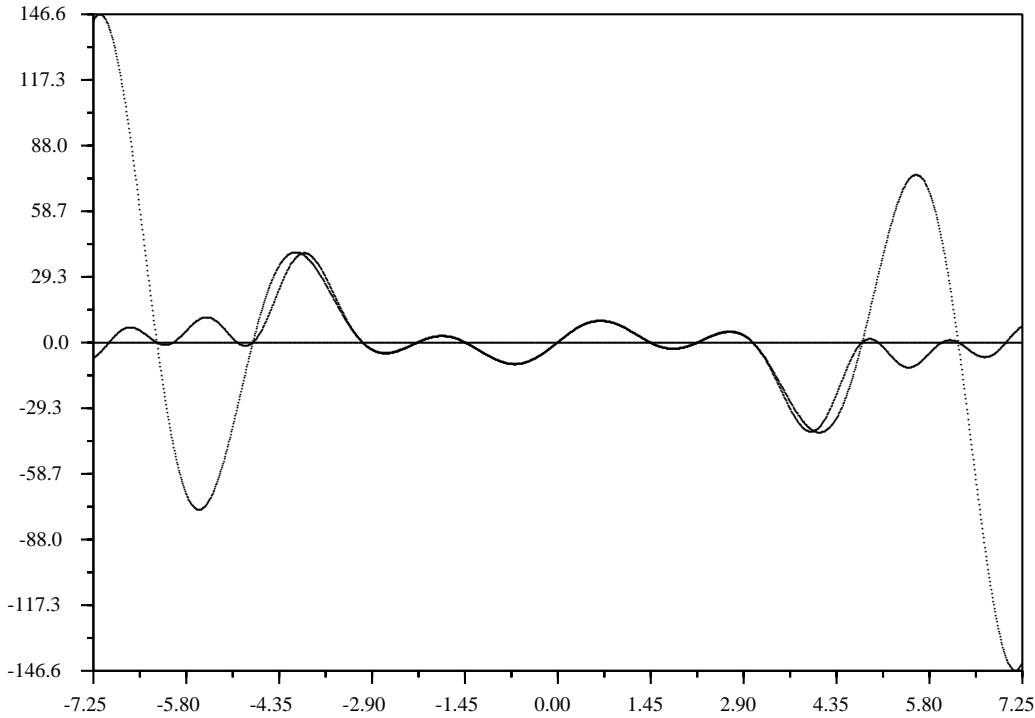


Figura 2.13: Aproximação pela amostragem de Shannon de $f(x) = 3(9 - x^2)\sin(2x) - x$.

Observação 19 *Como se fazem comunicações.*

Já o alertamos que chegaríamos próximo de mostrar-lhe a tecnologia para fazer comunicações, entretanto, discutimos apenas a parte matemática do assunto. Ainda fica muito às margens do assunto que foge ao nosso conhecimento específico: Física, Eletrônica, Química Fina...

Também é importante ver de modo crítico o número 9 que escrevemos acima. Ele corresponde aos experimentos gráficos que você encontra feitos aqui. A decisão sobre quantos termos tomar na amostragem de Shannon é uma decisão tecnológica que está ligada, entre outras coisas a precisão com os sinais deverão ser recuperados.

2.6.1 Refinamento da amostragem de Shannon.

Vamos agora retornar à nossa hipótese inicial sobre a faixa de frequência $[-\pi, \pi]$. Generalizando, vamos considerar uma faixa de frequência limitada $[-\Omega, \Omega]$, então, refazendo o cálculo na última integral, considerando agora a constante $\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}$. Como \hat{f} é limitada na frequência, então tem uma série de Fourier convergente:

$$\hat{f}(w) = \sum_n c_n e^{in\frac{\pi}{\Omega}w} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\zeta) e^{in\zeta\frac{\pi}{\Omega}} d\zeta e^{in\frac{\pi}{\Omega}w} = \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \sum_n \hat{f}(n\frac{\pi}{\Omega}) e^{in\frac{\pi}{\Omega}w} \quad (2.43)$$

Aplicando a fórmula de inversão de Fourier temos

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{i\frac{\pi}{\Omega}wt} dw = \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(w) e^{i\frac{\pi}{\Omega}wt} dw = \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \sum_n f(n\frac{\pi}{\Omega}) e^{in\frac{\pi}{\Omega}w} e^{i\frac{\pi}{\Omega}wt} dw = \quad (2.46)$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_n f(n\frac{\pi}{\Omega}) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{iw\frac{\pi}{\Omega}(n+t)} dw = \quad (2.47)$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \sum_n f(n\frac{\pi}{\Omega}) \frac{e^{iw\frac{\pi}{\Omega}(n+t)} \Big|_{-\Omega}^{\Omega}}{i\frac{\pi}{\Omega}(n+t)} = \quad (2.48)$$

$$= \sum_n f(n\frac{\pi}{\Omega}) \frac{\sin(\pi(n+t))}{\pi(n+t)} \quad (2.49)$$

A última série é a expressão que se conhece como *Teorema da amostragem de Shannon* que refina a expressão anterior. O quociente $\frac{\pi}{\Omega}$ é a forma mais refinada de obter esta amostragem e é conhecida como *coeficiente de densidade de Nyquist*, claro, se conhecermos a medida do suporte de $\hat{f} = \Omega$ então podemos encontrar a melhor forma de tomar uma amostragem de f . O leitor pode encontrar em [2, cap. 2] uma discussão técnica do uso do coeficiente de Nyquist para obter melhores reproduções de f .

Parte II

Análise não Harmônica.

Capítulo 3

Wavelets.

Já vimos que as séries de Fourier se enquadram dentro do contexto de aproximação de funções, apesar de que elas tenham sido usadas desde o começo para modelar os fenômenos ondulatórios. Como “aproximação” de funções elas encontraram resistência e críticas que produziram muita investigação com o intuito de entender melhor a o tipo de “aproximação” representado por estas séries e também m encontrar métodos melhores de aproximação. Este será o ponto de partida deste capítulo, a apresentação das wavelets de Haar e de Walsh como os primeiros exemplos de um sistema ortogonal de representação de funções.

As tentativas de encontrar ajustes para a transformada de Fourier conduziram sucessivamente às transformadas enjaneladas de Fourier, que eram transformadas de Fourier de funções cortadas por uma janela, depois o enjanelamento foi incluído no kernel que definia o transformação integral. Esta última operação abriu o caminho para que senos e cosenos fossem questionados como os núcleos naturais da transformada de Fourier, nascia a idéia das wavelets. Uma wavelet é um núcleo de um tipo especial que substitue a função $x \mapsto e^{ix}$ como núcleo da transformada de Fourier e que agora recebe o nome mais geral de transformada wavelet. Nesta concepção mais geral, senos e cosenos são um tipo de ondas.

3.1 As primeiras tentativas.

Haar, em 1910 construiu um sistema de funções ortogonais no intervalo $[0, 1]$ modificado por Walsh em 1923:

Definição 18 *Walsh wavelets.*

$$W(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} - \chi_{(\frac{1}{2}, 1]} \quad (3.1)$$

$$W_{(1,0)}(x) = W(2x); W_{(1,1)}(x) = W(2x - 1)W_{(1,n)} = W(2x - n) \quad (3.2)$$

$$W_{(2,0)} = W(4x); W_{(2,n)} = W(4x - n); \quad \vdots \quad (3.3)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2); W_\alpha = W(2^{\alpha_1}x - \alpha_2); \alpha \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \quad (3.4)$$

Se tem assim uma família de funções indexadas na família de todos os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

A primeira coordenada do multi-índice definindo uma potência de dois faz o papel de selecionador da frequência, comparando com as ondas clássicas de Fourier. Este número é um fator de dilatação/contração do suporte e recebe o nome deformado de **dilação**, enquanto que a outra coordenada do multi-índice responde por uma **translação** que leva a análise para um ponto qualquer da reta.

Os gráficos (fig. 3.1) (fig. 3.3) mostram cada um deles uma função f e a aproximação conseguida com o sistema de *fatiamentos* produzido por estas **wavelets**. Os gráficos (fig. 3.2) (fig. 3.4) mostram

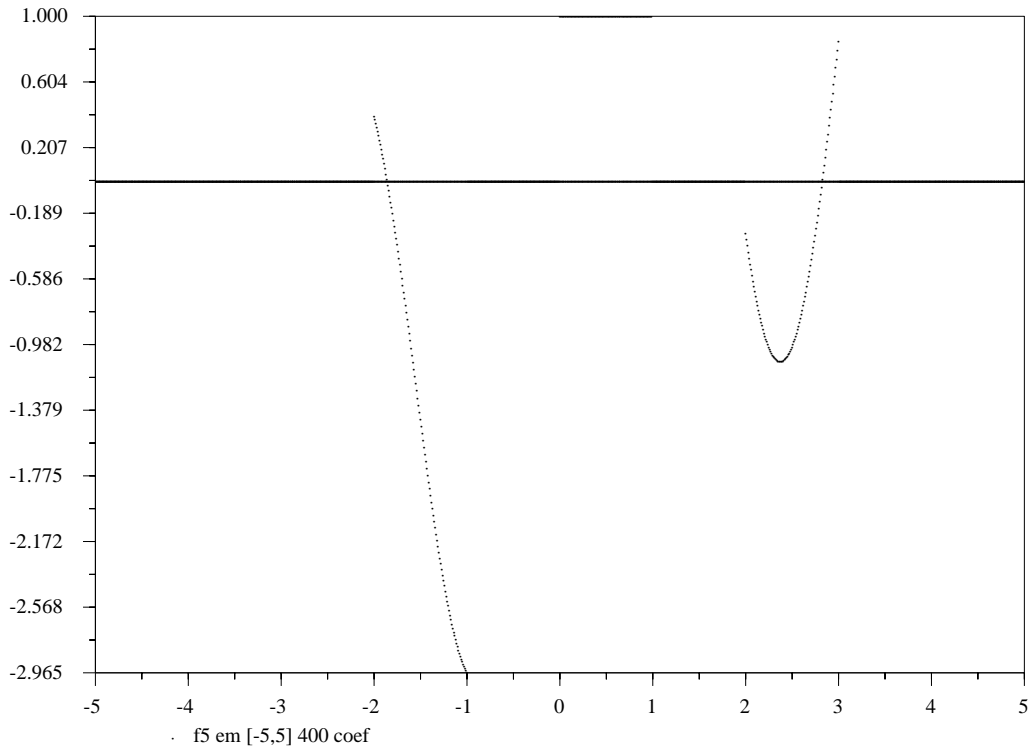


Figura 3.1: Aproximação pelo fatiamento das wavelets de Walsh.

as respectivas funções cujas aproximações foram calculadas. Observe o número de coeficientes usados que se encontra indicado em cada gráfico junto com o nome da função que está sendo aproximada. As funções usadas se encontram definidas no arquivo, *walsh.data*, parte do qual se encontra apresentado abaixo :

```
function y=mex_hat(x)
    y = exp(-x^2/2)*(1-x^2),
// impqua - funcao caract do [-1/2,0]
function y=impqua(x)
    if and([x>=0,x<=1]),
        y=1
    else y = 0
    end,
// Walsh wavelets WN troca de sinal, WP eh positiva
function y=WN(x)
    y=impqua(2*x)-impqua(2*x-1)
function y=WP(x)
    y=impqua(x)
function y = f1(x)
    y= 1/(1+x^2)
```

```

function y=f2(x)
    y = impqua(x)*(2-x^2)
function y = exp_nuc(x)
    if abs(x) >= 1 then
        y = 0
    else
        y=1/(exp((x-1)^2)*exp((x+1)^2))
    end
function y =f3(x)
    y = impqua(x-2)*sin(x)+impqua(x)+impqua(x+2)*sin(x)
function y = f4(x)
    y = sin(x/4)*(4 -x^2) + 3*sin(2*x) + x
function y = f5(x)
    y = impqua(x-2)*f4(x)+impqua(x)+impqua(x+2)*f4(x)
function y = f6(x)
    y = sin(3*x) + (x+1)^2
function y = f7(x)
    y = f9(x-3) + 1/(1+x^2)
// ***** impulsos
function y = f8(x)
    y = x + 1 + sin(x/5)*cos(x/5)
function y = imp1(x)
    y = mex_hat(150*x)
function y = imp2(x)
    y = exp_nuc(150*x)
function y = f9(x)
    y = (x-3)^2
function y = fala(x)
    y = 3*sin(25*(x-1))*imp1(x-1)+5*sin(25*(x+3))*imp1(x+3)

```

Os programas de cálculo numérico que temos ainda são relativamente deficientes para reproduzir estes cálculos. O tempo de médio de processamento para obter os gráficos ?? e ?? foi de 40 minutos.

Para reduzir este tempo de processamento insuportável há tres medidas que podem ser tomadas:

- Se definem as *wavelets* numa linguagem mais próxima da linguagem do processador, usualmente em C, há quem o faça no *assembler do processador*.
- Se constroem algoritmos específicos para calcular as integrais possivelmente já incluindo neles as definições das *wavelets* que serão utilizadas, assim como as demais “constantes” do processo de análise de sinais.
- Implementar em hardware o algoritmo e as “constantes” que ele envolve.

As duas primeiras “medidas” podem ser tomadas em conjunto o que irá acelerar fortemente o processamento. A terceira “medida” é muito mais cara e só é tomada quando se chega a um algoritmo de muito boa qualidade. Ela altera a velocidade dividindo-a por alguma potência de dez mesmo usando componentes eletrônicos de baixa qualidade. Aliás, se não fosse assim, as nossas comunicações estariam inviabilizadas.

O “programa” que usamos foi uma variante de:

```

function [x,0,y1,y2]=walsh(f,inicio,fim,msg)
    x=[inicio:0.01:fim], lx=length(x),
    dom = [inicio:0.5:fim];ldom=length(dom)
//Calculo das matrizes N_mat, P_mat relat a WN, WP ver abaixo. walsh wavelets
for i=[1:5],
    for j=[1:ldom],

```

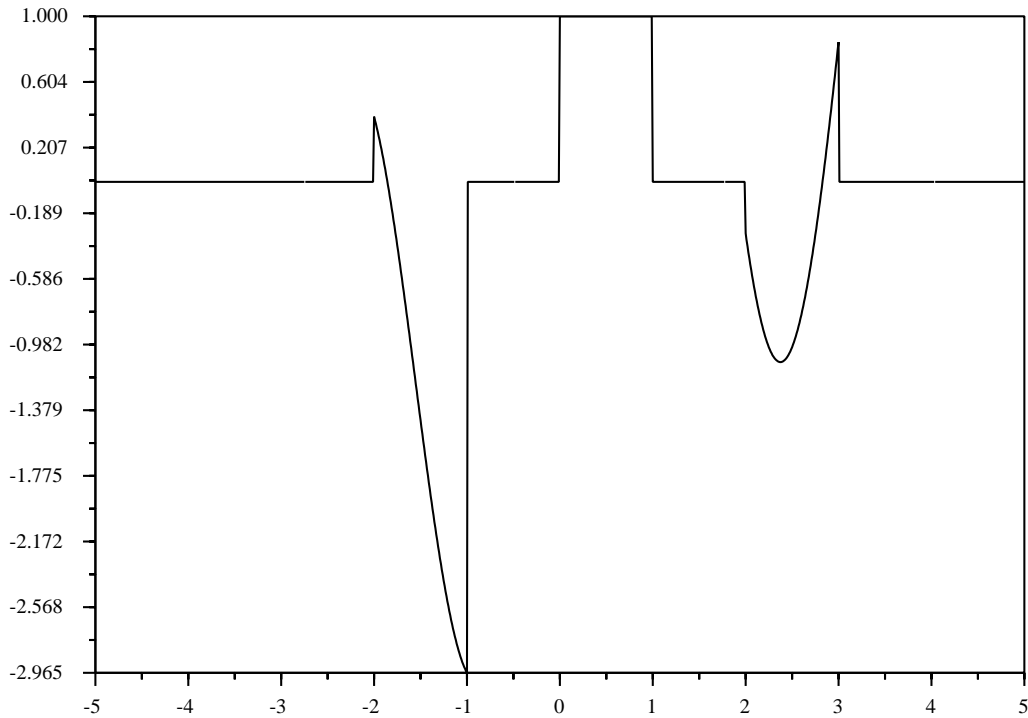


Figura 3.2: Gráfico da função fatiada pelas wavelets de Walsh.

```
// translacao e dilacao
a=2^(i-5), b=dom(j),
N_mat(i,j)=integrate('f(x)*WN(a*x+b)', 'x', (-0.5-b)/a, (0.5-b)/a),
P_mat(i,j)=integrate('f(x)*WP(a*x+b)', 'x', (-0.5-b)/a, (0.5-b)/a),
end,
end,
// Somatorio para recompor f a partir dos coef de WN e WP, walsh
for k=[1:lx],
    0(k)=0; y1(k)=f(x(k)); y2(k)=0
    for i=[1:5]
        for j=[1:ldom]
            a=2^(i-5), b=dom(j),
            y2(k)=y2(k)+N_mat(i,j)*WN(a*x+b)+P_mat(i,j)*WP(a*x+b)
        end
    end
end
end
n1=0.3, n2=0.5, n3=0.8
plot2d1("onn", x, [0, y1, y2], [n1, n2, n3], 'l21', '@@@'+msg)
```

Observe que o “programa” espera que a função f que é um dos seus argumentos, esteja definida na memória do Scilab.

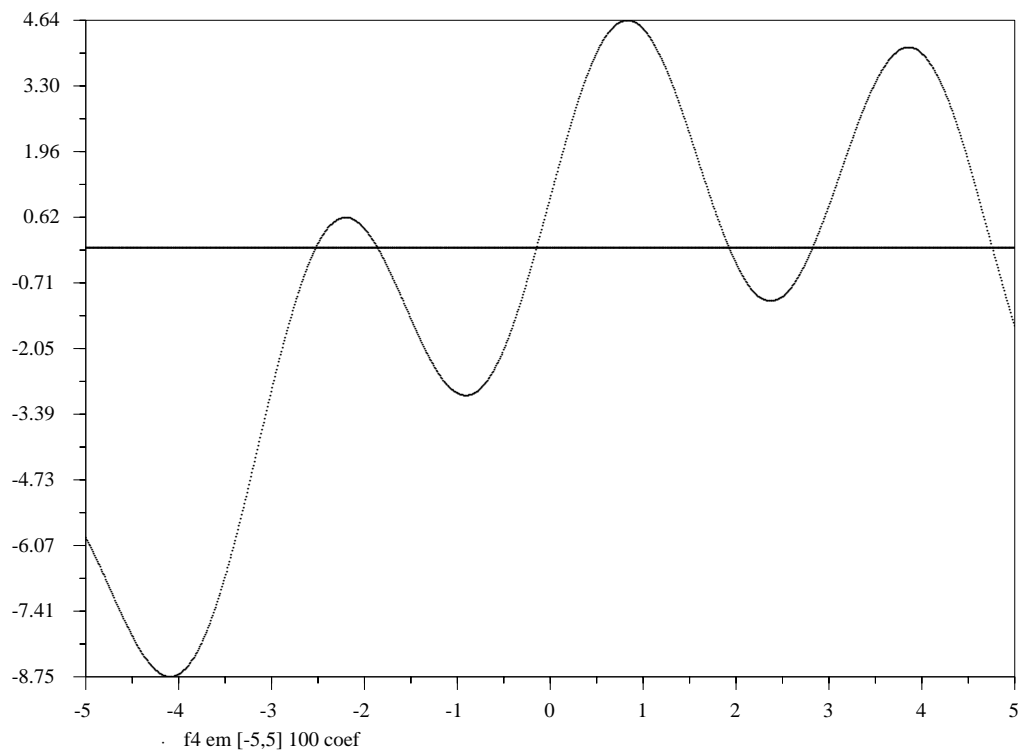


Figura 3.3: Aproximação pelo fatiamento das wavelets de Walsh.

A função *integrate* é nativa do *Scilab* e tem uma boa aproximação. Mas não conseguimos calcular todas as aproximações que desejávamos incluir no texto. Visite o nosso arquivo *walsh.data* em que as funções estão definidas e execute, você mesmo, algumas experiências para se dar conta das dificuldades existentes. Dificuldades semelhantes experimentamos também com *Maple V*.

Veja também os gráficos (fig. 3.3) e (fig. 3.4) com uma função diferenciável sendo aproximada. Este exemplos são pouco interessantes, no sentido de que nos interessa aproximar funções como “fala”, ver o arquivo *walsh.data*, que é, mesmo assim, um sinal muito macio...

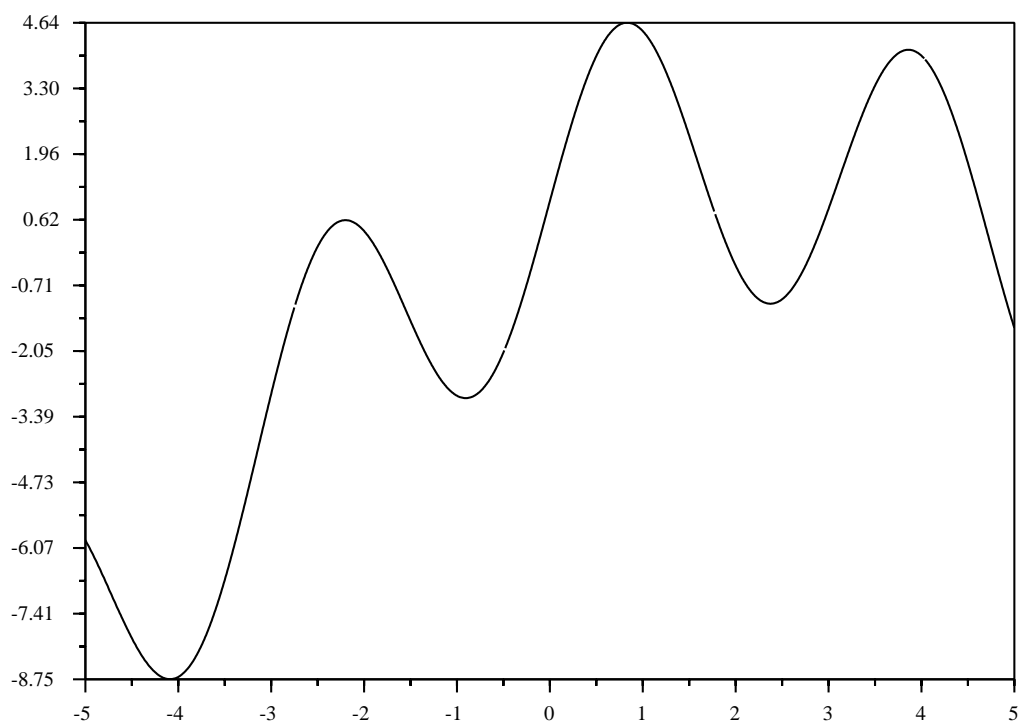


Figura 3.4: A função aproximada pelas wavelets de Walsh na figura 3.3.

Capítulo 4

Dicionários e processos adaptativos.

Neste capítulo vamos discutir um método ligado a análise de sinais. As idéias foram tiradas do volume 15, revista da SBMAC, que foi dedicado às wavelets e suas aplicações.

Um fenômeno interessante foi observado: quando pessoas se mudam para um país onde uma língua diferente é falada mas cuja estrutura de pronúncia não difere fundamentalmente da língua de origem: dois países de língua latina, por exemplo. O emigrante, durante algum tempo, tem a impressão que as pessoas a sua volta falam a língua original. Uma explicação para este fato é de que o cérebro, que em última análise é quem escuta, procura identificar padrões que tem registrado, na tentativa de rapidamente compor a informação que lhe chega e por algum tempo os padrões que se encontram ativos são pedaços de vocábulos da língua original. Só passado algum tempo é que a base de dados começa a ser renovada e o emigrante inicia a reconhecer os padrões típicos da nova língua.

As telecomunicações seguem um modelo próximo deste, não transmitimos a informação original completa mas sim o suficiente para que ela seja recomposta de forma aceitável no destino, a partir de uma base de dados. É esta uma ideia dominante na manipulação moderna da informação.

4.1 O problema de faixas de frequência e tempo.

Mostramos no capítulo 2 que o problema básico da tradicional transformada de Fourier para análise de sinais se encontrava na impossibilidade de um sinal ser “limitado” na faixa de frequência e na faixa de tempo simultaneamente e vimos uma saída para este problema, o enjanelamento. Neste capítulo vamos estudar diversas técnicas de análise de sinais que em conjunto produziram a tecnologia que usamos hoje.

A solução encontrada manipular sinais com rapidez e com eficiência se caracterizam por dois aspectos. O primeiro é uma precisão extrema e perda de tempo porque a máquina que em última instância vai analisar os sinais é o cérebro humano e este tira bons resultados de informações incompletas. O outro aspecto é interessante do ponto de vista da teoria Matemática, porque a completa, consiste em usar várias bases para expandir um vetor num espaço vetorial de dimensão infinita descartando em parte a ortonormalidade. Parece que estes dois aspectos estão intimamente ligados. O segundo minimiza o defeito chamado redundância que primeiro aspecto resolve, o cérebro humano separa as redundâncias que são próprias do uso de distintas bases para compor o que abaixo se vai chamar de um dicionário.

4.2 Busca de coincidências: representação adaptada de som e imagem.

4.2.1 Dicionário, em vez de base.

A complexidade das estruturas encontradas numa gravação de sons ou no registro de uma imagem, exigem que se crie uma representação adaptada a baixo nível. Apesar de que um tal sinal seja inteiramente caracterizado por sua composição numa determinada *base*, essa é um conjunto de vetores mínimo que não é rico o suficiente para representar de modo eficiente todos os componentes. Alguns tipos de sinais tem componentes que pertencem a diversas bases, em forma natural, como veremos ao longo desta seção, o que torna difícil sua análise, decodificação ou reprodução se mantivermos o princípio tradicional da Matemática, da Álgebra Linear, de definir uma base que contém todos os geradores do espaço. Por exemplo, variações de imagens que caracterizam *fronteiras* ou *texturas* não encontra uma representação eficiente usando-se o mesmo tipo de onda. O mesmo problema se encontra em sinais sonoros onde a presença de *transientes*, picos de energia, cuja melhor representação se dá com “*ondas curtas*” e *harmônicos* que são melhor decompostos em ondas “*ondas longas*” com uma faixa de frequência curta.

A idéia das transformadas adaptadas é a de evitar de decompor os sinais apenas sobre uma única família de *sinais básicos*, uma única base. Se decompõem os vetores então sobre uma família de sinais básicos que é bem maior do que uma base e que se chama *dicionário*.

Esta representação é obviamente *redundante* o que é o inverso da característica usual das decomposições feitas pela *álgebra linear*, em que as bases são um conjunto mínimo, otimizado, de vetores, *linearmente independentes*, em que, portanto, *toda redundância* foi inibida.

Outra característica da *codificação* x *decodificação* é a necessidade de um uso apenas finito de *palavras* de um certo *dicionário* porque não podemos transmitir, nem guardar, uma quantidade infinita de palavras. Assim um dos objetivos é o de encontrar uma representação efetiva com um número pequeno de *palavras* do *dicionário*¹. Um efeito colateral pode ser assim alcançado que o de seleção das palavras para um dicionário, e aqui, mais uma vez, é preciso salientar que a prática tem nos mostrado que há dicionários específicos para as distintas classes de sinais: se a parte mais importante de um sinal for recuperada a partir de uma quantidade pequena de palavras de um dicionário, estas palavras devem ser consideradas como componentes essenciais do sinal.

A redundância, entretanto, tem um aspecto explosivo e se pode demonstrar que a busca de aproximações *ótimas* é um problema computacional *não polinomial*, NP. Para evitar esta explosão computacional com uma técnica algorítmica chamada de **busca de coincidências** que é o nosso objetivo nesta seção.

4.2.2 A busca de coincidências.

Definição 19 *Dicionário.* Um dicionário $\mathcal{D} = (g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ é um subconjunto maximal de um espaço de Hilbert \mathbf{H} , tal que $\|g_\gamma\| = 1$.

Relembrando, um subconjunto é máximo num espaço de Hilbert \mathbf{H} quando o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores neste subconjunto é denso em \mathbf{H} .

Teorema 29 *As bases são dicionários.*

Para produzir as expansões adaptadas usaremos dicionários bem *maiores* do que as bases e muito redundantes. Será a redundância que irá nos permitir a escolha das *palavras* melhor adaptadas a expansão de um tipo particular de sinal, ou vetor em \mathbf{H} .

Definição 20 *Aproximação ótima.* Seja $f \in \mathbf{H}$ e $\epsilon > 0$, chamaremos de **aproximação ótima** a uma combinação linear finita $\mathcal{E} = \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} r_\gamma g_\gamma$ tal que $\|f - \mathcal{E}\| < \epsilon$

¹consideramos importante chamar *palavras* aos elementos básicos de um *dicionário*, em vez de *vetores*.

Teorema 30 Se o dicionário for uma base enumerável, num espaço de Hilbert, a aproximação ótima é única. **Dem**: Pela convexidade dos espaços de Hilbert e pela enumerabilidade da base. **q.e.d.**

Teorema 31 Se o dicionário contiver mais de uma base a aproximação ótima não precisa ser única.

Dem: Suponha que $\mathcal{E} = \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} r_\gamma g_\gamma$ é a ϵ -aproximação ótima de f relativamente a uma das bases de \mathbf{H} contida no dicionário. Substitua um dos elementos desta soma por uma sua δ -aproximação ótima com δ suficientemente pequeno, relativamente a outra base de \mathbf{H} , o resultado será uma ϵ -aproximação ótima de f também. **q.e.d.**

A demonstração anterior está obviamente resumida, falta-lhe a técnica de como encontrar δ que consiste em substituir na expressão $\mathcal{E} = \sum_{\gamma \in \mathcal{D}} r_\gamma g_\gamma$ qual é a substituição de um dos elementos da soma

por outra soma relativamente a outra base tal que $\|\mathcal{E}' - f\| < \epsilon$ em que \mathcal{E}' é a nova soma.

Ora, apenas com um dicionário formado de duas bases estas somas \mathcal{E}' se podem fazer indefinidamente, por exemplo considerando $\delta = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbf{N}$. Ainda considerando apenas duas bases no dicionário, e alternando a escolha da troca de elementos em \mathcal{E}' , que agora representa uma certa soma correspondentes a algumas trocas, o número de trocas cresce indefinidamente.

O problema é que estas escolhas vão ser feitas automaticamente por uma máquina e temos que encontrar um algoritmo estabeleça o o *stopping point*, ou por outras palavras, que controle a explosão de escolhas descritas acima. Para isto o sinal é sucessivamente aproximado com projeções ortogonais usando-se o método de Gram-Schmidt:

$$R_f^0 = f = \langle f, g_1 \rangle g_1 + R_f^1$$

em que $R_f^1 \perp g_1$ porque

$$\langle R_f^1, \langle f, g_1 \rangle g_1 \rangle = \langle f - \langle f, g_1 \rangle g_1, \langle f, g_1 \rangle g_1 \rangle = \quad (4.1)$$

$$\langle f, g_1 \rangle^2 - \langle f, g_1 \rangle^2 \|g_1\|^2 = 0. \quad (4.2)$$

portanto esta primeira decomposição é uma soma direta, logo

$$\|R_f^0\|^2 = \|f\|^2 = |\langle f, g_1 \rangle|^2 + \|R_f^1\|^2.$$

Podemos minimizar R_f^1 escolhendo g_1 que maximize

$$|\langle f, g_1 \rangle|^2.$$

Seguimos decompondo agora R_f num processo recursivo usando a mesma condição anterior de minimização: $\langle R_f^k, g_{k+1} \rangle^2$ deve ser máximo, quer dizer em todas as bases finitas² se vai buscar o elemento que maxime este termo, o valor máximo encontrado define g_{k+1} , por exemplo, sendo selecionando o primeiro que produzir o valor máximo em módulo.

Observe que

$$f = R_f^0, R_f^1, \dots, R_f^n \quad (4.3)$$

em que um único sistema de índices esconde o fato de que houve uma sucessão de escolhas percorrendo cada uma das partes finitas das bases que compõem o dicionário finito. Temos

$$R_f^{n-1} = \langle R_f^{n-1}, g_n \rangle g_n + R_f^n$$

e como $g_n \perp R_f^n$ então

$$\|R_f^{n-1}\|^2 = |\langle R_f^{n-1}, g_n \rangle|^2 + \|R_f^n\|^2$$

e podemos decompor f até a ordem n :

$$R_f^0 = f = \sum_{k=0}^{n-1} (R_f^k - R_f^{k+1}) + R_f^n$$

²aqui uma nova definição, um dicionário finito se compõe de partes finitas, "base finita", de cada uma das bases.

em que cada termo da soma, inclusive o último, está contido no anterior o que conduz a que tais somas sejam chamadas de *telescópicas*:

$$R_f^{k+1} \in [R_f^k].$$

Observe que como a soma (eq. 4.2) é uma soma direta, então vale a soma dos módulos:

$$\|R_f^{n-1}\|^2 = \| \langle R_f^{n-1}, g_n \rangle g_n \|^2 + \|R_f^n\|^2$$

e como os vetores do dicionário são unitários então o termo $\langle R_f^{n-1}, g_n \rangle g_n$ poderá ser maximizado e terá norma inferior a de R_f^{n-1} ou será sempre nulo, não podendo ser otimizado e logo o dicionário foi mal constituído³ logo a diferença R_f^n terá norma inferior a R_f^{n-1} e podemos escrever a nova *soma telescópica*

$$\|R_f^0\|^2 = \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \|(R_f^k - R_f^{k+1})\|^2 + \|R_f^n\|^2$$

que combinado com (eq. 4.2) nos dá a equação de conservação de energia:

$$\|R_f^0\|^2 = \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\langle R_f^k, g_{k+1} \rangle|^2 + \|R_f^n\|^2$$

que é uma propriedade típica das somas diretas. Temos assim uma decomposição que não é *linear* no sentido de que faz uso de elementos em distintas bases do espaço mas com a propriedade de conservação da energia.

Teorema 32 *Convergência da busca de coincidências.*

Se \mathbf{H} for um espaço de Hilbert com uma base enumerável, então as somas acima são todas convergentes. **Dem**:

Como há N bases que compõem o dicionário, então podemos considerar todas as possíveis projeções de f relativamente a todos os vetores básicos e esta nova série tem valor menor do que $N\|f\|^2$. **q.e.d.**

Exemplo 11 *Uso de dicionários.*

Vamos considerar o “sinal” $f(x) = (x - 3)^2$.

A seqüência de figuras (fig. 4.1), (fig. 4.4) mostram a inclusão da palavra $f(x) = (x - 3)^2$ ao dicionário usado no Teorema da Amostragem de Shannon, abreviadamente “dicionário de Shannon”.

Claramente um bom dicionário para decompor f tem que conter algum polinômio. Cada um dos experimentos feito aqui tem uma legenda indicativa de como foi constituído o dicionário utilizado. No quinto será usado exclusivamente o dicionário de Shannon. Nos demais estamos usando uma combinação convexa de Shannon e “mexican hat” (chapeu mexicano).

Em particular se pode ver que a significação de uma palavra não é absoluta. O uso de distintos pesos entre apenas duas bases distintas na composição de um dicionário, mostram resultados significativamente discrepantes. No primeiro gráfico estamos um dicionário composto de tres tipos de bases diferentes.

Comparação entre os gráficos (fig. 4.2), (fig. 4.3) e (fig. 4.4) mostram que esta “relatividade” tem o que ver também com o intervalo em que se considera o sinal relativamente ao dicionário utilizado. Mostra também a importância do dicionário de Shannon. Ver a (fig. 4.5) em que apenas o dicionário de Shannon é utilizado.

Os dois últimos gráficos, (fig. 4.6) e (fig. 4.7) incluem no dicionário um impulso, (função positiva e a suporte compacto, de energia) que no presente caso é o mesmo que pode ser visto na (fig. 2.9) na página 76, é um sinal construído com “colagens” de exponenciais. Neles também foi usada a dilatação 2 e dilatação 1/2 para cada um dos elementos do dicionário.

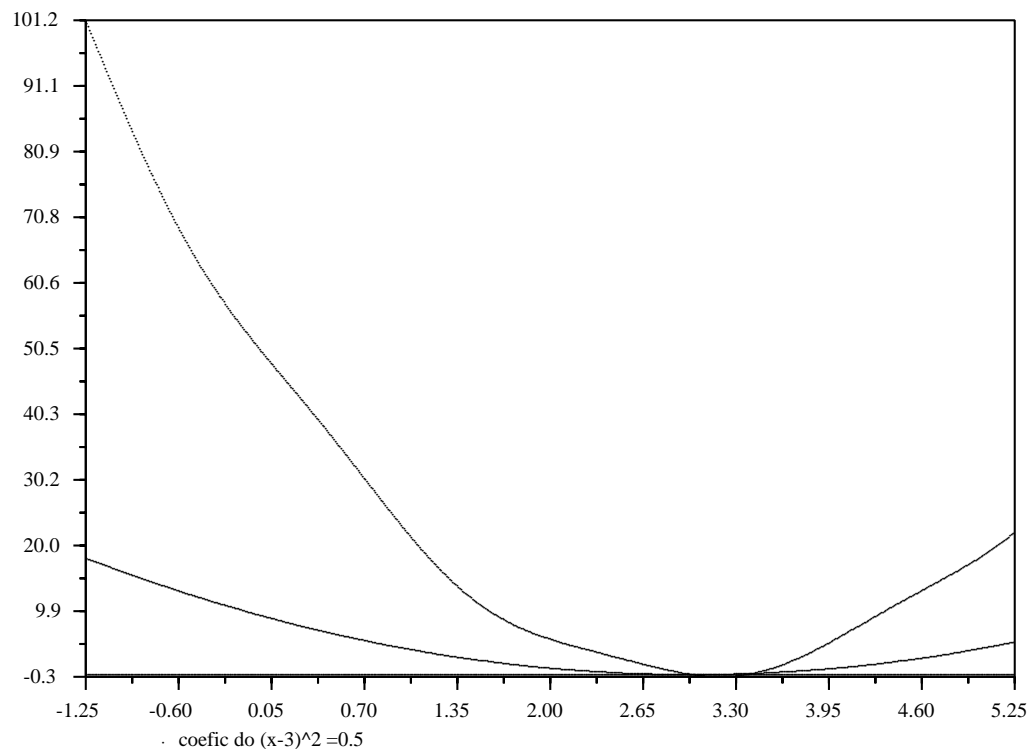


Figura 4.1: Acréscimo de $f(x) = (x - 3)^2$ ao “dicionário” de Shannon - ver o coeficiente do f .

Enfim, esta coleção de experimentos mostra que o algoritmo tem que procurar a melhor palavra em cada base do dicionário para reduzir a influência do resíduo R_f .

Estas experiências podem ser repetidas com o seguinte programa no Scilab:

```
function [x,0,y1,y2]=dicionario(f,inicio,fim,dil,tr,msg)
x = [inicio-0.25:0.01:fim+0.25], lx = length(x),
x0 = inicio,salto = (fim-inicio)/tr
for k=[1:lx],
    y1(k)=f(x(k)),
    0(k) = 0,y2(k)=0
    while x0 < fim,
        y2(k)=y2(k)+0.1*f(x0)*sqrt(dil)*dirichlet((x(k)-x0)/dil),
        y2(k)=y2(k)+0.1*f(x0)*sqrt(dil)*mex_hat((x(k)-x0)/dil),
        y2(k)=y2(k)+0.8*f(x0)*sqrt(dil)*exp_nuc((x(k)-x0)/dil),
        x0 = x0 + salto,
```

³com uma probabilidade baixíssima de acontecer R_f^{n-1} ser perpendicular a todos os vetores das bases finitas escolhidas

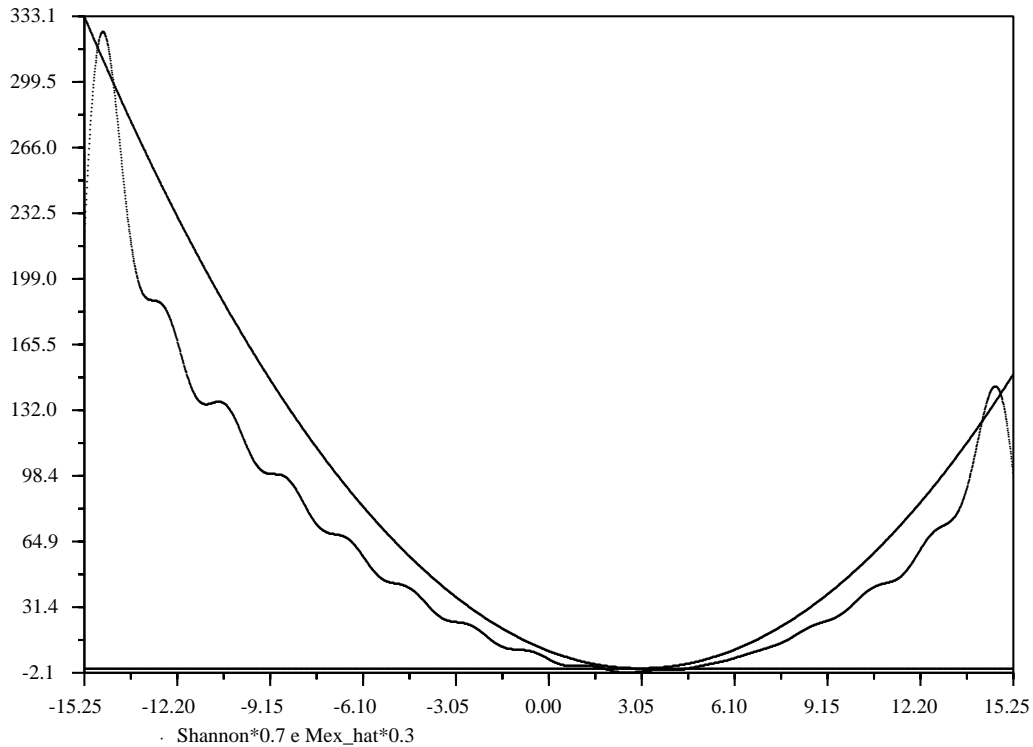


Figura 4.2: Dicionário usando as palavras de Shannon - e mexican hat. Os pesos são diferentes nesta experiência e na seguinte.

```

end, x0=inicio;
end,
n1=0.3,n2=0.5,n3=0.8
plot2d1("onn",x',[0,y1,y2],[n1,n2,n3],'121','@@'+msg)

```

em que f é uma função qualquer definida pelo usuário, inicio , fim são os extremos do intervalo em que o gráfico será feito e o domínio de validade da soma também. dil é o fator de dilatação, tr é um inteiro que vai dividir o intervalo $[\text{inicio}, \text{fim}]$ para definir a translação.

Finalmente incluímos uma coleção de experiências contidas nas (fig. ??), ... que você pode analisar com os dados que se encontram registrados na próprio gráfico. O programa acima deve rodar com algumas modificações no MatLab, foi feito para SciLab no qual rodou. O arquivo `dicionario.data` se encontra na área `fourier` com password `fourier` no micro `Linux01`, use-o e faça suas próprias experiências.

Observação 20 Escolha em tempo real.

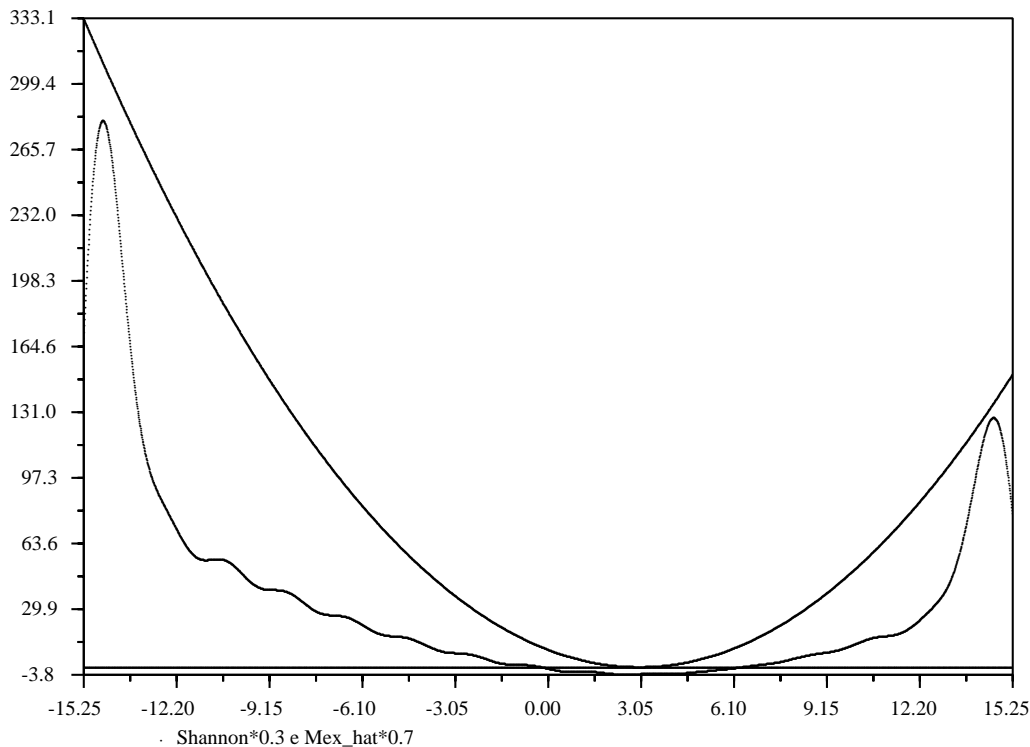


Figura 4.3: Dicionário usando as palavras de Shannon - e mexican hat. Os pesos são diferentes nesta experiência e na anterior.

Isto é possível de ser feito em tempo real porque já se tem um dicionário composto de partes finitas de bases selecionadas por testes construídos historicamente, leia-se: existe uma experiência tecnológica acumulada que já registrou quais são as “palavras” mais importantes na codificação/decodificação dos sinais.

O ponto central desta experiência tecnológica é a construção de um bom dicionário. A experiência indica que não há um único bom dicionário. Ver [2, 5] a respeito das melhores wavelets para codificação/decodificação da voz humana, a anatomia do ouvido conduziu a uma escolha otimizada neste sentido.

Aqui é preciso compreender que os métodos matemáticos apontam caminhos, mas a experiência prática pode combinar pedaços de caminhos para construir o atalho adequado. É isto que vem acontecendo com a análise de sinais. A comparação natural que pode ser feita aqui é com a expressão de Shannon, ver (eq. 28), página 80 em que uma quantidade finita de palavras, translações da função de Dirichlet, produzem uma boa aproximação para sinais a suporte compacto.

Problemas abertos.

A busca adaptada de coincidências, pelo fato de usar distintas bases, perde as características de ortogonalidade ou orthonormalidade dos elementos destas bases que representa a otimização nos espaços de Hilbert. Portanto se pode tentar uma melhoria na aproximação ortonormalizando a família (g_n) .

O primeiro problema é o de aumento da complexidade computacional do algoritmo e consequentemente de tempo gasto.

Um outro problema interessante é o estudo do comportamento dos resíduos normalizados $\tilde{R}_f^n = \frac{R_f^n}{\|R_f^n\|}$. Estudos experimentais tem exibido comportamento caótico de \tilde{R}_f^n . O que se sabe é que os primeiros

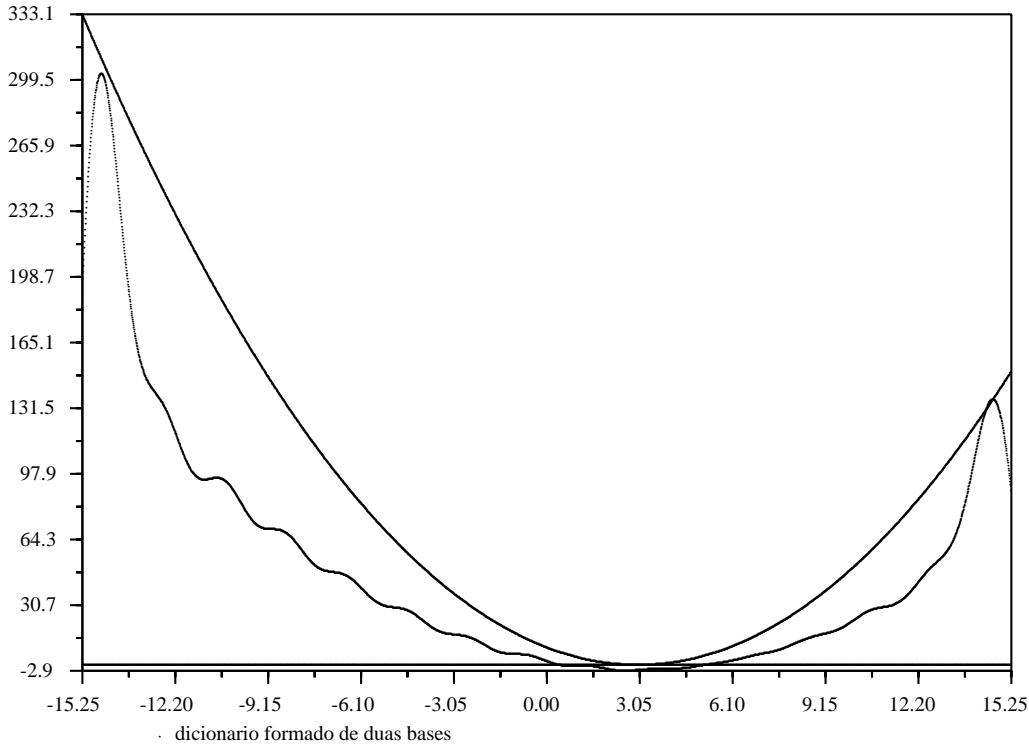


Figura 4.4: Dicionário usando as palavras de Shannon - e mexican hat. Um sistema de pesos iguais torna as bases equipadas.

valores da sequência mostram grande correlação com os vetores do dicionário, depois se verifica um comportamento caótico.

4.2.3 A busca sonora.

Vamos nos limitar aqui a análise do sinal sonoro. Em princípio a diferença entre a análise de sinais sonoros ou de imagens reside apenas na complexidade. Um impulso típico é:

$$\eta(x, y) = \rho(x)\rho(y)$$

em que ρ é um impulso univariado. Se a energia de ρ for 1, (a norma no sentido de \mathcal{L}^2), então a norma de η também será 1, compare com [4, página 102].

Para analisar as propriedades locais com respeito ao *tempo* e à *freqüência* da fala e da música, se usa um grande dicionário de *átomos de tempo x freqüência*. O espaço de sinais é $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ e o dicionário é composto de transformações por *escala*, *translação* e *modulação* de uma única *janela* $g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, ver a página 78 e seguintes.

Observação 21 A independência da janela.

Como já discutimos anteriormente, há uma aparente indefinição no uso da técnica com janelas porque tudo se passa como se, alterada a janela os resultados se modificassem. Podemos provar, e o faremos no momento oportuno, que tal troca tem um efeito controlado.

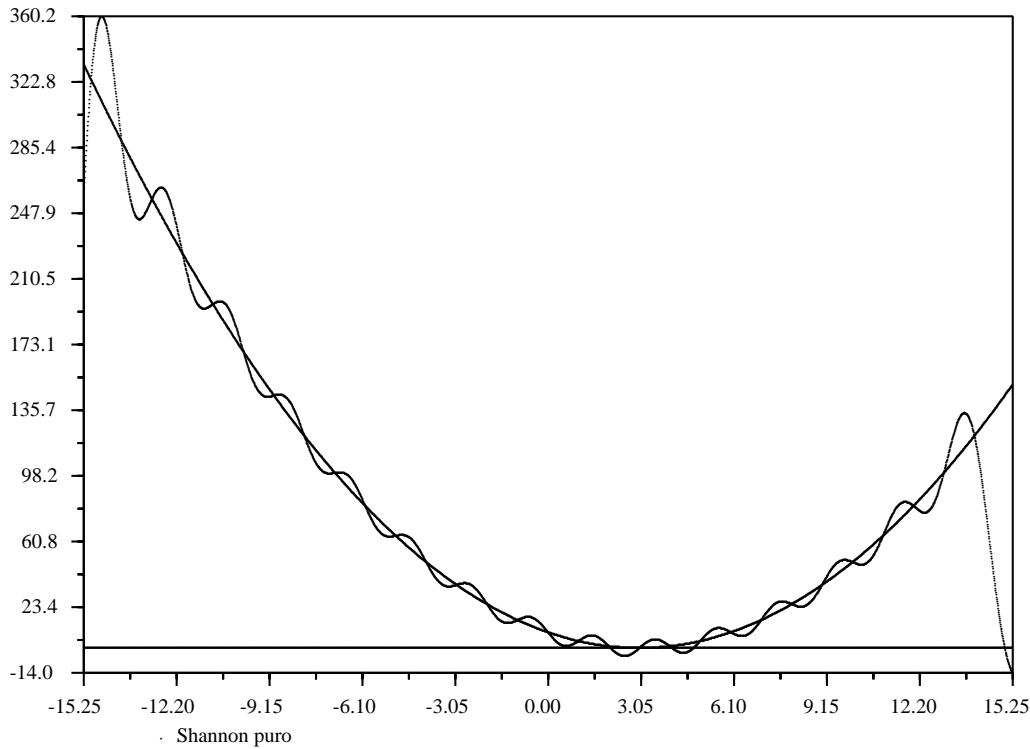


Figura 4.5: Uso exclusivo do “dicionário” de Shannon - coeficiente do f .

Tudo se passa de modo semelhante com a definição de um número real que é dependente, para uso prático, da escolha de uma determinada sucessão de Cauchy, mas finalmente todas as sucessões de Cauchy que definem este número real são equivalentes entre si. Veremos que a analogia com as janelas é desta natureza.

Suponhamos que a janela $g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ seja uma função real par de norma 1. Consideremos a escala s , modulação de frequência ξ e a translação u e vamos designar por

$$\gamma = (s, u, \xi) ; g_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\frac{\xi t}{s}}$$

O fator $\frac{1}{\sqrt{s}}$ garante invariância da norma no espaço $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$,

$$\|g_\gamma\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\frac{\xi t}{s}} \right|^2 dt} = \quad (4.4)$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t - \frac{u}{s}) e^{i\xi t}|^2 dt} = \quad (4.5)$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t) e^{i\xi(t+\frac{u}{s})}|^2 dt} = \quad (4.6)$$

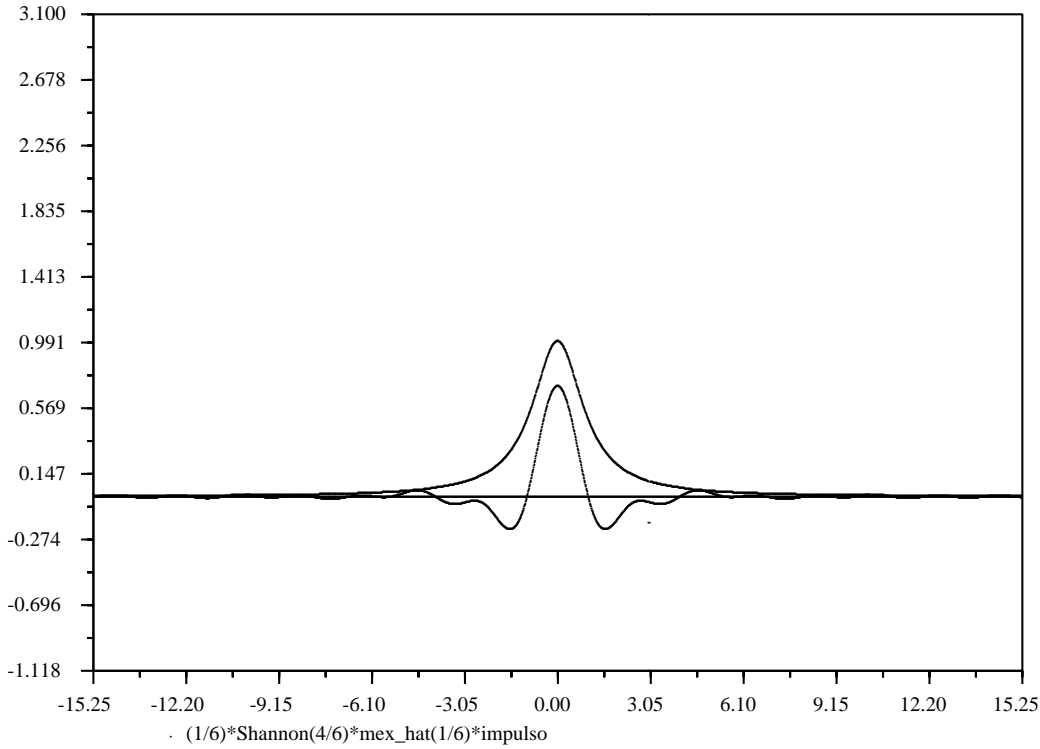


Figura 4.6: Uso de um dicionário com tres tipos diferentes de funções. Os pesos diferem entre esta experiência e na seguinte.

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)e^{i\xi t}|^2 dt} = \quad (4.7)$$

$$\|g_{\gamma'}\|_2 \quad (4.8)$$

em que na segunda integral fizemos a transformação $t := st$, da segunda para a terceira integral multiplicamos e dividimos pelo mesmo fator, da terceira integral para a quarta usamos a *invariância por translação* da integral de Riemann, (ou de Lebesgue), fazendo a substituição $t := t + \frac{u}{s}$ e $\gamma' = (1, 0, \xi)$. Temos assim uma família de funções indexadas sobre $\mathbf{R}^{++} \times \mathbf{R}^2$ com todos os elementos da família tendo a mesma norma de $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ igual a do elemento $g_{\gamma'}$. Com as hipóteses que fizemos sobre a **janela** g , a **palavra** g_{γ} se encontra centrada em u , em cuja vizinhança tem sua energia concentrada e tem uma altura inversamente proporcional a s . Vamos agora calcular a transformada de Fourier de g_{γ} . Como temos um produto ponto a ponto de funções, a transformada de Fourier será o *produto de convolução* das respectivas transformadas que vamos encontrar separadamente $\mathcal{F}(\frac{1}{\sqrt{s}}g(\frac{t-u}{s}))$ e $\mathcal{F}(e^{i\frac{\xi}{s}t})$.

A transformada de Fourier da última função é *medida de Dirac* no ponto $\frac{\xi}{s}$ como já calculamos no final do capítulo 2, ver *medida de Dirac* no índice remissivo.

$$\mathcal{F}(\frac{1}{\sqrt{s}}g(\frac{t-u}{s})) = \quad (4.9)$$

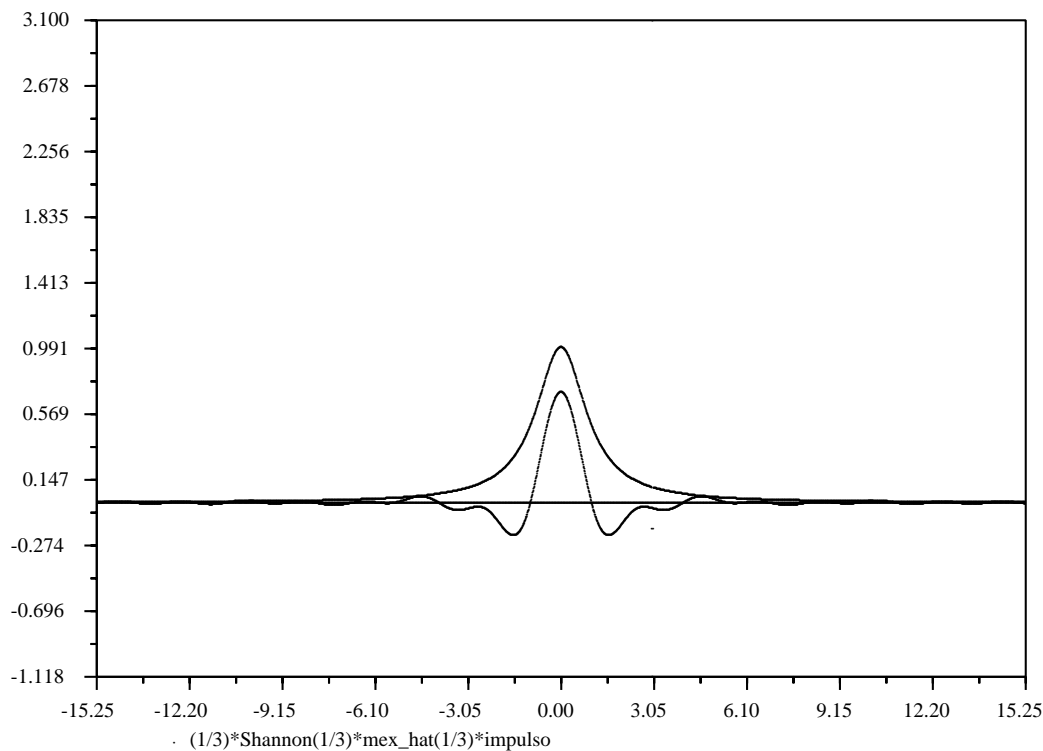


Figura 4.7: Uso de um dicionário com tres tipos diferentes de funções. Os pesos diferem entre esta experiência e na anterior.

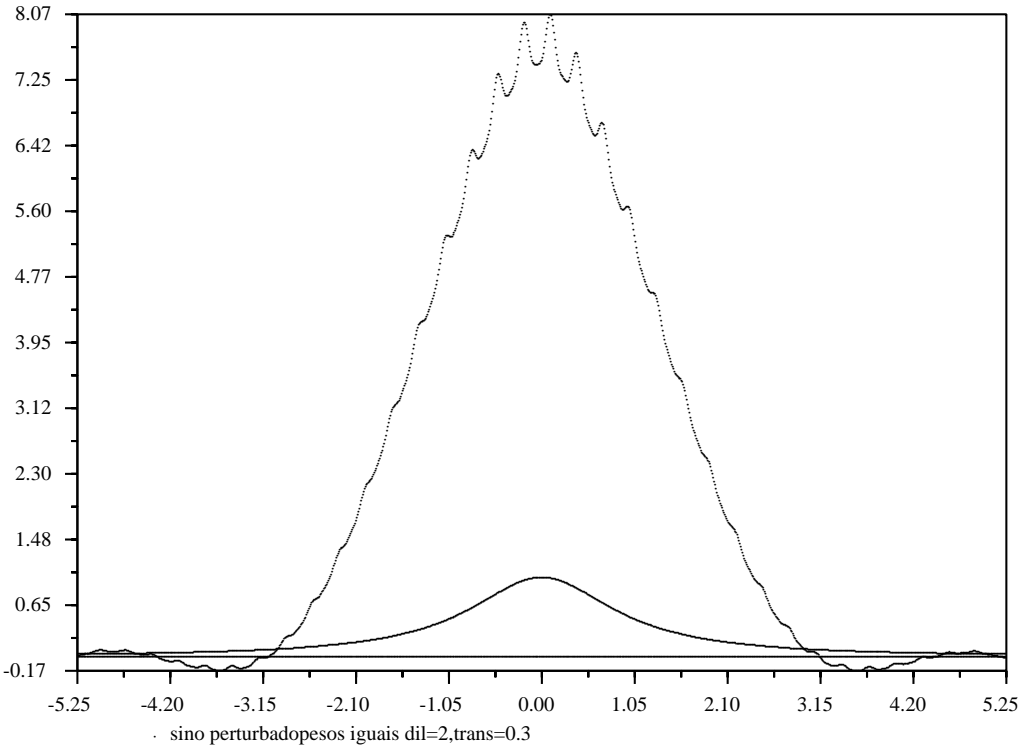
$$= \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t/s - u/s) e^{-itw} dt = \quad (4.10)$$

$$= \frac{s}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - u/s) e^{-istw} dt = \quad (4.11)$$

$$= \sqrt{s} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-is(t+u/s)w} dt = \quad (4.12)$$

$$= \sqrt{s} e^{-iu} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-istw} dt = \sqrt{s} e^{-iu} \mathcal{F}(g)(sw) \quad (4.13)$$

Vamos fazer a convolução destas duas transformadas. Como a definição usual de transformada de Fourier é via integral temos que adaptar o cálculo agora, uma vez que um dos “fatores” é uma medida, portanto representa uma integral. Calcular integrais relativamente à medida de Dirac se resume a avaliar a função integrando no ponto em que esta medida se concentra uma vez que ela é uma probabilidade. Há vários autores que escrevem integrais *relativamente* a medida de Dirac como integrais no sentido de



Riemann:

$$\langle \delta_a, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_a(x) dx = f(a)$$

Nós queremos calcular

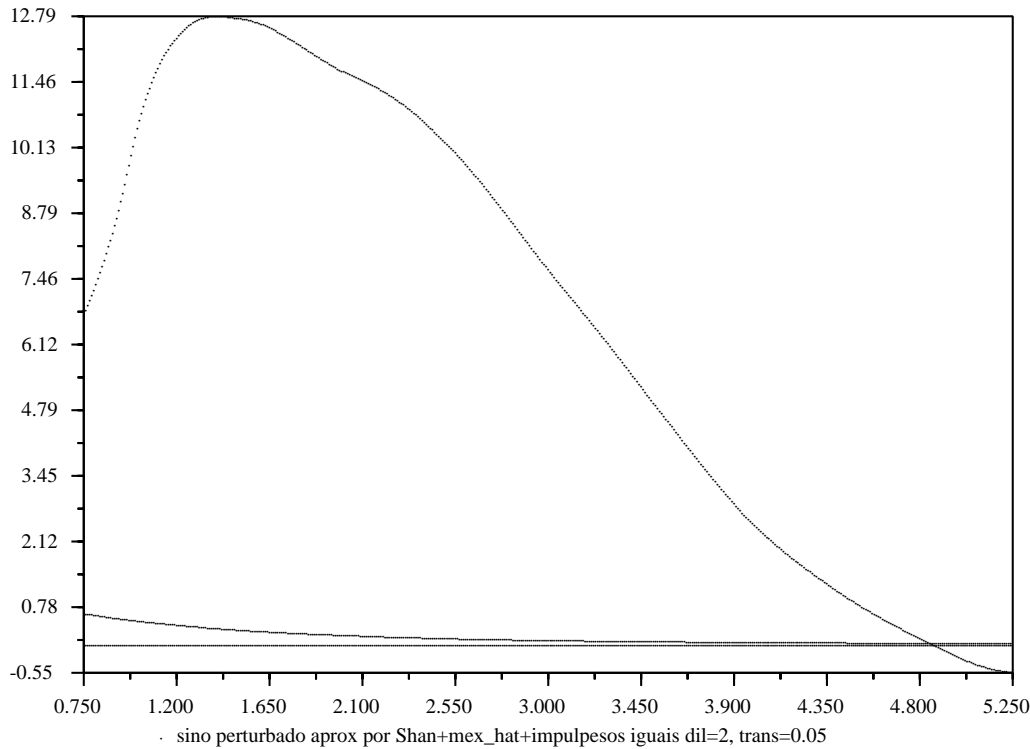
$$\langle \delta_{\frac{\xi}{s}}, w \mapsto \sqrt{s} e^{iu} \hat{g}(s(\alpha - w)) \rangle = \quad (4.14)$$

$$= \alpha \mapsto \sqrt{s} e^{-iu} \hat{g}(s\alpha\xi) \quad (4.15)$$

é uma função da variável α uma vez que ξ, s, u são parâmetros que definem cada elemento do dicionário.

Agora o algoritmo de **busca de coincidências adaptadas** tem a expressão dos elementos do dicionário relativamente ao tempo, g_γ , e a frequência, \hat{g}_γ e pode assim pesquisar uma seleção de átomos que seja “melhor adaptada” para representar f, \hat{f} . Parte da tecnologia para atingir este objetivo consiste em discretizar a família que compõe o dicionário sobre um conjunto de índices usando potências positivas e negativas de 2, ver [4, páginas 101,102] para mais alguns detalhes. Os mesmo autores põem à disposição dos interessados uma versão computacional do algoritmo, ver [4, página 109].

Para fazer um rápido sumário, veja a diferença entre a técnica usada nos experimentos com dicionários apresentados na sequência de figuras 4.1, ..., 4.4 em que houve apenas translação. Na fig. ?? é o dicionário de Shannon que se encontra em uso. Nas duas últimas se usa também dilatações.



4.3 Filtros.

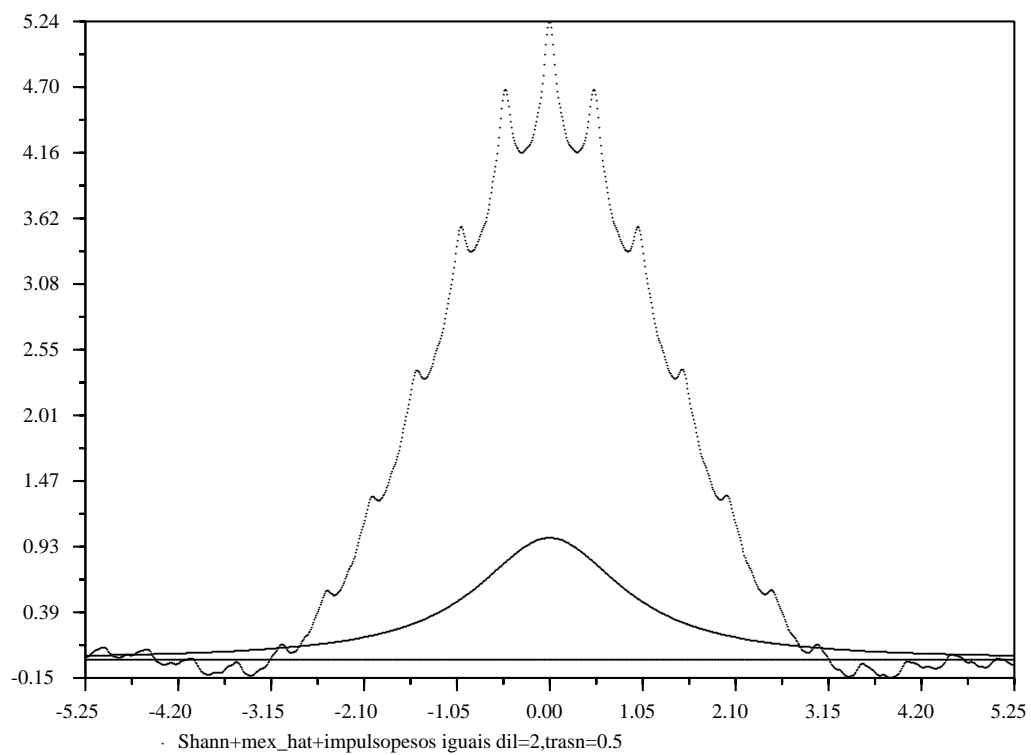
Esta seção é uma expansão modificada de [22].

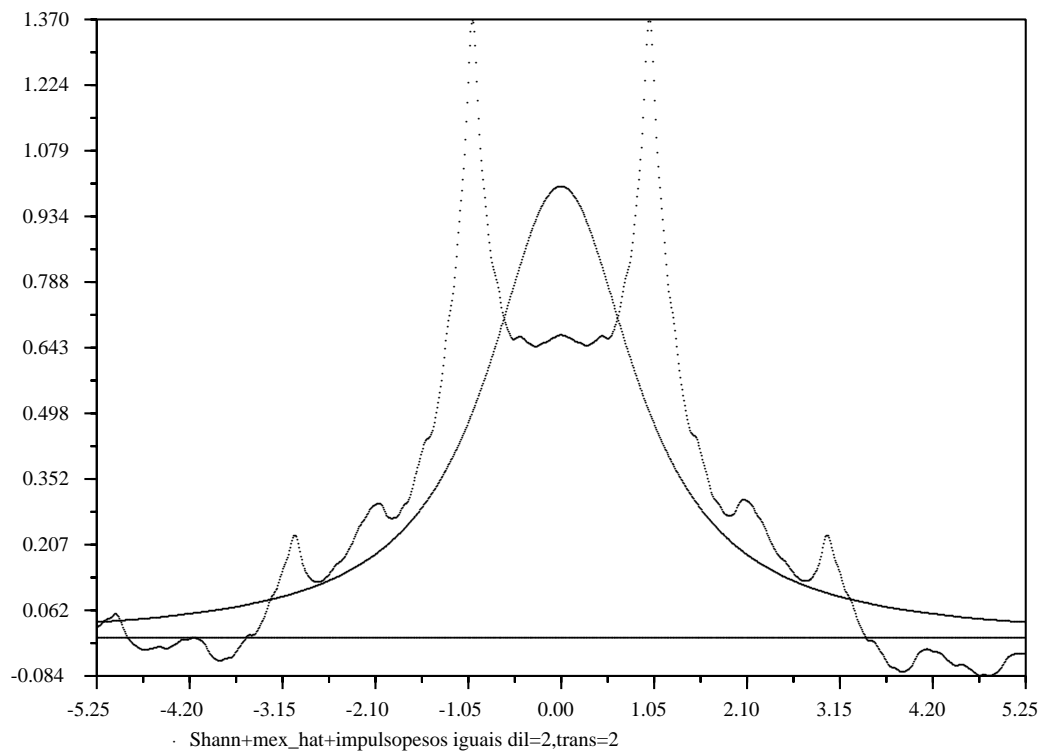
A idéia simples para descrever um filtro é: *uma projeção num sub-espaco*. O programa em Pascal Fourier faz isto de forma bem elementar uma vez que os sinais alí são, exclusivamente, polinômios trigonométricos.

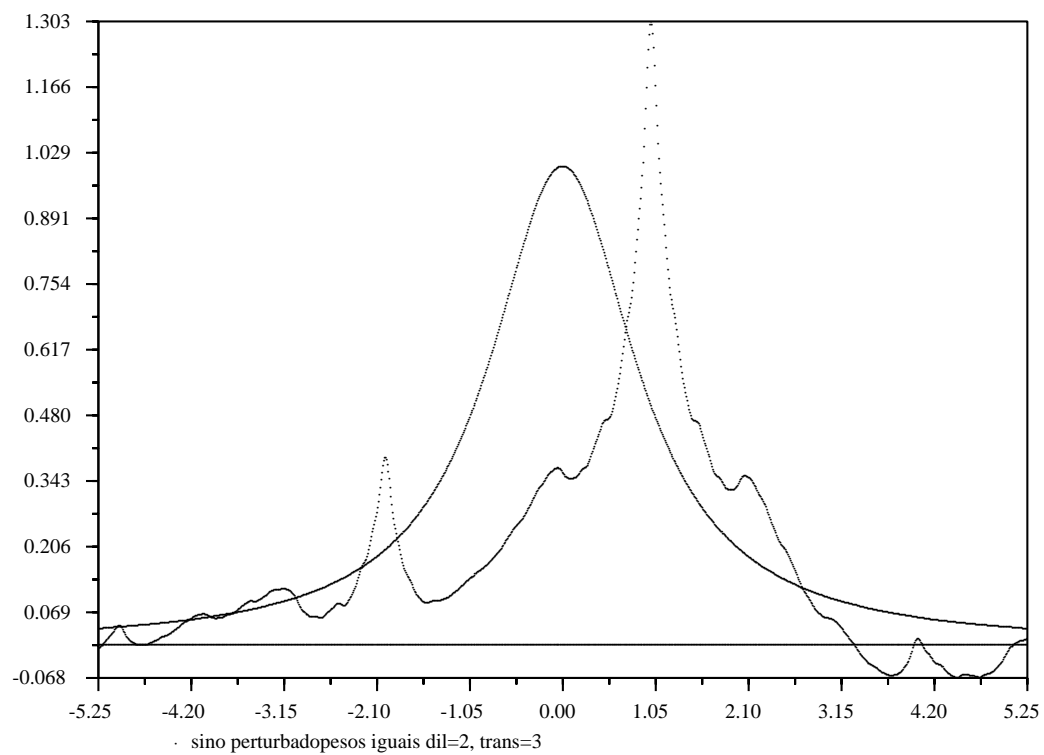
Aprofundando mais o conceito, *filtros* servem para fazer uma busca qualitativa num sinal e verificar se nele se encontram presentes algumas freqüências que por qualquer razão se considere importante pesquisa.

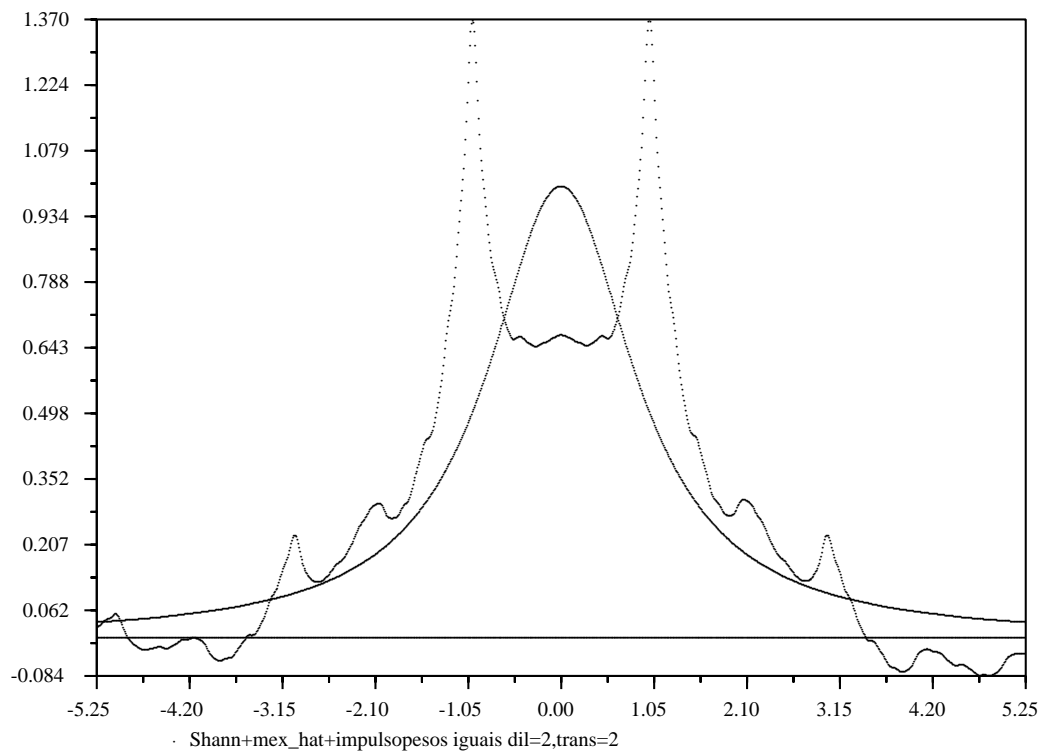
Exemplo 12 *Um exemplo mecânico simples.*

Todo motor mecânico, baseado num eixo em rotação, emite ondas mecânicas com uma determinada faixa de freqüências e se pode descrever com precisão esta faixa para um motor específico. Captado o sinal emitido pelo motor se pode verificar a existência de freqüências fora da faixa de normalidade o que irá traduzir o tamanho do desgaste dos mancais em que os eixos rodam e portanto o momento de parar a máquina para manutenção. Neste caso se vai filtrar o sinal para pesquisar a existência das freqüências que indicam o início do risco. Se elas estiverem presentes estána hora de parar a máquina para manutenção.









Referências Bibliográficas

- [1] Arfken, G. *Mathematical Methods for Physicists*
Academic Press, INC. 1985
- [2] Daubechies, I. *Ten lectures on Wavelets*
Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, PA, 1992.
- [3] Dym,H. Mckean,H.P. *Fourier Series and Integrals*
Academic Press - 1972
- [4] Bergeaud, F. Mallat, S *Matching pursuit: adaptive representations of images and sounds* Comp.
Appl. Math. V. 15 no 2 pp 97-109 -1996
- [5] Mei Kobayashy *The “Ueburette-Boom”: Wavelets in Japan* - SIAM - news Nov 1995
- [6] Lanczos, C. *Linear Differential Operators*
Classics in Applied Mathematics 18 - SIAM - 1996
- [7] Lang, S. *Analysis II.*
- Addison-Wesley-Reading Ma - 1970
- [8] Meyer, Yves *WAVELETS - algorithms & Applications*
Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM - 1993
- [9] Pereira Nunes, Marcelo *Tutorial de Cálculo - programa* - ftp.cpd.furg.br/pub/calculo - 1997
- [10] Praciano-Pereira, T. *Convolution Splines.* submetido para publicação - 1995
- [11] Praciano-Pereira, T. *Cálculo Avançado. Vol I.*
- Notas de aula - BCE - URG - 1996
- [12] Praciano-Pereira, T. *Cálculo numérico computacional - Vol II* Introdução à Teoria da Aproximação
a ser publicado pela editora da Univ. do Rio Grande - 1998.
- [13] Praciano-Pereira, T. *Cálculos numéricos e gráficos usando Pascal.*
- Notas mimeografadas - BCE - UEM - 1993
- [14] Praciano-Pereira, T. *Coleção de programas em Pascal* ftp.cpd.furg.br/pub/calculo - 1997
- [15] Rudin, W. *Real and Complex Variables*
McGraw-Hill Series in Higher Mathematics -1974
- [16] L. Schwarz *Mé thodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*
Herman - éditeurs - Paris - 1970
- [17] *Scilab*
<http://www.inria.fr/logiciels>
- [18] Shannon, C. E. *Communications in the presence of noise.*
Proc. IRE 37, 10-21 (1949)
- [19] Shapiro, H.S. *Smoothing and approximation of functions.*
- Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies Nr. 24 - 1970.

- [20] Simmons, G.F. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill - Book Company - 1968
- [21] Strang, G. *Condition numbers for wavelets and filter banks* Comp. Appl. Math. V. 15 no 2 - 1996 -(161-179)
- [22] Strang, G. *Wavelet transforms versus Fourier transforms* Bull. of AMS Vol. 28, Number 2, April 1993 (288-305)
- [23] Zygmund, A. *Trigonometric Series I,II* Cambridge University Press - New York - 3^aed. 1988

Índice Remissivo

- L^2 , espaço vetorial, 34
- $l^2[0, 2\pi]$, 33
- $\mathcal{C}([0, 2\pi])$, 33
- a função sinc, 67
- aberto, 32
- acumulação, ponto de, 69
- acumulação, pontos, 32
- acumulação. ponto de, 69
- amostragem de Shannon, 81
- assintótico, comportamento , 69
- Banach, espaço, 38
- band limited, 57
- Cantor
 - conjectura, 20, 21
- cardinalidade, 21
- Cauchy-Schwartz, desig., 34
- coef.complexos/reais de Fourier, 51
- comportamento assintótico, 69
- conjectura
 - de Cantor, 20, 21
- conjunto
 - aberto, 32
 - fechado, 32
- conjunto fechado, 32
- contínua, função linear , 38
- converg. serie de Fourier, 32
- convergência, 32
- convergência em média, 50
- convergência, 31
- convolução
 - expressão da, 26
 - significado geométrico, 26
- convolução e trans. de Fourier, 25
- convolução, 68
- cosK, 22
- Debian/Gnu/Linux, 3
- decomposição
 - par, ímpar, 21
- deMoivre-Euler-Abel, 1
- densidade de Nyquist, 83
- derivadas da trans. de Fourier, 64
- desig. de Cauchy-Schwartz, 34
- desig. triangular, 35
- desigualdade de Hölder, 63
- desigualdade de Jensen, 36, 38
- dilatação-translação, 87
- dimensão, 20
- dimensão infinita, 20
- Dirac, distribuição, 57
- Dirichlet, núcleo, 47
- Dirichlet, Núcleo, 57
- Dirichlet, núcleo, 47
- discreta, transf. de Fourier, 44
- discreta, transformada de Fourier, 66
- distribuição de Dirac, 57
- distribuição delta de Dirac, 68
- Du Bois-Reymond, 31
- energia, impulso, 69
- enxameada, transformada, 75
- equivalência
 - de funções, 33
 - de funções, 21
 - funções, 21
- erro pontual na Série de Fourier, 51
- escalar, produto, 12, 14
- espaço de Hilbert, 38
- espaços de funções, 33
- espaço de Banach, 38
- espaço de sucessões, 42
- espaço vetorial $L^2([0, 2\pi])$, 34
- espectro, 1
- espectro, na ser. de Fourier, 52
- exponencial, t. Fourier, 73
- fórmula
 - deMoivre-Euler-Abel, 1
- faixa de frequência limitada, 57
- faixa de tempo limitada, 57
- fechado, 32
- Fejér, núcleo, 50
- fenômeno de Gibbs, 51
- fenomeno de Gibbs, 46

- filtro, 1
- Fourie, transformada, 64
- Fourier, 12
 - transformada discreta, 18
- Fourier, coef. complexos/reais, 51
- Fourier, o espectro, 52
- Fourier, programa, 23
- Fourier, séries, 14
- Fourier, serie/converg., 32
- Fourier, series, 12
- fourier, series, 29, 30
- Fourier, transformada, 44, 61
- Fourier, transformada discreta, 66
- FourierX, 22
- freqüência e tempo, 56
- frequência, 68
- Fubini, Teorema de, 38
- função
 - decomposiç ao par, impar, 21
- funções
 - espaços de, 34
 - periódicas, 34
- função linear contínua, 38
- função,suporte duma, 69
- funções, espaços, 33
- função a suporte compacto, 69
- funções rápidamente decrescentes, 60

- Gaussiana, integral, 70
- Gibbs, fenô meno, 51
- Gibbs, fenomeno, 46
- GnuLinuX, 29

- Hölder, desigualdade, 63
- Hilbert, espaço, 38

- identidade de Parseval, 43, 44
- impulso, 66, 69
- infinita, dimensao, 20
- informação, 1
- injetividade da t. de F., 21
- integral da Gaussiana, 70
- integral, transformada, 60, 62
- intervalo aberto, 31

- Jensen, desigualdade, 36, 38

- kernel da transformada integral, 61

- largura de faixa, 56
- lema de Riemann-Lebesgue, 39
- Linux, 3
- linux, 29

- média, convergência, 50

- módulo π , reais, 49
- medida de Dirac, 73
- Multiplicação, operador, 65

- nú cleo da transformada integral, 61
- nú cleo de Dirichlet, 47
- nú cleo de Fejé r, 50
- núcle de Dirichlet, 47
- núcleo, 36
- Núcleo de Dirichlet, 57
- Nyquist, densidade, 83

- Operador Multiplicação, 65
- ortogonalidade senk,cosj, 13

- Parseval, identidade, 43, 44
- Parseval, relacao de , 42
- Parseval, teorema, 43
- periódicas, funções, 34
- Plancherel, teorema, 44
- polinômio trigonométrico, 18, 20
- polinômios trigonométricos, 22
- polinom. trigon., 12
- ponto de acumulação, 69
- ponto de acumulação, 69
- pontos de acumulação, 32
- potê ncia total, 74
- potência espectral, 74
- produto e tr. de F., 73
- produto escalar, 12, 14
- programa fourier, 22
- progrma, séries de Fourier, 15

- quase iguais
 - funções, 33
 - funções, 21

- rápidamente decrescentes, funções, 60
- reais módulo π , 49
- relacao de Parseval, 42
- Riemann-Lebesgue, lema, 39
- ruído, 1

- séries de Fourier, 14
- séries de Fourier, progrma, 15
- Série de Fourier, erro pontual, 51
- Séries de Fourier, converg., 31
- Scilab, 3, 29
- senK, 22
- series de fourier, 29, 30
- series trigonom., 12
- Shannon, amostragem, 81
- Shapiro, 48
- sinal, 66, 74

sinc, 67
soma telescópica, 96
sucessões, espaço, 42
suporte compacto, função, 69
suporte duma função, 69

telecomunicações, 82
telecomunicações, 60
tempo e frequência, 56
Teorema de Fubini, 38
teorema de Parseval, 43
teorema de Plancherel, 44
Teoria das distribuições, 57
time limited, 57
topologia, 32
toro unidimensional, 49
translação, medida de Lebesgue, 38
trans. de F. do produto, 73
trans. de Fourier e convolução, 25
transformada
 de Fourier, 18, 21
 wavelet, 21
transformada de Fourier, 44, 56, 61, 64
transformada de Fourier, derivada, 64
transformada discreta, 44
transformada discreta de Fourier, 44, 66
transformada enjanelada, 75
transformada enjanelada de Fourier, 77, 78
transformada integral, 60–62
transformada integral, kernel, 61
transformada integral, núcleo, 61
transformadas integrais, 62
translação, 65
translação, int. de Riemann, 38
translação-dilação, 87
triangular, desig., 35
trigon., polinômio, 12
trigonom. series, 12
trigonométrico, polinômio, 18, 20
trigonométricos, polinômios, 22

unidade da convolução, 68
unitários, vetores, 17

vetores unitários, 17

wavelets, 21