

Sumário

Introdução	2
I Vetores e sistemas de equação	5
1 Números complexos	7
1.1 incompletude, \mathbf{R}	7
1.1.1 números complexos	8
1.1.2 A representação geométrica dos complexos	11
1.2 Números complexos: extensão dos reais	14
1.3 Módulo, argumento e conjugado	19
1.4 Interpretação geométrica do produto	20
1.4.1 Para melhorar a arte de fazer contas	24
2 Matrizes	25
2.1 Matrizes	25
2.1.1 Um exemplo algébrico	26
2.1.2 Significado geométrico da multiplicação	31
2.1.3 As matrizes	32
2.1.4 O contórno inicial da teoria	32
2.1.5 Matrizes, a notação	33
2.1.6 A parte computacional da álgebra	33
2.1.7 A multiplicação de matrizes não é comutativa	37
2.1.8 Matriz transposta	39
2.2 Matrizes como funções do \mathbf{R}^2	42
2.2.1 As matrizes 2×2	42
2.2.2 Matrizes generalizam a multiplicação	43
2.3 Funções lineares afins	50
2.4 Sistemas lineares	53
2.4.1 Equações lineares	53
2.5 Exercícios: sistemas lineares	61
3 Vetores	65
3.1 O espaço \mathbf{R}^2	65
3.1.1 A estrutura algébrica de \mathbf{R}^2	65

3.2	Dependência linear	71
3.2.1	Dependência linear	74
3.3	Dimensão	78
3.4	O \mathbf{R}^4 tem dimensão quatro	81
3.5	O $\mathbf{R}_3[x]$ tem dimensão quatro	84
3.6	Isomorfismo	87
3.6.1	O isomorfismo $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{R}_3[x]$	87
3.6.2	\mathbf{R}^n - o paradigma da dimensão finita	91
3.7	Morfismos de espaços vetoriais	95
3.8	Dimensão e variedade	96
3.8.1	Hiperplano e hipersuperfície no \mathbf{R}^4	99
3.8.2	Um pouco sobre classificação de variedades	99
4	Sistemas de equações lineares	103
4.1	O Teorema da imagem e do núcleo	103
4.1.1	A imagem de uma matriz como função linear	103
4.1.2	Espaço vetorial afim	108
4.2	A solução de uma equação linear	108
4.2.1	Quando $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$	111
4.3	Independência linear das soluções	111
4.4	Base e matriz	112
4.5	Exercícios resolvidos	114
II	Decomposição de matrizes	119
5	Autovalores	123
5.1	Autovalor e autovetor	123
5.1.1	Primeiros exemplos de autovalor e autovetor	123
5.1.2	Autovalor: a definição e o método	127
5.1.3	Estrutura dos autovetores associados a autovalores	129
5.2	Exercícios sobre autovalor e autovetor	134
6	Formas especiais	137
6.1	A semelhança de matrizes	137
6.1.1	O projeto	139
6.1.2	Semelhança entre matrizes	139
6.1.3	Discutindo as experiências do <i>laboratório</i>	147
6.2	Matrizes singulares e não singulares	154
6.3	Mudança de base e mudança de matriz	158
III	Solução dos exercícios	161
7	soluções	163
7.1	Propriedades das funções lineares afins	163

7.2	Sistemas lineares - Solucao dos exercicios	164
7.3	Estrutura do \mathbf{R}^2 - Solucao dos exercicios	167
7.4	Espaço vetorial - Solução de alguns exercicios	170
7.5	Sistemas Lineares- solucao	180
7.6	Matrizes não singulares-Solucao dos exercicios	185
7.7	Mudança de base - solucao.	196
7.8	Operações elementares	201
7.9	Matriz diagonal	201
7.10	Equivalência de matrizes e operacoes linha-soluções	213
	Bibliografia	i
	Bibliografia	i

Lista de Figuras

1.1	Representação geométrica dos complexos	10
1.2	Produto de números complexos	10
1.3	12
1.4	Propriedades dos números complexos	14
1.5	Conjugado de um número complexo	17
1.6	A projeção de $a + bi$ sobre \mathbf{S}^1	20
2.1	Multiplicação por i provoca uma rotação de $\frac{\pi}{2}$	45
2.2	Rotação e homotetia seguidas de uma translação	52
2.3	Experimentos com massa e momento	62
2.4	Distribuição de forças numa estrutura metálica	63
3.1	três vetores não colineares dois a dois formam um triângulo	71
3.2	Vetores colineares são linearmente dependentes	75
4.1	. Espaços de saída e de chegada	109
4.2	Translação do núcleo	112
5.1	Matriz de mudança de base	132
7.1	Cálculo do determinante com octave	171

Introdução.

Recomendamos que você não leia agora esta *introdução*, até mesmo porque ela foi feita quase que depois de o livro ficar pronto... ou talvez, porque você já começou, que a leia rapidamente, talvez marcando alguns trechos que não entender, para reler depois. Se a introdução estiver clara, certamente você não precisa ler o livro. Se o livro lhe for útil, a introdução ficará absolutamente clara, depois.

Até pensamos em colocar a *introdução* ao final, mas aí correríamos o risco de que ela ficasse perdida, definitivamente. Talvez a maior importância desta conversa inicial resida na oferta que fazemos de um trabalho interativo, do leitor, com os autores. Use o nosso endereço eletrônico que aparece em vários locais no texto, fale conosco, diga-nos quando o texto não estiver claro, ou nos faça suas sugestões. Claro, como na parábola do *homem, do burro e da criança*, nem sempre poderemos aceitar todas as sugestões, por mais importante e próprias que sejam, sem descaracterizar o nosso trabalho.

Não pretendemos que este livro seja *autocontido*, embora desejemos que ele possa ser útil ao *autodidata*, ele foi escrito como uma ferramenta de apoio ao trabalho do professor, seja em aula presencial seja em ensino à distância. Em particular, os autores se declaram à disposição do leitor para responder questões ligadas com o texto. Use com liberdade o endereço

tarcisio@member.ams.org

para discutir a teoria, as questões, apresentar suas críticas, e, se desejar, participar desta equipe. Este é um trabalho aberto.

Supomos que a disciplina Álgebra Linear esteja sendo ministrada posteriormente, ou no máximo concomitantemente, com Cálculo II, (Cálculo multivariado). Faremos uso dos conceitos da Geometria Analítica e do Cálculo sempre que isto puder tornar os conceitos e os exemplos mais interessantes.

Faremos uso da geometria na interpretação gráfica e nas interpretações das aproximações computacionais. Desta forma entendemos que trazemos uma visão, *utilitarista*¹ da geometria.

O título de cada seção deve mostrar o seu objetivo:

- transformar para o ver o efeito de uma função,
- usar transformações lineares para esclarecer o significado da derivada,
- e comparar o “exato” com a aproximação obtida.

são alguns métodos geométricos aqui empregados.

Trata-se assim de uma análise do efeito, através da transformação *geométrica* produzida, porque em grande parte a *Álgebra Linear* é geometria, apenas uma geometria de *dimensão maior* do que esta geometria de dimensão três, (ou quatro), em que vivemos.

No Cálculo, a visão geométrica, consiste em dominar os gráficos das curvas e superfícies “algébricas” fundamentais para com elas comparar com as outras cujos gráficos nem sequer sabemos fazer. Na *Álgebra Linear* queremos tornar

¹que horror...

intuitiva a generalização das retas, dos planos, a dimensões maiores, ou menores, no caso do ponto (como objeto linear). Em ambos os casos, no Cálculo ou na *Álgebra Linear*, existe uma questão dimensional cujos aspectos *intuitivos* é preciso romper ou enlargar.

Um aspecto central da *Álgebra Linear* é a resolução de sistemas de equações (lineares) e da análise destes sistemas (lineares) transferido para a análise das matrizes, que são *multinúmeros* guardando a informação das equações. As equações lineares são consideradas fáceis, até mesmo porque elas podem de fato ser resolvidas automaticamente, por programas de computador. Depois elas serão utilizadas em *linearizações das equações não lineares*, uma aproximação.

Apoio computacional

O adjetivo *computacional*, no título, significa que faremos uso de um pacote computacional, **scilab**, para realizar os fatos da Álgebra Linear. É preciso que fique claro o que significa para nós, computação. Um programa de computador, o próprio computador, são instrumentos com que podemos andar mais rápido e, algumas vezes, fazer aquilo que nos seria impossível fazer à mão. Você logo vai ver que existem operações que nos tomariam dias para executá-las manualmente, fora as possibilidades de erro deste exercício. Entretanto, *nada do que fazemos com o computador* pode ser porque *não sabemos fazer à mão*. Isto representaria automatização inócua. A adoção do **scilab** foi feita pelas seguintes razões:

1. É um programa distribuído sob a licença GPL, ver

<http://www.gnu.org>
<http://www.scilab.org>

para entender melhor do que se tratam programas livres, como **scilab**.

2. É um programa de alta qualidade, bem documentado, e que se encontra possivelmente instalado em qualquer computador rodando **Linux**, de formas que qualquer aluno que quiser, poderá ter acesso a este programa sem gastar nenhum centavo extra, além do que tiver gasto para obter o seu computador e o sistema operacional.
3. Se **scilab** não estiver instalado, facilmente você o pode obter no site

<http://www.scilab.org>

scilab se auto-define como similar a um outro programa comercial dedicado a Álgebra Linear, quer dizer que, com **scilab** podemos fazer as contas da Álgebra Linear, podemos resolver equações lineares. Há outros programas também distribuídos sob a licença GPL, *octave* e um exemplo, e pode ser obtido em

<http://www.octave.org>

scilab e *octave* são similares, de modo que a qualquer momento do texto, onde estiver escrito **scilab** você poderá ler como se estivesse *octave*, que é um outro programa, também de domínio público, e da mesma qualidade que este que adotamos como *programa oficial* do livro. **scilab** é distribuído para várias outras plataformas, ver no site do **scilab** citado acima.

Como usar este livro

*Que é Álgebra
Linear ?*

scilab

*apoio
computacional*

Queremos chamar sua atenção para algumas convenções de redação. Há dois tipos de texto que pretendem chamar sua atenção para detalhes, sem desviar sua atenção do objetivo principal. Um dos tipos se chama claramente “observação”, o outro são as notas de rodapé.

Os comentários, o texto teórico, são de nossa consideração, o material mais importante do livro, mas nem sempre o mais fácil. Sugerimos que você inicialmente dê menos importância à teoria, e se concentre nos exercícios.

Talvez você deva ler as observações na ordem em que elas aparecerem, mas sem lhes dar muita importância, numa primeira leitura. Para lhe permitir uma busca mais acurada de informações, o livro tem um índice remissivo alfabético ao final em que todos os conceitos se encontram *indexados* de forma que você poderá facilmente retornar a eles quando achar necessário. Também se encontram *indexadas* todas as palavras-chave do texto.

Os exercícios foram escritos para serem feitos com auxílio de uma *teoria mínima*. A própria teoria deve surgir dos exercícios. Ao mesmo tempo os exercícios fazem parte integrante do texto no sentido de que eles sempre serão utilizados mais a frente. Quase todos os exercícios podem ser resolvidos em mais de um nível, e você deve resolvê-los no nível que puder, e depois tentar aprofundar a solução.

Mas não despreze totalmente a teoria, nela há dicas de como se aprofundar na solução dos exercícios.

Este livro tem defeitos, erros. Alguns deles foram deixados *propositadamente*, para serem usados como alerta ou para chamar a atenção do leitor de melhorias que podem ser introduzidas, ou ainda, por que, falar com absoluta correção, algumas vezes, não é o mais didático. Destes nós chamaremos sua atenção, no momento certo. Outros fugiram, simplesmente, a análise dos autores, destes, os autores agradecem que os leitores lhes chamem a atenção para que eles sejam corrigidos ou, melhor, usados como material didático: *nada melhor do que um erro para se dar um salto qualitativo*.

Usamos uma convenção tipográfica no livro, *texto em itálico* representa material que você deve olhar com cuidado, possivelmente não está definido ainda e estamos usando a concepção intuitiva do termo. Quando usarmos **texto tipográfico** estaremos fazendo referência a um termo técnico, já definido anteriormente ou considerado bem conhecido como tal. Quando usarmos letra pequena estamos lhe querendo dizer que o assunto é polêmico e que há muito mais coisa para ser dito do que estamos conseguindo dizer naquele momento, *é como se estivessemos lhe cochichando ao ouvido*. Usamos texto sublinhado para chamar sua atenção de um detalhe que poderia passar despercebido, tem o mesmo sentido o **texto em negrito**.