

Prisioneiros  
da  
Terceira Dimensão

Tarcisio Praciano Pereira<sup>1</sup>

Sobral, 22 de julho de 2011  
edição preliminar

<sup>1</sup>Departamento de Computação - Universidade Estadual Vale do Acaraú

# Sumário

<b>1</b>	<b>Dimensão, energia e medida</b>	<b>1</b>
1.1	Dimensão e energia . . . . .	1
1.2	Massa, energia e volume . . . . .	6
1.2.1	O conceito Newtoniano de massa . . . . .	11
1.2.2	Massa e teoria da relatividade . . . . .	12
1.3	Volume, energia, massa e dimensão . . . . .	17
1.4	Resumindo . . . . .	18
1.5	Matéria e energia relativamente nulas . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Energia</b>	<b>21</b>
2.1	Energia e Matéria . . . . .	21
2.2	Energia Calorífica . . . . .	24
2.3	Energia cinética e energia potencial . . . . .	27
2.4	Inércia . . . . .	29
2.5	Velocidade e aceleração . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Dimensão</b>	<b>36</b>
3.1	Espaço em Matemática . . . . .	36
3.2	Interseção de objetos de dimensão diferente . . . . .	53
3.2.1	Um mundo unidimensional contido num plano . . . . .	53

3.2.2	Um mundo bidimensional invadido por um objeto $3D$ . . . . .	57
3.3	Dimensão na Álgebra Linear . . . . .	64
3.4	Geradores e dimensão . . . . .	71
3.4.1	Elementos básicos . . . . .	72
3.4.2	Formatação da reta . . . . .	73
3.4.3	Formatação do plano . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Medida</b>	<b>76</b>
4.1	Comprimento, área e volume, hipervolume, . . . . .	76
4.1.1	E o espaço $4D$ . . . . .	81
4.2	Medida . . . . .	84
4.3	A evolução da medida geométrica . . . . .	85
4.4	Conjuntos magros - de medida zero . . . . .	90
4.5	Por que somos prisioneiros da $3D$ ? . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Um exemplo da quarta dimensão</b>	<b>94</b>
5.1	Um experimento . . . . .	95
5.1.1	Teorema da função implícita . . . . .	99
5.1.2	teorema da função implícita: O caminho inverso . . . . .	105
5.2	O próximo salto de dimensão . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Paradoxos e pseudo paradoxos</b>	<b>117</b>
6.1	Aquecimento . . . . .	117
6.2	o clock . . . . .	119
6.3	Podemos beber um refrigerante sem abrir a garrafa	121
6.3.1	A formiga presa na garrafa bidimensional .	121
6.4	Uma parede pode ser atravessada ? . . . . .	124
6.5	A formiga bidimensional e a palha . . . . .	126
6.6	Corrigindo a visão de Carl Sagan . . . . .	126

6.7	Corrigindo a laminação . . . . .	128
6.8	O tamanho relativo . . . . .	130
6.9	Formatação . . . . .	131
6.9.1	Formatando a reta . . . . .	132
6.10	Psicologia e dimensão . . . . .	133
6.11	Variedades . . . . .	136
6.11.1	Variedade . . . . .	137
6.11.2	Hiperplano . . . . .	139
	Bibliografia .....	

# Lista de Figuras

1	Quatro elementos num espaço de dimensão infinita . . . . .	xi
1.1	Eletrons, protons e neutrons . . . . .	16
2.1	O corpo que não entra em órbita . . . . .	33
3.1	Ampliando fractais com <b>xaos</b> . . . . .	39
3.2	Ampliando fractais com <b>xaos</b> . . . . .	40
3.3	A infinidade dos racionais num segmento de reta . . . . .	41
3.4	P divide o espaço $1D$ em dois semi-espaços . . . . .	43
3.5	Uma reta divide um plano em dois semiplanos . . . . .	45
3.6	Um disco atravessando uma reta . . . . .	54
3.7	pegadas de um ser tridimensional no plano, invisíveis até mesmo pelos tridimensionais . . . . .	59
3.8	Equação da reta . . . . .	66
3.9	Um segmento gera todos os outros: segmento gerador . . . . .	69
3.10	Geradores do plano . . . . .	70
4.1	A esfera unidimensional é um segmento de reta . . . . .	78
4.2	O retângulo fundamental, de área 1 . . . . .	80
4.3	A região mede aproximadamente $14U + 4\frac{U}{4} = 15U$ . . . . .	87
5.1	O fluxo d'água caindo de um recipiente com borda circular com as curvas do fluxo desenhadas à mão pelo autor. . . . .	95
5.2	No ponto de inflexão muda a curvatura . . . . .	97

5.3	Um ponto de sela com gnuplot . . . . .	97
5.4	A reta tangente à curva no ponto $(a, b, F(a, b))$ . . . . .	102
5.5	Tangente a esta reta, <i>existe</i> uma curva $F(x, y) = c$ . . . . .	105
6.1	Formiga presa numa garrafa bidimensional . . . . .	121
6.2	Formiga presa numa garrafa bidimensional . . . . .	123
6.3	A reta numérica ordenada . . . . .	134

Talvez você não devesse ler esta *introdução agora* porque eu a escrevi depois de terminado o livro.

não leia  
agora a  
introdução...

Mas se você quiser insistir em ler agora, leia por cima e depois faça uma nova leitura quando terminar o livro todo, ela lhe vai parecer mais clara.

Neste livro vou desenvolver três conceitos:

<i>dimensão, energia, medida.</i>
-----------------------------------

Estes tópicos encontraram uma definição clara dentro dos textos científicos durante o último século, mas eles ainda não se tornaram conceitos comuns. Tentarei apresentá-los de modo elementar, através de exemplos.

O assunto não é difícil, e até mesmo pode ser apresentado desta forma que estou encetando, intuitivamente. Tecnicamente são todos complexos. Esta aparente contradição é interessante, há vários tópicos científicos que são simples de serem explanados com a linguagem coloquial, de forma intuitiva, mas que são difíceis de serem colocados numa linguagem formal.

Se você estiver curioso de ver a resposta do “por que somos prisioneiros da terceira dimensão”, vá ao final do capítulo cinco e leia a última frase. Ela responde, infelizmente, dentro do espírito do capítulo, mas certamente lhe servirá de estímulo para a leitura do resto do livro.

Mas leve a sério o aviso, este livro não foi feito para ser lido de modo “normal”, da primeira até a última página. Salte, depois volte, leia o que lhe parecer interessante logo, e aos poucos você irá se acostumando com a lógica confusa e dialética da construção do conhecimento.

Também, tudo que de que trato aqui é cientificamente, matematicamente preciso, entretanto eu estou colocando conceitos

sérios dentro de um ambiente jocoso. Você não pode usar este material para fazer deduções místicas e nem afirmar que eu lhe estaria fornecendo subsídios nesta direção: os seres que porventura existam em dimensão 4, ou superior, são definitivamente inatingíveis para nós, da mesma forma como os que existam em dimensão 2 ou inferior. Nem eu sei ou posso saber se existem tais Universos.

Este livro não vai lhe mostrar o impossível, vai apenas lhe mostrar o que é impossível de ser mostrado! Mas irá mostrar-lhe que a Matemática pode nos tirar da prisão tridimensional num sentido muito claro, o de compreender o que é dimensão e mostrar-lhe que é possível lidarmos com espaços de “alta dimensão” de uma forma abstrata superando a nossa prisão geométrica.

### *O método*

O conteúdo será exposto de modo mais intuitivo do que analítico. Isto não quer dizer que tratarei os assuntos de modo impreciso. Estarei dando todo o revestimento de exatidão que for possível para que um leigo à área científica possa ler e compreender estas noções sem que para isto precise ser um Matemático ou um Físico.

As noções serão apresentadas diversas vezes de formas que, a comparação, com diferentes cenários em que elas irão aparecer, lhes fornecerão diferentes visões o que deverá fazê-las compreensíveis.

Esta será a minha técnica para introduzir os conceitos. É a mesma metodologia com que você aprendeu a língua materna, *pelo uso*. É o *uso de um conceito* que o torna claro. Como me dirijo a adultos, não será preciso insistir tanto nas repetições, mas será esta a técnica que empregarei.

Uma exceção é o capítulo 4 em que me permiti a fazer vários

cálculos matemáticos, mas este capítulo pode ser pulado sem risco para a compreensão do capítulo 5. Você também pode lê-lo ignorando as contas, aceitando-as como se fossem verdadeiras. Para isto procurei deixar o texto independente dos cálculos.

Em cada capítulo estarei fazendo referências a conceitos que aparecem em outros. Não tenha dúvida em saltar rapidamente para o outro capítulo para dar um olhadela. Vença o *mito* de que o conhecimento é adquirido de forma ordenada...isto não existe.

O Universo se apresenta admiravelmente ordenado, mas o processo que temos compreendê-lo é dialético, feito de “vais-e-vens”. Adquirimos um conhecimento e, pouco depois, descobrimos que ele é parcial ou errado, e o corrigimos, desarumando todo o conhecimento que tínhamos algumas vezes. Bem parecido com a montagem de um quebra-cabeça em que a colocação de uma nova peça, às vezes, nos obriga a reformular toda a arrumação já feita e que parecia perfeitamente lógica.

Claro que uma certa ordem algumas vezes ajuda, foi por isto que numerei os capítulos e a Editora os juntou com esta ordem para lhe entregar! Mas acredite, as frases foram escritas em ordem aparentemente absurda, como esta que você está lendo agora, que foi escrita quando eu estava no meio do capítulo 3.

#### *O conteúdo do livro*

O primeiro capítulo se dedica aos três conceitos *Dimensão*, *Energia e Medida*. É uma introdução expandida...

introdução  
expandida!

Vivemos imersos em uma *determinada dimensão do espaço*, é isto que torna difícil compreendermos o que é dimensão.

dimensão

É como uma pessoa que nunca tivesse saído do *Rio de Janeiro*, e, conhecendo muito bem a cidade ouvisse a pergunta: “*tem violência no Rio ?*”. Sem dados de comparação, este ca-

e tem  
violência  
no Rio ?

rioca compreenderia mal a pergunta? “*Rio é o Rio! a violência da cidade grande lhe é inerente!*”, pensaria antes de responder. Já tendo passado por uma dúzia de assaltos este carioca entenderia mal por que se deseja distorcer a bela imagem da *Cidade Maravilhosa* com estas histórias de assaltos, coisa tão comum e tão trivial. “*Claro que não há violência no Rio !*”, responderia, aparentemente, sem titubear.

não há  
violência  
no Rio

Este pode ser o sentido de trivialização de um conceito que o torna tão difícil de ser entendido para quem vive dentro dele. Vivemos presos a uma determinada dimensão do espaço e isto nos tira os dados de comparação necessários para compreendermos de uma forma mais ampla o que é *dimensão*.

Uma outra comparação semelhante pode ser feita com *inércia*. Como vivemos presos à gravidade terrestre, temos dificuldade de entender a lei da inércia. Mesmo viajando num dos confortáveis ônibus urbanos, quando, repentina ela for aplicada, raramente pensaríamos nesta importante lei preferindo considerar que a responsabilidade do nosso avanço abrupto para frente é de exclusiva culpa do motorista<sup>1</sup>. O mesmo se pode dizer relativamente aos demais conceitos que vou discutir neste livro.

O capítulo 2 será sobre *Energia*, mas novamente nele você verá com frequência a inte-relação deste conceito com os dois outros. Vou mostrar-lhe que não é possível falar de energia sem falar de *massa* isto para comprovar que são dois conceitos que se confundem. Na ausência de *massa*<sup>2</sup> não há energia, e se houver *energia* haverá *massa*.

Energia

---

<sup>1</sup>Esquecemos nos então de que as regulamentações de segurança do transporte público foram desrespeitadas pela autoridade reguladora ou pela companhia de ônibus

<sup>2</sup>Aqui você vai se deparar com um conceito estranho para a dimensão três: ausência de massa, ausência de energia, volume zero ou área zero.

A massa é o *suporte* da energia

A principal razão deste capítulo 2 se encontra na tentativa de mostrar-lhe a visão limitada de quem vive prisioneiro à gravitação terrestre... para depois usá-la no próximo capítulo comparando com a visão limitada de quem é prisioneiro de uma determinada dimensão, a terceira. Talvez um melhor título para este capítulo teria sido “prisioneiros da gravidade da Terra” para sublinhar o viés que a *força de gravidade terrestre* introduz na nossa maneira de pensar.

No capítulo 3 vou tratar de “*dimensão*” e novamente farei combinações entre os demais conceitos. Quero mostrar-lhe que *energia* depende da *dimensão*, esta é a razão do título deste livro. Eu não sei se há fenômenos energéticos em outras dimensões do espaço, mas, se eles existirem, terão as características que estou discutindo aqui, uma delas é crucial para nós, a medida destes fenômenos ou de suas intensidades energéticas é de certa forma equivalentemente à medida de suas massas, porque a massa é uma especie de coeficiente para o cálculo da energia, sendo isto que traduz a nossa prisão, como você vai ver.

dimensão  
e  
energia

Massa (ou energia) é relativa à dimensão

*Dimensão* é um conceito matemático que é de muito valor para a interpretação de diversos fenômenos de outras ciências, aqui vou me centrar nas aplicações à Física. Veremos que *nossa Física* é uma Física de dimensão três e assim justificarei o nosso aprisionamento.

Numa folha de papel, que na verdade é um retângulo mas comumente consideramos, usando *aproximação*, que represente

um pedaço do plano, um objeto bidimensional, podemos fazer simulações simples de espaços de dimensão infinita, mas teríamos dificuldade de simular um espaço tridimensional. A figura (1), página xi,

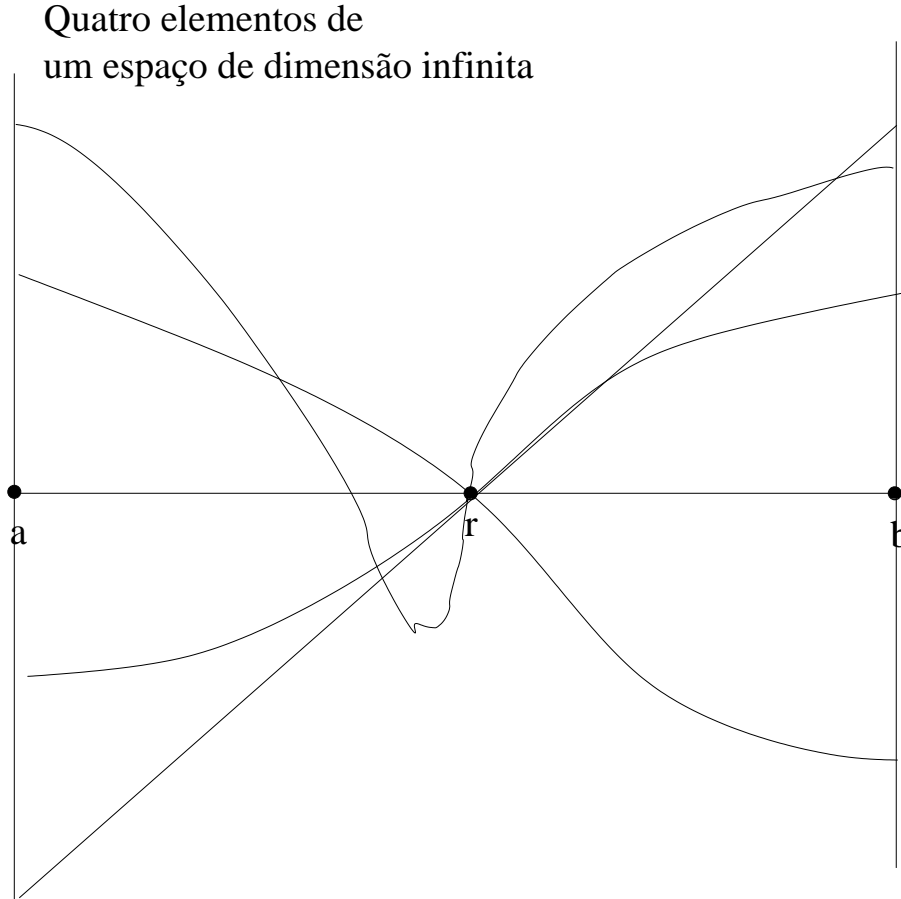


Figura 1: Quatro elementos num espaço de dimensão infinita

Isto mostra que o conceito de dimensão tem “modelagens” bastante complicadas e você ainda pode encontrar um conceito, que é diferente do que estou usando neste livro, que é a dimensão fractal. Possivelmente a forma de entender *dimensão* na teoria

das cordas<sup>3</sup> não é esta que você vai encontrar neste livro.

No capítulo 4 vou discutir *medida*, este é outro conceito matemático fortemente depende da dimensão. Vou mostrar que *energia* depende do conceito de medida, de um certo *tipo de medida*, particular. medida  
e  
dimensão

O capítulo 5 eu queria que você o considerasse uma brincadeira. Vou lhe mostrar como a Matemática pode nos levar da dimensão 3 para a dimensão 4. Ele representa um sumário dos capítulos anteriores, e por esta razão você pode saltá-lo sem nenhum prejuízo para a compreensão do capítulo 6. Ele tem um fundamento matemático e eu até fiz algumas contas típicas de um curso de Cálculo em duas instâncias do capítulo. Mas eu escrevi o texto para que ficasse independente de sua leitura das contas, você pode saltar os cálculos sem nenhum prejuízo para o texto. Mas também pode lembrar o seu curso de Cálculo quando passar pelas contas.

O último capítulo é um pouco desajeitado, está longe de ser organizado. Em um certo sentido é como se o tempo da minha conferência já estivesse terminado mas eu ainda tentasse deixar algumas perguntas no ar para dar-lhe o que pensar depois que terminasse de ler o livro. Tudo lá complementa num certo sentido os temas discutidos nos capítulos anteriores, e certamente você já o terá visitado algumas vezes ao ler os primeiros capítulos. Eu espero por isso.

Há muitas coisas que não sei, *isto me caracteriza como cientista...* No último capítulo vou estabelecer ligações mais fortes entre os três conceitos estudados. É o capítulo dos paradoxos, alguns *pseudo paradoxos*, outros, *autênticos*. paradoxos,  
e falsos  
paradoxos

*comunicação e palavra escrita*

---

<sup>3</sup>string theory

Faço uso dos recursos visuais da palavra escrita para chamar-lhe a atenção de algumas deficiências da conceituação. Por exemplo, com frequência, usarei o *itálico* para caracterizar que estou usando um conceito impreciso. Haverá *muito texto em itálico neste livro!* É um alerta para que você pare e pense. Quando usar letra pequena estarei a alertá-lo de que nem toda a verdade está sendo dita, que estarei a falando de conceitos difusos, usarei dois métodos para alertá-lo, nestes casos, um deles será salientar o texto com a palavra *observação*, outro, quando for uma pequena chamada, usarei notas de rodapé.

Também sublinharei o texto, ou o escreverei **em negrito** quando quiser alertá-lo de um perigo... e o livro está cheio de ciladas!

Para finalizar, você, com frequência, vai encontrar a frase “você encontra em outro lugar neste texto” indicando um determinado assunto. Procure o assunto no *índice remissivo alfabético*, ao fim do livro. Infelizmente, *livros em papel* não são tão simples como os *livros eletrônicos*, com *links*... mas você pode ler o livro no disco que o acompanha. Lá o texto eletrônico contém os mesmos *links* do índice remissivo e você pode rapidamente chegar nas referências com um clique do mouse.

Para concluir tenho o hábito de fazer um agradecimento a um grande número de pessoas sobre cuja existência eu nada sei diretamente, os membros da comunidade de Programação Livre. Meu computador roda Debian/Gnu/Linux o que significa uma quantidade imensa de programas alguns dos quais eu faço uso direto, como de editores de texto, programas de imagem, linguagens de programação, navegadores para Internet. Tudo que pude aprender nos últimos 15 anos se deve em grande parte a este grande esforço comum do qual eu sou também um membro

feliz.

Tarcisio Praciano Pereira Sobral, quarta-feira, 13 de Julho de  
2011

# Capítulo 1

## Dimensão, energia e medida

### *dimensão, energia, medida*

Neste capítulo vou *brincar* com os três conceitos que formam o objetivo deste livro: *dimensão, energia, medida*. É a minha forma de introduzir conceitos nada fáceis porque mexem com a nossa própria essência física. Eles fazem parte da linguagem do nosso *dia a dia* e, mesmo assim, têm um uso científico muito bem definido sem estarem dissociados dos seus significados linguísticos e este é um problema para o entendimento pela confusão entre o sentido científico e o sentido popular de uso da língua. Vai ser preciso, entretanto, combiná-los de várias maneiras para que eu possa transmitir-lhes o sentido mais amplo destes conceitos.

Considere este capítulo como uma apresentação destes conceitos. Nele estou mostrando e exercitando-o na compreensão de suas interdependências e apresentando-lhe uma coleção de exemplos, situações, em que eles aparecem naturalmente na nossa vida.

### 1.1 Dimensão e energia

É muito comum falar-se que uma folha de papel “representa” um plano e portanto dá uma idéia de dimensão dois. Nós vivemos num mundo tridimensional e uma folha de papel também é um objeto tridimensional: tem *altura, largura e espessura*. É *tridimensional* tudo que tenha três dimensões, *altura, largura, profundidade*. Portanto, ver uma folha de papel como um ob-

jeto de dimensão dois é apenas uma *aproximação* da realidade<sup>1</sup>.

Sempre fazemos aproximações da realidade! Longe de ser isto um defeito, é uma necessidade que precisa ser desmistificada. É a solução positiva dos problemas de *entender, descrever ou transmitir uma realidade muito complexa com uma quantidade, relativamente pequena, de informações*.

**Exemplo 1** *Se aproximando da segunda dimensão. Considere a seguinte experiência.*

**Laminar seguidamente uma folha de plástico vermelha para reduzir-lhe a espessura.**

*Aparelhagem necessária: um laminador, um aparelho que serve para cortar uma lamina em duas ou mais lâminas de menor espessura.*

*Vamos aqui regular o aparelho para sempre obter outras duas lâminas com a metade da espessura da primitiva. Obviamente se trata de um aparelho de altíssima tecnologia possivelmente nem sequer construído pela indústria, talvez existente apenas em experiências abstratas, coisa típica de matemático.<sup>2</sup>*

*Mas sua imaginação facilmente o poderá acompanhar como se você estivesse em um laboratório de ponta. Aliás, o simples facto de que você esteja lendo este livro já indica que você é um ser imaginativo... disposto a percorrer os meandros complicados da ciência.*

*Faça de conta que está na frente de um laminador...*

*Com um laminador podemos reduzir a espessura de uma folha de plástico diversas vezes. Há um limite ao qual a própria*

---

<sup>1</sup>coisa que fazemos o tempo todo, inclusive quando vemos televisão ou falamos ao telefone...

<sup>2</sup>Para quem teoremas de existência são os teoremas mais valorizados. Não perdemos muito tempo com a realidade, nós a construímos, abstratamente, quando precisamos dela! E funciona, sem deixar resíduos perigosos!

*máquina se encontra presa, por exemplo a “resolução” da lâmina que corta, ou do feixe de raios laser que pode substituir a lâmina em algum dos nossos aparelhos mais avançados aqui no nosso laboratório abstrato de ponta, gentilmente financiado pela FUNCAP.*

*O que você vai observando, e é este facto que me interessa aqui, a folha de plástico é fortemente vermelha inicialmente. Cada nova folha obtida do laminador vai se tornando rosa e pouco a pouco parece se tornar incolor.*

*Na verdade chegou ao limite de nossa percepção visual de cores.*

### **Observação 1** *Cores, espectro*

*Porque, cõr é o resultado de uma sensação ótica, efeito produzido no cérebro depois que as células da retina receberam uma certa quantidade de radiação eletromagnética com características que chamamos de luz, examine na Wikipedia a definição de luz e de cor [18]. Luz é a radiação eletromagnética que nossos olhos podem perceber (dentro de uma faixa comprimento de onda e dentro de uma faixa de frequências).*

*Você certamente já fez aquela experiência de decomposição da luz com um prisma. A luz é feita de ondas (tem gente que diz que não e algumas vezes eles também estão certos...).*

*Cada uma dessas ondas tem um comprimento específico que caracteriza uma determinada cor básica. São muitas as cores, milhões, trilhões... mas para a nossa percepção visual três cores básicas chegam e um prisma de base triangular decompõe a luz solar nestas três cores básicas.*

*É o que acontece na TV ou no vídeo do computador ou num projetor de imagens, desses de três canhões de luz, um para o vermelho, outro para azul e outro para o amarelo. O resultado é uma combinação de três imagens idênticas, produzidas pelos três canhões em que o comprimento ou frequência de cada uma das cores básicas é alterada para produzir em nossa vista a sensação das distintas cores.*

*Como a folha de plástico está perdendo matéria, então ela cada vez filtra menos luz que, para seus olhos, corresponde a visão de uma cor vermelha cada vez menos intensa até que, chegando ao limite de sua capacidade de percepção, você tem a impressão de que a folha é incolor. Ela está deixando passar praticamente toda a luz.*

A folha de plástico perde *energia* a cada passagem pelo laminador porque perde *massa*.

Os dois conceitos são dependentes: *massa, energia*.

Precisamos somente de um dos dois, o outro se pode deduzir do primeiro. Claro, nem sempre é fácil transitar de um para outro, por isto usamos os dois nas conversas do dia-a-dia, ou nas aplicações.

Os dois conceitos, *energia* e *dimensão* são independentes. O que nós veremos é que existe uma formulação, ou melhor, uma instância típica de energia para as distintas dimensões do espaço. O que você *viu acontecer* no exemplo acima, foi apenas que sua capacidade de percepção da cor já não pode mais perceber as emissões de luz na frequência que você identifique como uma determinada cor.

Digamos, por um defeito<sup>3</sup> do seu aparelho ótico, é isto que se chama de sensibilidade, do olho humano, ao espectro ótico. Como também existe uma sensibilidade do ouvido humano ao espectro sonoro. Fora de uma certa faixa de *comprimento* e *frequência*, ou deixamos de *ver* ou *escutar*, não percebemos o *signal* emitido.

### Observação 2 *Espectro e percepção*

*Um exemplo bem conhecido desta questão de sensibilidade a uma parte do espectro é o ruído que os morcegos fazem e que nós não percebemos.*

*Os morcegos emitem um sinal sonoro que os guia em lugar da visão que eles quase não têm. Enquanto que recebemos o reflexo da luz nos objetos para nos guiarmos em nossas caminhadas, os morcegos emitem sinais sonoros cujo reflexo nos objetos os informam do que têm pela frente. Este sinal sonoro é emitido a uma tão alta frequência que o nosso aparelho auditivo não consegue perceber.*

*De forma idêntica há ondas luminosas que não percebemos com nossos olhos, mesmo algumas que nos podem ferir ou queimar a pele, como é o caso de certos componentes da luz solar, quando o Sol se encontra próximo da vertical, relativamente, à Terra, (ou quando os raios solares atravessam um buraco da capa de ozônio).*

---

<sup>3</sup>em absoluto não queremos corrigir a natureza, a palavra “defeito” aqui tem a conotação de possibilidade.

*Fora do espectro que nossos olhos podem perceber, nós não enxergamos. Fora do nosso espectro de audição nós não escutamos.*

*Existe uma graduação de intensidade na medida dos fenômenos: nós vemos ou escutamos dentro de uma faixa de frequência.*

*Ainda tem cor na folha de plástico, porém a luz que incide sobre ela é filtrada de forma insuficiente para transportar até os nossos olhos a informação sobre a cor que o nosso cérebro possa reconhecer.*

A folha perde massa porque se aproxima de um objeto de dimensão dois. Uma das dimensões, a altura (ou a espessura), está sendo diminuída sucessivamente no processo de laminação.

Assim chegamos a idéia de que os objetos de dimensão dois tem massa zero *relativamente* à nossa massa tridimensional. Embora muitas vezes laminada, a folha de plástico continua sendo um objeto tridimensional, portanto nunca terá massa nula, mas terá cada vez menos massa. Ela, na verdade, tem massa de cada vez menor ao ponto que não pode mais enviar-nos o correto comprimento de onda que nos permita identificar uma determinada cor. Sem capacidade de filtragem ela está deixando passar quase toda a luz: *esta é a nossa sensação.*

Você tem que prestar atenção a uma idéia eu estarei usando neste livro o tempo todo: *aproximação*. Com esta experiência que acabamos de executar obtivemos uma *aproximação* de um objeto bidimensional.

Como *somos prisioneiros da terceira dimensão* não nos é possível *construir* um objeto de massa zero, porque ele pertenceria a uma dimensão inferior à nossa.

Se *conseguíssemos* continuar este processo indefinidamente, terminaríamos por obter uma folha de plástico de dimensão dois, mas que seria também impossível de ser percebida: porque não teria “energia” para filtrar os raios de luz. Nem sequer a sentiríamos entre os dedos, pela mesma razão: ausência de “massa” que produzisse efeitos sensíveis sobre os nossos nervos que per-

cebem e conduzem a informação do tato.

Os objetos de dimensão dois têm energia nula é a consequência do exemplo 1.

## 1.2 Massa, energia e volume

Terminamos a seção anterior afirmando que a “*energia dos corpos bidimensionais é nula, seria nula*”.

Está, errado! o correto é dizer que *eles tem energia nula, relativamente a terceira dimensão*.

Na *experiência de laminação da folha de plástico*, a folha que está sendo laminada, está perdendo *massa* ou *energia*? ou ambas?

Com esta questão remontamos a Arquimedes e o seu famoso banho de imersão no qual ele descobriu a solução do problema da liga de metais na coroa do rei.

Se conta que Arquimedes teria recebido a incumbência de verificar se o ourives da corte não estaria enganando o rei com uma liga pobre em ouro na coroa real. Arquimedes não sabia como resolver o problema, naturalmente, sem desfazer a coroa, quando observou, tomando banho em uma banheira, que seu corpo recebia de baixo para cima um empuxe da massa d’água. Daí, com sucessivas experiências, ele deduziu que à massa de um corpo corresponde um coeficiente multiplicativo do volume que este corpo aparentemente ocupa em um determinado meio, neste caso a água.

Chamamos a isto de *coeficientes específico de massa*<sup>4</sup>. A água, por convenção, tem coeficiente específico 1. O coeficiente específico do chumbo é maior do que o da água.

---

<sup>4</sup>densidade específica é a denominação técnica

**Exemplo 2** *Coefficiente específico*

*Este é o princípio em que se baseiam os submersíveis, ou melhor, os navios, em geral. Um navio não afunda porque seu coeficiente específico é menor do que o da água.*

*Os submersíveis tem tanques que, ora se enchem d'água, aumentando-se, assim, seus coeficientes específicos, eles afundam, ora a água é expulsa dos tanques e eles voltam a ter densidade inferior a da água e voltam a superfície.*

*Seus coeficientes específicos, com os tanques cheios, devem ser praticamente iguais ao da água de modo que eles não fiquem tão pesados e possam ficar suspensos com uma pequena força dos motores, em vez de ir ao fundo.*

*É este o mesmo princípio usado na destilação do petróleo, cujos componentes se subdividem em distintos níveis, por densidade específica, sendo possível separá-los então.*

Massa e energia são dependentes. Os físicos buscam alucinadamente a formula de transformar *massa* em *energia*<sup>5</sup>. A *massa* é o *suporte*<sup>6</sup> da energia. Examinemos alguns exemplos que nos podem ajudar a compreender a ligação entre massa e energia.

**Exemplo 3** *Quantidade de movimento.*

*Uma locomotiva tem mais massa que uma bola de futebol, assim é mais difícil<sup>7</sup>, parar uma locomotiva do que parar uma bola de futebol se ambas estiverem a mesma velocidade.*

*O estrago que uma locomotiva pode fazer é usualmente muito maior do que uma bola de futebol poderia fazer. Ora, estrago sendo,*

---

<sup>5</sup>de maneira total e de forma confiável, segura...

<sup>6</sup>Esta palavra tem um sentido matemático mais profundo do que sua significação na linguagem coloquial e aqui vale nos dois sentidos.

<sup>7</sup>Precisa de mais energia.

- *uma consequência da quantidade de energia empregada,*
- *isto significa que locomotiva estraga mais do que a bola, estando as duas à mesma velocidade;*
- *então a locomotiva tem mais **quantidade** de energia, mesmo estando parada, e isto tem um nome, **inércia**.*

*Estou me referindo a um conceito da Física chamado **quantidade de movimento**<sup>8</sup> que é uma transformação de uma outro “estado” da energia, a energia cinética.*

*O que provoca o estrago é a quantidade movimento.*

*Poderíamos fazer com que a bola de futebol produzisse o mesmo estrago que locomotiva, se a fizéssemos ter a mesma quantidade de movimento que a locomotiva. Para isto seria preciso que a bola adquirisse uma velocidade espantosa com um gasto muito grande de energia, porque ela tem pouca massa.*

*Ao mesmo tempo seria muito difícil de dar-se a locomotiva uma velocidade muito grande, porque ela tem muita massa e conseqüentemente muita inercia.*

*A massa é um impecilho ao incremento de velocidade. A massa é o coeficiente inercial de um objeto.*

*Mas, observe, para produzir o mesmo estrago é preciso gastar a mesma quantidade de energia, seja com a bola ou com a locomotiva. Para que uma ou a outra adquira a mesma quantidade movimento é necessário gastar a mesma quantidade de energia.*

---

<sup>8</sup>Também chamado de momento.

*A locomotiva oferece mais impecilho ao aumento de velocidade, porque tem mais massa que a bola de futebol. A bola oferece menos resistência ao aumento de velocidade, porque tem menos massa.*

*Vemos assim que a massa é aquilo que provoca num corpo a sua resistência maior ou menor ao aumento de velocidade.*

### **Observação 3** *Massa, energia, inércia*

*Embora literalmente verdadeiro, podemos imprimir à bola de futebol uma quantidade de movimento igual a da locomotiva, na prática isto vem a ser difícil de ser feito. Este fato simples ilustra a dificuldade de transformação das formas de energia.*

*Também ilustra o conceito de inércia. Não precisaríamos deste novo conceito, ele é consequência da massa. Tendo mais massa, tem mais inércia. A diversidade dos conceitos, entretanto, responde a forma como diferentes indivíduos compreendem os fatos científicos. Falamos em inércia no repouso querendo dizer a reação a entrar em movimento, e tem mais inércia quem tiver mais massa. Falamos em inércia no movimento e, exatamente também, tem mais inércia no movimento quem tiver mais massa.*

*Para efeitos práticos vemos energia sob diversas formas e grande parte do nosso tempo e do nosso trabalho é gasto na transformação da energia entre estas distintas formas para conseguirmos um efeito ou outro<sup>9</sup> Luz, para vermos, calor para cozinhar ou para transformar em energia cinética, são exemplos do cotidiano.*

### **Exemplo 4** *A inércia no espaço.*

*Os técnicos de programas espaciais sentem com muita clareza os conceitos de massa e inércia. Eles se encontram*

- *inércia em um meio de gases extremamente rarefeitos, portanto com viscosidade<sup>10</sup> quase nula, praticamente não há atrito. Viscosidade é aquilo que o impede de se mover livremente dentro d'água, numa piscina comparado com a facilidade que você tem para se mover fora da piscina. Em outras palavras, a viscosidade da água é maior do que a viscosidade do ar. Este atrito é consequência da energia intermolecular. No espaço, em órbita, esta liberdade é quase*

---

<sup>9</sup>Com perdas de energia também consideráveis.

<sup>10</sup>A viscosidade é o índice que descreve a quantidade de energia intermolecular num fluido (líquido, gas).

*total, pois a quantidade de fluído é quase nula e consequentemente a energia intermolecular é quase nula.*

- *inércia* submetido a uma pequena gravidade. Gravidade sempre existe, em qualquer lugar do Universo, por exemplo a força gravitacional da estação espacial ou de uma estrela distante. Um astronauta que saia da estação espacial, se encontrara livre na esfera cuja raio é a distância da estação ao centro da terra. Se ele não estiver preso por um cordão à estação e cometer o erro de dar um empurrão na estação, ambos<sup>11</sup> se deslocarão, em sentidos contrários, livremente em cima da superfície desta esfera e o astronauta possivelmente estaria perdido e morreria, como consequência da inércia no movimento, claro, haveria a possibilidade de que ele seguisse em perpendicularmente à estação sobre um círculo máximo retornando do outro lado, mas para isto deveria ficar imóvel, sem mexer braços, pernas ou cabeça... pacientemente. Uma pequena viagem de algo em torno de 2.500 mil quilômetros com o risco de voltar em um momento que a estação não esteja no ponto certo! O astronauta estaria herdando a velocidade que estação, EEI, tem em órbita, por inércia, mas qualquer erro na perpendicularidade do seu trajeto poderia ser fatal para retornar ao ponto certo. Eu deixo esta história para você, isso está longe de ser verdade! Leia na Wikipedia a respeito da EEI para descobrir que a órbita não é (e nem poderia ser) circular, por exemplo. Depois o astronauta fora da EEI deixa de atender às condições para estar em órbita em conjunto com a estação. Simplificando, é melhor que ele não se arrisque num passeio deste tipo!

---

<sup>11</sup>Pela ação e reação, estação e astronauta se deslocarão em sentidos contrários...

- não é chamado inércia, se chama conservação da energia o espaço sideral funciona como uma garrafa térmica, um pedaço de material de cor preta, armazenará, sob forma de calor, a energia do Sol a ponto de queimar quem nele tocar inadvertidamente. Aviso, no caso de você se incorporar à tripulação da EEI, nunca deixe uma ferramenta fora da caixa branca de ferramentas.

Um dos problemas que os técnicos de estações espaciais tem é o de parar objetos em movimento:

1. Dar, a um módulo espacial, movimento, para levá-lo ao encontro de outro.
2. pará-lo para que não ocorra uma colisão desastrosa entre os módulos, pequenas colisões são inevitáveis, esperadas e suportáveis.

Observe que é preciso fornecer aos objetos pequena quantidade de movimento, energia, para que se os possa parar também com pouca energia.

A ação e reação fica muito visível fora da gravidade de um corpo grande como a Terra. Fora, no espaço, se você bater numa bola de tênis de mesa, você também vai ser deslocado para o outro lado, a bola mais rápido, porque tem menos<sup>12</sup> massa do que você.

A bola de tenis tem menos inércia do que você.

### 1.2.1 O conceito Newtoniano de massa

Em “*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*”, Newton coloca como definição primeira: *a medida da quantidade de*

---

<sup>12</sup>Compare com o que eu disse a respeito da locomotiva e da bola de futebol

*matéria resulta conjuntamente de sua densidade e de seu volume*<sup>13</sup> ???. Prosseguindo, diz: ... *a essa quantidade de matéria me referirei daqui por diante como corpo ou massa*<sup>14</sup>.

No conceito Newtoniano, o produto de dois coeficientes da matéria, *volume* e *densidade relativa* é a definição de *massa*, entendendo-se que a unidade de massa fica padronizada<sup>15</sup> considerando a água como padrão.

Este coeficiente, *densidade relativa*, foi sendo obtido experimentalmente ao longo da história com seus valores sendo corrigidos à medida que a tecnologia permitisse medidas mais precisas. É um conceito experimental no sentido em que os valores foram sendo estabelecidos através de experiências com distintos tipos de material.

### 1.2.2 Massa e teoria da relatividade

Na *teoria especial da relatividade* se conclui que, ao ganhar *velocidade* um corpo parece “adquirir mais” massa, *relativamente a um observador que se encontre parado relativamente ao corpo que ganha velocidade*.

Mas, como adquirir massa, se aceitarmos o princípio de Lavoisier, *na Natureza nada se perde, nada se cria, tudo se transforma?*

Como a velocidade corresponde a uma forma de energia, *energia cinética*, então a única saída, sem desrespeitar o postulado de Lavoisier, consiste em admitir uma transformação de *energia cinética* em *massa*.

---

<sup>13</sup>Newton, Princípios Matemáticos da Filosofia Natural

<sup>14</sup>idem,

<sup>15</sup>com a Revolução Francesa foram estabelecidos alguns padrões, entre eles o da água como de densidade 1

Ao se tentar imprimir maiores velocidades a um corpo se aumenta a sua resistência à variação do estado, a inércia. O modelo que se propõe é dado pela equação

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.1)$$

em que  $m_0$  é a *massa* do corpo em *repouso*,  $m$  é a massa relativista,  $v$  é a velocidade observável do corpo, e  $c$  é velocidade da luz no vácuo<sup>16</sup>. Uma hipótese da teoria é de que esta é a velocidade máxima que um corpo pode atingir, a velocidade da luz<sup>17</sup>. Observe que não interessa falar de *velocidade*, mas de *energia*.

A *energia* é uma propriedade intrínseca da matéria, como a *massa*. A velocidade é uma propriedade relativa que somente é observável na presença de um referencial. A velocidade faz parte de uma realidade distorcida...

Um limite para esta transformação parece ser a velocidade de certas partículas que, em compensação, têm pouquíssima massa.

Parece que neste ponto há uma coincidência de pontos de vista, Newtoniano e Relativista, massa e energia são “proporcionais”, sob certas condições, proporcional ao volume sendo o *coeficiente específico de massa* o índice de proporcionalidade. O produto deste coeficiente pelo volume que *aparentemente* o corpo ocupa estabelece a quantidade de massa:

$$E \propto m ; E = \kappa m ; E = mc^2 \quad (1.2)$$

**Exemplo 5 (Revisitando a EEI)** *Um sistema em órbita da Terra*

---

<sup>16</sup> $c \approx \frac{300.000km}{s}$ .

<sup>17</sup>Na verdade um *valor assintótico* um limite.

*Uma estação espacial em órbita, EEI, traz uma série de exemplos físicos interessantes, como já observei.*

1. *colocar um sistema em órbita* *Uma tarefa difícil, com grande dispêndio de energia é uma técnica toda especial usando equações diferenciais. Mas não há nenhum conhecimento novo a ser adquirido a não ser os detalhes técnicos para reduzir o uso de energia e aumentar a proteção da tripulação contra a irradiação ou pedras ... os ingredientes básicos são equações diferenciais e programação, é, obviamente, a nave espacial e a plataforma de ejeção, em poucas palavras, um monte de dinheiro. Felizmente, nos últimos tempos começou alguma cooperação internacional, de modo que a humanidade está a gastar menos dinheiro e, talvez, haja mais retorno em termos de conhecimento em domínio público. Será verdade?*
2. *componentes dum sistema em órbita* *O sistema é formado de pessoas, objetos e uma nave-mãe. Todos estes “objetos” se encontram em repouso relativamente uns aos outros. Todos se encontram à mesma velocidade orbital<sup>18</sup> relativamente à terra que é o que garante que se encontrem no mesmo nível orbital.*
3. *alterações no sistema em órbita* *Se algum destes objetos, por exemplo a nave de transporte, tiver seus motores acionados, sua velocidade muda e pode sair do nível orbital em que se encontra para, por exemplo, voltar à Terra. É uma operação delicada como você bem pode imaginar que é afastar dois corpos em um ambiente relativamente livre de gravidade (o nível orbital) sem alterar a posição, relativa a*

---

<sup>18</sup>nome apropriado para velocidade angular neste contexto

*Terra de um deles. Exige muita energia porque, em princípio um módulo espacial tem muita massa. Também usa uma técnica especial com equações diferenciais. Eu não saberia descrever os detalhes<sup>19</sup> de uma tal operação!*

4. Movimentação dentro do mesmo nível orbital. *Qualquer quantidade pequena de energia provoca um tal movimento. Cuidado com a ação e reação. Cuidado para conseguir voltar para o ponto de saída.*

### **Exemplo 6** *Salto quântico*

*A matéria se compõe de pequenas partículas organizadas<sup>20</sup> em volta de um núcleo mais pesado. As partículas mais conhecidas (conhecidas a muito tempo) são prótons, elétrons, nêutrons. Mas a lista está longe de ficar completa ...*

*Existem 90 átomos diferentes que ocorrem de forma natural na natureza e os cientistas, e uma certa indústria, conseguiram produzir mais algumas dezenas em laboratório.*

- *Prótons tem uma carga elétrica positiva.*
- *Elétrons tem uma carga elétrica negativa e se concentram em torno do núcleo que é formado dos protons e nêutrons (que são eletricamente neutros como diz seu nome). Uma determinada concentração “estável” de eletrons e protons corresponde a um átomo de um elemento químico.*

---

<sup>19</sup>Não porque seja difícil, mas tem técnicas sobre as quais nunca pensei e se encontram fora do meu objetivo - eu, dificilmente, vou estar envolvido numa tal operação! Mas é um exercício bem interessante para ser resolvido.

<sup>20</sup>Teoria nebular da matéria: a matéria é uma névem de partículas que concentrada em torno de alguns núcleos. A palavra “núcleo”, aqui, não tem o mesmo sentido que na teoria atômica, apenas quer dizer o centro de uma concentração de massa. A unidade, aqui, não é átomo, e sim molécula. Mas o modelo também se aplica ao átomo.

- Há outras partículas nos átomos e sempre se descobre mais alguma.

Os elétrons se encontram em órbitas definidas pela sua energia e podem mudar de órbita ao ganhar ou perder mais energia. Esta é uma das características de “instabilidade” da matéria.

Aceleradores são aparelhos que manipulam elétrons para, por exemplo, bombardear núcleos de outros átomos e assim descobri-lhes a estrutura. Leia mais a respeito em [2] de onde obtive a figura (fig. 1.1) página 16.

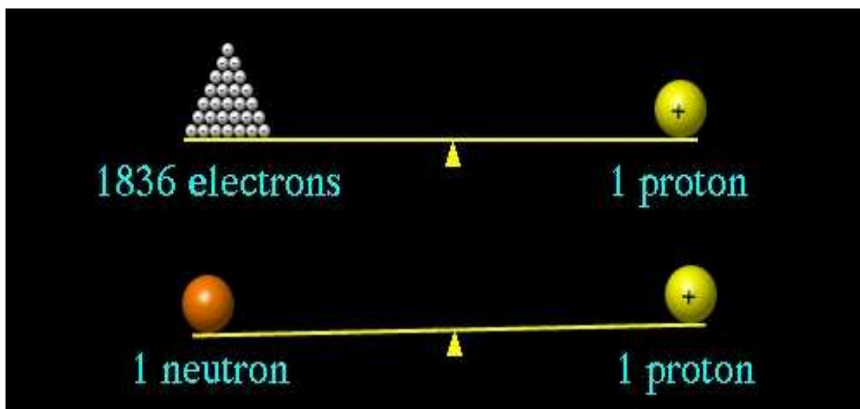


Figura 1.1: Elétrons, prótons e nêutrons

A noção, ou a imagem, que muitas vezes é passada dos átomos como um pequeno universo de elétrons girando em torno de um núcleo é certamente falsa, examine [3] em que a descrição dos elétrons é “de uma nuvem (de elétrons) envolvendo os núcleos” e se pudessemos ver perceberíamos a matéria como nuvens de elétrons concentrados em torno dos distintos núcleos. Não posso me alongar nesta questão sem distorcer o meu objetivo...mas este é um assunto fascinante que conduz à discussão da eletricidade, por exemplo. Leia sobre átomo na Wikipedia, [18].

núvem  
elétrons

### 1.3 Volume, energia, massa e dimensão

O experimento com a folha de plástico não pode prosseguir indefinidamente porque a matéria tem limitações. São *limites específicos* algo bem parecido com a *densidade específica*. O plástico se compõe de uma *nova unidade elementar* formadas de átomos de diversas substâncias simplesmente agregadas numa nova estrutura chamada *molécula* se esta estrutura for *quebrada* não se tem mais *plástico*.

Este *limite* é o que se chama. algumas vezes, de uma película do material, uma folha com cuja dimensão, “altura”, é o tamanho de uma molécula. Se o laminador do nosso *laboratório de ponta* conseguisse chegar lá, teríamos a folha com espessura mínima do material em consideração, uma *película* de plástico.

Vou estabelecer como definição que *uma película* é uma folha de um determinado material tendo como altura o tamanho de uma molécula do material.

Claro esta *altura* é variável, porque as moléculas não precisam ser *redondas* ou *quadradas* e nem *ficarem quietas*. Elas são terrivelmente sensíveis à variação térmica e certamente a *indústria* não irá aceitar a minha definição, eles precisam de alguma coisa mais estável que tenha tamanhos fixos aos quais possa aplicar padrões que se traduzam em preço....

Assim as *películas* são o limite de laminação a que podemos chegar sem destruir o material. Se conseguirmos laminar além deste limite, o resultado não seria mais uma “folha” do material em questão porque as moléculas estando quebradas as propriedades que caracterizam o referido material deixam de se verificar.

Mesmo assim teríamos matéria pela frente e possivelmente poderíamos senti-la com auxílio de instrumentos que aumentas-

sem a potência dos nossos órgãos, *visão ou tato*<sup>21</sup>, porque ainda seriam objetos tridimensionais com volume não nulo. Possivelmente não poderíamos mais calcular o volume deste material usando o *coeficiente de densidade específico* porque, o material estando modificado, perdeu suas características próprias, entre elas a que garante a densidade de átomos ou moléculas.

- *Volume* é o nome de um tipo de medida, é uma medida específica da terceira dimensão.
- *Área* é o nome de um tipo de medida específica da dimensão dois

s.

É o resultado de uma forte abstração a convivência com a área de objetos bidimensionais. Isto é um dos êxitos da Geometria Euclidiana.

## 1.4 O processo de laminação vai logo terminar

Eu posso usar toda a discussão anterior sobre a massa para concluir corretamente a experiência o abstrata de laminação da folha de plástico.

*Mas...* se esta laminação pudesse prosseguir indefinidamente, nos veríamos, a cada passo, com uma *dificuldade* de perceber o material, *porque o volume* se reduziria proporcionalmente à altura que estava diminuindo, assim como a energia do plástico,

---

<sup>21</sup>Cuidado, o *princípio da incerteza de Heisenberg* nos diz que é impossível ver um elétron, ver [5].

(ou a massa), e conseqüentemente fazendo-o perder a capacidade de filtrar a luz, que nos fornece a sensação de cor do objeto.

A **conclusão** desta experiência é de que não podemos ver objetos de dimensão dois, porque eles tem *massa* nula *relativamente* a nós. Eles teriam massa bidimensional que é nula para nós. Eles têm *apenas* área e esta é uma medida nula para nós, tridimensionais. Precisamos de volumes para ser capazes de calcular a energia com valor diferente de zero.

É isto que caracteriza nossa condição de prisioneiros da terceira dimensão: não podemos perceber os objetos que porventura existam em dimensão dois porque eles não tem matéria que nós possamos perceber. Como eles tem massa (ou energia) nula, *relativamente* a nós, os sinais físicos por eles emitidos tem energia nula também, o que nos impede de percebê-los. O mesmo se pode dizer de objetos de dimensão um.

A situação já não seria a mesma relativamente a objetos de dimensão quatro, ou maior, como nós veremos mais a frente.

## 1.5 Matéria e energia relativamente nulas

desaparecimento da matéria?  
ou dependência da dimensão?

Vou mostrar-lhe, no capítulo 3, que a nulidade de uma propriedade de um objeto é uma característica relativa deste objeto quando comparado como pertencente outra dimensão “maior”.

Se houver um Universo físico de dimensão maior do que a do nosso Universo  $3D$ , e se por acaso o nosso universo estiver

contido neste universo  $4D$ , todos as propriedades dos objetos pertencentes ao nosso universo terão propriedades nulas nesse Universo  $4D$ . Isto é uma recorrência para maiores dimensões.

Vou mostrar-lhe que este fato é o impecilho fundamental para comunicação entre Universos de dimensão diferente: não podemos enviar nenhuma mensagem aos seres que habitem um Universo de dimensão maior do que a nossa (e onde estivermos, por acaso, contidas) porque a quantidade de energia que tivermos (que os nossas emissões de sinais tiverem) é zero relativamente a este Universo de dimensão maior.

Também não podemos perceber nenhuma mensagem de seres que habitem um Universo de dimensão inferior a do nosso Universo (dimensão 2, 1 ou zero) porque a energia deles é zero para nós.

This is the characterization of our imprisonment in our dimension.

Este é a caracterização do nosso aprisionamento em nossa dimensão.

# Capítulo 2

## Energia

### Que é energia

A resposta é difícil porque terminamos nos apoiando em outros conceitos cuja explicação também tem que ser dada. O resultado é um ciclo vicioso de definições.

Definir é sempre um processo muito complicado, sobretudo no estágio mais elementar do processo científico.

Em vez de definir, e cair num tal ciclo vicioso, vamos fazer, inicialmente, uma afirmação vaga que aos poucos, com auxílio de exemplos, terminará clara.

### 2.1 Energia e Matéria

Você se lembra das primeiras aulas de ciência em que se diz que *água existe na Natureza em três estados, o sólido, o líquido e o gasoso*?

O mesmo se pode dizer da matéria no Universo, ela se apresenta em duas formas *duais*: energia e massa.

Então *energia* é um dos estados da matéria, como *sólido, líquido, gasoso* são estados da água<sup>1</sup>. Com o adjetivo “*dual*” estamos significando que podemos forçar a passagem da matéria

---

<sup>1</sup>Observe que estes três estados da água diferem entre apenas pela quantidade de energia intra-molecular contida na matéria.

de um estado para o outro. Esta transformação, entretanto, nem sempre é fácil.

*Energia* é um conceito primitivo da Física, da mesma forma como os matemáticos consideram *conjuntos* um conceito que não se deve tentar definir.

Tentar definir conceitos primitivos produz ciclos intermináveis de definições. A conclusão é a que se deve escolher alguns conceitos, chamá-los de primitivos, e a partir daí iniciar a discussão.

Mas se não tentar alguma forma de explanação, você poderia guardar a idéia de que este livro é uma farsa. Se me meti a escrever sobre o assunto, alguma coisa tenho que explicar...ou construir alguns exemplos que estabeleçam uma *linguagem* básica e convidá-lo a aceitar, desta forma, alguns conceitos como primitivos.

### **Hipótese 1** *Energia e matéria.*

*Energia é um dos estados da matéria no Universo. Então matéria é um conceito primitivo. Eu assumo a hipótese de que energia é uma das formas sob a qual a matéria se apresenta no Universo. Ou, ainda, tudo no Universo é matéria e que esta algumas vezes se apresenta em de dois estados de energia ou massa.*

### **Exemplo 7** *Queimando madeira*

*Ao queimarmos lenha (a combustão é um processo químico) há uma transformação (química) de elementos em que energia é liberada sob a forma de calor e luz (mesma coisa, muda apenas o comprimento de onda), e fica cinza no chão, que não é mais madeira.*

A Física elementar fala de vários tipos de *energia*. *Tipo* é certamente uma palavra errada, melhor seria dizer que a *ener-*

gia se apresenta em vários estados: *energia calorífica, energia cinética, energia potencial, energia atômica.*

#### Observação 4 O uso da palavra estado

*Se pode encontrar na Wikipedia diversas definições da palavra estado, observe estas duas:*

1. *Na mecânica clássica, o estado é uma descrição completa de um sistema em termos de parâmetros, tais como posições e momentums em um determinado momento no tempo, [18].*

*Sistemas Dinâmicos, um conceito em matemática, onde uma regra fixa descreve a dependência do tempo de um ponto em um espaço geométrico, [18]. Dynamical systems, a concept in mathematics where a fixed rule describes the time dependence of a point in a geometrical space, [18]*

*Eu afirmo que não há diferença real entre elas, se retirarmos a relação com uma teoria particular, mecânica, matemática, vemos que as características de um estado são, parâmetros de dois tipos, as medidas e geometria, (o tempo é uma entidade geométrica ...).*

*O uso da palavra estado como as formas sob às quais podemos encontrar a da água é possivelmente o seu uso mais comum, e parece que estou usando a mesma palavra, estado, em mais de um sentido. Na verdade estou usando esta palavra para classificar formas com que posso encontrar um fenômeno: abrindo um conjunto de itens. Você pode simplesmente supor que a palavra estado é uma chave de abertura, e dentro de uma chave de abertura que eu posso colocar uma nova chave de abertura e iniciar uma nova classificação. É isso que estou fazendo.*

*Observe que os três conhecidos estados da água apenas refletem a quantidade de energia intra-molecular desta forma de matéria<sup>2</sup>.*

*Eu acho que esta é a maneira mais fácil de ver energia, embora não tenhamos meio fácil para a mudança entre os dois estados da matéria, como podemos fazer com os estados da água. Isto não invalida o meu uso da palavra estado como chave de abertura.*

*Este é um dos problemas centrais que enfrentamos no uso da energia: a mudança entre os dois estados. Considere alguns, energia calorífica, energia cinética, energia potencial, energia atômica que não descrevem todas as possibilidades. Em particular observe que, energia cinética, energia potencial, na verdade representam apenas uma forma de comunicação em que nos referimos a dois estados em que há uma transformação simples, sobre a qual temos controle total: liberamos a energia cinética quando retiramos o impedimento para que um corpo caia dentro um sistema gravitacional. É uma situação relativa, mas no fundo todas o são, porque se recorrermos à extrema simplificação existem apenas dois estados a serem considerados: energia, massa.*

*Os dados, parâmetros, que seriam necessárias para atender à definição em eu tirei de Wikipedia, não são facilmente calculados, mas existem.*

---

<sup>2</sup>O acidente nuclear mais recente, no Japão, produziu uma descrição muito simples e impressionante para o que é um reator nuclear: *uma forma muito complicada e perigosa de mudar o estado da água de líquido para vapor.*

*A linguagem, entretanto, é o meio com que nos comunicamos, ela é ambígua e redundante e nós precisamos destes dois defeitos em nossas comunicações.*

*O texto deste livro é fundamentalmente ambíguo e redundante!*

A super simplificação, considerar apenas dois estados para a matéria, como *energia*, *massa*, é o meu objetivo neste livro. Eu preciso desta simplificação extrema para os meus objetivos: a minha forma de ver o Universo como matemático e para provar que o título do livro é verdadeiro.

## 2.2 Energia Calorífica

Conseguimos energia calorífica quando queimamos alguma coisa, petróleo, ou madeira, por exemplo. Mas madeira não existiria se não houvessem raios solares que permitissem o crescimento das árvores fornecendo a *energia* necessária às reações químicas que se processam nas folhas<sup>3</sup>, depois as folhas envelhecem, caem e vão alimentar a micro-vida existente no solo que processa o alimento para as raízes das árvores para finalmente tirarmos a madeira, ou a lenha.

A micro-vida existente no solo também só é possível na presença de uma quantidade controlada de raios solares. O excesso de radiação solar mata a vida no solo, também. Este é um exemplo, na natureza, de *sistema dinâmico*<sup>4</sup>. A natureza é toda governada por *sistemas dinâmicos*.

---

<sup>3</sup>Os cupins são vistos com um incômodo, se espalham por várias de dezenas metros para coletar o material do seu alimento e assim eles cavam e arejam o solo e deixando dejectos que permitem o desenvolvimento das plantas que alimentam herbívoros e este os carnívoros. Ai vem o **homem** e mata violentamente o cupim, depois vem o leão sem alternativa, e come o **homem**.

<sup>4</sup>Uma pequena alteração nas condições que controlam um *sistema dinâmico* podem produzir um comportamento bem distinto do mesmo entre dois momentos.

O *excesso* ou a *falta* de um *compo-*  
*nente*, de uma *força* ou de um *agente*  
num sistema dinâmico, produzem re-  
sultados, qualitativamente, diferen-  
tes.. A Terra é um sistema dinâmico  
muito sensível, e nós descobrimos esta  
verdade recentemente.  
*Você encontra em outro lugar neste*  
*texto* “aquecimento da atmosfera” as-  
sociado a sistema dinâmico.

Em última instância vemos que a energia calorífica, liberada na queima da madeira, ficou *potencializada* na celulose das células da madeira por um processo de transformação tendo sua origem no Sol, ou melhor, na *energia* que do Sol se irradia para a Terra.

Raciocínio semelhante, mas um pouco mais complicado, se pode aplicar ao petróleo.

A teoria sobre a origem do petróleo diz que ele vem da biomassa existente na face da Terra há milhões de anos. Esta biomassa foi se liquifazendo se internando no solo para finalmente se armazenar em bolsões de relativa<sup>5</sup> impermeabilidade. Quer dizer que o petróleo, novamente, é a energia solar concentrada primitivamente nesta biomassa. A energia no petróleo vem do Sol.

Finalmente, de que forma podemos usar a energia fundamental nos envia o Sol?

---

<sup>5</sup>E o homem, num período curtíssimo de tempo, 100 anos, praticamente esgotou esta reserva, porém deixando para trás as bolhas vazias. Qual poderia ou quais poderão vir a ser as consequências disto?

É a *energia solar* que recebemos na Terra que permite o desenvolvimento da *vida*<sup>6</sup> submarina, dos processos químicos ou bioquímicos, *mas que também pode comprometer toda esta “vida” por ignorância ecológica*, como nos ameaça agora o aquecimento da atmosfera ou os desastres que se repetem na extração do petróleo para atender uma demanda impossível.

A *energia que vem do sol* é essencialmente *energia nuclear*<sup>7</sup>, o resultado de explosões nucleares em cadeia. As explosões nucleares são, em forma simples de falar, o resultado de choques de partículas que rompem átomos liberando a *energia* que os mantinham coesos.

Em certa forma chegamos a frase de Newton, embora em proporções diferentes, *matéria atrai matéria...* porque matéria é energia em última análise.

A nível subatômico a relação do quadrado das distâncias deixa de ser uma lei, como Newton<sup>8</sup> enunciou e como Coulomb reafirmou, nós não sabemos porque. É possível que seja pela grande quantidade de iterações que existem neste nível<sup>9</sup> que torna praticamente impossível transformar a resultante numa fórmula simples.

Mas cheguei onde eu queria, a energia térmica vem da energia solar que é energia atômica que por sua vez é consequência do rompimento das forças de coesão entre as partículas elementares:

---

<sup>6</sup>No fundo do mar, nas costas da Califórnia, no Golfo do México, ao longo da costa Brasileira onde agora, por sorte, ou por azar, foi descoberta a maior jazida submarina de petróleo.

<sup>7</sup>Resultado da conversão da matéria em energia se processo de duas formas relativamente inversas, chamadas fusão ou fissão nuclear. No caso do Sol, o reator se encontra a uma distância conveniente, até certo ponto, se for mantida a capa protetora contra o excesso de energia recebida.

<sup>8</sup>Newton é descritivo, não explicativo.

<sup>9</sup>Examine, no índice remissivo, discussão sobre a nuvem de partículas (ou moléculas), como estrutura da matéria, que é discutida, em outro lugar neste livro.

é *matéria atraindo matéria* a nível sub-atômico. Matéria ou energia, dois estados da mesma coisa.

## 2.3 Energia cinética e energia potencial

É bem conhecido da Física elementar que energia cinética e energia potencial formam um par dual de formas de energia: se tem energia potencial ao haver movimento... uma forma de energia se transformando naturalmente em outra. Ou uma forma conveniente, pedagógica de calcular o equilíbrio, é o axioma da conservação da energia que se encontra em questão.

Este conceito parece desaparecer, como que por magia, se considerarmos corpos livres em uma esfera gravitacional, lembre-se quando descrevi a situação da astronauta que, sem um “cordão umbilical”, desse um empurrão na nave-mãe! Se ela é não tomar cuidado, ela pode entrar em uma rota espacial fora da órbita da nave-mãe, se perdendo para sempre no espaço, lentamente saindo da esfera gravitacional onde a nave estiver. Ela está em movimento em relação a um ponto de referência artificial, a nave espacial. Onde está a energia cinética? Onde está a energia potencial? Não podemos usar o método conveniente de energia potencial/energia cinética para calcular conservação de energia<sup>10</sup>, embora ainda se aplique neste caso. É apenas um exemplo para mostrar que existe uma *sensação* que nos acompanha em nossa prisão da Física Terrestre que pode facilmente nos enganar. Melhor, que altera a nossa forma de pensar. Somos prisioneiros da gravitação Terrestre! Obviamente, ninguém será astronauta sem passar por um capítulo da teoria da gravitação

---

<sup>10</sup>É claro que está lá, mas os valores são pequenos demais para serem calculados, pois não há nenhum lugar do Universo um local livre de gravitação. E a nave atrai a astronauta e vice-versa.

universal em seu treinamento. Estas situações podem criar problemas interessantes de Física como desafios para o bom aluno, mas o meu objetivo neste tópico, é provar-lhe que somos prisioneiros de nossas *sensações* da Física da Terra e abrir sua visão para entender mais facilmente o tema do livro.

Neste exemplo estou elaborando a *prisão conceitual* para que você possa melhor entender o próximo conceito mais avançado que é a *prisão dimensional* que inclui a conceitual como caso particular. A dimensão é um conceito, também, um modelo, um modelo matemático.

Voltando a energia cinética, que discuti no Capítulo 1, a bola em movimento tem energia cinética, assim como a locomotiva, sendo esta energia é que pode produzir estragos em um objeto contra o qual elas colidam, a locomotiva ou a bola. Mas a locomotiva não produz nenhum estrago no passageiro que estiver viajando no trem puxado pela locomotiva desde que a locomotiva não pare repentinamente, que não seria o usual.

Estou analisando *eventos relativos*, por exemplo a velocidade que é um *evento relativo*:

Nada tem velocidade absoluta, tudo tem velocidade relativamente a um referencial. Ao mesmo tempo, e isto é uma terrível contradição da linguagem com expressamos os conceitos científicos, sabemos que toda a matéria está em movimento como que num gigantesco desequilíbrio dinâmico e o contrário disto seria a inexistência de matéria, o vazio. E aqui certamente eu cheguei ao limite do que podemos conhecer ficando com duas ou três teorias paralelas... mas que coincidem num ponto, na absoluta calma dinâmica da teoria da média. Ou a ocupação ótima do espaço. Mas há coisas de que apenas suspeitamos ou podemos fazer hipóteses teóricas, como grandes massas concentradas em pontos "astronômicos".

### Observação 5 *O modelo relativista energia-momento*

*O modelo representado pela equação relativista,[18], energia-momento traduz bem a identificação entre massa e energia:*

$$m = \frac{\sqrt{E^2 - (pc)^2}}{c^2} \quad (2.1)$$

*em que  $p$  é o momento (quantidade de movimento relativamente a um observador). Se o corpo atingir à velocidade máxima que se concebe na Teoria da Relatividade, a da luz, o numerador da equação é zero e o corpo tem massa zero para o observador que se encontre no referencial. Se o corpo estiver quase parado, por exemplo à velocidade do som, ou match-2 a bordo de um concorde, então  $E = mc^2$  como usual...*

*Isto nos mostra dois limites aceitáveis para a relação que servem para nos convencer de que é um bom modelo porque é muito difícil usar outros valores com a fórmula!*

## 2.4 Inércia

Deixe-me completar a discussão sobre inércia que comecei a fazer no capítulo 1.

A inércia é proporcional à massa. Isto significa que um corpo, concentra em sua massa a energia potencial do movimento e a

teoria da relatividade diz que o corpo perde massa ao ganhar velocidade uma transformação de *tipos de energia*.

Então posso usar a inércia como uma forma de aplicar a lei da conservação da energia na *relativa ausência* do par dual *energia cinética/energia potencial*, como é o caso de corpos livres numa esfera gravitacional. A nave mãe atrai o astronauta (e vice-versa) porém de forma imperceptível de medir. O fato é que o astronauta pode ser perder na esfera gravitacional que estou traduzindo como um meio com “ausência de gravidade” como um efeito prático. Mas a velocidade relativa entre ambos é constante, devido à inércia, sendo este o instrumento para substituir o par energia cinética/potencial no cálculo da conservação da energia. É este cálculo, traduzido na equação diferencial do movimento gravitacional que permitir a determinação da órbita de um satélite, da *estação espacial internacional* ou da Terra ao redor do Sol. Novamente, seguindo o padrão que venho desenvolvendo, inércia é apenas um outro nome para o axioma da conservação da energia.

Chamamos de *inércia* à propriedade que tenha um *sistema* à reagir a *transformações do seu estado*. A bola de tênis tem menos inércia que o trem, porque tem menos massa.

Uma das dificuldades que temos para compreender os fenômenos energéticos está ligada ao fato de que vivemos num sistema, na Terra, imersos em sua atmosfera, submetidos à sua força de gravidade<sup>11</sup>. Esta situação tanto nos rouba visão, como nos oferece novos aspectos. Estamos imersos em uma maior complexidade!

O pêndulo é um exemplo do que este sistema nos oferece, fora da gravidade terrestre teríamos dificuldade em montar um

---

<sup>11</sup>Lembra o caso do “carioca”, morador da Cidade Maravilhosa, onde não há violência ?

pêndulo, aproveito para chocá-l@, a dificuldade seria a de reconhecer<sup>12</sup> “pêndulos”. Ao mesmo tempo o pêndulo terrestre irá parar, depois de estar algum tempo em movimento, porque existem vários *atritos* roubando a energia potencial-cinética que lhe demos inicialmente. Se pudéssemos nos liberar dos “defeitos” do sistema terrestre, veríamos o pêndulo em movimento perpétuo como um exemplo de inércia.

Não podendo usá-lo como um exemplo acabado de inércia, nos resta usá-lo como um exemplo de transformação de energia, ou de conservação da energia:

- energia potencial transformada em cinética;
- energia cinética transformada em energia potencial;
- energia cinética transformada em energia calorífica (difícil de perceber, mas o suporte se aquece com o atrito assim como o peso e o cordão que o liga ao suporte se aquecem devido ao atrito com o ar).

se não houvessem as transformações de energia em calor a inércia justificaria o movimento permanente entre os dois pontos de maior altura, como a resistência em alterar o estado da energia nele contida.

Obviamente, saindo dos *sistemas físicos*, podemos ver *inércia* em todos os *sistemas*, nos sistemas políticos ou administrativos, sempre com a mesma definição de *resistência à mudança de estado*.

---

<sup>12</sup>A Terra é um pêndulo? o astronauta que se perdesse da nave na esfera gravitacional não seria um pêndulo?

## 2.5 Velocidade e aceleração

Velocidade é uma propriedade relativa dos objetos no Universo. Quer dizer, um objeto tem *velocidade* relativamente a outro.

A questão central não é, portanto, a *velocidade* mas sim o *adquirir velocidade* ou *receber aceleração* que implica em receber energia e que permite *alterar o estado inercial*<sup>13</sup> de um objeto.

Será preciso mais (ou menos) energia na proporção direta da massa do objeto. Novamente vemos que a resistência (inércia) de um objeto em alterar o seu estado<sup>14</sup> é caracterizada pela sua *energia* sob forma de massa.

Os planetas do *sistema solar*, atraídos pela força de gravidade do Sol, ficam em órbita ou saem do movimento uniforme linear.

Quando a Terra se desprende do Sol, se afastou da “nave mãe” numa rota helicoidal, examine a figura (fig. 2.1) página 33.

A figura (fig. 2.1) mostra um exemplo de objeto que não vai entrar em órbita porque se mantém excessivamente acelerado. Este é o caso da astronauta que empurra a nave e não é se encontra presa a mesma por uma corda.

Para entrar em órbita é preciso ir perdendo, gradualmente, *aceleração* até chegar em sua *órbita específica* com sua *aceleração específica*. São duas propriedades que um objeto, com uma determinada *massa* deve satisfazer para entrar em órbita:

- aceleração

---

<sup>13</sup>Inércia no movimento, velocidade uniforme, ou no repouso... mas, repouso ou movimento são situações aparentes!

<sup>14</sup>repouso ou movimento uniforme são formas psicológicas de falar de mesma coisa.

## Satélite não vai entrar em órbita

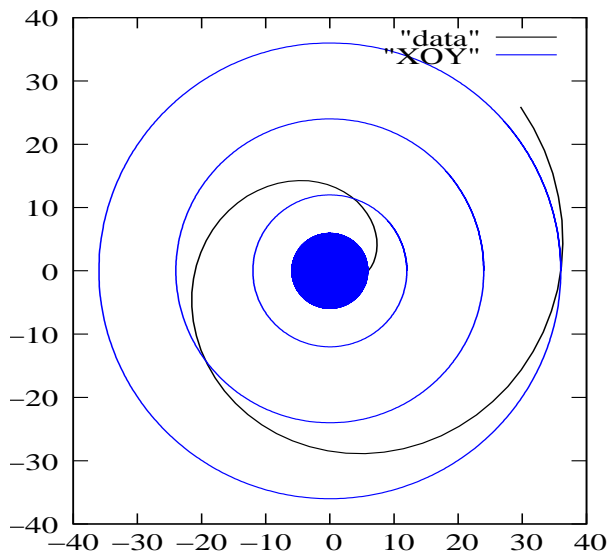


Figura 2.1: O corpo que não entra em órbita

- a órbita, definida pelo raio (ou distância) do “sol”.

As duas propriedades dependem uma da outra: a cada par de aceleração e massa corresponde um órbita (pela Lei de Newton do quadrado das distâncias). Portanto a Terra se encontra na exata posição em que deveria estar com a aceleração e massa que adquiriu ao se separar do Sol.

Com massa-zero nenhum objeto pode ser preso numa órbita, (tais objetos não existem em nosso Universo). A luz, por exemplo, por ter *praticamente* massa zero, ser quase somente energia, nunca entra em órbita, mas pode cair nos buracos negros do Universo. De acordo com a teoria geral da relatividade, a luz é um fenômeno assintótico, sua velocidade é o valor assintótico para a velocidade no Universo. Então ela irá passar ao largo de um objeto ou cairá nele e aqui há as considerações usuais da ótica, reflexão, absorção de parte da energia, etc... Dependendo da distância que passar por um buraco negro, ela entrará em órbita espiral e cairá no buraco, ou sofrerá uma deflexão de curso. A experiência de Sobral mostrou que a luz sempre sofre deflexões de curso.

### Observação 6 *Sol é uma explosão em curso*

*Quando os planetas do nosso sistema solar se desprenderam do Sol foi num momento em que o Sol era uma massa (um fluido) cuja dinâmica interna<sup>15</sup> ainda era muito instável e ainda hoje o é uma vez que o Sol é uma explosão em andamento.*

*No momento em que a Terra se despreendeu do Sol, possivelmente, os demais planetas do sistema solar também se desprenderam. Esta é uma hipótese discutida, havendo outras teorias sobre a formação do sistema solar.*

*Com massas distintas eles encontraram órbitas distintas. Possivelmente, alguns, de massas idênticas, mas com velocidades<sup>16</sup> diferentes, escaparam da atração solar se “perdendo” no espaço.*

Voltando a comparação com a Lua, se ela tivesse menos massa, para se manter na mesma órbita (à mesma distância da Terra) teria que ter menor velocidade angular<sup>17</sup>.

Massa, é a forma central de ver *energia*. *Massa* é o suporte da *energia*, ou ainda dito em outras palavras, se um corpo não tiver

---

<sup>15</sup>Sistema dinâmico, novamente.

<sup>16</sup>Relativamente ao Sol.

<sup>17</sup>Relativamente à Terra.

*massa* será impossível aplicar-lhe qualquer força, porque ele não pode adquirir *energia*. Mais a frente eu vou me expressar de forma diferente, vou dizer que sim, um tal corpo de massa nula, pode absorver energia, mas será energia de medida zero. Vou então usar um novo conceito: *medida*.

# Capítulo 3

## Dimensão

Neste capítulo vou falar-lhe do conceito de dimensão. Em Matemática “dimensão” não significa “tamanho”. Estas duas palavras são praticamente sinônimas na linguagem coloquial. Para a Matemática, e consequentemente para o pensamento científico, *dimensão* é uma classificação dos espaços. É o que diferencia uma **reta** e um **plano**, ou uma **curva** e uma **superfície**. Planos e superfícies são *objetos* de dimensão dois, enquanto que retas e curvas são *objetos* de dimensão um. Este é o meu objetivo neste capítulo.

### 3.1 Espaço em Matemática

Espaço, para a Matemática é infinito e ilimitado, como as retas na geometria.

Os conceitos

- *infinito*
- *ilimitado*

são duas idéias essenciais para entendermos *espaço*.

Arquimedes, na Grécia, foi possivelmente um dos que primeiro pensou no *infinito* ele concebeu que o conjunto dos números naturais era um conjunto infinito

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, \}$$

Muito depois Galileu observou que se tirarmos a metade dos elementos de  $\mathbf{N}$ , por exemplo, todos os números ímpares, o que resta, o conjunto de todos os números pares, é do *mesmo tamanho* que  $\mathbf{N}$ :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & n \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \dots \\ 0 & 2 & \dots & 2n \dots \end{array} \right. \quad (3.1)$$

porque podemos colocar todos os elementos do conjunto  $\mathbf{N}$  em correspondência biunívoca com os elementos do subconjunto dos números pares. É isto que a equação ( 1) mostra.

A idéia de que um subconjunto de  $\mathbf{N}$  *seja tão grande* quanto o próprio  $\mathbf{N}$  foi bem explorada num conto de B. David Stacy, [16], *O Hotel infinito*, um hotel que tinha tantos quartos como o conjunto dos números naturais,  $\mathbf{N}$ . Voce pode encontrar na Wikipedia [18] uma resenha deste livro.

A idéia de Galieu foi finalmente aproveitada por G. Cantor<sup>1</sup> cujas pesquisas sobre a *teoria dos conjuntos* deram uma sólida fundamentação à Matemática e explicam o que é infinito,  $\infty$ .

Os contemporâneos de Cantor rejeitaram a sua teoria, esta incompreensão possivelmente justifica o seu fim de vida como um doente mental.

### **Exemplo 8** *Fractais e desenhos intermináveis*

---

<sup>1</sup>(1845-1918)

*O infinito não pode ser produzido num computador, nem sequer com uma máquina fotográfica, nem um super telescópio colocado no espaço consegue espreitar o infinito porque só conseguimos “ver” o que se encontra ao alcance de nossa vista (mesmo armada por um telescópio).*

*Mas você pode ter uma sensação de estar viajando no espaço com o infinito a sua frente se brincar com o programa `xaos`<sup>2</sup> que é distribuído livremente na Internet, [17].*

*Examine algumas “fotos” obtidas com `xaos` nas figuras (fig. 3.1) página 39, (fig. 3.2) página 40, e melhor do que isto, instale `xaos` e simule uma viagem no “espaço” com `xaos`, apenas clicando com o mouse.*

*Mas a capacidade de obter zooms com `xaos` é finita, como é finita a memória do computador em que você estiver rodando o programa...*

Mas o infinito por ser facilmente pressentido<sup>3</sup> e explicado com lápis e papel pelo matemático, examine o seguinte exemplo.

### **Exemplo 9** *O conjunto dos números racionais é infinito*

*Para construir este exemplo preciso de fazer uma representação de números num segmento de reta.*

*Considere um segmento de reta marcando os pontos  $O$  e  $P$  numa reta, examine na figura (fig. 3.3) página 41. Muito melhor, faça você mesmo uma figura e acompanhe o texto construindo a representação geométrica. O que você fizer com as mãos ficará gravado no seu cérebro.*

---

<sup>2</sup>Em Linux, na minha distribuição preferida, Debian/Gnu/Linux tudo o que tenho que fazer, para poder brincar com `xaos` tt, é `sudo apt-get install xaos` e tenho `xaos` nas pontas dos meu dedos para simular o Universo.

<sup>3</sup>Será um *sensação*, não podemos produzir *infinito* com meios finitos. O *infinito* é uma abstração matemática, mas isso não significa que infinito não exista.

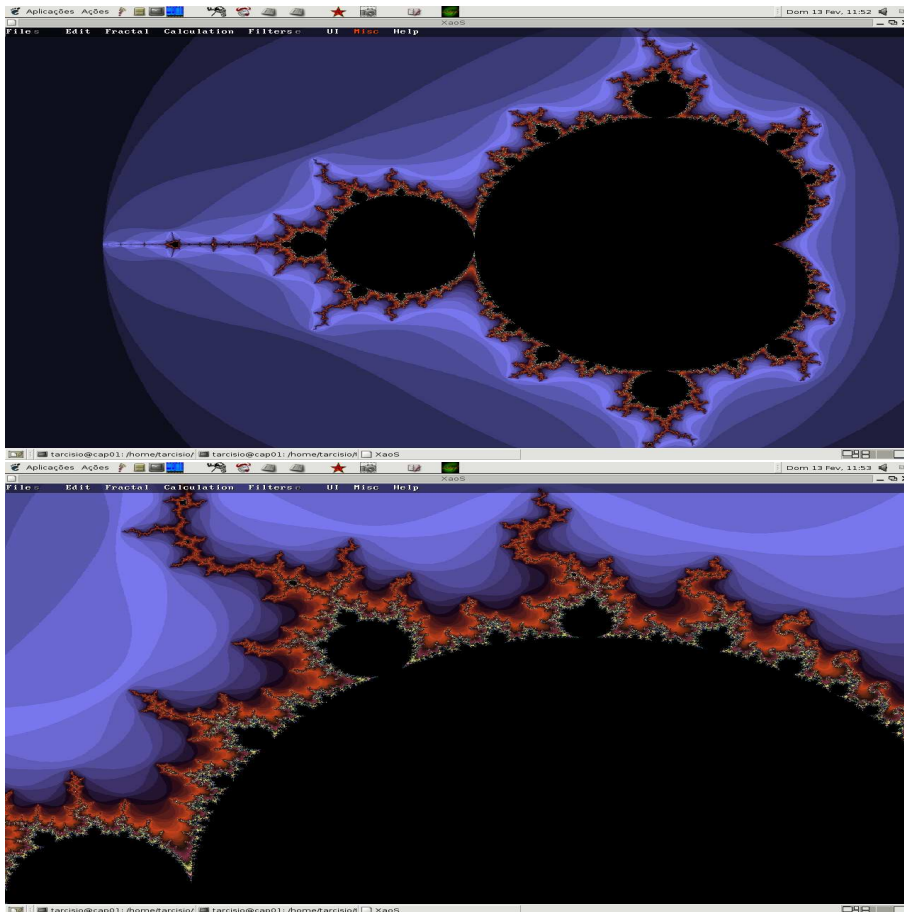


Figura 3.1: Ampliando fractais com xaos

*Vou fazer a suposição de que*

$$O \mapsto 0 \text{ e } P \mapsto 1$$

*quer dizer que o segmento de reta mede uma unidade<sup>4</sup>.*

*Posso agora ir calculando médias aritméticas de números e representando estas médias como pontos médios, no segmento*

---

<sup>4</sup>Aqui você pode ver uma diferença fundamental entre o comportamento de um físico e a de um matemático. O físico selecionaria um nome para a unidade, o matemático geralmente não faz isso ....

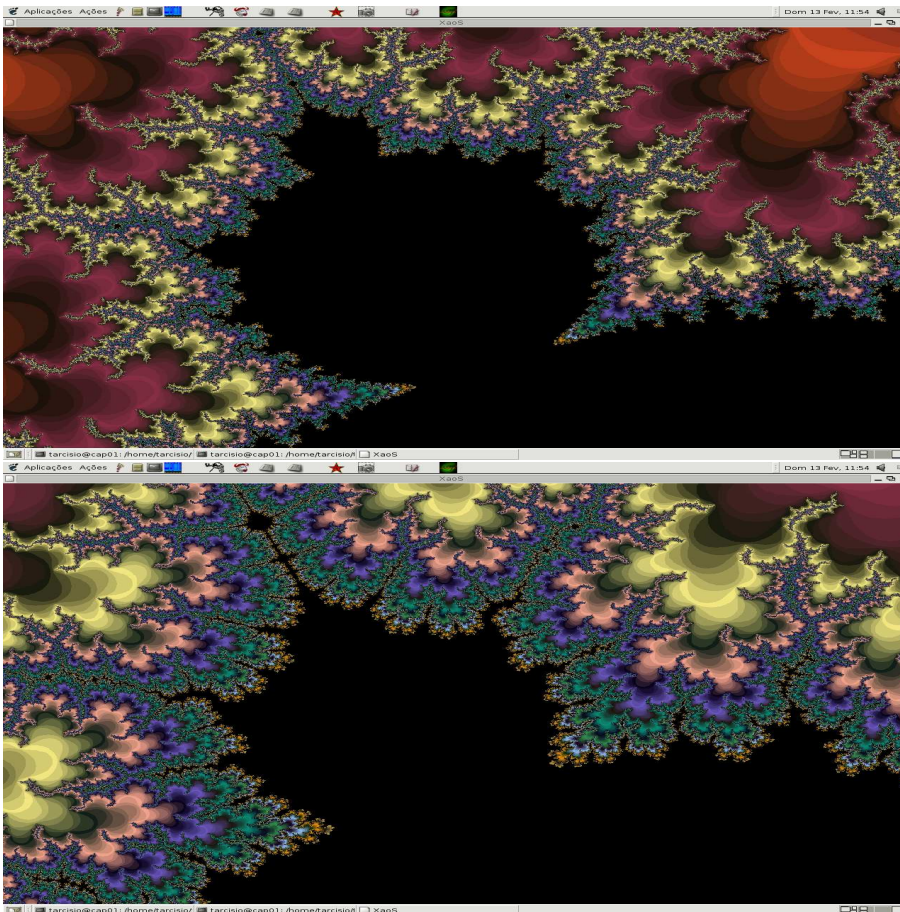


Figura 3.2: Ampliando fractais com chaos

$\overline{OP}$  e nos novos segmentos que serão determinados por cada novo ponto que eu representar na linha.

Examine o que fiz na figura (fig. 3.3).

- Entre 0 e 1 marcamos  $0.5 = \frac{0+1}{2}$  ;
- Entre 0 e 0.5 marcamos  $0.25 = \frac{0+0.5}{2}$ ;
- Entre 0.25 e 0.5 marcamos  $0.375 = \frac{0.25+0.5}{2}$ ;
- Entre 0.375 e 0.5 marcamos  $0.437 = \frac{0.375+0.5}{2}$ ;

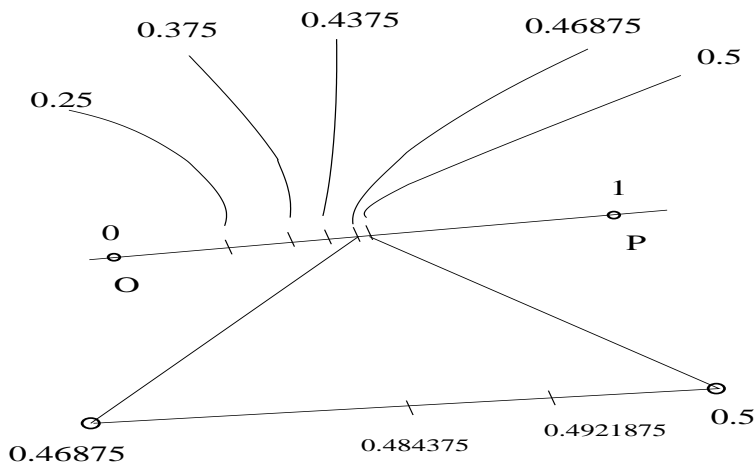


Figura 3.3: A infinidade dos racionais num segmento de reta

- Entre 0.437 e 0.5 marcamos  $0.46875 = \frac{0.437+0.5}{2}$ ;

Neste momento o segmento de reta se encontra excessivamente “poluído”, (poluído visualmente). Mas eu posso encontrar uma saída para resolver esta poluição visual. Observe como: expando o segmento de reta

$$[0.46875, 0.5]$$

usando um segmento do tamanho inicial para representar este novo segmento. Vou recomençar o cálculo de médias neste novo segmento. É como se eu tivesse dado um zoom no segmento anterior.

Depois, usando semelhança de triângulos<sup>5</sup>, posso “levar de volta” as médias encontradas para o segmento de reta original.

Fiz um “zoom” geométrico. Mas o que me interessa aqui é observar que este processo poderia ser continuado indefinida-

<sup>5</sup>O uso de semelhança de triângulo, não está apresentado na figura 3.3, nela você vê um trapézio, você tem que fazer um triângulo, usando o trapézio, para terminar o trabalho. Experimente!

mente<sup>6</sup>. O significado desta experiência é de que existe uma infinidade de números racionais entre os números 0 e 1. Da mesma forma existe uma infinidade de números racionais entre quaisquer dois números inteiros (ou racionais).

A teoria de Cantor, que não foi entendida por seus contemporâneos tem o que ver com a figura (fig. 3.3), a comparação de segmentos: a “quantidade”<sup>7</sup> de pontos no segmento  $[0.46875, 0.5]$  é a mesma que no segmento  $[0, 0.5]$ . Houve um momento que nem Cantor acreditava que isto fosse verdade.

### Observação 7 Contagem por estimativa

Observe que existem quantidades que são muito grandes, que certamente ultrapassam a nossa capacidade de contagem, por exemplo os grãos de areia numa praia qualquer. Mas esta quantidade é finita e pode até ser estimada com um algoritmo aritmético simples:

- Determine o menor diâmetro de um grau de areia;
- Suponha que eles sejam esféricos e calcule o seu volume<sup>8</sup>;
- Divida o volume de areia da praia por pelo volume obtido no caso anterior e você tem uma estimativa do número de graus de areia desta praia.

Tem algumas dificuldades para “processar” o algoritmo acima, mas ele mostra que o número de graus de areia de uma praia qualquer é finito, ainda que muito grande para algum ser humano consiga contá-los durante toda a sua existência. E uma estimativa pode ser grosseira produzindo um número muito grande.

O método descrito para contar o número de graus de areia da praia pode lhe ter torcido o nariz, como uma brincadeira de mau gosto. Eu apenas quis lhe mostrar que existem quantidades muito grandes que ainda são finitas. O método que apresentei é utilizado, pela polícia, para estimar o número de manifestantes em um evento, e a polícia sempre erra, para menos, é claro. Mas o método também é usado para estimar a quantidade células ou outros pequenos organismos vivos (ou mortos) numa lâmina de laboratório e aqui também os números são muito grandes, mas ainda finitos.

Mas o conjunto dos números inteiros ou dos números racionais é infinito.

---

<sup>6</sup>A não ser pela dificuldades físicas, do material, das pontas dos lápis, da precisão do desenho. A matemática nada tem o que ver com estas dificuldades...

<sup>7</sup>A palavra “quantidade” não é apropriada, ela sugere que é possível uma contagem ou uso de operações aritméticas. As leis da aritmética já não podem mais ser aplicadas quando as “quantidades” são deste tipo. O método para lidar com o número de elementos de conjuntos infinitos é a cardinalidade.

<sup>8</sup>Aqui você está num ponto de decisão, você tem que decidir o quão profundo é o setor de areia, se você acha que é muito difícil de escolher onde parar, use o raio da Terra...

## As retas e os pontos

- As retas se expandem indefinidamente em duas direções.
- Existe uma infinidade de pontos numa reta.
- Se você escolher um ponto P sobre uma reta, ele vai dividi-la em duas regiões, duas semi-retas, examine na figura (fig. 3.4) página 43.

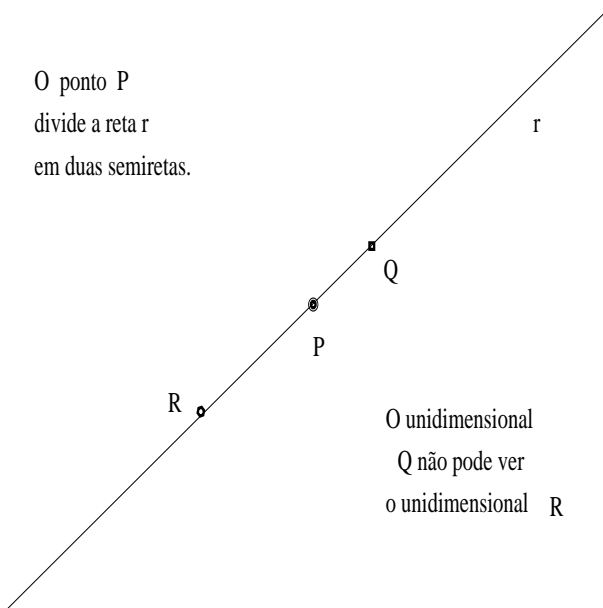


Figura 3.4: P divide o espaço 1D em dois semi-espacos

Foi este o método que os Gregos inventaram para construir a teoria que nós hoje chamamos de Geometria Euclidiana, em homenagem a um deles. Construíram um conjunto de sentenças simples descrevendo os objetos geométricos e as caribaram com o a etiqueta: *postulados*. Eram verdadeiras, sem discussão!

Eu estou usando uma metodologia semelhante para chegar ao conceito de *dimensão*.

### As retas e os planos

1. Os planos se expandem indefinidamente em qualquer sentido, eles contém retas, por exemplo.

Se você considerar uma reta contida num plano, ao lhe dar uma rotação em torno de um ponto da própria reta, ela *poderá continuar*<sup>9</sup> no plano definindo novo sentido.

2. Existe uma infinidade de retas num plano.
3. Como os pontos dividem as retas em duas semiretas, assim as retas dividem os planos em dois semiplanos. Na figura (fig. 3.5) página 45, estou mostrando dois seres bidimensionais, vivendo cada um em seu semi-plano. Eles não se podem ver jamais.
4. A dimensão máxima dentro de um espaço Da mesma forma como *um ponto* é um objeto que divide uma reta em dois sub-espacos, uma reta divide um plano em dois semi-planos. Usando o próximo conceito, retas são objetos de *dimensão máxima* dentro dos planos, assim como pontos são objetos de *dimensão máxima* dentro de retas. Vou afirmar que pontos são *espacos de dimensão zero* e as retas são *espacos de dimensão um*. Continuando, vou afirmar que retas são espacos de dimensão um e os planos são *espacos de dimensão dois*.
5. Um primeiro passo a caminho da generalização Eu posso generalizar a afirmação anterior escrevendo-a de forma mais simples: *em qualquer espaco, existem subespacos de dimensão máxima que os subdividem em subespacos*.

---

<sup>9</sup>Pode também se dirigir para fora do plano pela rotação, mas ... passando pelo plano no ponto de rotação. Diremos que ela se intersecta com o plano em um ponto.

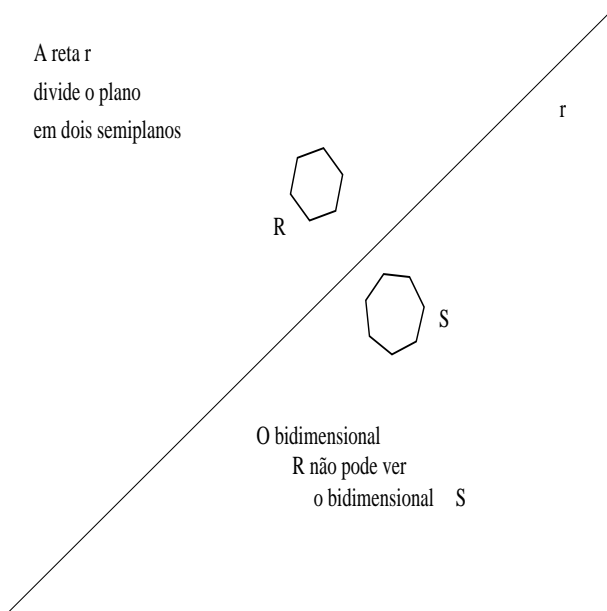


Figura 3.5: Uma reta divide um plano em dois semiplanos

- (a) Pontos, espaços de dimensão zero, dividem retas em semi retas.
- (b) Retas, espaços de dimensão um, dividem planos em semi planos.

### O espaço $3D$ e os planos

Se você comparar esta seção com as duas que a antecedem, há um claro erro de lógica no título. Eu não errei de propósito, apenas estou ganhando pontos em cima do meu erro<sup>10</sup>. O meu erro se deu como consequência de que sou prisioneiro da terceira dimensão, mas como matemático consigo superar a prisão e observar o erro cometido.

<sup>10</sup>É preciso desmistificar os erros! Eles são parte integrante do processo de construção do conhecimento, a Escola é que não consegue superar as suas limitações e se perde num mau uso do erro.

Ao final desta seção vou voltar a comentar o erro e mostrar como corrigí-lo para lhe dar oportunidade de pensar na solução, e continuar usando o erro como uma motivação para a leitura.

Tenha cuidado, o erro está vivo! Tente encontrá-lo, caso contrário você será forçado a ler este material novamente, mais tarde.

1. O espaço  $3D$  se expande indefinidamente em qualquer sentido e contém uma infinidade de pontos, retas e planos.
2. Dois planos do espaço  $3D$  podem ou não se cortar. Se não se cortarem<sup>11</sup> diremos que são paralelos. Se cortarem, determinam uma reta: a interseção de dois planos é o vazio ou uma reta. Em dimensão mais alta isto pode ser diferente!
3. Duas retas podem estar em dois diferentes planos paralelos mas não serem paralelas entre si: tais retas são chamadas *reversas*.
4. Um plano divide o espaço  $3D$  em dois semi-espços.

#### O espaço $4D$ e o espaço $3D$

E o erro continua! Mais uma oportunidade para que você o descubra antes que eu fale dele.

Da mesma forma como existe uma infinidade de planos no espaço  $3D$  em que vivemos, também existem uma infinidade de espaços  $3D$  no espaço  $4D$ . E aqui está uma dica para o erro, tente pegá-lo!

O espaço  $3D$  em que vivemos divide um espaço  $4D$  em que ele estiver contido em dois semiespaços- $4D$ .

---

<sup>11</sup>Esta é uma péssima formulação. É assim que se fala na linguagem geométrica. Melhor é dizer que dois planos paralelos tem interseção vazia.

E assim eu poderia continuar indefinidamente fazendo comparações entre espaços de dimensão maior com outros de dimensão menor enunciando novos axiomas ou teoremas como fez Euclides.

Um espaço  $4D$  *está para* um espaço  $3D$  *assim como* um plano *está para* uma reta.

Vou repetir esta *proporção* com outras palavras:

Um espaço  $4D$  *está para* um espaço  $3D$  *assim como* um espaço  $2D$  (um plano) *está para* um espaço  $1D$  (uma reta).

ou, escrevendo com uma proporção “indevida”<sup>a</sup>:

$$\frac{4D}{3D} = \frac{2D}{1D}$$

---

<sup>a</sup>O indevido possivelmte é apenas aquilo que não se consegue explicar...existem bonitos teoremas em Matemática, escritos desta forma, sim, eles lidam com dimensão! Apenas isto não é uma fração aritmética cujo “resultado” possa resultar em um número.

A proporção que escrevi acima é “indevida”, mas, se algum dia você estudar *álgebra linear* em profundidade, irá encontrá-la e vai ver que se lhe pode agregar um sentido.

E, usando agora uma linguagem aparentemente contraditória, por enquanto estou apenas dizendo que a *desproporção* entre um espaço  $3D$  e um espaço  $4D$  é a mesma que existe entre um espaço  $1D$  e um espaço  $2D$ .

Deixe-me completar a idéia comparando um espaço  $3D$  e uma reta, um espaço  $1D$ . Agora tem uma “distância” de duas unidades no prefixo, um número que estou sutilmente lhe passando

como a dimensão. Resultado: uma reta não divide um espaço  $3D$ , da mesma forma como um ponto<sup>12</sup> não divide um plano, um espaço  $2D$ .

Até agora falei de pontos mas não entrei na discussão sobre qual seria a dimensão de um ponto.

Também ainda não defini *dimensão*, na verdade.

Esta comparação que acabei de fazer me permite escrever uma “proporção” semelhante a que já escrevi anteriormente:

$$\frac{\text{plano}}{\text{ponto}} = \frac{3D}{\text{reta}} \quad (3.2)$$

$$\frac{2D}{0D} = \frac{3D}{1D} \quad (3.3)$$

Eu quero sugerir que um ponto é um espaço de dimensão zero<sup>13</sup>.

Discuti objetos geométricos e subversivamente estou usando uma notação bem conhecida,  $3D$  junto com  $2D$ ,  $1D$  e  $0D$  como um método para trivializar o conceito de *dimensão* que irei ainda melhor discutir, adiante.

### Qual foi erro dominou o texto acima?

Começando pelo título: deveria ter sido “*Os espaços  $3D$  e os planos*” para ficar coerente com as duas seções anteriores.

Eu deixei uma saída numa das frases do texto, quando fiz referências a multitude de espaços  $3D$  no espaço  $4D$ <sup>14</sup>. Como as retas há uma infinidade de planos, espaços  $2D$  e da mesma formar uma infinidade de espaços  $3D$ , nós vivemos num deles.

---

<sup>12</sup>E qual seria a dimensão dos espaços reduzidos a um único elemento?

<sup>13</sup>Observe que não estou tentando dar um significado a frações com denominador zero, isto não existe. O denominador será dito ser de zero dimensão. Isto não é o mesmo que colocar o número zero no denominador.

<sup>14</sup>Mais um erro! Eu deveria dizer “num espaço  $4D$ ”.

Há uma infinidade de retas paralelas e outras tantas que não são paralelas com uma reta dada, como há uma infinidade de planos paralelos e, fixando um plano, uma infinidade de planos não paralelos com este. Eu posso repetir esta frase relativamente a qualquer dimensão: os planos, espaços  $3D$  e assim por diante. Nos capítulos 4 e 5, vou apresentar-lhe uma nova linguagem que está melhor preparada para lidar com objetos de alta dimensão: as *variedades*.

Observe que dois planos num espaço  $3D$ <sup>15</sup> somente podem ter dois tipos de interseção: vazia, ou uma reta. Porque a soma total das dimensões envolvidas não pode passar de três uma vez que os objetos estão confinados num espaço de dimensão três.

Entretanto, dois planos num espaço  $4D$  podem ter como interseção:

1. o vazio;
2. um ponto;
3. ou uma reta.

Neste último caso os dois planos se encontram dentro de um único espaço  $3D$ . Vou provar-lhe que no espaço  $4D$  a interseção de dois planos pode ser um ponto.

Considere os planos  $\pi, \alpha$  contidos em um espaço  $4D$ .

1.  $\pi \cap \alpha = \emptyset$  são planos<sup>16</sup> paralelos. Vou usar a nossa intuição geométrica para dar um salto de intuição. Como os dois planos são paralelos, existe uma reta  $\underline{r}$  perpendicular a ambos. Existem muitas, mas apenas uma me interessa.

---

<sup>15</sup>Com o erro corrigido neste frase!

<sup>16</sup>Lembre-se o exemplo das retas reversas, a interseção ser o conjunto vazio, não é equivalente a paralelismo.

Deslize agora o plano  $\pi$ , sempre mantendo-o perpendicular a reta  $\underline{r}$ . Vai haver um sentido de deslizamento<sup>17</sup> em que  $\pi$  irá coincidir com  $\alpha$ . Ou seja, podemos obter todos os planos paralelos ao  $\pi$  se o deslizarmos ao longo de  $\underline{r}$  em ambos os sentidos a partir da posição inicial que  $\pi$  se encontrava. Ao fazermos isto *geramos* um espaço  $3D$  contido no  $4D$  em que esta ação se desenrola.

2. Em um  $4D$ , a interseção de dois planos, pode ser um ponto.

Em um espaço  $4D$  há um subespaço  $3D$  que vou chamar de  $\mathcal{E}$ . Há uma infinidade, me interessa apenas este. Ele é perpendicular a uma reta  $r$ , e a tantas outras que não me interessam.

Selecione<sup>18</sup> o plano  $\pi$  no espaço tridimensional  $\mathcal{E}$ . O que caracteriza um plano é que nele podemos selecionar duas direções perpendiculares com duas retas que se encontram num ponto. Vou selecionar estas duas retas perpendiculares, em  $\pi$  de modo que elas encontrem a reta  $r$  no ponto  $P$ .

Tenho, agora, três retas concorrentes no ponto  $P$  e perpendiculares duas a duas, por que  $r$  é perpendicular ao espaço  $\mathcal{E}$  que contém o plano  $\pi$ .

Como o plano  $\pi$  se encontra num espaço de dimensão 4, eu posso selecionar duas direções, perpendiculares ao plano  $\pi$ . Já selecionei uma, dada pela reta  $r$  e agora vou selecionar outra determinada pela reta que vou chamar de  $s$ , que

---

<sup>17</sup>Ao longo de uma reta há duas direções. Se você escolher o sentido errado, recomece. Este é o algoritmo!

<sup>18</sup>Esta é uma questão que divide a comunidade dos matemáticos. Está colocada na literatura como *axioma da escolha* que um lado aceita como verdade e que o outro contesta. Eu estou entre os que aceitam o axioma da escolha como verdadeiro. Porém nós nunca podemos informar como foi feita a escolha...

também vou escolher passando pelo ponto  $P$ .

As duas retas  $r$  e  $s$  determinam o plano  $\alpha$ . Os dois planos assim construídos,  $\pi, \alpha$ , são perpendiculares entre si<sup>19</sup> e o ponto  $P$  é um ponto comum aos dois planos, por construção.

Qualquer reta  $t$  que esteja em  $\pi$ , passando por  $P$ , é, por construção, perpendicular à duas direções que determinam o plano  $\alpha$ , ou seja  $t$  é perpendicular ao plano  $\alpha$  no ponto  $P$ , o que mostra que não há outro ponto sobre esta reta que também pertença ao plano  $\alpha$ , assim, a interseção entre estes dois planos é um único ponto,  $P$ . Isto será possível em qualquer espaço de dimensão maior do que três e o que permite esta possibilidade é a liberdade de escolha de duas direções perpendiculares, perpendiculares entre si e perpendiculares a um plano, possível em  $4D$  mas impossível em  $3D$ . Possível em  $nD; n > 3$ .

Obviamente, no espaço  $4D$ , continuamos tendo versões de espaços  $3D$  onde seguem havendo planos cujas interseções é uma reta. O plano  $\pi$ , na construção acima se encontra no subespaço  $3D$  que chamei de  $\mathcal{E}$ , e a interseção do plano  $\alpha$  com o subespaço  $\mathcal{E}$  é a reta  $s$ .

Se você achar que a demonstração que fiz acima é difícil, não está reconhecendo nenhuma fraqueza de pensamento. A dificuldade reside numa intuição viciada de seres que vivem em um particular espaço  $3D$  e que não pode perceber por onde passa uma reta perpendicular a este espaço. A saída é a Álgebra Linear que no século passado representou para o avanço da Matemática, da Física o que a Geometria Analítica fez nos séculos anteriores,

---

<sup>19</sup>Lembra das retas reversas na geometria espacial!

uma algebrização dos conceitos que permitem fórmulas como a que apresentei acima que estão ligadas aos deslizamentos perpendiculares que acabei de descrever num espaço  $3D$ . Na demonstração eu evitei de usar a palavra vetor que seria natural no contexto de Álgebra Linear.

Agora, operações geométricas simples como um deslizamento perpendicular de espaços passa a ser adição de vetores e podem ser representados num programa de computador para criar imagens complicadas que eram simplesmente impossíveis antes destas traduções algébricas.

As afirmações que fiz acima, de que você pode facilmente transladar retas, planos ou espaços de qualquer dimensão com simples operações algébricas e que estas podem ser facilmente transformadas em comandos de computação para produzir gráficos podem ser visualizadas em alguns dos programas para Cálculo Multivariado que você pode encontrar aqui, [7, exer03\_01\_02.gnuplot]. Procure os programas com a extensão “gnuplot” que foram feitos para serem rodados com `gnuplot` que é um pacote livremente distribuído na internet e pode ser encontrado aqui, [4]. Alguns dos programas que podem ser encontradas na página indicada acima, não estão totalmente produzidos porque eles são exercícios que os alunos devem finalizar, mas o programa indicado na citação está completo. São programas escritos em Português que você pode traduzi-los em algum tradutor na Internet, por exemplo, [15].

## 3.2 Interseção de objetos de dimensão diferente

### 3.2.1 Um mundo unidimensional contido num plano

Vou simular, nesta seção, as interseções de “mundos” com dimensões diferentes. Carl Sagan escreveu um livro sobre este assunto em que há erros que vou corrigir aqui.

Considere um plano e uma reta nele contida. A reta divide o plano em dois semi-planos, porque uma reta é o espaço de maior dimensão<sup>20</sup> ainda contido no plano.

Um objeto que estiver num desses semi-planos, pode *viajar* indefinidamente pelo semi-plano sem jamais encontrar a reta divisora dos dois semi-planos, mas se ele tiver que passar para o outro semi-plano terá que “cortar” a reta que os divide. Examine na figura (fig. 3.6) página 54 esta simulação.

A imagem do disco ao passar pela reta é uma família de segmentos de reta, começando com um ponto (o ponto de tangência inicial), se expandindo até atingir um segmento de reta cuja medida seja a mesma do diâmetro do círculo. A partir daí o segmento volta se encolher<sup>21</sup> até chegar a um ponto (o outro ponto de tangência) e finalmente desaparecem as imagens. Depois vou explicar porque *ninguém* pode *ver* este filme! Foi apenas um exercício de abstração matemática.

**Observação 8** *Ponto é também segmento de reta, degenerado*

---

<sup>20</sup>No capítulo 0 eu vou apresentar uma noção que nos carrega para fora da terceira dimensão em que vivemos, uma delas é a noção de *hiperplano* que se refere ao espaço de maior dimensão ainda contido n'outro. Retas são hiperplanos de planos! Os planos são *hiperplanos* de espaços 3D espaços e espaços 3D são *hiperplanos* de espaços 4D.

<sup>21</sup>É impossível explicar isso agora, mas lá não existe isto de “encolhendo de volta para um ponto”. Isso será possível compreender no próximo capítulo. Por enquanto vai ficando este erro.

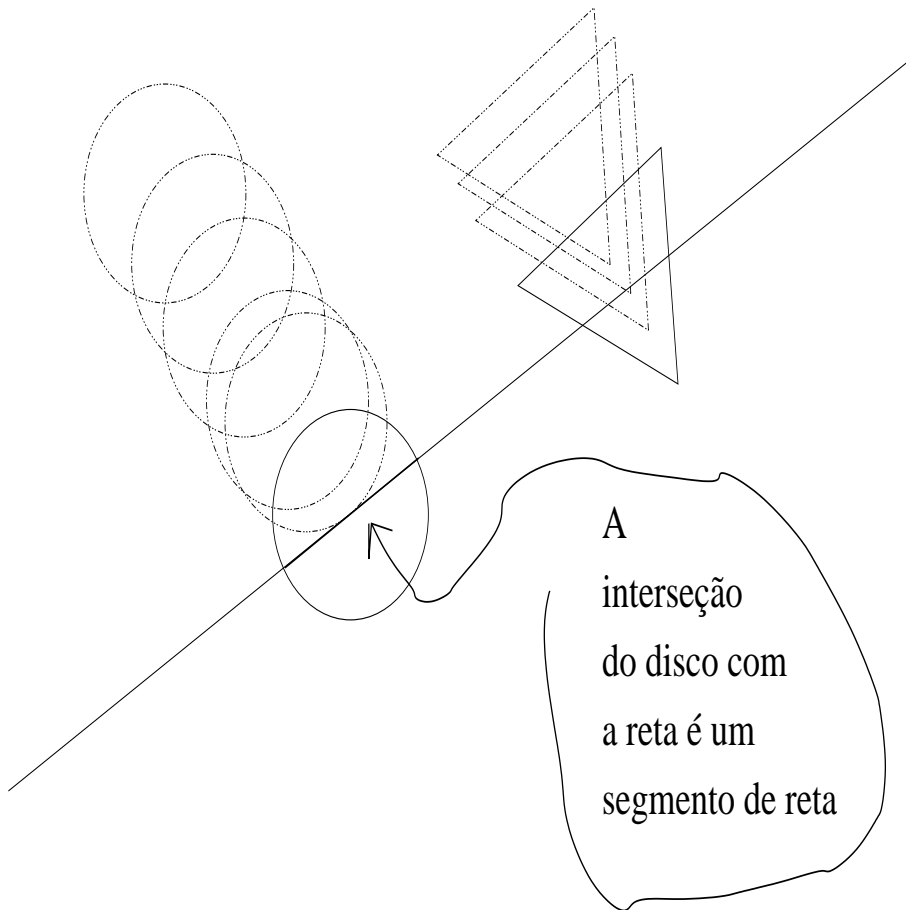


Figura 3.6: Um disco atravessando uma reta

*Num primeiro momento o disco apenas tangencia a reta. É um ponto de tangência. Depois as “imagens” passam a ser segmentos de reta, parece que houve uma mudança de comportamento no padrão e nós matemáticos gostamos de encontrar “continuidade”, ou regras nos padrões. Para prevenir-nos contra “descontinuidades”, sempre procuramos fazemos extensões dos conceitos em Matemática para atingir a uniformização de padrões. Quando estamos aprendendo Matemática, os professores costumam nos dizer que o padrão da verdade em Matemática*

*é a beleza ... se o resultado for elegante, provavelmente tudo está correto! Neste caso queremos ver pontos como segmentos de reta e às vezes, acrescentamos o adjetivo degenerado para apaziguar a audiência. Isto faz com que a família descrita no filme que você acabou de “ver” seja uma família de segmentos de reta.*

*Há diversas “situações-limite” em que precisamos fazer isto. Quando você estudou o fatorial de números, passou por uma dessas situações em que viu definição de  $0! = 1$ .*

*Fatorial é uma multiplicação, logo  $0! = 1$  tem que ser uma extensão do conceito, uma vez que multiplicar, por zero, sempre dá zero, e não poderia dar 1. Mas,  $0!$  serve para calcular quantos subconjuntos vazios existem num determinado conjunto, e isto é 1. Portanto precisamos que  $0! = 1$ .*

*Precisamos de “situações-limite” para fechar as teorias, como estas duas referidas aqui: fatorial e a família de segmentos de reta.*

Se houvesse algum ser unidimensional vivendo naquela reta, e presenciasse a passagem do disco pela reta, repentinamente veria uma parede “imensa” (ocupando todo o espaço) a aparecer-lhe pela frente. Talvez percebesse que a parede era móvel mas não poderia ver nenhum crescimento como o bidimensional poderia ter visto: o ponto passar a ser um segmento de reta não degenerado, crescer até a medida do diâmetro e depois desaparecer passando novamente por um ponto. Para o unidimensional tudo não passaria de um ponto, um dos pontos que determinam um segmento de reta, o que estivesse do seu lado. Para ele, um ponto seria uma parede traduzido para a nossa linguagem. Uma parede imensa, movediça, se expandindo além do horizonte.

Se estivessem dois unidimensionais “conversando”, repentinamente seriam separados pelo ponto inicial quebrando o espaço.

Em seguida a parede (o segmento de reta) enchendo o Universo unidimensional jogou os dois unidimensionais cada um para o seu lado, na parte do Universo em que ele se encontrasse, se não os trucidasse, simplesmente, deixando o espaço  $1D$  *irremediavelmente quebrado* e portanto separados em duas semi-retas o mundo dos unidimensionais. Possivelmente deixando dois cadáveres unidimensionais para comprovar o “terremoto”.

Os dois companheiros unidimensionais que estavam conversando antes da chegada do disco, se não tivessem sido destruídos, estariam surpresos ante um fenômeno inteiramente inexplicável e aterrorizados se não estivessem mortos.

Mas para os unidimensionais não seria possível perceber mais do que a existência de uma parede imensa ocupando todo o espaço e se movendo para dentro do espaço e depois se retraindo para finalmente desaparecer deixando um mundo unidimensional rompido.

Isto está errado!

Na mesma figura (fig. 3.6) você pode ver um objeto triangular que também teria atravessando a reta. A imagem começa com um ponto<sup>22</sup> e cresce até ficar do tamanho de um dos lados do triângulo, sem que os habitantes do mundo  $1D$  possam ter qualquer idéia do tamanho uma vez que ficam imediatamente divididos em dois semi-mundos  $1D$  estanques.

Isto está errado!

O ser “unidimensional” não teria a menor ideia do formato dos dois objetos.

Vou imaginar que os dois unidimensionais tenham presenciado o fenômeno do mesmo lado e que tenham saído ilesos da experiência para registrar um possível diálogo entre os dois, um relato da estranha cena:

- - Incrível, de repente o espaço inteiro se fechou!

---

<sup>22</sup>Na visão de um unidimensional, uma parede.

- - Sim! quase fui morto por esta coisa que surgiu do nada!
- - E pareceu crescer, crescer e o nosso Universo ficou cortado.
- - É o fim dos tempos. É o fim do mundo!

O diálogo somente foi possível porque eles ficaram juntos, no mesmo semi-universo unidimensional.

Observe a diferença entre a sua visão tridimensional dos fatos e a limitada visão do unidimensional. Você vê<sup>23</sup> o disco se aproximando da reta, você vê a interseção do disco com a reta, que é um segmento de reta (e portanto, como um ponto, divide a reta em duas semi-retas).

Isto está errado!

Mas para o unidimensional, seja um ponto ou um segmento de reta, é apenas uma imensa parede que divide todo o seu espaço na metade em que ele se encontra e a outra que ele já não pode mais perceber.

Leia no capítulo 0 um pouco mais a este respeito: “uma parede pode ser atravessada”, 124.

### 3.2.2 Um mundo bidimensional invadido por um objeto 3D

Vou agora analisar o que aconteceria se um objeto tridimensional invadissem um espaço bidimensional ?

Novamente aqui vou descrever diversas visões, a nossa de observador 3D privilegiado e a visão limitada do observador 2D que vive num determinado plano.

Isto, também, está errado!

---

<sup>23</sup>Depois vou mostrar-lhe que aqui tem um erro! Que este livro está cheio de erros, felizmente com correções! Vou corrigir estes erros no capítulo 0.

O nosso espaço  $3D$  tem uma infinidade de planos distribuídos em absolutamente todas as direções<sup>24</sup> como nos planos onde há uma infinidade de retas com as mais variadas direções. Um objeto  $3D$  viajando no espaço  $3D$  pode nunca encontrar um determinado plano, onde precisamente se encontra o nosso observador bi-dimensional, porque pode ficar o tempo todo confinado a um semi-espaço definido por um certo plano.

Mas vou supor que num certo plano exista energia bidimensional, seres bidimensionais, e que um objeto  $3D$  “corte” este plano.

Suponha que um objeto, em dimensão três, semelhante a uma garrafa de refrigerante passasse por um plano.

Esta questão contém outras perguntas: que significa passar por um plano? Sua passagem poderia ficar despercebida? Eu vou, mais a frente fazer a simulação da invasão do nosso universo por um ser de dimensão quatro e você terá a oportunidade de ver falhas no meu raciocínio. Falhas próprias de quem vive condicionado<sup>25</sup> ao raciocínio tridimensional.

Passar por um plano significa o que usualmente falamos quando nos referimos em Geometria à interseção entre figuras<sup>26</sup>. Significa, dinamicamente, ir cortando com o plano (interseção) com o objeto tridimensional. Examine a figura (fig. 3.7) página 59.

O resultado desta experiência se encontra ilustrada na figura (fig. 3.7) página 59 e preciso explicar a minha obra de arte<sup>27</sup>...

- No ponto em que está marcado “apareceu aqui” a garrafa surgiu no plano, uma pequena bola, a interseção da boca

---

<sup>24</sup>Relembrando a sua geometria espacial, podemos falar de uma direção de um plano tomando por referência o seu vetor normal...

<sup>25</sup>Foi esta a principal razão do capítulo 2 em que insisti na visão limitada de quem vive prisioneiro à gravitação terrestre...

<sup>26</sup>Como o disco “passando” pela reta.

<sup>27</sup>A arte moderna tem de ser acompanhado por um manual de instruções!

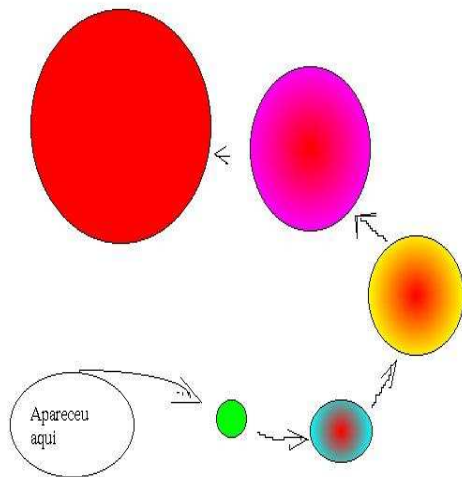


Figura 3.7: pegadas de um ser tridimensional no plano, invisíveis até mesmo pelos tridimensionais

da garrafa com o plano. Observe que esta é a nossa visão de seres  $3D$ ...

- Em seguida a garrafa ficou inclinada e a interseção parece elíptica. Uma elipse é um círculo deformado!
- As setas vão indicando a evolução das passagem da garrafa pelo plano. Aumenta o tamanho da interseção até atingir o máximo na “cintura” da garrafa. Um disco de diâmetro máximo.
- No mundo  $2D$  tudo é visível é uma parede que os bidimensionais talvez possam perceber que é curva. Não poderiam perceber que é circular pois não teriam acesso ao centro do círculo. Mas isto ainda depende do tamanho deles relativa-

mente à interseção em seu mundo<sup>28</sup>

- Terminado o fenômeno certamente não ficou<sup>29</sup> nenhuma parede, mas certamente um pedaço do mundo  $2D$  destruído, naquele ponto. Nós não temos experiências com tais eventos para poder imaginar como tudo estaria “*no dia seguinte*”. Por certo o formato da região destruída seria dado pela da união das interseções da garrafa com o plano. É o que a Matemática nos ensina.

Para um bidimensional surgiu uma parede que bloqueia toda uma região e que (possivelmente) tem uma aparência circular.

A parede cresce e altera o seu aspecto, mas ele não pode perceber que em um certo momento é elíptica e nem que é circular. O centro do círculo não é visível para os bidimensionais. Tudo que ele percebe é uma parede a sua frente e talvez consiga observar que ela não é reta, parece curvilínea.

A garrafa é um objeto de dimensão três. Suas múltiplas interseções obtidas com o nosso “filme”, típico do século 21, são objetos de dimensão dois. Seria a visão de um ser tridimensional da invasão da garrafa tridimensional dentro do espaço bidimensional.

A garrafa é um objeto tridimensional. Suas múltiplas interseções registradas pelo meu “filme” são objetos bidimensionais. É o meu modo de ver a invasão do espaço  $2D$  pela garrafa.

Para um habitante do espaço  $2D$  surgiu uma parede no seu universo, caso ele se encontre fora do local da invasão, porque se ele estivesse no local da invasão seria impiedosamente trucidado.

---

<sup>28</sup>Não se esqueça de que você tem a impressão de que a terra é plana e que tem muita gente que ainda não acredita que ela seja um batatóide!

<sup>29</sup>O que terá acontecido ficará inteiramente claro no 0 capítulo. Agora é muito difícil de explicar, eu preciso do conceito de medida. Aqui estou eu incorrendo nos mesmos erros que os de Carl Sagan.

Afastado do local da invasão ele pode ver o surgimento da parede móvel e capaz de se expandir e absolutamente não teria qualquer idéia da garrafa. No máximo, dependendo dos tamanhos relativos, poderia perceber que seria uma região limitada com fronteira não retilínea. Posso registrar aqui um diálogo entre dois “bidimensionais” ante o aparecimento místico que eles estariam presenciando:

- Nos primeiros momentos - Um objeto imenso ! Tem um formato curvilíneo!
- Nos primeiros momentos - Um disco voador!
- - Disco voador ? não, mas parece-se com uma imensa parede que toma todo o universo.
- alguns segundos depois Não, não é um disco! Sua forma se altera, parece vivo, um animal de extraordinárias proporções, do tamanho do Universo.
- ao ver as demais imagens Parece que está aumentando de tamanho.
- ao desaparecer a imagem O nosso Universo ficou partido.
- Mas é possível rodear a parede...e chegar até o outro lado.

Obviamente a última frase somente pode ter sido dita se os seres bidimensionais tiverem um tamanho que lhes permita avaliar que a parede tem aspecto curvilíneo. No próximo capítulo vou mostrar-lhe também que eu, tridimensional, não poderia ver as interseções e estaria totalmente alheio a qualquer possível dano que eu porventura estivesse cometendo contra os habitantes do mundo bi-dimensional.

Examine uma diferença fundamental entre o caso do mundo unidimensional que ficou cortado em dois regiões pelo disco. As imagens da garrafa não separam o espaço bidimensional em dois espaços. Os dois bidimensionais, se tiverem escapado vivos e tivessem ficado, momentaneamente separados pela invasão da garrafa, poderiam ainda voltar a se encontrar, se as proporções da parede não forem gigantescas para a vida deles. Poderiam andar à volta e constatar que existe uma região interior à parede que já não lhes é mais acessível.

Leia no capítulo 0 um pouco mais a este respeito: “uma parede pode ser atravessada”, na página 124.

Não estou aqui defendendo ou explicando a existência de *objetos não identificados*, OVINIS, como nunca os vi não tenho opinião formada sobre a existência deles. Mas se houver um universo de dimensão maior que a do nosso universo  $3D$ , e se o nosso universo  $3D$  estiver contido neste particular espaço  $4D$  e, finalmente, se um objeto de dimensão quatro (ou superior) invadissem o nosso mundo, então a nossa experiência será de uma imensa parede ocupando todo o espaço e deixando uma bagunça enorme e irreparável para trás, após a invasão. O nosso mundo estaria definitivamente quebrado no lugar desta passagem. E tudo o que teríamos em mente sobre o acontecido seria uma imagem distorcida, o nosso universo quebrado, depois que a coisa se tenha ido embora.

E tudo que guardariamos dele seria uma imagem distorcida e o nosso Universo rompido no ponto de passagem do objeto.

Vou usar uma palavra técnica que será repetida e explicada no capítulo 0, *magro*, se quiser salte agora para o capítulo 0 para ler a respeito. Olhe no índice, no final do livro, para localizar a página exata onde este conceito se encontra.

Errado!  
não há  
nada que  
“se tenha  
ido”!

As interseções da garrafa tridimensional com o plano são *magras* relativamente à garrafa. Não são nada *magras* relativamente aos seres bidimensionais. *Magro* quer dizer que tem *massa* zero.

### **Observação 9** *Magro*

*Magro é um conceito relativo. Um objeto é magro relativamente a outro. As interseções da garrafa com o plano, como são de dimensão inferior a da garrafa, são magras relativamente à garrafa. Têm massa zero relativamente à garrafa.*

Reis e Silva, [9], em um livro de Geometria Analítica, propuseram um truque para que se bebesse um refrigerante sem abrir a garrafa. Leia esta história no capítulo 0, página 121.

Vou explicar-lhe porque não é possível beber o refrigerante usando o truque proposto por eles, passando pela quarta dimensão: como o líquido tri-dimensional é magro relativamente à dimensão quatro, não há força de sucção capaz de fazê-lo chegar ao canudo quadri-dimensional.

No capítulo 0 você pode ler a história de uma formiga bidimensional presa numa garrafa de sua dimensão e que foi salva da prisão por um truque semelhante ao do refrigerante. Isto também não é possível, e pela mesma razão. O salvador da formiga colocou uma palhina na garrafa bidimensional para que ela passasse, pela terceira dimensão, para fora da garrafa.

A formiga bi-dimensional não poderia fazer uso da ponte representada pela palha passando por cima das paredes da garrafa bidimensional, leia esta história no capítulo 0, página 123.

Tudo que a formiga bi-dimensional perceberia da palha, seria sua interseção com o mundo bi-dimensional, na verdade um objeto bi-dimensional atrapalhando sua mobilidade. Ela não teria nenhuma idéia do aspecto da palha.

Como as formigas percebem as palhas, então as formigas não são bidimensionais...

### 3.3 Dimensão na Álgebra Linear

Vou agora discutir de forma mais técnica, mas nem tanto, o conceito de *dimensão*.

*Álgebra Linear* é o departamento da Matemática que se ocupa dos conceitos *dimensão*, *espaço*.

Uma forma simples de caracterizar a dimensão de um objeto consiste em contar o número de coordenadas necessárias para descrevê-lo.

Esta regra não é absoluta porque podemos descrever um plano dentro dum espaço de dimensão quatro e esta descrição traria quatro coordenadas... portanto é preciso ter cuidado com a dimensão de um objeto que seja descrito com 10 coordenadas, ele pode ser bi-dimensional. Na verdade é preciso aprender a contar quantas coordenadas existem<sup>30</sup>, de fato.

Mas a verdade é que não será possível descrever um objeto bi-dimensional com apenas uma coordenada, ou descrever um objeto tridimensional com apenas duas coordenadas. É este o significado da regra prática.

Então quando dissermos que um determinado conjunto se descreve com a sentença:

$$P = \{(x, y, z) ; \mathcal{P}(x, y, z) = 0\}$$

---

<sup>30</sup>As regras práticas existem para nos ajudar a rapidamente obter resultados, mas elas são perigosas. Têm que ser usadas com cuidado.

em princípio estamos com um objeto bidimensional porque precisa de duas coordenadas para descrevê-lo uma vez que uma delas “pode” ser explicitada como função das outras duas<sup>31</sup>, por exemplo

$$P = \{(x, y, z) ; z = f(x, y)\} \quad (3.4)$$

A “regra” prática diz que “se houverem  $n$  variáveis, o objeto será de dimensão  $n - 1$ .”

Na equação (4)  $z$  é chamada de variável dependente e na verdade contamos apenas duas variáveis,  $x, y$ . Você vê aqui um exemplo de como contar as variáveis.

Nas “nossas” modernas economias as *pessoas e os produtos* estão catalogados com *índices*. Basta contar quantos dígitos são necessários para descrever os índices da tal *economia* para decidir qual é a dimensão do espaço econômico em se vive.

Aqui também é preciso ter cuidado com um pequeno erro possível, o pessoal do *ministério do planejamento* separou uma quantidade de dígitos que sirva para muito tempo, portanto esta contagem pode resultar numa dimensão um pouco maior do que a *economia* do país de fato tem, mas o erro será pequeno. Uma diferença de ordem de grandeza...

Um erro de apenas uma unidade na dimensão, pode tornar todos os eventos do espaço em *eventos de medida zero*<sup>32</sup>...*Isto explica porque os nossos sistemas econômicos estão se tornando muito pouco confiáveis cada dia que passa!*

Examinemos exemplos para tornar esta idéia mais simples.

---

<sup>31</sup>Algumas vezes nós não sabemos fazer esta conta...

<sup>32</sup>Medida é o assunto do capítulo 0.

Retas devem ser de dimensão um e planos de dimensão dois.

**Exemplo 10** *Retas devem ter dimensão um*

*A equação de uma reta, tirada do seu livro de matemática da Escola, pode ser escrito de duas maneiras:*

$$\{(x, y) ; ay + bx + c = 0\}; \quad (3.5a)$$

$$m = -\frac{b}{a}; d = -\frac{c}{a} \quad (3.5b)$$

$$y = mx + d ; \quad (3.5c)$$

na figura (fig. 3.8) página 66, você pode ver a representação gráfica do cálculo da tangente (coeficiente angular) da reta relativamente a um eixo<sup>33</sup> de referência. É o quociente entre os catetos de um triângulo retângulo.

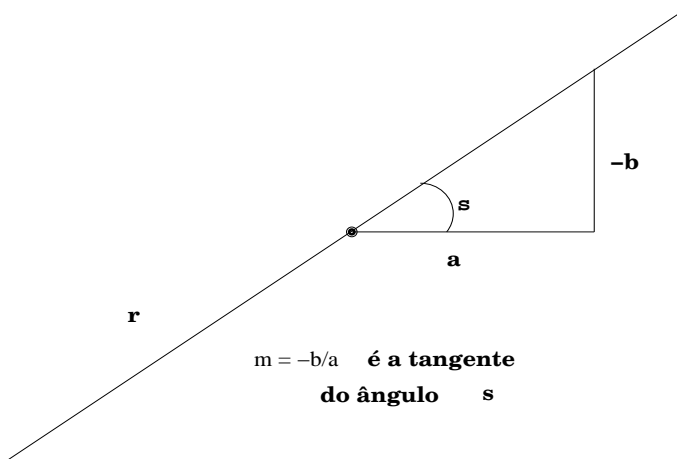


Figura 3.8: Equação da reta

*Porém, entre as duas equações (3.5a), (3.5c) parece que uma*

---

<sup>33</sup>Mais uma vez, absoluto é uma coisa rara, não há ângulo antes da nossa decisão por um eixo de referência.

informação desapareceu, de três coeficientes, na equação (3.5a) agora temos apenas dois, na equação (3.5c).

Mas você pode acompanhar as contas e ver que “elas são legais” e que na verdade os novos coeficientes são pares de coeficientes: uma fração é sempre um par de números.

De qualquer forma temos três coeficientes apesar de que eles se encontrem mascarados em apenas dois. Eu quero lhe mostrar que Matemática não é bruxaria<sup>34</sup> e também chegar ao “número dois” de informações necessárias para determinar uma reta.

Vou começar com a equação (3.5c). Observe que se  $c = 0$ , então  $d = 0$  dando-nos um tipo muito particular de equação:  $y = mx$  que você pode se lembrar, é a equação de uma reta passando pela origem. É por isso que o número  $d$  tem um nome especial, porque mostra onde a linha passa no eixo  $OY$ , você se lembra do professor dizer, “fala  $x = 0$ , para descobrir onde a linha corta o eixo  $OY$ ”. Desta forma a equação (3.5c) é uma expressão otimizada e nós diz tudo o que precisamos para representar graficamente uma reta. Com um pouco de trabalho podemos voltar da equação (3.5c) para a equação (3.5a). Elas são equivalentes.

Assim identifiquei duas informações necessárias para descrever uma reta,

$$m, d$$

o coeficiente angular,  $m$  e o coeficiente linear  $d$ . Isto me fez chegar junto com a Geometria que diz que “dois pontos, diferentes, determinam uma reta”. Dois pontos, para a Geometria, são duas informações. Duas informações precisam de duas variáveis, então a equação de uma linha reta precisa de duas variáveis para expressá-la.

---

<sup>34</sup>Nada contra as bruxas! Ao contrário, eles são, geralmente, muito interessantes!

*Duas variáveis, a regra que enunciávamos anteriormente nos conduz a dimensão 1 para a reta e vamos ver que tem sentido.*

*Nos apoiando na geometria: “dois pontos determinam uma reta” dois pontos diferentes, obviamente<sup>35</sup>. Com estes dois pontos construímos um segmento de reta não degenerado<sup>36</sup>. Isto nos levaria ao gráfico que se encontra na figura (fig. 3.8) que nos conduziu ao cálculo das equações da reta, (3.5a), (3.5c). Isto fecha o ciclo.*

regra  
prática  
duas  
variáveis  
dimensão  
1

*Começamos com um segmento de reta, figura (fig. 3.8) determinado por dois pontos dados, mas qualquer outro segmento de reta, sobre a reta, será um múltiplo deste. Vou chamá-lo de um gerador da reta, quer dizer que uma reta pode ser gerada por um segmento de reta determinado sobre ela, por dois pontos.*

*Chegamos assim á conclusão de que duas informações<sup>37</sup>, um segmento de reta determinado por dois pontos, determina a reta. Na figura (fig. 3.9) página 69,*

*Observe, en passant, que a regra do número das variáveis<sup>a</sup> coincide aqui com o número de pontos necessários para determinar uma reta: dois pontos, a dimensão é “2-1=1”.*

<sup>a</sup>O método algébrico.

**Exemplo 11** *Os planos devem ter dimensão dois*

*De modo parecido caracterizaríamos os planos:*

$$\{(x, y, z) ; Ax + By + Cz + D = 0\}$$

<sup>35</sup>e teria sentido em falar de dois pontos iguais? Resposta: não. É uma “situação limite”.

<sup>36</sup>Seria um segmento de reta degenerado se os dois pontos fossem iguais... se reduziria a um único ponto!

<sup>37</sup>A regra prática está funcionando:  $2 - 1 = 1$ ; a dimensão da reta é 1.

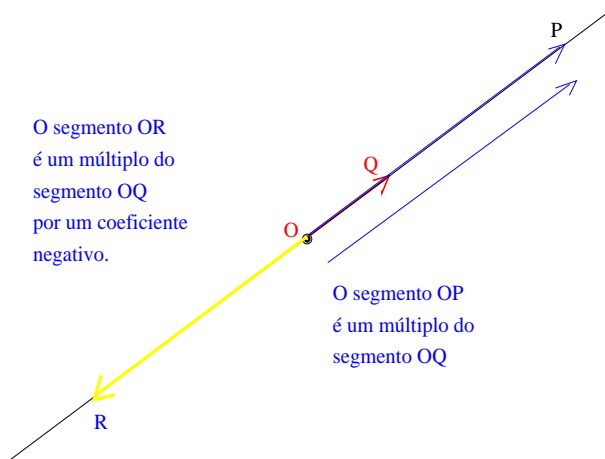


Figura 3.9: Um segmento gera todos os outros: segmento gerador

*três variáveis, dimensão dois.*

*Vous mostrar que precisamos de duas informações para determinar os elementos num plano.*

*A geometria novamente nos diz que dados três pontos não colineares, determinamos um plano.*

*E da Geometria, com três pontos, examine a figura (fig. 3.10) página 70, podemos construir um triângulo não degenerado<sup>38</sup>*

- *Considere três pontos, A, B, C não colineares;*
- *Eles determinam os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ .*
- *Qualquer outro segmento de reta no plano pode ser obtido a partir destes dois usando-se a regra do paralelogramo que é um método para somar.*

*Há alguns segmentos cuja soma não é muito trivial, mas vamos deixar isto para que o leitor exercite sua perspicácia...*

<sup>38</sup>Seria um triângulo degenerado se os pontos fossem colineares...

## A regra do paralelogramo para somar segmentos

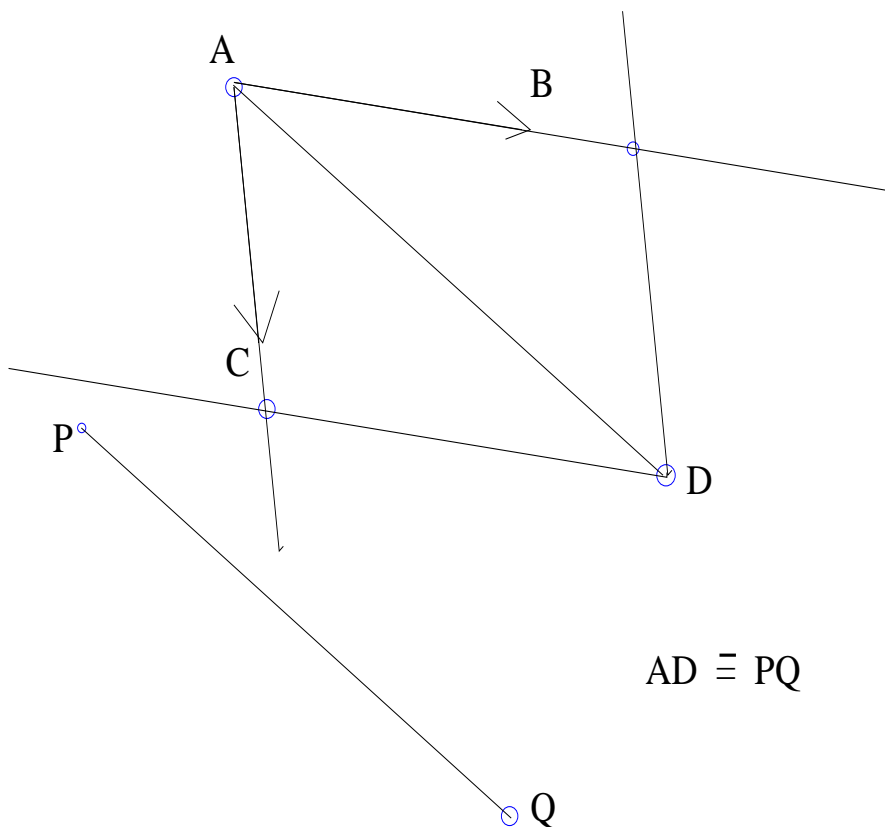


Figura 3.10: Geradores do plano

*Mostramos assim que os três pontos se reduzem a duas informações, e que estas duas informações geram qualquer segmento do plano (qualquer outra informação do plano).*

*Três pontos (não colineares) determinam um plano.  $3-1=2$ , a dimensão de um plano é dois.*

Posso arriscar uma definição informal de *dimensão*, é a quantidade mínima de informações “necessárias” para descrever totalmente o espaço:

- não podemos determinar uma reta com zero segmentos de reta, precisamos de um;
- não podemos determinar um plano com apenas um segmento de reta, precisamos de dois;
- não podemos determinar um espaço  $3D$  com apenas dois segmentos de reta, precisamos de três;

Das afirmações acima apenas a primeira parece estranha. Mas se você pensar no método geométrico de determinação de retas, dois pontos distintos, e retirar o adjetivo distintos, você arrasou com o segmento de reta e agora tem a quantidade “zero” de segmentos de reta, apenas um ponto, que você sabe que insuficiente para determinar uma reta. Pode ser uma forma de explicar a primeira sentença. De qualquer forma ela completa as outras duas!

1. Retas: um segmento de reta; dimensão 1;
2. Planos: dois segmentos de reta não colineares; dimensão 2;
3. Problema: um ponto, dimensão zero;

### 3.4 Geradores e dimensão

A ciência tem que ter um processo simplicador para permitir ao Homem um domínio do conhecimento. Os alquimistas, que fundaram a química, procuravam descobrir os elementos básicos da Natureza guiados pela ambição de criar ouro<sup>39</sup> ou outros elementos preciosos.

---

<sup>39</sup>Por azar o ouro é um um dos elementos básicos e assim não podia ser criado a partir dos outros elementos básicos... a não ser por uma “engenharia” atômica coisa que os alquimistas ainda não sabiam fazer. E hoje sabemos que é muito caro fazer ouro com este método.

### 3.4.1 Elementos básicos

#### Elementos básicos da química

Com uma centena de elementos básicos podemos criar toda a matéria existente no Universo conhecido.

elementos  
químicos  
básicos

#### Elementos básicos das linguas humanas

O alfabeto foi uma invenção do mesmo tipo, descobrimos alguns caracteres que podem gerar todos os sons que produzimos e assim codificar a fala com a escrita. Com cerca de 25 letras podemos representar qualquer frase que o ser humano queira pronunciar, registrá-la em papel (ou em meio eletrônico) e enviá-la por correio (eletrônico ou de superfície). E um único alfabeto serviria para todas as línguas faladas na Terra com uma pequena correção, por exemplo, no alfabeto russo, que é muito rico de sons.

caracteres  
básicos  
da escrita

#### Elementos básicos para as quantidades numéricas

Os 10 dígitos  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  nos permitem expressar qualquer quantidade e podemos traduzí-los em *alta voltagem* ou *baixa voltagem* e assim registrá-los para nas memórias dos computadores e finalmente expressar a escrita, as imagens, o movimento, tudo no Universo, com apenas dois elementos básicos:  $\{0, 1\}$ .

escrita  
imagem  
movimentos

#### Elementos geométricos básicos

Enfim, descobrir elementos básicos permite que, com poucos elementos descrevamos todo um Universo.

Vimos que os segmentos de reta, convenientemente combinados, descrevem as retas, os planos, o espaço... e novamente aqui o interessa é descobrir um conjunto adequado de segmentos de reta que seja mínimo, os mais simples.

**Observação 10** *Existência de elementos mais simples*

*Observe que a existência de elementos mais simples não precisa ser única, examine o alfabeto que os russos usam, que é o mais simples para descrever os sons que eles precisam. O gregos tem o seu.*

*A predominância do alfabeto latino que invade a Rússia, a Grécia ou a China, acontece não por ele ser o mais simples, ou o melhor, mas pela imposição econômica que está por trás dele.*

*Infelizmente não existe um único conjunto de elementos mais simples para descrever um espaço geométrico. Precisamos de aproximações<sup>40</sup> e este é um conceito nada novo, mas sempre repellido por graves preconceitos.*

### 3.4.2 Formatação da reta

Tome uma reta, e nela escolha um ponto, chame-o *origem*, *O* você fez uma escolha!

Poderia ser qualquer outro ponto. Qualquer ponto divide a reta em duas semi-retas.

Dividida a reta em duas semi-retas vamos escolher uma das semi-retas para nela eleger um ponto que será o *1*. Com isto determinamos onde ficarão os números positivos. Outra escolha! Poderia ter sido qualquer das duas semi-retas a escolhida para ser o conjunto dos números positivos.

---

<sup>40</sup>E usamos aproximação, nas comunicações da fala, da visão e de imagens.

Também qualquer ponto pode ser escolhido para marcar a unidade, com exceção do que já escolhemos para ser o zero, porque têm que ser dois pontos distintos...

Feitas estas escolhas temos um segmento de reta que conveniente multiplicado por um número pode reproduzir qualquer outro na reta inteira. Ele é um gerador. É também o gerador mais simples porque quando multiplicarmos pelo número natural  $n$  vamos encontrar o ponto que representa o número natural  $n$ .

Se tivéssemos escolhido como gerador o segmento  $\overline{O,2}$  ele produziria uma distorção porque o seu comprimento não seria *unitário*. Para obter o  $\underline{3}$  teríamos que multiplicá-lo por  $\underline{1.5}$ .

Mas já posso fazer uma afirmação: me basta um único segmento de reta, (chamado vetor unitário), para gerar uma reta. Quer dizer, o conjunto dos geradores da reta é unitário.

Isto caracteriza a reta como sendo de dimensão um.

### 3.4.3 Formatação do plano

A figura (fig. 3.10) nos sugere que precisaremos de dois segmentos de reta para gerar um plano, é assim.

Novamente, este dois segmentos de reta podem ser quaisquer, desde que não sejam colineares. Os dois mais simples são aqueles que marcam a unidade de cada reta. Mas cada vez que escolhermos duas retas, não paralelas, se encontrando num ponto que chamaremos *origem*, podemos ter dois novos geradores para o plano, que assim não tem um único par de geradores.

Mas sempre será um par de geradores o conjunto mais simples que gera um plano. Isto nos diz que a dimensão de um plano é dois.

Eu Poderia seguir em frente, mas assim eu iria construir toda a *Álgebra linear* e estari extrapolando o objetivo que tenho para este livro.

A dimensão dos espaços se caracteriza, assim, pelo número mínimo de geradores que ele tiver.

# Capítulo 4

## Medida

O cálculo *do comprimento, da área e do volume* são três processos básicos de medida mas há outros.

Quero mostrar-lhe o que é *medida* do ponto de vista de Matemática. Vou passar sucessivamente *comprimento, área e volume* para motivar o assunto e passar para a definição de medida.

### 4.1 Comprimento, área e volume, hipervolume, ...

Vou rever sucessivamente comprimento in área e volume para motivar o assunto e chegar à mérida dum espaço  $4D$ . Depois vou tratar do assunto medida de forma geral, apresentar-lhe a definição matemática de medida, explicar direitinho o que são *conjuntos magros* que foi assunto do capítulo 4.

Para terminar vou justificar o título do livro, a razão de nossa prisão tridimensional com a ajuda de medida e corrigir alguns

erros que foram deixados para trás.

A metodologia para medir foi fundamentalmente alterada com a Revolução Francesa que rompendo com a aristocracia e recriando a república inventou o sistema métrico decimal.

Abaixo você tem dois sites onde pode consultar os padrões e os nomes dos processos de medição tecnológicos.

- [http://www.universal.pt/site/medidas/conv\\_medidas.htm](http://www.universal.pt/site/medidas/conv_medidas.htm)
- [geocities.yahoo.com.br/saladefisica/medidas.htm](http://geocities.yahoo.com.br/saladefisica/medidas.htm)

Já estou falando de medida desde o primeiro capítulo, somente agora é que vou oficialmente entrar no assunto. Dependendo de quais são os seus interesses, você pode saber que *medida* é um assunto difícil que pode assustar alunos de pósgraduação. Eu também vou mostrar aqui que não precisava ser assim embora eu não vá me aprofundar nesta direção.

*Medir* significa associar um número a um conjunto, como o cálculo da área, ou o comprimento de uma peça de tecido, que tem área, mas nós a compramos pelo comprimento. Ou a quantidade d'água na caixa do prédio em que moramos, volume.

- Comprimento é medida num espaço de dimensão 1;
- área é medida medida num espaço de dimensão 2;
- volume é medida num espaço de dimensão 3.

Observe que estes nomes nos foram legados por uma antiga cultura geométrica. Eu vou fazer-lhe uma pergunta que vai deixá-lo espantado: que nome daríamos à medida de um corpo de dimensão quatro? por exemplo, a medida de uma esfera na dimensão quatro? Analise porque eu usei o exemplo da esfera, ele lhe irá trazer algumas surpresas:

- esfera unidimensional, exemplo, um intervalo da reta;
- esfera bidimensional, exemplo, um disco do plano;
- esfera tridimensional, exemplo, uma bola, a esfera habitual;
- esfera quadridimensional, o conjunto dos pontos que se encontrem a uma distância menor ou igual a um certo raio escolhido,  $r$ , de um ponto  $P$ , a *esfera de centro  $P$  e raio  $r$* .

No último exemplo eu escrevi a definição que você conhece, nos outros dois, possivelmente com exceção do primeiro, você já esperava. O primeiro você recebeu com um certo espanto, mas olhe a figura (4.3) página 87,

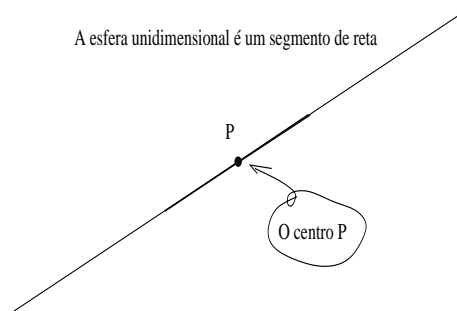


Figura 4.1: A esfera unidimensional é um segmento de reta

A esfera unidimensional é um segmento de reta, o diâmetro se confunde a própria esfera e o centro,  $P$ , é média aritmética dos extremos. Lembra da parede unidimensional do capítulo anterior?

### Comprimento, uma medida do espaço $1D$

Quando *formatei* o espaço, no final do capítulo 3<sup>1</sup>, por exemplo a reta, escolhi um padrão (matemático) de medição. Eu fiz isto no final do capítulo 3, ao marcar além do zero, o 1. Com isto eu criei duas estruturas na reta:

- geométrica, definindo um “vetor padrão”, e
- algébrica, ao identificar os elementos neutros de duas operações fundamentais, adição e multiplicação.

Foi criado um padrão para segmento de reta com tamanho de uma unidade. Criei<sup>2</sup> a unidade! As comparações com este segmento unitário estabelecem o tamanho de qualquer outro segmento.

### Observação 11 (A prisão cultural) *Que a cultura não seja uma prisão*

*O nome da medida, num espaço  $1D$ , está ligada à nossa cultura geométrica, e se chama comprimento. Não fique cansado com a repetição desta frase que voce agora vai ler, possivelmente, pela centésima vez, mas ela é o objetivo deste livro. Nós somos prisioneiros do processo cultural em que vivemos. Por um lado, temos de proteger nossa cultura, culturas locais, essa proteção deve se transformar em um “algoritmo” para proteger o meio ambiente que o cenário de nossas vidas. Por outro lado, devemos aprender a separar a arte, a beleza do processo cultural, a admirá-la e protegê-la, mas impedir que isso se torne uma prisão cultural que nos deixe cegos para crescer em conhecimento. Neste pequeno exemplo, é preciso compreendermos que comprimento é apenas um nome geométrico de um tipo de medida, e que medida é o conceito genérico. É esta capacidade de proteger o nosso background cultural, mas ainda ser capazes de construir conceitos que às vezes entram em contradição com os nossos valores culturais, mas que devem viver em harmonia com eles, que nos fará livres para ir mais longe. Por exemplo, é esta capacidade de conviver com o nosso fundo cultural, sem ficar a ele preso, que nos permitirá, logo, discutir a medida num espaço  $4D$ .*

<sup>1</sup>Procure no índice remissivo o assunto “formatação”.

<sup>2</sup>Você já deve ter percebido que o tom do livro é mais para divertido do que para uma seriedade enciclopédica. Fique certo de que eu não crei nada novo neste livro!

### Área, uma medida do espaço 2D

De forma semelhante, ao *formatar* o plano, escolhi uma unidade no eixo  $OX$  e outra no eixo  $OY$ <sup>3</sup> e assim, junto com a origem, e o ponto  $(1, 1)$  fica determinado um retângulo padrão que digo ter área um<sup>4</sup> de modo que as comparações deste retângulo com qualquer outro, determina a área do outro. A figura 4.2, na página 80, ilustra o conceito apresentando-lhe o retângulo

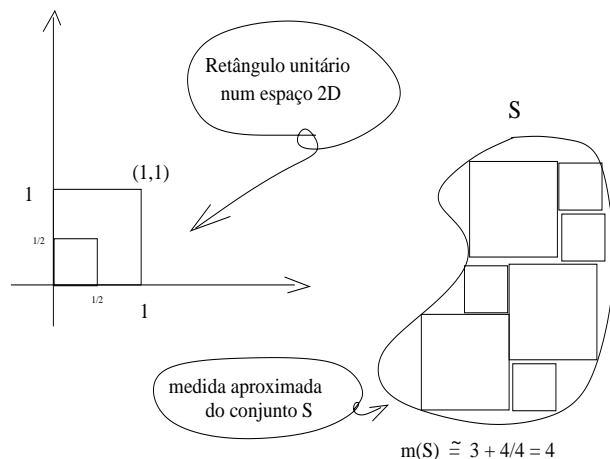


Figura 4.2: O retângulo fundamental, de área 1

unitário e uma sub-unidade, um retângulo de lado  $\frac{1}{2}$ , que tem  $\frac{1}{4}$  da área do retângulo unitário.

Desta forma eu calculei uma aproximação da área do conjunto  $S$  resultando em 5 unidades. Bastava usar outra sub-unidade, um retângulo de lado  $\frac{1}{4}$  e eu poderia ter conseguido um resultado mais exato, porém ainda aproximado.

<sup>3</sup>Também foi uma escolha ao estabelecer que os eixos seriam ortogonais.

<sup>4</sup>Podemos provar mais tarde que esta medida tem a propriedade de sendo o produto das medidas unidimensionais.

### Volume, uma medida do espaço 3D

Ainda de forma semelhante ao *formatarmos* o espaço 3D, escolhemos uma unidade no eixo  $OX$ , outra no eixo  $OY$  e outra no eixo  $OZ$ <sup>5</sup> assim, junto com a origem, fica determinado um paralelepípedo padrão, determinado pela origem  $(0, 0, 0)$  e pelo ponto  $(1, 1, 1)$  que diremos **ter volume um** de modo que as comparações deste paralelepípedo com qualquer outro conjunto determina o volume do conjunto, aproximadamente, de forma semelhante ao que foi feito no plano, na figura 4.2, na página 80.

#### 4.1.1 E o espaço 4D

Eu me recuso a representar graficamente o espaço 4D porque também não fiz representações gráficas para o espaço 3D como não vou tentar nenhuma representação gráfica para o espaço 5D etc...<sup>6</sup>

Mas a formatação de qualquer outro espaço de maior dimensão segue o método que usamos para formatar 1D, 2D, 3D.

#### Observação 12 *Imagens de 3D num espaço 4D*

*Algebricamente não há nenhuma dificuldade de entender as dimensões mais elevadas. Deixe-me mostrar isso para você através de alguns exemplos. E o método algébrico, agindo cegamente, mas com segurança, é a forma de produzir programas que nos permitirão manipular a realidade com grande precisão. Espero que isto a decida por dominar o método abstrato.*

*Ao escolhermos uma reta perpendicular ao espaço 3D passando pela origem  $(0, 0, 0)$  estamos criando o espaço 4D onde podemos criar novos endereços para os pontos existentes*

---

<sup>5</sup>e escolhemos os eixos ortogonais

<sup>6</sup>democraticamente. Porque a nossa prisão tridimensional nos impede de compreender, graficamente, o que é 4D.

no espaço  $3D$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3D \ni (0, 0, 0) \mapsto (0, 0, 0, 0) \in 4D \\ 3D \ni (1, 0, 0) \mapsto (1, 0, 0, 0) \in 4D \\ 3D \ni (0, 1, 0) \mapsto (0, 1, 0, 0) \in 4D \\ 3D \ni (0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 1, 0) \in 4D \\ 3D \ni (x, y, z) \mapsto (x, y, z, 0) \in 4D \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Mas todos os pontos que descrevi acima representam os mesmos pontos já existentes em  $3D$ . Eles têm apenas tem novos nomes. É exatamente isto que a empresa de telefonia faz quando precisa expandir o sistema, ela coloca alguns zeros geralmente no início dos números antigos. Eu coloquei um zero no final dos endereços antigos.

Vou fazer algo diferente agora, criando pontos novos, que não pertencem mais ao espaço  $3D$ . Apenas vou usar como “material” pontos existentes no espaço  $3D$ . Vou fazer translações:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3D \ni (0, 0, 0) \mapsto (0, 0, 0, 1) \in 4D \\ 3D \ni (1, 0, 0) \mapsto (1, 0, 0, 1) \in 4D \\ 3D \ni (0, 1, 0) \mapsto (0, 1, 0, 1) \in 4D \\ 3D \ni (0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 1, 1) \in 4D \\ 3D \ni (x, y, z) \mapsto (x, y, z, 1) \in 4D \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Na equação (1), na quarta coordenada, eu coloquei zero e com isto “preservei” o espaço  $3D$ , é uma cópia do espaço  $3D$  dentro do espaço  $4D$ .

Na equação (2), em vez de usar na quarta coordenada um zero, como eu havia feito na (1), eu agora coloquei 1. Isto corresponde a uma translação do espaço  $3D$ . Eu vou dizer que, com uma redação diferente!

Deixe-me chamar de  $S$  ao conjunto formado pelos pontos

$$S = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (x, y, z)\}$$

Então os novos pontos, em  $4D$  na equação (1) podem ser obtidos com a operação algébrica:  $S + (0, 0, 0, 0)$ , uma translação com o vetor zero. Mas na equação (2) a operação é:  $S + (0, 0, 0, 1)$ , somei a todos os pontos foi o vetor  $(0, 0, 0, 1)$ . Ainda assim é uma imagem idêntica de  $S$  em  $4D$ , é apenas uma translação.

Isto mostra, algebricamente, uma coisa importante: que em  $4D$  existe uma imagem de  $3D$ , o que já venho dizendo há muito.

- Dentro de um espaço de dimensão  $4D$  há uma infinidade de espaços  $3D$ , uns paralelos aos outros, outros não paralelos entre si...
- Dentro de um espaço de dimensão  $3D$  há uma infinidade de espaços  $2D$ , uns paralelos aos outros, outros não paralelos entre si...

e eu poderia repetir esta frase indefinidamente, com diversas dimensões.

Os elementos de um espaço  $4D$  podem ser endereçados com quatro coordenadas:  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(x, 1, 1, -1)$ ,  $(x, y, -1, 1)$ ,  $\dots$

Os pontos  $(0, 0, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1, 1)$  determinam um “hipercubo” do espaço  $4D$ , de forma semelhante a que usei para definir os retângulos unitários dos espaços  $1D$ ,  $2D$  e  $3D$ , com hipervolume 1 nos permitindo, de forma idêntica a calcular os hipervolumes de qualquer conjunto  $S$  em um espaço  $4D$  pode ser obtido, aproximadamente, por comparação com a unidade padrão e suas subunidades.

Aqui e em dimensões superiores, não podemos mais ser guiados por uma figura geométrica, mas podemos criar um programa de computador para fazer as translações e decidir algebricamente se as translações do hipercubo unitário ou de suas subunidades, estão dentro de  $S$ . *Aproximação* é uma palavra-chave.

Aqui também o valor 1 é uma escolha. É a melhor escolha porque coincide com o produto das medidas dos lados...

Não temos absolutamente nenhuma limitação para pensar numa geometria multi-dimensional, e se apenas perdermos o preconceito associado a nossa incapacidade de fazer representações geométricas que já são difíceis no espaço  $3D$ , em que vivemos, então nossa liberdade de pensamento fica completa.

Usei as palavras *hipervolume*, *hipercubo* porque a minha linguagem geométrica, presa à dimensão três, não me oferece vocábulos para me referir a estes objetos. No próximo capítulo eu vou mostrar um novo vocabulário mais adequado para resolver esta dificuldade.

## 4.2 Medida

A Matemática é a *ciência* da generalização. Todo ser humano é naturalmente um matemático e não fora a Escola<sup>7</sup> e não fora a Escola, todos seríamos matemáticos.

Desde pequeno o ser humano quer generalizar e observa quando os objetos ou os conceitos são equivalentes porque isto conduz a uma economia de espaço na memória. Esta é a atividade principal de um matemático: apagar algumas propriedades para encontrar um conceito mais geral. Vou fazer isso agora com as medidas geométricas de que tratei até agora.

*Medida* é uma função que associa números reais a conjuntos<sup>8</sup> com uma propriedade aditiva. Elas são chamadas funções aditivas de conjuntos.

### Exemplo 12 Probabilidade, um exemplo de medida

*Outro exemplo de medida é uma probabilidade, é as propriedades de uma probabilidade são as mesmas destas medidas habituais área, volume, comprimento, hipervolume ... e observe que eu disse “uma probabilidade” porque há muitas versões de probabilidade.*

*Na maioria das vezes usamos probabilidades discretas, quando o universo a ser medido tem um número finito de elementos. Então os conjuntos a serem medidos são todos os subconjuntos deste universo e suas medidas podem ser calculadas pela fórmula (a propriedade aditiva de conjuntos):*

$$\begin{cases} P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} ; A \subset U ; U \text{ é o universo} \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \iff A \cap B = \emptyset \end{cases} \quad (4.3)$$

*em que  $n(A)$  significa o “número” de elementos do conjunto  $A$ .  $P$  é um tipo de probabilidade chamada “discreta”.*

### Exemplo 13 Preço de um terreno, um exemplo de medida

*O preço dos terrenos é um outro exemplo de medida. Este é particularmente interessante pela sua construção. Preço de um terreno, é uma medida definida localmente. Mesmo dentro de uma mesma cidade, dois terrenos com mesma metragem, podem ter preços diferentes. É que existe uma função bivariada que cobre as cidades como um lençol*

<sup>7</sup>Já dizia o poeta português Guerra Junqueiro (1850-1923), [6], a Escola em vez de desenvolver, embota, uma grande maioria dos alunos.

<sup>8</sup>Os exemplos mais comuns são estes de que já falei, *comprimento, área e volume*.

e que é usada como fator multiplicativo da área do terreno para obter-se o seu preço. Esta função se chama corrupção imobiliária. Por um momento vou apagar esta função, melhor dizendo, vou usar a função  $f(x, y) = 1$ , a função constante, que vai tornar todos os preços de terrenos equivalentes, na cidade inteira.

Se dois terrenos forem contíguos e se tiverem a mesma área é quase certo que terão o mesmo preço, e se você for comprar os dois terrenos pagará a soma dos preços:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B); \text{ porque } A \cap B = \emptyset$$

Esta propriedade, da medida da união de conjuntos disjuntos, aparece na equação (3), não é a única propriedade de uma medida mas é uma propriedade fundamental que deu origem ao pensamento de generalizar a área de objetos geométricos para conseguir um conceito mais abstrato, uma medida. Aqui você já viu que ha diversas medidas, mas todas elas tem as mesmas propriedades. Sim, há propriedades mais específicas, mas isto interessa menos aqui, como eu disse no começo, eu não vou mergulhar de forma muito profunda no estudo da teoria das medidas... não porque seja terrivelmente difícil, mas porque fugiria do meu objetivo.

Preço não é área, mas é área alterada por uma função conveniente<sup>9</sup>.

### 4.3 A evolução da medida geométrica

Até a invenção do Cálculo, quando o método da exaustão de Eudócio foi formalizado por Riemann e por vários outros, entre os quais Newton, dentro de uma teoria que nós chamamos hoje de *integral no sentido de Riemann* o método para o cálculo da área de uma figura geométrica se baseava no conjunto das idéias que acabei de expor:

1. Um conjunto básico, em geral um retângulo do espaço em questão, quer dizer um segmento de reta, no caso  $1D$ . Eu estou dizendo que os segmentos de reta são os retângulos de um espaço  $1D$ . Segmentos de reta são também as bolas dos espaços  $1D$ <sup>10</sup>!

---

<sup>9</sup>Muito conveniente mesmo...

<sup>10</sup>Preste atenção, não permita que os seus sentimentos culturais o impeçam de ir em frente!

Aquilo que chamamos de retângulo, no caso dos espaços bidimensionais, um retângulo<sup>11</sup> do espaço  $3D$ , usualmente chamado de *cuvo*, enfim, um retângulo do espaço  $nD$ , para o qual não temos mais nomes quando  $n \geq 4$ .

## 2. A propriedade aditiva descrita na equação (3).

Vou usar a palavra *retângulo* para todos os casos, acrescentando a dimensão do espaço, se for necessário. Alguns autores utilizam a bola palavra.

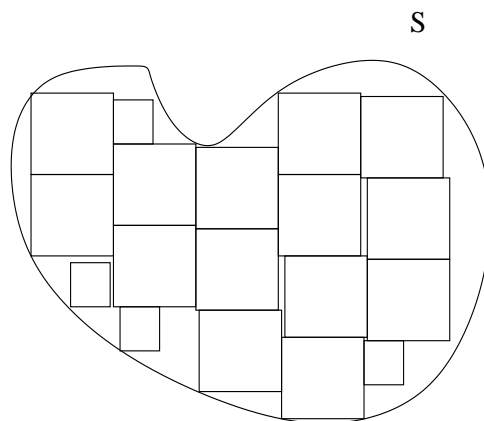
Nesta forma geométrica de medir escolhermos um conjunto  $U$  como a unidade “padrão” do espaço, definimos assim *uma medida* no espaço inteiro. Qualquer outro conjunto  $S$  passa a ter uma medida que é obtida por comparação com  $U$ , quantas vezes for possível transladar disjuntamente  $U$  sobre  $S$ , mais as subunidades para conseguir uma boa aproximação.

A figura (4.3) página 87, mostra um cálculo aproximado, da mesma forma como Eudócio teria feito. Primeiro “ usando o número máximo de unidades”  $U$ , em seguida, usando uma subunidade, depois outra fração desta subunidade e assim por diante até que a precisão desejada tenha sido alcançada: a *área aproximada* “” foi calculada. Na figura (4.3) eu estou usando potências de  $\frac{1}{4}$  para obter as subunidades apenas para ter uma figura mais agradável mas é claro que este método daria uma boa precisão ao final.

É este o método que usamos para definir medidas, os ingleses e os americanos, com a empáfia característica que têm, continuam usando padrões de medida medievais porque foram os franceses e a Revolução Francesa que lançaram padrões de

---

<sup>11</sup>Eu escolhi, arbitrariamente um nome genérico para retângulos numa dimensão qualquer, *retangulo*. Acredite, há autores que usam a palavra *bola*, e eles tem uma razão muito bem fundamentada para fazer esta escolha. Mas é uma escolha!



$$14U + 4(U/4) = 15U$$

Figura 4.3: A região mede aproximadamente  $14U + 4\frac{U}{4} = 15U$

medida mais precisos como o metro, quilo etc.. que formam o sistema **mks**. Ingleses e americanos continuam a usar os *pés* dos decadentes monarcas para medir distâncias. Mas em qualquer caso, definido um padrão, como *pé*, ou *metro* para comprimento, o comprimento de qualquer outro objeto é obtido por comparação com o padrão escolhido, depende do tamanho do pé...

Mas a necessidade de expandir o conceito de área surgiu em Matemática produzido por uma observação que eu apenas feri de leve quando me referi aos problemas de contagem estudados por Cantor. Um dos problemas se encontra na relação entre os dois conjuntos disjuntos:

1. Conjunto dos números racionais:  $\mathbf{Q}$ ;
2. Conjunto dos números irracionais:  $\mathbf{Q}^c$ .

Não tem sentido falarmos na quantidade de números racionais, ou da quantidade de números irracionais, eu já me referi

a isto. Aqui um novo conceito, cardinalidade, vem substituir a contagem:

$$\text{card}(\{1, 2, 3\}) = 3; \quad (4.4a)$$

$$\text{card}(\{1, 3, 3, 4, 5, 6, 76, 8, 9, 0\}) = 10; \quad (4.4b)$$

$$\text{card}(\mathbf{P}(\mathbf{Q})) = \text{card}(\mathbf{P}(\mathbf{N})); \quad (4.4c)$$

$$\text{card}(\mathbf{P}(\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}^c)) > \text{card}(\mathbf{P}(\mathbf{N})); \quad (4.4d)$$

A desigualdade que se encontra na equação (4.4d) foi objeto de uma conjectura de Cantor, *o salto de cardinalidade* que é uma das características dos conjuntos infinitos. A cardinalidade classifica os conjuntos infinitos. A hipótese de Cantor, provada por Cohen em 1963, diz que não existe nenhum conjunto cuja cardinalidade se situe entre

$$\text{card}(\mathbf{N}), \text{card}(\mathbf{P}(\mathbf{N})); \quad (4.5)$$

Observe que para conjuntos finitos isto é possível, o que mostra uma diferença entre *conjunto finito* e *conjunto infinito*. Se  $A$  for um conjunto finito, com mais de um elemento, há solução para

$$\text{card}(A) < n < \text{card}(\mathbf{P}(A));$$

por exemplo, se  $A = \{1, 2\}$  então

$$2 = \text{card}(A) < 3 < \text{card}(\mathbf{P}(A)) = 2^2 = 4;$$

tem solução, qualquer conjunto com três elementos serve.

Assim *cardinal* é uma extensão do conceito de *número natural*: *Todo número natural é um cardinal mas há exemplos de cardinal que não são números naturais*. Por exemplo,  $\text{card}(\mathbf{N})$  não é um número natural.

A sentença “*todo número natural é um cardinal mas há exemplos de cardinal que não são números naturais*” pode ser traduzida assim: “ $\mathbf{N}$  é o conjunto dos cardinais de todos os conjuntos finitos”.

Não tem mais sentido falar em quantidade de elementos quando esta “quantidade for infinita”. Tem sentido classificar os conjuntos por níveis de cardinalidade, ou em função do salto que Cantor detectou. Assim,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{P}(\mathbf{N})$  se encontram em classes diferentes. E às vezes usamos estes símbolos para rotular suas classes.

Se nos restringirmos ao intervalo unitário<sup>12</sup> é simples de reconstruir a história. Lebesgue compreendeu que havia que construir uma teoria das medidas de modo que

1. o conjunto dos racionais em  $[0, 1]$  tivesse medida zero;
2. o conjunto dos irracionais em  $[0, 1]$  tivesse medida 1;

Justificativa: São dois conjuntos disjuntos cuja união é o intervalo  $[0, 1]$  que mede 1. A medida teria que traduzir (generalizar) a idéia de *quantidade*, que a *quantidade* dos números racionais, relativamente à *quantidade* dos números irracionais, é insignificante: zero. Eu estarei falando sobre conjuntos magros na próxima página.

Lebesgue criou a teoria chamada *medida de Lebesgue* atendendo às duas condições:

- da soma de áreas para conjuntos disjuntos e
- refletindo a quantidade comparativa de elementos entre conjuntos.

---

<sup>12</sup>O retângulo de dimensão 1...

Observe que ela corresponde ao princípio contido na equação (1). Os dois subconjuntos do intervalo  $[0, 1]$  são disjuntos, a reunião deles é o conjunto  $[0, 1]$  que tem medida 1. Então o conjunto dos racionais entre 0 e 1 teria que medir zero e o conjunto dos irracionais entre 0 e 1 teria que medir 1.

Eu disse acima que era simples de reconstruir a história mas não deve ter sido tão simples construí-la...

## 4.4 Conjuntos magros - de medida zero

Quando usarmos *medidas não discretas*, como volume, comprimento, aparecem alguns conjuntos especiais que têm medida zero. Estes conjuntos podem ser especialmente complicados e não vou me meter nesta história aqui, mas se você for curioso pode procurar por *Conjunto de Cantor* em algum livro de Matemática para sentir o gosto do estudo de conjuntos com medida zero, por exemplo, [13, página 67].

Vou me limitar a conjuntos de medida zero mais simples. Vou criar um subconjunto de um cubo  $3D$  e mostrar que este subconjunto tem medida zero. Será uma demonstração matemática, fique alerta.

- Considere um retângulo<sup>13</sup> de medida 1 no espaço  $3D$  e nele considere a interseção com um plano que resulte num retângulo plano dentro do cubo.
- Suponha (por absurdo) que este  $2D$ -retângulo, que é um sub-conjunto do  $3D$ -retângulo tenha  $3D$ -medida diferente de zero. Vou designar com o número real  $\underline{r}$  a  $3D$ -medida deste  $2D$ -retângulo. De agora em diante eu vou evitar de

---

<sup>13</sup>Está valendo uma nova linguagem, um cubo é um retângulo em  $3D$ .

usar o prefixo  $3D$  para me referir à medida do espaço  $3D$  em que estou trabalhando. Será sempre a  $3D$ -medida.

- Como posso fazer qualquer quantidade de cópias paralelas deste  $2D$ -retângulo dentro do  $3D$ -retângulo, e como estas cópias paralelas são disjuntas, vemos, pela propriedade aditiva das medidas, que a união destas cópias tem por medida a soma das medidas de cada cópia.
- As cópias que fizemos do  $2D$ -retângulo inicial são simples deslocamentos do  $2D$ -retângulo primitivo o que não lhes altera a medida, todas as cópias têm mesma medida.
- Se eu fizer  $\underline{n}$  cópias, a união delas tem medida

$$nr$$

- Como posso fazer qualquer quantidade cópias, posso escolher o número natural  $\underline{n}$ <sup>14</sup> tal que

$$nr > 1$$

com o que chego a uma contradição, um subconjunto do  $3D$ -retângulo com medida  $nr > 1$  quando o próprio  $3D$ -retângulo tem medida  $\underline{1}$

- A solução para escapar deste absurdo é considerar que  $r = 0$  e portanto a medida do  $2D$ -retângulo dentro do  $3D$ -retângulo tem medida zero.

Tenho que voltar, temporariamente, mil desculpas, para a linguagem habitual. A medida num espaço  $3D$  se chama volume e

---

<sup>14</sup>Esta é a propriedade arquimediana dos números reais, e também dos números racionais.

o que eu estive calculando foi o volume dos “retângulos planos”. A conclusão é que um “retângulo plano” tem volume zero. Dizendo de outra maneira, *um “retângulo plano” tem medida 3D zero.*

A razão específica pela qual o retângulo tem medida zero, é porque ele tem dimensão dois. Todos os subconjuntos de dimensão dois, dentro espaço  $3D$  tem medida zero, são *magros*.

Todo subconjunto de dimensão inferior, dentro de um espaço, tem, medida zero, *relativamente* à medida definida naquele espaço:

- “retângulo plano” tem volume zero;
- um  $3D$ -retângulo tem  $4D$ -medida zero;
- um  $1D$ -retângulo tem  $2D$ -medida zero;
- um  $1D$ -retângulo tem  $3D$ -medida zero;
- a  $1D$ -rectangle has  $2D$ -measure zero;

Eis a razão porque não vale a pena tentar beber o refrigerante sem abrir<sup>15</sup> a garrafa. O refrigerante tem medida zero em  $4D$  e conseqüentemente não há força  $4D$  que seja capaz de sugar este refrigerante através do canudinho  $4D$  como imaginaram Reis e Silva, [9]. Os proprietários de todos os supermercados vão me agradecer calorosamente quando comprarem este livro e provavelmente irão colocar várias cópias, gratuitamente, nas prateleiras.

Pela mesma razão não seria possível resgatar uma formiga<sup>16</sup>  $2D$  de dentro de uma garrafa  $2D$  com uma palha  $3D$ , e, como é óbvio que você viu as formigas escapando da região fechada

---

<sup>15</sup>Leia a história do refrigerante no capítulo 5, página 121

<sup>16</sup>Leia a história da formiga no capítulo 5, página 123.

com repelente, a conclusão deve ser que as formigas não são  $2D$ , como parecem, a primeira vista.

## 4.5 Por que somos prisioneiros da $3D$ ?

Da mesma forma como o retângulo plano tem medida zero relativamente ao universo  $3D$ , a energia de qualquer objeto que porventura exista em  $2D$  será nula relativamente ao nosso Universo  $3D$  impossibilitando qualquer tipo de comunicação que no fundo é transmissão de energia.

O mundo  $2D$  ou o mundo  $1D$  não podem se comunicar com o nosso universo  $3D$ .

Pela mesma razão, nós que existimos num universo  $3D$  não podemos nos comunicar com eventuais seres em  $4D$  porque somos inaudíveis para eles uma vez que nossa energia é zero em  $4D$ . Eles podem se comunicar conosco porém a parte do sinal deles que chegar até nós tem medida zero (deles) e, obviamente, distorcido conseqüentemente sem qualquer significado, portanto é impossível novamente qualquer comunicação de eventuais seres  $4D$  conosco.

Somos assim prisioneiros da  $3D$  e somente a Matemática é que nos consegue levar além desta prisão, entretanto, o transporte, direto para dimensão infinita é muito mais fácil... e mais fácil entendermos a dimensão infinita, sobretudo porque já não tentamos fazer interpretações geométricas... ou tentamos, algumas vezes, mas com uma *geometria abstrata*.

A razão de porque somos prisioneiros da  $3D$  se encontra em nossa medida, temos medida zero relativamente  $nD$  com  $n \geq 4$  e tudo que estiver em  $2D, 1D$  não pode nos alcançar pois são *conjuntos de medida zero*, com *energia nula* relativamente a nós.

## Capítulo 5

# Um exemplo da quarta dimensão

Neste capítulo vou fazer uma simulação de um fenômeno da quarta dimensão atuando na dimensão três. Por um lado este capítulo parece contradizer o capítulo 4. Como temos massa insuficiente, a nossa retenção (filtragem) das ondas energéticas de dimensão quatro, é distorcida, como é que podemos visualizar um fenômeno da quarta dimensão?

Na verdade é impossível ultrapassar a barreira dimensional usando meios físicos. Ou melhor, o que nos chegar vem distorcido, se vier de uma dimensão maior, ou impossível de perceber (devido à massa nula) se vier de uma dimensão menor.

O que vou fazer neste capítulo é uma interessante e intrigante aplicação de um belo teorema do Cálculo, o *teorema da função implícita*. Este teorema

- usa uma função  $F$  cujo gráfico se encontra num espaço  $nD$ ;
- e nos mostra como podemos a partir da interseção do gráfico  $\text{graf}(F) \cap (n-1)D$ , portanto um conjunto que se encontra num espaço  $(n-1)D$ ;
- fazer uma interpretação de um objeto de um espaço  $nD$ , que é  $\text{graf}(F)$ .

Mas sem dúvida, este capítulo tem que ser lido no espírito do restante do livro, como uma agradável (espero) ficção científica com objetivo pedagógico de conceitos da Matemática e da Física. Afinal, ciência também pode ser usada para laser.

## 5.1 Fluxo de água

Vou usar a água fluindo de uma fonte como suporte experimental para as idéias que desejo desenvolver neste capítulo. Há dois tipos de fluxos de água a ser considerados e apenas um deles me interessa para construir a idéia que desejo.

1. A “folha d’água” quando um açude sangra por cima da parede, este caso não me interessar aqui!
2. o fluxo d’água que cai de um recipiente com borda circular, este vai ser o material com que vou trabalhar.

O segundo caso é o que aparece na foto (5.1) página 95,

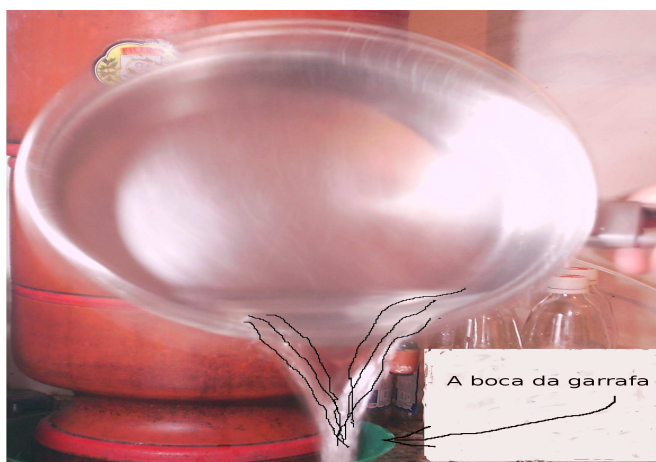


Figura 5.1: O fluxo d’água caindo de um recipiente com borda circular com as curvas do fluxo desenhadas à mão pelo autor.

São duas situações bem diferentes e bem conhecidas. Vou me concentrar no segundo caso.

Se você quiser derramar um líquido qualquer de uma panela circular para uma garrafa de vidro cuja boca não seja muito grande, sabe que precisa adaptar a velocidade do fluxo de tal forma que o ponto onde se reúnem as “curvas” no fluxo do líquido fique exatamente na boca da garrafa. Depois deste ponto as “curvas” dentro do fluxo voltam a divergir, mas, a partir daí o recipiente, a garrafa, contém esta dispersão e o líquido segue para dentro da garrafa.

Este “ponto” se chama *de inflexão* e o exemplo prático mostra a importância deles.

Qualquer alteração na velocidade do fluxo do líquido e o ponto de inflexão se altera sendo quase certo que o líquido sai fora da garrafa. Você está “rodando” um *sistema dinâmico*.

Seria interessante repetir esta experiência, que você já executou centenas de vezes, mas agora para observar o que estou dizendo acima, em particular “reconhecer” o ponto de inflexão que você já viu estas centenas de vezes, sem se preocupar de que se tratava de um fenômeno matemático, acontecendo ali, na sua frente, um *sistema dinâmico simples*, na cozinha de sua casa, mas agora para ver e estar ciente, do ponto de inflexão em movimento.

Todo estudante de Cálculo está acostumado a encontrar pontos de inflexão:

- primeiro estudando curvas e seus gráficos quando se dá uma mudança de curvatura, figura (5.2), página 97,
- Posteriormente, nos gráficos de superfícies quando os pontos de inflexão recebem o nome de “pontos de sela” que

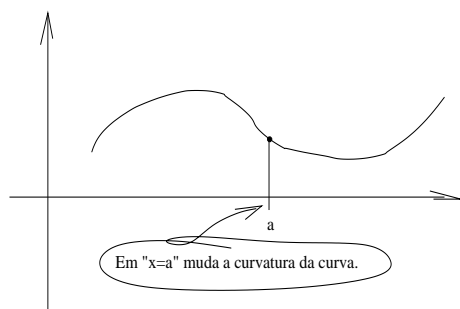


Figura 5.2: No ponto de inflexão muda a curvatura

são a generalização dos pontos de inflexão. O gráfico, (5.3) página 97, foi feito com `gnuplot` com a seguinte sucessão de comandos:

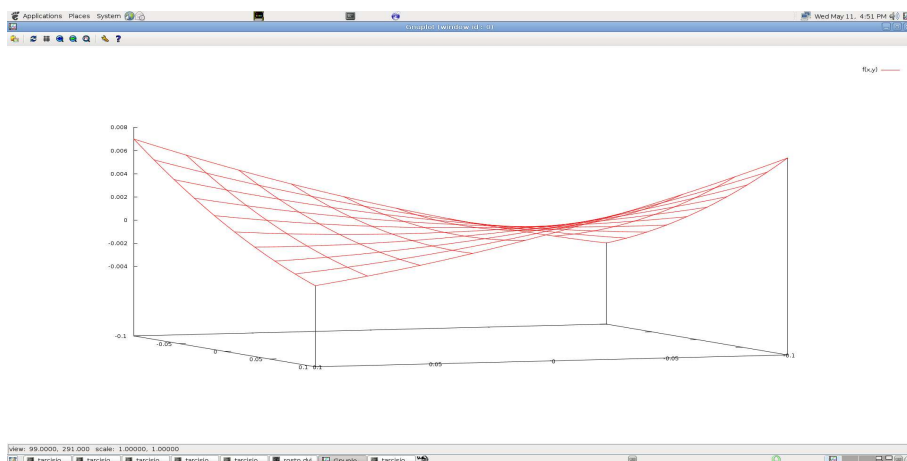


Figura 5.3: Um ponto de sela com `gnuplot`

```
pow(x,n) = x**n;
f(x,y) = pow(x,2) -3*x*y + pow(y,2);
set xrange [-5:5]; set yrange [-5:5];
plot f(x,y);
pause -2 'aperte enter para terminar'
q
```

que lhe basta copiar no terminal do `gnuplot` para ter uma visão muito melhor do que lhe posso mostrar aqui impresso, por exemplo, você pode rodar o gráfico ou aplicar-lhe um zoom com alguns movimentos do ratinho. Se você não tiver `gnuplot` instalado, na bibliografia, [?], você pode ver como fazer. `gnuplot` é gratuito.

Nos *pontos de inflexão*, e *ponto de sela* é um tipo deles, há mudanças de comportamento.

- Agora estou identificando um “ponto de inflexão” no fluxo do líquido onde também há uma mudança de comportamento. Primeiro, o líquido induzido pela borda circular onde se encontrava originariamente a massa d’água, se aglutina em um certo “ponto”. Se não houvesse um recipiente, logo abaixo deste ponto, devido à resistência do ar, o fluxo do líquido entraria em dispersão parte dele se transformando em gotas que é *outro tipo de alteração do comportamento* do líquido produzido pela resistência do meio, o ar, em que ele está se movendo.

É uma experiência simples que faz parte do dia-a-dia doméstico e que tem múltiplos aspectos interessantes, tudo absolutamente do seu conhecimento, exceto, muito possivelmente, que você nunca tomou consciência dos aspectos matemáticos envolvidos. Deixe-me retornar ao “ponto de inflexão” da massa de água e ao meu objetivo com a *forma inversa do teorema da função implícita*.

O *teorema da função implícita* é um *teorema de existência* coisa que agrada muito aos matemáticos inventar. Mostramos que *existe alguma coisa* e depois fica o problema de um construir um exemplo... mas problemas são alimento que os matemáticos

precisam. Fora de brincadeira, os teoremas de existência, embora em geral muito difíceis, porque abstratos, são apoio essencial até mesmo em construções computacionais: eles são uma garantia de que vale a pena construir um programa, apenas não podem garantir que o programa será capaz de produzir um resultado, mas isto é *outra questão*.

### 5.1.1 Visão intuitiva do teorema da função implícita

Vou descrever o *teorema da função implícita* usando a metodologia de exemplos. O meu objetivo é uma formulação, pouco habitual, diferente da que é apresentada pela maioria dos livros de Cálculo, mas adaptada à linguagem que vou usar em seguida.

É comum se enunciar este teorema considerando uma superfície, por exemplo

$$z = F(x, y); \text{ uma superfície, } \mathcal{S} \quad (5.1)$$

$$F(x, y) = c; \text{ uma curva em } \mathcal{S} \quad (5.2)$$

A equação (2) representa a interseção de duas superfícies a primeira é  $\text{graf}(F)$ , o gráfico de  $F$ , e a segunda é um plano paralelo ao plano  $XOY$ , dizemos um plano com altura  $c$ , porque passa no ponto  $\vec{C} = (0, 0, c)$ .

$$\begin{aligned} z &= F(x, y); \\ z &= c; \end{aligned}$$

No capítulo 0 vou usar uma linguagem que nos liberta da prisão tridimensional típica da Geometria, quando chamarei os objetos geométricos de *variedades* com um adjetivo para caracterizar a dimensão deles.

- Uma *superfície* será uma *variedade de dimensão dois* e
- uma curva será uma *variedade de dimensão um*.

As equações (1) e (2) descrevem duas *variedades*. A curva, a *variedade de dimensão 1*, se encontra dentro da *variedade de dimensão dois*, ela é a interseção das duas *variedades* de dimensão dois, a superfície  $\mathcal{S}$  e o plano  $z = c$ .

A *curva* está dentro da *superfície*  $\mathcal{S}$  mas também está dentro do plano que a intercepta, portanto é uma curva plana que tem uma imagem fiel, sua projeção no domínio de  $F$ , chamada *curva de nível  $c$* , porque é a imagem da curva plana que está dentro do plano que passa na altura  $c$ .

plano é também uma superfície.

Eu vou me referir às duas curvas:

- a curva na superfície  $\mathcal{S}$  a que vou chamar de “*curva espacial*”;
- e a curva no domínio de  $F$  a que vou chamar com seu nome habitual, “*curva de nível  $c$* ”.

Logo vou fazer uma observação que vai justificar porque preciso me referir às duas curvas.

### Observação 13 (Uma regra prática) *A dimensão de uma variedade*

*Entre as equações (1) e (2) há um salto de dimensão. A superfície é uma variedade de dimensão dois, imersa no espaço geométrico tridimensional, uma variedade de dimensão três, e eu disse que  $F(x, y) = c$  é um curva, uma variedade de dimensão 1.*

*No capítulo 4 eu falei de dimensão como é comum se falar em Álgebra Linear. Agora preciso de um “algoritmo simples” para calcular a dimensão das variedades definidas com expressões “algébricas”:*

$$z = F(x, y); F(x, y) = c;$$

*O que torna estas duas variedades diferentes é, uma convenção, na segunda considere  $z = c$ , uma constante.*

*As letras  $a, b, c$ , as primeiras letras do alfabeto, representam para nós constantes. Nem sempre esta “convenção” é levada à sério, mas existe e está em vigor!*

*Quer dizer que em “ $z = F(x, y)$ ” há três variáveis e em “ $F(x, y) = c$ ” há duas variáveis.*

*O “algoritmo” de que falei conta o número de variáveis, subtrai um, para determinar a dimensão.*

- $z = F(x, y)$  tem três variáveis, é uma variedade de dimensão dois - uma superfície, o nome geométrico.
- $F(x, y) = c$  tem duas variáveis, é uma variedade de dimensão um - uma curva, também tem um nome geométrico.

Logo mais adiante vou lhe mostrar um exemplo em que este algoritmo não funciona! O objetivo não é o de convencê-lo de que Matemática seja difícil, mas quero que você entenda que a Matemática não é a ciência exata que se costuma propalar. Fazemos um uso grande de métodos heurísticos, mas preferimos não reconhecê-los... Tem excessões em Matemática e este caso é uma excessão das mais simples.

Se a função  $F$  for diferenciável, continuamente, tiver derivadas parciais contínuas, é possível calcular a equação da reta tangente ao gráfico da *curva espacial*,  $F(x, y) = c$ , no ponto  $(a, b, F(a, b))$ , mas é mais fácil calcular a equação da reta tangente<sup>1</sup> ao gráfico da *curva de nível*  $c$  que passa no ponto  $(a, b, 0)$  no domínio de  $F$ .

Há uma imprecisão na linguagem, observe a forma precisa de falar seria: “a curva  $\{(x, y, z); F(x, y) = c\}$ ”. Falar de forma mais simplificada torna a Matemática imprecisa, falar de forma “precisa” torna a Matemática complicada...

A figura (5.4), página 102, mostra uma reta tangente ao gráfico da curva  $F(x, y) = c$  no ponto  $(a, b, F(a, b))$ , e você também a pode interpretar como sendo o gráfico da reta tangente à *curva de nível*  $c$ , são dois gráficos idênticos, um é uma translação do outro.

As contas devem levá-lo a uma compreensão exata. Neste bloco de “contas”, estou usando a *derivada implícita* de  $z = F(x, y)$  que vai me conduzir ao modelo dos objetos tangentes:

---

<sup>1</sup>Aqui se encontra o primeiro momento em que preciso das duas curvas, a *curva espacial* e a *curva de nível*  $c$ . É simples escrever a equação de uma reta em dimensão dois, e vou usar um artifício para simplificar a equação da reta em dimensão três.

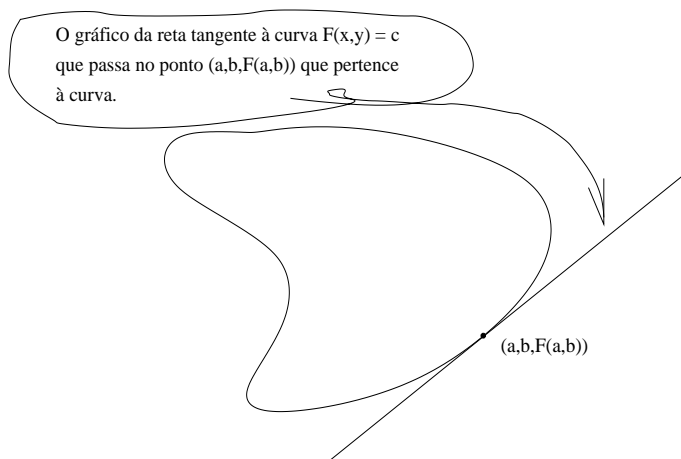


Figura 5.4: A reta tangente à curva no ponto  $(a, b, F(a, b))$

$$z = F(x, y) \xrightarrow{\mathcal{D}} dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} dx := x - a; \\ dy := y - b; \\ dz := z - c; \end{cases} \quad (5.4)$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b)}; \quad B = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b)}; \quad c = F(a, b); \quad (5.5)$$

$$A(x - a) + B(y - b) = z - c \quad \text{a equação do plano tangente} \quad (5.6)$$

$$A(x - a) + B(y - b) = 0 \quad \text{a equação de uma reta tangente} \quad (5.7)$$

$$B \neq 0 \Rightarrow m = -\frac{A}{B} \quad \text{ou então} \quad A \neq 0 \Rightarrow m = -\frac{B}{A}; \quad (5.8)$$

**Observação 14 (infinitesimal)** *Os místicos infinitesimais*

O número  $m$ , se puder ser calculado, é coeficiente angular da reta da reta tangente. A explicação é simples: a derivada produz o modelo dos objetos tangentes, os símbolos,  $dx, dy, dz$  que permaneceram, por mais de um século, dentro de uma nuvem de mistérios, sob o nome de infinitesimais, finalmente encontraram uma explicação simples: são variáveis em um espaço tangente<sup>2</sup> que podem ser traduzidas com as diferenças que

<sup>2</sup>Esta explicação vai além do escopo deste livro, uma vez que ela ocupa um lugar natural em um livro sobre Geometria Diferencial. Considere-a no seu sentido ingênuo como aparece em cursos de Cálculo: “fazendo  $dx$  igual a  $x - a$ ”.

surgiram na equação (4). Observe o uso da notação computacional “:=” que às vezes é usada em Lógica com mesmo sentido que eu estou usando aqui, ela se traduz com a frase muito comum nos textos de Matemática “fazendo  $dx$  igual a  $x - a$ ”. Esta não é uma igualdade, é uma substituição, estamos usando “coisa” em lugar de “outra coisa!” Isto não é simples, mas também não é complicado, apenas merece mais tempo e reflexão que não pode encontrar lugar neste texto.

- Na equação (3) calculei a derivada *implícitamente*;
- Na equação (4) substitui  $dx, dy, dz$  por diferenças usando os elementos do ponto de tangência  $(a, b, c) = (a, b, F(a, b))$  como subtraendos;
- Na equação (5) encontrei as constante  $A, B$  usando as derivadas parciais calculadas no ponto  $(a, b)$  que são as inclinações do plano tangente ao gráfico da superfície  $z = F(x, y)$  no ponto  $(a, b, c)$ , relativamente aos eixos cartesianos;  $c = F(a, b)$ .
- Na equação (6) escrevi a equação do plano tangente ao gráfico da superfície  $\mathcal{S}; z = F(x, y)$  no ponto  $(a, b, F(a, b))$ .
- Na equação (7) escrevi a equação da reta tangente<sup>3</sup> ao gráfico da curva de nível  $c$ . Escrever equações de retas em dimensão maior do que dois é mais complicado! Uma forma simples de fazê-lo, neste caso, é indicar que passo de uma, contida em  $2D$  para outra, contida em  $3D$ , com uma translação sendo a constante de translação o vetor  $\vec{C} = (0, 0, c)$

$$\text{curva espacial} = \text{curva de nível} + \vec{C} \quad \begin{matrix} \text{porque} \\ (a, b, 0) + \\ \vec{C} = \end{matrix} \quad (5.9)$$

$$\{(x, y); A(x - a) + B(y - b) = 0\} \text{ tangente à curva de nível } (5.10)$$

$$\{(x, y, z); A(x - a) + B(y - b) = 0; z = c\} \text{ translação } (5.11) \quad \begin{matrix} (a, b, c) \end{matrix}$$

---

<sup>3</sup>Esta equação pode ser interpretada como sendo a equação de um plano, então  $z$  é qualquer e a reta é a interseção entre este plano e o plano dos eixos coordenados  $XoY$ , quando  $z = 0$ .

A equação (11) representa a translação pelo vetor  $\vec{C}$  da tangente calculada na equação (10). Outra forma (mais complicada de interpretar) é interseção dois planos, o plano perpendicular ao ao plano  $XOY$  passando pela tangente à curva espacial com o plano  $z = c$ .

$$(x, y, z) = (x, y) + \vec{C} \text{ quando } z = c$$

- Na equação (8) fiz referência ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da curva de nível, vista como função  $y = f(x)$  ou  $x = g(y)$  conforme seja mais “interessante”.

A tradução de “interessante” vem de uma necessidade geométrica, vou escolher  $y = f(x)$  ou  $x = g(y)$  condicionado ao gráfico, *que seja o gráfico de uma função*: uma reta paralela ao eixo dos valores não pode cortar o gráfico mais de uma vez.

O teorema da função implícita nos diz que pode existir uma das duas funções

$$y = f(x) \text{ ou } x = g(y);$$

As possibilidades são:

- $B \neq 0$   $y = f(x)$  cuja reta tangente é  $y = P(x)$  quando  $B = \frac{\partial F}{\partial y}|(a, b) \neq 0$  ou
- $A \neq 0$   $x = g(y)$  cuja reta tangente é  $x = Q(y)$  quando  $A = \frac{\partial F}{\partial x}|(a, b) \neq 0$  ou
- $B = A = 0$  uma situação de indecisão que tem ser estudada com mais cuidado, quando  $A = B = 0 \dots$  *um detalhe técnico de que vou, cuidadosamente, me afastar neste livro.*

Assim, o teorema da função implícita é um teorema de existência, não sabemos qual é a equação  $y = f(x)$ , ou  $x = g(y)$ , mas sabemos algo muito mais importante:

- que  $f'(a) = m$ , o coeficiente angular da reta  $y = P(x)$  tangente ao gráfico da curva no ponto  $(a, b)$  ou
- que  $g'(b) = m$ , o coeficiente angular da reta  $x = Q(y)$  tangente ao gráfico da curva no ponto<sup>4</sup>  $(a, b)$ .

### 5.1.2 Partindo da reta tangente

Observe a figura (5.5) página 105, o meu objetivo agora é o

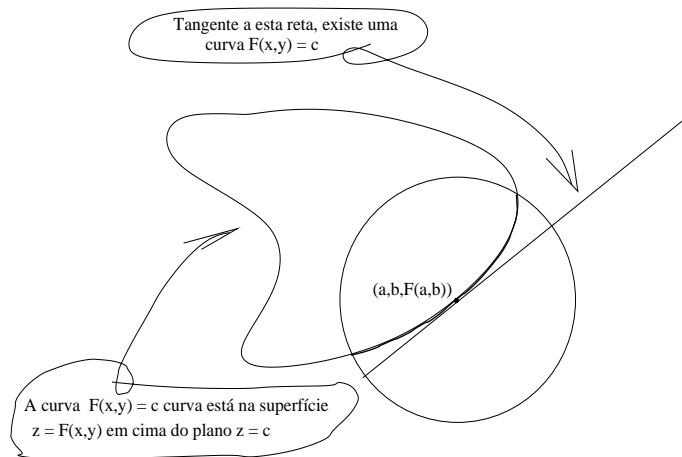


Figura 5.5: Tangente a esta reta, *existe* uma curva  $F(x, y) = c$

*caminho reverso*: tenho uma reta, ou melhor dizendo, *tenho um coeficiente angular*, relativamente a um referencial escolhido<sup>5</sup>.

Tangente a esta reta, existe uma curva  $F(x, y) = c$ . Na figura (5.5) aparece um círculo centrado no ponto  $(a, b, F(a, b))$ , e eu preciso explicar o seu objetivo .

Ele está colocando em evidência uma região de precisão, dentro deste círculo a reta tangente representa uma *aproximação aceitável* ao ser aceita como substituto da curva.

<sup>4</sup>O valor de  $m$  não é o mesmo nas duas equações, eu deveria ter escrito  $n$  no segundo caso. Verique isto!

<sup>5</sup>Sem um referencial não existe inclinação, velocidade...

Este *caminho reverso* é a solução de uma *equação diferencial*, tenho um coeficiente angular,  $m$ , o coeficiente angular de  $y = P(x)$ , a reta tangente ao gráfico de  $y = f(x)$ . Esse é um pedaço da curva<sup>6</sup>  $F(x, y) = c$  que eu procuro.

Observe o *salto de dimensão* que desejo dar, da dimensão 1, a curva  $F(x, y) = c$  para a dimensão dois, chegar à superfície  $z = F(x, y)$ , este é o uso reverso do Teorema da Função Implícita que anunciei.

### Observação 15 (A síntese) *Sintetizando o programa*

*Tudo que fiz até agora, com esta construção do teorema da função implícita, pode ser sintetizado nas seguintes afirmações. Se você compreender este programa está preparad@ para entender o que lhe quero mostrar com a corrente d'água que ilustra o início deste capítulo, o salto da dimensão três para a dimensão quatro.*

- *Tenho uma reta o que me permite chegar a uma curva a ela tangente.*
- *Esta curva vem de uma superfície, é a interseção de duas superfícies, no exemplo construído acima uma das superfícies é um plano paralelo a  $XOY$ , o plano de nível  $c$ ,  $z = c$ .*
- *Sempre que houver uma curva no plano (ou no espaço) então tem uma superfície que ela determina, é uma condição de fronteira para a superfície. É a solução de uma equação diferencial.*
- *unicidade e condição inicial As soluções das equações diferenciais, em geral, são múltiplas, a superfície pode não ser única. Você aprendeu isto em Cálculo I, no cálculo de primitivas, que é o primeiro exercício de solução de equações diferenciais. Mas também você aprendeu que existe uma constante de integração que, em equações diferenciais, é chamada de condição inicial. Dada uma condição inicial, existe uma única primitiva (no Cálculo I).*
- *Para curvas (nas equações diferenciais do Cálculo I) bastava um ponto, uma condição inicial, para determinar de forma única a primitiva.*
- *unicidade e condições na fronteira Para superfícies, variedades de dimensão 2, (nas equações diferenciais mais avançadas<sup>7</sup>) é preciso uma curva, que agora se chama uma condição de fronteira, para determinar de forma única a solução.*

<sup>6</sup>Ou da reta tangente ao gráfico de  $x = g(y)$ , como já observei acima. Vou me fixar numa linguagem, para não estar com estas duas incômodas opções o tempo todo.

<sup>7</sup>No folclore matemático as denominações algumas vezes são estranhas, as *equações diferenciais mais avançadas* se chamam *equações à derivadas parciais* e as equações mais simples, do tipo aparecem em Cálculo I, se chamam *equações diferenciais ordinárias*. Entenda “ordinárias” como você quiser. . .

A equação que desejo introduzir é uma transformação da equação (3). Observe a transformação acontecendo

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \quad (5.12)$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (5.13)$$

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad (5.14)$$

Resolver esta equação diferencial<sup>8</sup>, (13), significa encontrar  $P, Q$  satisfazendo as equações (14). Algumas vezes pode ser muito difícil mas nestes casos a saída são as *soluções aproximadas* que em muitos casos são fáceis de produzir.

Em suma, sabemos resolver estas equações. Então vou assumir a atitude típica do matemático: vou supor que sei resolver e vou em frente. Este método sempre funciona, e é tão prolífico que está sendo usado largamente na arte de fazer programas. É assim que construímos as teorias.

- Então, partimos da equação (13) para encontrar a função  $F$ .
- Adaptando a linguagem aos meus objetivos, parti da equação (13) para encontrar uma superfície, que neste texto assume a expressão  $z = F(x, y)$ .
- Melhor: quero partir de uma curva, *uma condição de fronteira*, para encontrar uma superfície: partir de uma *variedade* de dimensão 1 para obter uma *variedade* de dimensão dois. Guarde esta forma de falar que vou precisar no próximo parágrafo quando irei voltar para o fluxo da água: uma *variedade* de dimensão três!

---

<sup>8</sup>Apesar de aparecerem derivadas parciais, esta equação é classificada como uma *equação diferencial ordinária* porque suas soluções são variedades de dimensão 1. Esta seria a forma de separar os dois tipos (mencionados na outra nota de rodapé) de equações diferenciais.

## 5.2 Mais um salto de dimensão

A massa de água fluindo do depósito com borda circular que aparece na imagem (5.1) página 95, é uma variedade de dimensão três e o *método prático* que apresentei é inútil para fazer este cálculo porque esta variedade não está definida por uma expressão “algébrica” onde haja variáveis para serem contadas. Vou fazer um raciocínio heurístico para descobrir qual pode ser sua dimensão: Como a posso ver, então não é bidimensional, objetos bidimensionais tem energia, massa, zero, insuficiente para que eu, prisioneiro da terceira dimensão, os possa perceber. Tem que ser tridimensional ou talvez pertença a um objeto de dimensão mais elevada. É disto que vou tratar agora. . .

Pode ser a interseção visível de uma variedade de dimensão  $4D$  “entrando” em nosso espaço. Pode ser a interseção visível de uma variedade de dimensão 4 entrando em nosso espaço. Observe que o nosso espaço  $3D$  é uma região magra de um espaço  $4D$  o que torna muito pouco provável que uma variedade (não linear) de dimensão 4 tenha interseção não vazia com o nosso espaço  $3D$ .

### Observação 16 (Dinâmico e estático) *O dinâmico oposto ao estático*

- *O fluxo d'água na figura (5.1) é um fenômeno do espaço-tempo. A coluna d'água derramada da panela está em movimento, uma situação dinâmica na qual entra a variável tempo. Vou evitar este complicante usando a fotografia que tem o condão de parar o tempo, simplifico o problema, elimino uma variável que muito agrada aos físicos que adoram pensar que vivemos num espaço de dimensão quatro<sup>9</sup>, o espaço-tempo. Na figura foi obtido um valor deste fenômeno fixando, com a máquina fotográfica, um valor  $t_0$  do tempo.*

*Eu vou ignorar o tempo na sequência, considerá-lo apenas acrescentaria uma variável, ou melhor, alteraria toda a história de uma dimensão.*

---

<sup>9</sup>O problema que estou estudando ficaria no tempo-4D... apenas um pouquinho mais complicado!

- *A questão do tempo não é um detalhe sem importância como lhe pode parecer que eu esteja dizendo! Considerar o tempo, ou não, altera entre fenômenos dinâmicos (para os quais o tempo conta) ou estáticos. A massa d'água na figura (5.1), considerado o tempo, podia ser entendida como uma onda eletromagnética em que as linhas que aparecem na figura (que eu desenhei manualmente) podiam ser interpretadas como distintas frequências na onda eletromagnética. Você pode ver assim que eu teria aqui outro livro para escrever, mas o espaço teria dimensão infinita! seus elementos poderiam ser as comunicações telefônicas, entre outras manifestações eletromagnéticas. Frequência, nas ondas eletromagnéticas, é caracterizam as distintas dimensões do espaço.*
- *Então, fixando em um valor do tempo, tenho diante de mim uma variedade de dimensão três que pode ser a interseção com nosso espaço de uma variedade de dimensão maior do que três. Eu vou supor que isto esteja acontecendo para não perder o direito de continuar escrevendo . . .*
- *Eu disse acima que o nosso espaço 3D é uma região “magra” de um espaço 4D o que tornaria muito pouco provável que uma variedade (não linear) de um espaço 4D tivesse interseção com o nosso espaço 3D. Mesmo se fosse linear ainda teria pequena probabilidade, porque vivemos num conjunto convexo do espaço que fica inteiramente dentro de um dos semi-espaços determinado por uma variedade linear, ainda aqui a probabilidade de interseção é ínfima! Portanto tem um erro implícito na afirmação anterior. Observe que eu poderia ter editado o texto retirando a imprecisão, mas acho que esta observação sobre a imprecisão lhe dará mais compreensão do assunto e sobre tudo irá alertá-la para procurar outras imprecisões. Alguns erros eu sei onde estão, mas haverá outros que não foram intencionais. Divirta-se procurando meus erros, e me avise!*

Quando duas variedades se interceptam pode haver uma queda de dimensão na interseção resultante<sup>10</sup>.

Então a massa d'água, como a vemos, é de dimensão três, mas posso imaginar que seja a parte visível de uma variedade de dimensão 4, a sua interseção com a variedade em que vivemos.

Vou seguir em frente com esta suposição. Estou vendo uma variedade de dimensão três e vou usar o *teorema da função implícita* para descobrir a forma que pode ter a *variedade de dimensão quatro* cuja interseção estou vendo.

Você pode esperar uma situação mais complexa:

---

<sup>10</sup>Por exemplo, a interseção de dois planos pode resultar numa reta. A interseção de duas variedades de dimensão dois resultando numa variedade de dimensão 1, uma curva.

- não tenho mais uma expressão “algébrica”;
- a dimensão é maior, tem mais contas para fazer;

O método para retornar à variedade de dimensão maior passa pelas equações 3 - 8. Vou voltar a escrevê-las dentro do objetivo que tenho agora. Com uma aparente contradição: como escrever uma expressão, usando variáveis, se não tenho nada formal?

Este é um dos métodos da Matemática, não nos importamos muito com a falta de equações, supomos que elas existam e adiamos a questão. Provavelmente, uma das frases mais usadas em textos de Matemática é ”Vamos supor que...”. Na pior das hipóteses, em algum momento na frente, *uma programadora* vai nos resolver este problema lendo medidas e as transformando numa tabela que irá funcionar como a equação que não temos<sup>11</sup>.

Preciso do modelo para nele inserir as medidas, vou então usar  $F$ , uma função de quatro variáveis e começar a fazer as contas. Tecnicamente eu teria que usar a quinta variável, mas como ela vai ser “calculada<sup>12</sup>” no ponto  $t_0$ , é uma constante, e eu vou me permitir simplificar o problema considerando apenas quatro variáveis. Da mesma forma como existe uma “*licença poética*” que os literatos usam para criar uma realidade adequada para os seus contos, nós, os cientistas temos certas “licenças” para criar uma realidade mais fácil para os nossos modelos.

---

<sup>11</sup>Ainda tem uma questão! uma tabela, um programa podem representar uma equação que não temos. Falta um *link* nesta idéia: onde ficariam as variáveis?

<sup>12</sup>A fotografia representa um cálculo, e isto não é brincadeira, dela podemos depois retirar medidas.

$$\omega = F(x, y, z, w) \stackrel{D}{\Rightarrow} d\omega = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial w} dw \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} dx := x - a; \\ dy := y - b; \\ dz := z - c; \\ dw := w - d \\ d\omega := \omega - e \end{cases} \quad (5.16)$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b,c)}; \quad B = \frac{\partial F}{\partial y}|_{(a,b,c)}; \quad C = \frac{\partial F}{\partial z}|_{(a,b,c)}; \quad D = \frac{\partial F}{\partial w}|_{(a,b,c)} \quad (5.17)$$

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) + D(w - d) = \omega - e \quad \text{hiperplano} \quad (5.18)$$

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) + D(w - d) = 0 \quad \text{var. lin. tangente} \quad (5.19)$$

$$m_1 = -\frac{A}{D}; \quad m_2 = -\frac{B}{D}; \quad m_3 = -\frac{C}{D}; \quad \text{coeficientes angulares parciais} \quad (5.20)$$

$$P(x, y, z) = e + m_1(x - a) + m_2(y - b) + m_3(z - c) \quad (5.21)$$

Eu fiz exatamente o que se encontra na equação (3), agora tenho quatro variáveis para descrever uma variedade de dimensão três, uma *hipersuperfície* do espaço  $4D$ , você observa uma “coluna d’água que se encontra parada pela fotografia” o que me levou de volta para um fenômeno *estático*, tridimensional.

Vou analisar cada linha da matriz de cálculos. Antes uma observação geral quanto a nomenclatura. Você encontra aqui duas palavras novas: *hipersuperfície*, *hiperplano*.

São duas *invenções* que levaram algum tempo para serem bem afinadas, como outras definições em Matemática que nem sempre surgiram claras. Outras até mesmo desapareceram, caíram em desuso porque não teriam mesmo sentido, ou representavam um erro que com o tempo foi corrigido<sup>13</sup>.

Discutindo as equações (15)- (21) .

<sup>13</sup>Como os infinitesimais que aparecem nos livros de Cálculo da década de 50 do século passado e foram varridos pelas formas diferenciais de Cartan. Era um conceito muito querido que, infelizmente, aparece no título do famoso livro de Cálculo de Courant.

- Na equação (15) apliquei derivação implícita à equação de uma função de 3 variáveis, cujo gráfico é uma *hipersuperfície* de um espaço  $D4$ ,  $\mathbf{R}^4$ , uma variedade, possivelmente não linear, de dimensão 3. Gráficos de funções são hipersuperfícies dos espaços em que elas se encontram.
- Na equação (16) escrevi as diferenças que vou usar em lugar dos diferenciais no modelo obtido com a derivação implícita.
- Na equação (17) calculei as constantes que representam os coeficientes angulares parciais de uma *variedade linear de dimensão 3*, um hiperplano de  $4D$ , tangente ao gráfico de

$$\omega = F(x, y, z, w)$$

no ponto  $(a, b, c, d, F(a, b, c, d))^{14}$ .

- Na equação (18) escrevi a equação do hiperplano tangente<sup>15</sup>.
- Na equação (19) escrevi a equação duma variedade linear de dimensão 3, conte as variáveis. Ela é tangente à massa d'água que estava caindo da panela, uma imagem congelada pela fotografia, na figura inicial do capítulo e, por definição de “tangencia”, as duas variedades têm que ter a mesma dimensão. A figura (5.4), página 102 seria equivalente a que

---

<sup>14</sup>É possível simplificar a linguagem, podemos chamar de  $X$  a um ponto arbitrário do espaço  $4D$  deixando mais “limpa” a linguagem:

$$\omega = F(X) \text{ e o ponto } (X, F(X)); X = (x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4$$

nos permitindo de falar de forma parecida com a que se usa em Cálculo I.

<sup>15</sup>Conte o número de variáveis, 4, é uma variedade de dimensão 3 no espaço  $4D$ . Como é linear, é um *hiperplano*. Ele é tangente a *hipersuperfície*  $\omega = F(x, y, z, w)$  no ponto  $(a, b, c, d, F(a, b, c, d))$ .

não consigo fazer aqui, porque sou prisioneiro da terceira dimensão.

Observe as dimensões: Na figura (5.4) na página 102 você vê uma reta (variedade de dimensão um) tangente a uma curva (variedade, não linear, de dimensão um),

Aqui a massa d'água caindo da panela, e congelada pela fotografia, é uma variedade não linear de dimensão três cuja tangente, em um ponto definido  $(a, b, c, d, F(a, b, c, d))$ , é uma variedade linear de mesma dimensão, 3.

Não é possível criar uma interpretação gráfica, a não ser artística para este processo de tangência. Neste momento é melhor se tornar independente de interpretações gráficas e procurar entender abstratamente o que se passa. É a forma de sair da prisão tridimensional em que vivemos, este processo abstrato nos deixa independentes da dimensão a ser considerada.

- Na equação (20) estou me preparando para chegar ao *teorema da função implícita*. Calculei os coeficientes parciais quando reduzi a dimensão na equação (19), eliminando uma variável.
- Na equação (21) escrevi a equação de uma função linear afim,  $P(x, y, z)$ , um polinômio do primeiro grau cujo gráfico é tangente à massa d'água no ponto  $(a, b, c, d, F(a, b, c, d))$ . O *teorema da função implícita* me garante que existe uma

função<sup>16</sup>  $w = f(x, y, z)$  tal que

$$m_1 = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b,c)}; \quad m_2 = \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b,c)}; \quad m_3 = \frac{\partial f}{\partial z}|_{(a,b,c)}; \quad (5.22)$$

esta função é a massa d'água que vejo cair da panela, é a interseção do gráfico da função  $\omega = F(x, y, z, w)$ , uma *variedade não linear* de dimensão 4, com um espaço 3D.

O teorema da função implícita me diz que

$$\omega = F(x, y, z, f(x, y, z)) \Leftarrow \frac{\partial F}{\partial w} \neq 0; \quad (5.23)$$

Quer dizer que, fazendo experimentos para calcular as derivadas parciais de  $f$  eu posso descrever  $\omega = F(x, y, z, f(x, y, z))$  escapando da prisão tridimensional em que me encontro! Os experimentos acima mencionados são medidas feitas na fotografia, por exemplo, verificando intensidade de luz a partir de fontes (de luz) colocadas ao longo das direções dos eixos.

### Observação 17 *Por que hiperplanos*

- *Deixe-me voltar para o espaço 3D, nele temos objetos de “tamanho máximo”, (leia, “dimensão máxima”) ainda contidos no espaço, os planos e as superfícies. Um plano é uma superfície, é um destes objetos maximais dentro de um espaço 3D.*
- *Em 3D dizemos que um plano é uma variedade linear de dimensão dois e chamamos de superfícies quando não pudermos dizer que é linear. Algumas vezes dizemos claramente: uma variedade não linear de dimensão dois. Esta forma de falar é pouco usada em 3D porque temos nomes geométricos para fazer referências a estas variedades, a nossa prisão, linguística, tridimensional.*
- *Em 4D as variedades de dimensão máxima, ainda estritamente contidas no “espaço 4D”, não podem ser chamadas de “planos” ou “superfícies”, porque a dimensão deles é três. foi assim que surgiram os nomes hiperplano, hipersuperfície.*

---

<sup>16</sup>Estou usando a simplificação de linguagem de que falei anteriormente, o teorema da função implícita faz referência a que a derivada de pelo menos uma das variáveis tem ser diferente de zero para que ela possa aparecer no denominador.

- *Depois se sentiu a necessidade de encontrar nomes para as variedades de dimensão máxima, ainda estritamente contidas em  $5D$ . Os dois conceitos, hiperplano, hipersuperfície foram reciclados para agora significarem uma variedade de dimensão  $n - 1$  do espaço  $nD$ . Um conceito relativo! Somente tem sentido falar de hiperplano, hipersuperfície quando você disser em que dimensão se encontram<sup>17</sup> estas variedades.*
- *Tecnicamente, um plano é um hiperplano de  $3D$ , e uma superfície é uma hipersuperfície de  $3D$ , mas obviamente é inútil falar assim. Estou usando estes dois exemplos para ajudá-lo a compreender os dois conceitos. A primeira vista pode parecer uma complicação inútil a definição de hiperplanos e hipersuperfícies. A verdade é que eles existiam e estavam pouco claros, apenas foram reciclados e hoje precisamos deles para falar algumas vezes de forma relativa. O gráfico, de qualquer função é uma hipersuperfície do espaço em que ela estiver contida. No caso de uma função,  $f$  de uma variável,  $\text{graf}(f)$  é uma hipersuperfície do espaço  $2D$ , como as retas são os hiperplanos deste espaço.*

*Observe a importância deste novo conceito, dimensão máxima de um subespaço ainda contido no espaço:*

- *as retas são os hiperplanos de  $2D$ , dividem o espaço,  $2D$  em duas regiões disjuntas, dois semi-espacos;*
  - *os planos, são os hiperplanos de  $3D$ , dividem o espaço,  $3D$  em duas regiões disjuntas, dois semi-espacos;*
  - *Os hiperplanos de  $nD$ -espaço, são variedades de dimensão  $n - 1$  que dividem o espaço,  $nD$  em duas regiões disjuntas, dois semi-espacos. Um hiperplano é uma hipersuperfície e algumas hipersuperfícies podem dividir o espaço em duas regiões disjuntas, mas não todas.*
- Hiperplano e coeficiente angular *Vou comparar com as retas e mostrar-lhe a importância dos hiperplanos. Hiperplano é apenas nome que damos aos subespaços maximais de um determinado espaço. Não importa qual seja a dimensão, eles dividem o espaço em duas regiões disjuntas que foi como os gregos conceberam a reta como um ente infinito que dividiria o plano onde ela estivesse contida em dois semi-planos e permitiria a criação do conceito “coeficiente angular”: uma classificação das retas do plano. Você pode ver assim a importância do conceito de hiperplano. Eles vão classificar as hiperdireções dentro dos espaços, como as retas determinam as direções dentro dos planos. Isto é pouco visível com retas e planos, como estamos excessivamente habituados com retas e coeficientes angulares, vou pular para uma dimensão maior!*
  - Hiperplano e coeficiente angular *os planos são os hiperplanos de um espaço  $3D$ . Em Álgebra Linear se criou um conceito que permite certos cálculos, e que é*

---

<sup>17</sup>Quero dizer: com que dimensão você estiver trabalhando...

*muito importante quando estivermos lidando com espaços de dimensão infinita<sup>18</sup> a co-dimensão, os hiperplanos tem co-dimensão 1, porque lhes falta apenas uma dimensão para completar todo o espaço onde eles estiverem contidos. Observe a simplificação que isto produz: não podemos falar da “direção de um plano”, certo? mas podemos falar da direção do co-espaço do hiperplano que é uma reta! Como as retas “tem coeficiente angular” isto nos permite falar da direção de um plano usando a direção do seu co-espaço. Eu já lhe disse, é muito mais fácil lidar com espaços de dimensão infinita do que com um espaço de dimensão 4...*

- *É altamente improvável que uma variedade não linear de dimensão quatro tenha alguma interseção a nossa variedade, é como esperar encontrar uma agulha num palheiro. Consequentemente a minha visão da massa d’água, caindo da panela, como a invasão de uma variedade de dimensão quatro em nosso espaço é, provavelmente, um simples delírio ficcional. Mas, nos cabe o direito a um delírio ficcional!*

---

<sup>18</sup>Melhor dizendo, se fossemos lidar com espaços de dimensão infinita, o que não irei fazer neste livro. Estou resvalando para detalhes técnicos que são secundários dentro do espírito do livro, apenas para quebrar o receio contra os hiperplanos.

# Capítulo 6

## Paradoxos e pseudo paradoxos

Neste capítulo final vou retomar alguns tópicos que discuti nos anteriores usando agora todas as informações adquiridas. Inclusive farei alguma correções da visão descrita em capítulos anteriores que agora é possível com o acumulado das informações obtidas.

É certo que ainda há erros, estou aprendendo muito ao escrever este livro. Um dos temas neste capítulo é a correção do entendimento de Carl Sagan sobre a relação com objetos de mundos com diferentes dimensões, mas espero que a leitura do livro venha torná-lo capaz de encontrar os meus próprios erros. Se isto acontecer eu atingi o meu objetivo.

### 6.1 Aquecimento global da Terra

O Homem<sup>1</sup>, mexeu com alguns componentes da atmosfera terrestre com a emissão de gases que aumentam consideravelmente o calor irradiado pelo Sol.

Resultado: vem aumentando sensivelmente a temperatura média do globo, dissolvendo-se os “gelos eternos” e aumentando

---

<sup>1</sup>Para falar a verdade, o sistema capitalista irresponsável.

a quantidade de água em estado líquido nos mares, e aumentando temperature média da água do mar.

Vários *sistemas dinâmicos* vão ter o seu comportamento alterado e nós não temos a menor idéia das consequências que disto virá. Poderemos sobreviver num ambiente bastante alterado ou poderá a vida na Terra sucumbir. O aumento das águas nos oceanos, a altura do Equador pode diminuir a rotação terrestre aumentando os dias e portanto o calor nestas regiões. Poderão então aumentar as chuvas, os rios, e as florestas voltarem a crescer e a longo prazo poderemos retornar a uma situação de resfriamento?

É por isto que eu gosto de comparar o aquecimento global com o pêndulo, que é um exemplo simples de sistema dinâmico, embora a sua equação matemática não seja nada simples! O pêndulo do tempo recebeu um impulso que o está retirando do seu compasso normal, mas, desaparecendo a força que altera o seu comportamento, ele vai retornar ao movimento habitual, apenas o relógio (o clock) desta alteração pode não ser compatível com o nosso *ciclo de vida*. Eu vou falar do *ciclo* de um sistema dinâmico na próxima seção.

Enquanto se mantiver o alto calor e o alto nível das águas, quem poderá sobreviver ? quantos morrerão? Este “ciclo” de que falo merece um comentário especial, ele diz respeito aos ciclos<sup>2</sup>, dos diversos sistemas dinâmicos em iteração. Eu vou falar disto na próxima seção.

Não seria melhor um esforço imenso para evitar de entrar naquilo que desconhecemos?

---

<sup>2</sup>clock

## 6.2 O clock de um sistema dinâmico

A maioria dos fenômenos da Natureza se explicam como *sistemas dinâmicos*: a economia, o movimento dos planetas, o comportamento de um motorista no tráfego, comportamento relativo “presa-predador” de uma coleção qualquer de animais de um sistema, (incluindo aí o homem).

Mas quando compararmos dois *sistema dinâmicos*, é preciso colocar em sintonia os relógios de ambos para podermos compreender as relações entre eles.

Por exemplo, o relógio do Universo planetário tem “segundos” que valem para o nosso relógio biológico “milhões de anos” isto nos dá sensação de “estabilidade” que absolutamente não tem o Universo.

Estou falando de um dos conceitos fundamentais da teoria dos *sistemas dinâmicos*, habilidosamente iniciada por Poincaré e seus contemporâneos<sup>3</sup>, “*estabilidade*”. Em palavras simples, “estabilidade” é propriedade de manutenção das características de um sistema nas vizinhanças de um ponto. Por exemplo, parece que na Terra, depois da noite sempre virá o dia. Dia e noite para a terra somam 24 horas. A pergunta é “*até quando?*” porque depois de um “segundo” do relógio do Universo esta “estabilidade” pode se perder. Inclusive se Homem produzir alterações significativas no equilíbrio planetário o nosso dia poderá passar a ter mais horas, por exemplo, com o aquecimento da atmosfera, a massa líquida de água poderá se concentrar levemente no Equador, e, para manter o a energia cinética, a rotação terrestre pode diminuir...

Sistemas dinâmicos é um técnica, um modelo matemático,

---

<sup>3</sup>Jules Henri Poincaré,(1854-1912)

que evoluiu muito depois de sua criação por Poincaré. É uma teoria especializada, mas é possível ter-se uma compreensão ingênua da mesma sem entrar em detalhes técnicos. É este é o objetivo aqui. Os próximos exemplos completam o anterior dentro deste objetivo.

Se lhe parecer distante exemplo dos planetas, pense n'outro: Para o relógio biológico de um inseto, de uma mosca, um segundo do seu relógio é para o dela alguns milhares de segundos. Uma mosca nasce e morre entre duas gripes que você venha a ter e guardaria, se tivesse alguma especie de consciência, *no sentido que nós entendemos consciência*, a impressão que sua saúde é de uma “estabilidade” invejável, coisa que você sabe que não é verdadeiro.

Eu estou usando a palavra “segundo” com sentidos diferentes em duas situações. Melhor seria usar uma palavra mais técnica, *cíclo*. A frase ficaria então “um *ciclo de vida*, para o homem, corresponde a alguns milhares de *ciclos de vida* para uma mosca”.

Aliás, a informação que uma mosca passaria para a outra<sup>4</sup> seria a da existência de seres eternos, os homens, que vivem 30.000 dias em média enquanto que uma mosca vive um dia. Para o clock do sistema dinâmico “*mosca*” o sistema dinâmico “*homem*” é uma constante, imutável.

O estudo da estabilidade de sua saúde pode levá-lo a pelo menos reduzir os impactos das gripes... ou talvez conseguir programá-las, para curtí-las com calma, nos fins de semana...

---

<sup>4</sup>Recentemente um pesquisador americano concluiu, experimentalmente, que os corvos guardavam lembrança de pessoas que teriam adentrado sua região, sendo capazes de repassar esta lembrança para outros corvos.

## 6.3 Podemos beber um refrigerante sem abrir a garrafa

Esta pergunta interessante aparece num livro de Geometria Analítica ver [9].

Para entender melhor esta pergunta vou fazer uma aproximação da realidade, analisar o caso de uma formiga presa numa garrafa bidimensional.

Aproximação ou loucura, o leitor pode vir a dizer. Estamos falando de uma garrafa bidimensional !

Vamos lá, perca os preconceitos e nos acompanhe na abstração que faremos. Não se esqueça de que é abstração matemática a única forma de nos libertar de nossa prisão tridimensional. Vale a pena o esforço.

### 6.3.1 A formiga presa na garrafa bidimensional

A figura (fig. 6.2) página 123, lhe mostra uma “garrafa bidimen-

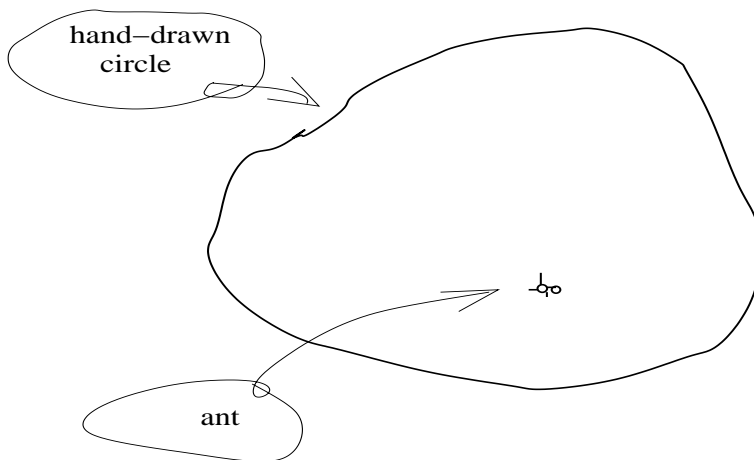


Figura 6.1: Formiga presa numa garrafa bidimensional

sional”, um círculo desenhado à mão, com uma formiga presa.

O círculo seria uma garrafa bidimensional.

Vou começar fazendo uma agressão ecológica, abstratamente. Pego uma dessas latas de spray aerosol (cuidado com a camada de ozônio) cheias com repelente.

Com o repelente eu desenhei à mão o “círculo” que você pode ver na figura (fig. 6.2). Dentro do círculo preendi uma formiga que agora não poderá ultrapassar as paredes feitas com repelente. Ela circula dentro do disco e quando se aproxima da parede feita com repelente se afasta ficando a passear *no interior* da garrafa.

Criei, assim, uma divisão do plano em duas regiões estanques, no entender da formiga, ela está presa no interior da garrafa não podendo passar para o resto do plano.

Mas da mesma forma como a preendi, agora vou pousar de salvador, para a formiga, atitude comum de certos tipos inescrupulosos... Pego uma pequena palha dobrada e a coloco, passando pela terceira dimensão, sobre a parede da garrafa<sup>5</sup>, com uma das pernas da palha perto da formiga que agora sobe pela palha, passando por cima da parede de repelente e ficando livre para percorrer o resto do plano (ou voltar para dentro da garrafa).

Você pode ver isto na figura (6.2), pagina 123.

A formiga passou pela terceira dimensão afim de sair de sua prisão bidimensional.

Repito! Se trata de uma aproximação. Nem uma folha de papel é um plano: um objeto bidimensional. Nem a formiga é um ser bidimensional. Nem a parede de ”spray” é bidimensional.

Tudo é tridimensional. Mas podemos entender que cons-

---

<sup>5</sup>Esta é uma forma de falar de prisioneiros da terceira dimensão, a forma correta de falar é simplesmente “passando pela terceira dimensão”, não há o conceito de “sobre a parede”...

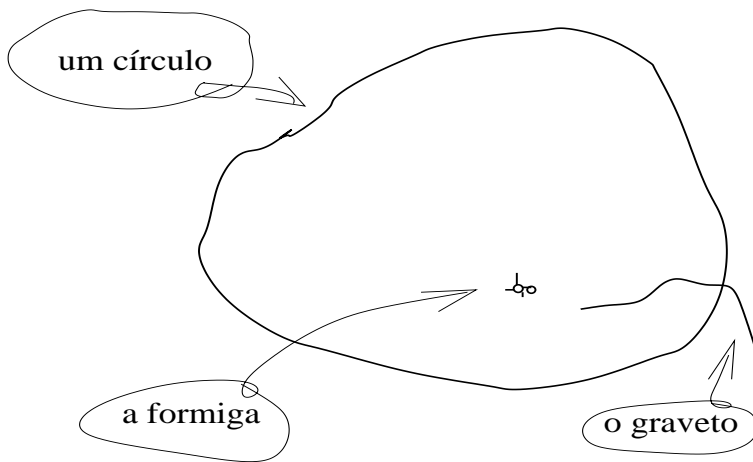


Figura 6.2: Formiga presa numa garrafa bidimensional

truímos uma garrafa bidimensional em que prendemos uma formiga bidimensional que para sair da garrafa passou pela terceira dimensão, como uma aproximação da realidade!

É este o método que os autores do livro de Geometria Analítica encontraram para burlar os super-mercados, introduzir um canudinho via quarta-dimensão na garrafa inteiramente fechada para o nosso espaço mas inteiramente aberta para a quarta-dimensão.

Infelizmente não seria possível burlar os super-mercados porque não haveria força tridimensional que conseguisse fazer o líquido tridimensional passar pela quarta-dimensão. Porque a nossa energia tridimensional é de medida zero em qualquer  $4D$ -espaço.

Também a *formiga bidimensional* não teria qualquer idéia do que poderia ser a palha. Tudo que *formiga bidimensional* veria a sua frente seria uma parede imensa, ocupando todo o seu universo bidimensional. Considerando os tamanhos relativos que nos são oferecidos pela figura (fig. 6.2), tudo que a formiga

poderia fazer seria andar a volta da imensa parede e portanto ter uma pálida idéia do seu formato geométrico a partir da interseção da palha com o seu mundo bidimensional.

A formiga tem medida zero relativamente á palha, é isto que a impede de fazer uso da mesma. Obviamente, se houvessem formigas bidimensionais.

## 6.4 Uma parede pode ser atravessada ?

Fizemos algumas simulações no capítulo 3 em que objetos de dimensão  $n$  atravessaram “mundos” de dimensão  $n - 1$ , o caso do *mundo unidimensional*, a reta, atravessada pelo disco ou pelo triângulo. Esta é uma cópia de simulação feita por Carl Sagan, consulte [?, Sagan]

Fisicamente seria isto possível ?

A resposta é **sim !**, porém destrutivamente. E a justificativa vem do ponto de vista de medida (e conseqüentemente também de energia ou massa).

O disco  $2D$  que atravessa a reta (o mundo  $1D$ ) tem infinitamente mais massa do que a reta. Invertendo a ordem do discurso, a reta tem massa zero (medida zero), relativamente ao disco  $2D$ , e conseqüentemente não lhe oferece nenhuma resistência à passagem. Porém o mundo unidimensional ficará definitivamente quebrado no ponto de passagem, com duas “paredes” cada uma delas delimitando uma semi-reta, no caso em que cada um dos habitantes tenha permanecido em raios diferentes, cada um deles em uma semireta, separados, definitivamente, pela “parede”.

Mais do que isto, o disco  $2D$  ou seus possíveis ocupantes seres  $2D$  nem sequer podem perceber a existência da reta que

lhes “barra” o caminho.

A simulação no capítulo 3 está, inclusive, errada, porque, depois da passagem do disco pelo mundo  $1D$  este ficou cortado definitivamente e portanto o diálogo entre os dois seres  $1D$  que alí reportamos poderia não ter existido. Porque, depois da passagem do disco o universo deles ficou rompido e se cada um tiver ficado em semi-espacos diferentes, terão ficado para todo o sempre incomunicáveis.

Da mesma forma quando uma garrafa  $3D$  se irromper atravessando um mundo  $2D$  o faz sem absolutamente nada sofrer, nem um arranhão sequer por que o plano tem energia (ou massa) zero relativamente à garrafa  $3D$  e portanto lhe oferece resistência zero.

Posso corrigir a afirmação anterior. De facto a “garrafa” ao atravessar o espaço  $2D$  pode ter sofrido arranhões ou ter perdido pedaços... mas tudo isto de medida zero, portanto insensível para o corpo  $3D$  o que justifica dizer que nada perdeu.

Mas a garrafa ao passar rompe o plano deixando um buraco que corresponde a nossa visão  $3D$ , só não podemos vê-lo! Nem podemos ver planos.

Para os seres  $2D$ , habitantes do plano, uma parede imensa ocupando todo o Universo surgiu e destruiu parte do seu mundo definitivamente. Somente andando a volta da região destruída será possível perceber o seu formato circular se o tamanho relativo da parede e do ser bidimensional permitir esta “viagem” em volta da parede. A parede pode ser de proporções gigantescas para o bidimensional que simplesmente não veja como viajar a sua volta.

Um objeto de dimensão  $n$  pode atravessar impunemente uma região de dimensão  $n - 1$ . No mundo  $(n - 1)D$  atravessado ficam

estragos irreversíveis do formato que o objeto  $nD$  tiver (a sua interseção com o universo  $(n-1)D$ ) porque a energia (ou massa) do universo  $(n-1)D$  é zero relativamente ao objeto  $nD$ .

## 6.5 A formiga bidimensional e a palha

Para a formiga bidimensional a palha colocada sobre a parede de repelente aparece como uma parede dominando todo o espaço bidimensional em que ela vive.

Ela não pode perceber a forma da palha e nem sequer que a palha ultrapassa a parede formada pelo repelente.

A formiga, de fato, não é bidimensional. A formiga, de fato, não é um bidimensional. Como a formiga **não é bidimensional** ela pode usar a palha como uma ponte e ultrapassar a parede que a mantém presa.

## 6.6 Corrigindo a visão de Carl Sagan

Criticar um autor como Carl Sagan não significa desmerecer o seu trabalho. Todos podemos errar, ou melhor, *todos erramos muitas vezes durante a nossa vida*. Somente não erram aqueles que atravessarem a existência sem absolutamente nada fazer, e isto é coisa que absolutamente não se pode dizer de Carl Sagan cuja energia e atividade se refletem no facto de que, mesmo depois de morto, seus livros continuam sendo vendidos e suas atividades têm repercussão.

Em seu livro, *Cosmos*, [11], Carl Sagan descreve a interseção de uma maçã com a terra dos planos.

Sagan diz que os planos, (bidimensionais), veriam as interseções. Como já observamos antes, tudo que eles veriam, seria uma pa-

rede imensa, tomando todo o seu universo, surgindo-lhes a frente e não poderiam ter sequer a idéia de que se tratasse de uma interseção circular, pois cada um deles estaria vendo apenas uma parte da parede. Obviamente, aqui há a questão de ordem de grandeza, a relação de tamanho entre os “planos<sup>6</sup>” e a interseção. Eu estou supondo que os planos são muito pequenos frente à interseção.

Andando a volta da parede poderiam ver-lhe o aspecto circular interrompendo o “mundo dos planos”. A simples tangência da maçã com o “mundo dos planos” não seria um ponto e sim uma fina parede, como uma reta, ou uma torre imensa, dominando todo o “horizonte” do “mundo dos planos”. Observe que eu mesmo não tenho uma linguagem adequada para expressar esta visão e estou usando palavras que traduzem a minha prisão tridimensional. Ou melhor dizendo, a falta de experiência típica de um longo cativo. . . Tente imaginar o que aconteceria com a interseção de objeto de dimensão quatro interferindo em nosso espaço. Nós veríamos uma imensa parede encerrando uma parte do universo porque a interseção seria tridimensional. Para os “planos” seria uma visão bidimensional, como a formiga no “círculo” que desenhei com o repelente, uma parede bidimensional que para nós é uma linha, um pedaço de curva.

Infelizmente está errada a interpretação de Sagan dos efeitos para o “mundo dos planos” dos saltos de uma maçã invasora. Eles não seriam círculos aparecendo, e desaparecendo, e sim paredes imensas rebentando o seu mundo de forma definitiva. Não seriam círculos aparecendo e desaparecendo, mas paredes crescendo e rasgando definitivamente a região por onde passassem.

O nosso universo  $3D$  é um fino *hiperplano* do universo  $4D$ , da

---

<sup>6</sup>Sagan chama o povo que vive nos planos de “planos”.

mesma forma como o “mundo dos planos” é um fino<sup>7</sup> *hiperplano* relativamente ao nosso mundo tridimensional.

De forma análoga, uma nave espacial  $4D$  que entrasse em nosso espaço  $3D$  teria a aparência de uma enorme parede tomando todo o nosso horizonte, E não haveria retrações, por onde ela passasse rebentaria o nosso mundo e nos emparedaria do lado de fora do buraco feito por ela. irreparavelmente. Consequentemente, os chamados discos voadores, ou objetos não identificados, não podem pertencer a uma outra dimensão uma vez que eles nada quebram e nem deixam vestígios em suas passagens entre nós a não ser dentro da imaginação dos que os viram. . .

## 6.7 Corrigindo a história da laminação

Agora tenho subsídios para falar corretamente o que não tinha no primeiro capítulo. Num certo ponto eu afirmei, na experiência da laminação da folha de plástico, que se pudessemos continuar com este processo indefinidamente, chegaríamos a uma folha de plástico de dimensão dois.

Há vários erros neste parágrafo, e é instrutivo discutí-los, como é também instrutiva a dualidade que estou mantendo, deixando um erro lá atrás para vir corrigí-lo aqui no final. Serve para que você entenda que a construção do conhecimento passa pelo enunciado de “teoremas errados”, involuntariamente. Ninguém pretende errar propositadamente. Neste caso o erro era natural, naquele ponto ainda não era possível desenvolver o pensamento que vou agora apresentar.

Um dos erros: *a possibilidade de uma máquina tridimensio-*

---

<sup>7</sup>Aproveite para criticar o autor... a palavra “fino” é um pleonasmo, aqui!

*nal produzir um resultado bidimensional.* Todo o funcionamento da máquina se encontra prisioneiro da terceira dimensão. Todas as suas etapas são tridimensionais. Seja o feixe de laser ou qualquer outro dispositivo de corte, são instrumentos tridimensionais. Nada disto pode produzir um resultado de outra dimensão. É uma prisão! Na linguagem da matemática, *é uma estrutura fechada*, todas as operações tridimensionais produzem resultados<sup>8</sup> tridimensionais.

Outro erro: *folha de papel* é o nome de um objeto tridimensional, não existem folhas de papel bidimensionais. Um erro de semântica. Aqui estamos diante de uma linguagem que é própria de nossa dimensão e facilmente incorremos em erros linguísticos ao nos referimos a objetos de outra dimensão que não podem ter mais as características dos objetos com que convivemos.

Um exemplo simples é o de uma variedade com formato estelar. Tais variedades se definem pela propriedade *de terem um ponto central do qual partem raios em qualquer direção inteiramente contidos dentro da variedade até atingir a fronteira.* Ao cortar um espaço de dimensão "menor" pode produzir duas variedades disjuntas, conseqüentemente perdendo a propriedade "estelar". Este é um exemplo simples que mostra que propriedades se perdem na interseção com uma dimensão "menor", enquanto que a interseção com uma dimensão maior tem *zero propriedades, zero massa, zero energia!*

Obviamente, eu usei a minha imaginação matematicamente treinada para ver o resultado desta interseção que é impossível de ser vista pelos meus olhos tridimensionais.

---

<sup>8</sup>Mas a Matemática pode fazer operações intra-dimensionais, definir operadores num espaço de dimensão  $n$  cujo resultado (imagem) esteja num espaço de dimensão menor ou maior do que  $n$ , domine a Matemática para se livrar da prisão tridimensional.

## 6.8 O tamanho relativo

A visão que temos do Universo depende do nosso relógio biológico, como um sistema dinâmico que somos mas também depende do nosso tamanho relativo aos outros fenômenos ou objetos que nos rodeiam.

É possível fazer uma comparação entre estes dois parâmetros, *relógio* e *tamanho* com *frequência* e *amplitude* os dois parâmetros básicos das ondas. Quando ouviamos som usando como *mídia* as fitas magnéticas, era possível alterar a velocidade das bobinas das fitas alterando assim a frequência do som. Hoje não temos acesso aos discos e não podemos fazer o mesmo. Mas certos programas de controle sonoro permitem que alteremos a velocidade com que os arquivos são lidos para assim alterar a frequência com que escutamos o som. Isto pode fazer com a voz de adulto fique semelhante a de uma criança, ou vice-versa. Ou pode tornar o som inteiramente incompreensível, este é o núcleo da questão: os tamanhos relativos, a sintonia.

- Você pode aplicar zoom em uma foto para perder de vista o seu conteúdo, uma imagem gigante é tão difícil de entender como uma imagem minúscula;
- você pode alterar a frequência a ponto de não poder mais reconhecer o ritmo da música;

Para que a informação fique clara ela tem que se encontrar dentro dos parâmetros adequados, *bem sintonizada*. Dizendo em outras palavras: existe um tamanho certo, uma frequência certa, para que o nosso cérebro reconheça um determinado fenômeno, som ou imagem.

Por exemplo, o Homem imaginava que a terra era um disco plano, porque ao estendermos os olhos à nossa volta, a impressão que temos que é a de que vivemos numa imensa região plana que contém elevações (montanhas) ou depressões (lagos, rios). Não podemos, com a nossa visão concluir que vivemos num planeta arredondado.

Somente o conhecimento abstrato é que pode nos alargar o horizonte e nos permitir de entender as coisas que não podemos ver. O que eu posso ver é um mundo plano, mas olhando para a Lua eu fiquei convencido de que a Terra teria o formato de uma batata.

Assim é que, uma bidimensional, defrontada com uma parede que repentinamente aparecesse em seu mundo, possivelmente não conseguiria ter uma idéia de sua forma, se ela fosse agigantada para o seu tamanho, como a Terra é agigantada para nós.

## 6.9 Formatação

Para justificar que retas têm dimensão 1 eu desenvolvi diversas idéias que começaram por uma formatação do espaço, no capítulo 3 e depois no capítulo 4. Vou voltar a discutir esta questão nesta seção. Preciso “formatar” o espaço de trabalho para nele criar um sistema de referência. Importa pouco se este espaço de trabalho é um sistema de arquivos ou uma estrada, preciso estabelecer referências para saber como vou distribuir os dados que podem ser caminhões trafegando. . .

Pela mesma razão formatamos discos para usar num computador. O que significa isto? Parece que esta história é um pouco velha! Mas na verdade não é, apenas uma maioria dos usuários

de computador acham que tudo já vem feito! Não sabem o que estão perdendo! Ao usar um disco pela primeira vez, é necessário formatá-lo, usar um programa que vem com o *sistema operacional* que vai escolher um ponto inicial no disco, uma origem, e a partir dela irá dividir o disco em trilhas. Este programa vai colocar um *sistema de arquivos* no disco. É o mesmo que eu fiz anteriormente com a reta ou com o plano.

É semelhante ao seu uso de uma folha de papel em branco para escrever uma redação. Você deve traçar as linhas (pelo menos mentalmente) para saber como o texto irá ficar dentro do papel. Deve, dobrar uma pequena parte lateral do papel para estabelecer uma margem onde você não irá escrever<sup>9</sup>. O seu texto deverá ser dividido em parágrafos que irão transmitir a lógica do seu raciocínio para o leitor de sua redação, uma formatação de suas idéias. . .

Da mesma forma preciso *formatar* o plano ou o espaço  $3D$ , enfim, qualquer espaço em que for trabalhar, para estabelecer referências que me permitem a marcação de pontos, cálculo de distâncias enfim, uma *geometria*. É exatamente o mesmo que fazemos com um *sistema de arquivos* dum disco de computador!

### 6.9.1 Formatando a reta

Vou tornar mais concretas estas idéias da *formatação* repetindo um exemplo geométrico. Considere uma reta qualquer, faça um desenho para acompanhar o pensamento. Nela vou escolher um ponto, chame-o  $\underline{O}$ , a origem. Este ponto divide o *espaço*<sup>10</sup> em duas regiões disjuntas, duas semi-retas. Antes e depois da origem!

---

<sup>9</sup>Talvez sim, possivelmente você irá colocar observações na margem. . .

<sup>10</sup>Sim! o espaço, agora a reta é o *espaço*, o Universo!

E aí você se pergunta: e como vou saber o que é *antes* ou *depois* da origem ? Isto é uma questão de *convenção*, você é quem decide qual das duas semi-retas vem *antes* da origem, e naturalmente a outra vem *depois*. Mas existe um hábito, uma convenção, você de frente para o papel, a semi-reta à *direita* é considerada<sup>11</sup> a que vem *depois* da origem. É o conjunto dos números positivos.

Escolha!

When selecting which ray is coming before the origin you have chosen set of negative numbers of this line.

*Números negativos ? e a reta tem números?*

O conjunto dos números reais podem ser representados por qualquer reta, na figura em que eu fiz as minhas escolhas, (fig. 6.3) página 134,

Ao escolher a posição do número real 1, decidi que a semi-reta a que ele pertence é composta de todos os número positivos e portanto a outra contém os números negativos. Também escolhi um segmento de reta de *comprimento* unitário  $\overline{OI}$  determinado por dois pontos que representam  $\underline{0}$  e  $\underline{1}$ .

## 6.10 Psicologia e dimensão

Esta é uma aplicação que fica destoante neste capítulo final, no sentido de que não estou, aqui, discutindo nem completando

---

<sup>11</sup>E se você der uma rotação de 180 graus neste reta, vomo ficará a convenção? Isto para lhe mostrar a fragilidade da exatidão da Matemática! Apesar desta fragilidade podemos fazer um nave descer em Marte, usando a Matemática! Você pode continuar a contar com ela, mas não acredite que ela seja *exata*.

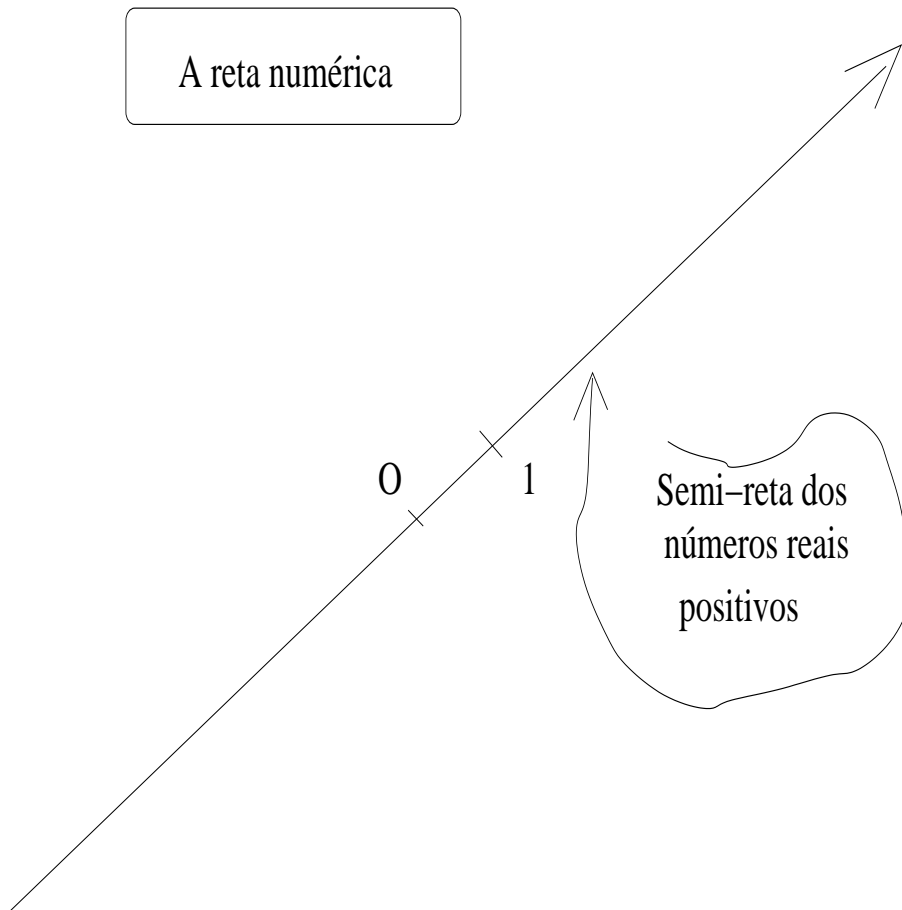


Figura 6.3: A reta numérica ordenada

nenhum dos assuntos já discutidos anteriormente. Estou entrando por uma nova seara na qual eu não sou nada mais do que um cidadão que tem o direito de pensar a respeito, mas sem conhecimentos técnicos ou especializados a respeito do assunto. De psicologia eu pouco passaria além de *amador*, entretanto, pior do que ser *psicólogo amador* é ser um *motorista amador* coisa em que estou metido todos os dias, eu e muitos outros milhões mais. Na bicicleta eu seria um profissional, ao volante eu sou um *perigoso amador*.

Já invadi a Física, vou agora invadir a Psicologia.

### Crianças e um desconhecido

Se você, leitor, tiver uns vinte anos, ou mais, já poderá ter tido a experiência que vou relatar e que é bem comum. Eu já passei por esta experiência diversas vezes. Passe por um grupo de crianças, crianças de três ou quatro anos. Se você for um desconhecido para este grupo de crianças, elas não irão perceber a sua passagem.

Se você lhes disser um “alô” rápido, elas não se lembrarão depois de que você lhes falou e possivelmente, se forem bem educadas lhe responderão, automaticamente, inconscientemente, com um cumprimento correspondente. Mas não ficará registrado em suas memórias que elas falaram com você.

Se algum adulto conhecido das crianças perguntar pela sua passagem por alí, elas provavelmente responderão em coro que *ninguém* assim descrito por alí passou. Elas não o viram! Você simplesmente não existe para elas. É como se você estivesse noutro espaço paralelo ao delas. Faça a experiência e verá que é assim. Isto ocorre com outros grupos etários também.

A justificativa é simples: a percepção se dá a partir de dados memorizados no indivíduo. O indivíduo compara o que percebe com dados memorizados e reconhece o externo a partir do que tiver memorizado. Como você não se encontra memorizado nas crianças, elas simplesmente não percebem a sua passagem por elas, a não ser que você insista o que mudaria o quadro do experimento aqui proposto.

Aquilo que não conhecemos pertence a uma dimensão distinta da nossa e simples foge a nossa percepção.

### Alguns animais e o ser humano

O descrevermos sobre as crianças pode ser comparado com “a *consciência* que alguns animais, ou seres vivos, tem do Homem: alguns deles simplesmente ignoram a presença do Homem.

Uma formiga irá reagir como se reconhecesse a sua existência, se você se atravessar no seu caminho, possivelmente irá ferroá-lo, ou simplesmente irá alterar o seu percurso ao encontrar um dedo seu no meio da trilha que ela vem seguindo. Experiências relatadas por um pesquisador americano sugerem o reconhecimento de pessoas que tenham adentrado seu habitat, por corvos, e inclusive da transmissão desta informação a outros corvos. Mas é uma informação limitada e se restringe ao significado de risco para a espécie que o invasor possa representar. A experiência relatada apenas indica que o pesquisador foi agressivamente monitorado ao retornar ao local, como possivelmente uma onça também o seria, apenas as onças não fariam registros deste monitoramento e o pesquisador, fez.

Mas a formiga não terá qualquer “*consciência*” da existência do ser humano. Talvez entre as formigas exista um conhecimento acumulado de que um certo tipo de odor representa um perigo, o odor do Homem. Mas isto será tudo que ela conhece deste tipo de ser que infesta o Universo em que elas vivem.

Nos somos uma informação de dimensão muito grande relativamente a elas. O mesmo se pode dizer da criança, relativamente aos adultos, conhecidos ou desconhecidos.

## 6.11 Variedades

Para falarmos livremente no contexto multi-dimensional é preciso estender a linguagem, criar novas palavras para descrever

os fatos que a nossa linguagem de *prisioneiros da terceira dimensão*, não consegue atingir.

Nós temos uma linguagem, e uma intuição, adquiridas pela nossa experiência  $3D$  que nos impedem de compreender facilmente os fatos de outras dimensões como já vimos nas discussões anteriores.

A geometria nos ensina que existem *retas, curvas, superfícies, sólidos, planos e o espaço*. O *espaço* é o Universo em que tudo está contido, é o final de tudo, e o limitante.

Mas o espaço da geometria é apenas um espaço  $3D$  que está contido em outros espaços de maior dimensão e assim a pobre visão da geometria nos corrompe. Para vencer esta limitação é preciso uma linguagem mais ampla que esta que aprendemos com a geometria.

A *Álgebra Linear* é uma das disciplinas da Matemática que desenvolve esta linguagem apropriada, a *Geometria Diferencial* é outra e a *Topologia* atinge um grau de liberdade imenso que permite se veja claramente um círculo na figura (fig. 6.2) página 123.

Eu não posso desenvolver estas disciplinas aqui, não é este objetivo deste livro, mas na bibliografia o leitor pode encontrar sugestões onde se desenvolver neste sentido, por exemplo, [10], que contempla a *Álgebra Linear* junto com *Sistemas Dinâmicos* e onde você poderá encontrar outras referências bibliográficas. É um livro que se encontra no nível de quem terminou um bom curso de Cálculo e também estudou *Álgebra Linear*.

### 6.11.1 Variedade

A palavra *variedade* foi criada para vencer a barreira dimensional.

*Variedade* quer dizer um *objeto do espaço* e lhe acrescentamos adjetivos, modificadores, que nos deixam entender as relações entre os objetos.

Por exemplo:

- Uma reta é uma *variedade linear de dimensão 1*
- Um plano é uma *variedade linear de dimensão 2*
- Um espaço  $3D$  é uma *variedade linear de dimensão 3* Você deve perceber que as variedades lineares são o tipo de objetos que os gregos entendiam como retas nas diversas dimensões.
- Uma curva é uma *variedade não linear de dimensão 1*. Eu deveria ter tido *é uma variedade possivelmente não linear de dimensão 1*, porque uma reta também é uma curva.
- Superfícies são *variedades dimensão 2*, os planos são as variedades lineares de dimensão 2. Uma superfície que não seja plana é *variedade não linear dimensão 2*.
- Os pontos são *0-variedades*. Observe a modificação na forma de falar. Algumas vezes dizemos apenas *n-variedade* em vez de dizer “uma variedade de dimensão  $n$ . As *variedades não lineares de dimensão zero* se confundem com as lineares: os pontos.
- O *espaço* da geometria é uma *variedade linear de dimensão 3*. Um espaço  $4D$  é uma *variedade linear de dimensão 4*.
- Um plano é um *hiperplano* de um espaço  $3D$ . Um espaço  $3D$  é um *hiperplano* de um espaço  $4D$  que por sua vez é um *hiperplano* de um espaço  $5D$ .

### 6.11.2 Hiperplano

A palavra “plano” encontrou uma extensão interessante: *hiperplano*.

*Hiperplano* significa a “maior” variedade linear contida no espaço que se estiver considerando. Já mencionei o conceito de em codimensão, deixe-me usá-lo aqui:

- Um *hiperplano* é um espaço de codimensão um.
- Os pontos são os *hiperplanos* das retas;
- As retas são *hiperplanos* dos planos;
- Os planos são *hiperplanos* dum espaço  $3D$ ;
- Um espaço  $3D$  é um hiperplano de um espaço  $4D$  no qual ele esteja contido.

Os hiperplanos dividem o espaço em dois semi-espacos, eles mostram assim qual é a direção de saída perpendicular do espaço... tente ver isto com um ponto e uma reta, é instrutivo para compreender a dificuldade de escapar para uma dimensão superior! E neste caso, digamos, estamos vendo tudo. . .

Considere um plano e selecione um ponto nele. Qualquer direção que se originar neste ponto lhe é perpendicular. Isto é provado por absurdo, simplesmente porque não pode ser diferente.

- Pontos dividem linhas retas em duas semiretas;
- As retas dividem os planos em dois semi-planos;

- Os planos dividem o espaço  $3D$  em dois semi-espacos  $3D$ ;
- Os espacos  $3D$  dividem os espacos  $4D$  em dois semi-espacos  $4D$ .

em suma, a palavra *hiperplano* tem um significado relativo, para sabermos qual a dimensão de um hiperplano temos que terminar a frase dizendo onde ele está. Dizendo de que espaco *a variedade* em questão é um *hiperplano*.

Se você ficar com um sentimento de que o livro não terminou, isto é um indicativo de que você percebeu a mensagem. Quero que você continue pensando e fique com a certeza de que eu sigo pensando e talvez nos encontremos n'outro livro ou n'alguma página na Internet. Seja bem vindo a entrar em contacto comigo pelo endereço

tarcisio@member.ams.org

# Referências Bibliográficas

- [1] Feynman, R Leighton, R. B., Sands, M *The Feynman Lectures on Physics* Vol I,II,III  
Addison-Wesley Publishing Company 5<sup>a</sup>ed. 1971
- [2] *Jefferson Lab*  
<http://education.jlab.org>
- [3] Richard F.W. Bader *Atoms and molecules*  
[http://www.chemistry.mcmaster.ca/aim/aim\\_0.html](http://www.chemistry.mcmaster.ca/aim/aim_0.html)
- [4] *gnuplot, um programa para fazer gráficos em 2D e 3D*  
<http://gnuplot.info>
- [5] O princípio da incerteza de Heisenberg
- [6] Guerra Junqueiro *A escola portuguesa*
- [7] Praciano-Pereira, T *Programas para Calculo em duas variáveis*  
<http://www.multivariado.sobralmatematica.org/programas/>
- [8] [http://en.wikipedia.org/wiki/Philosophi%C3%A6\\_Naturalis\\_Principia\\_Mathematica](http://en.wikipedia.org/wiki/Philosophi%C3%A6_Naturalis_Principia_Mathematica)
- [9] Genésio Lima dos Reis e Valdir Silva *Geometria Analítica Vetorial* Editora da UFGO - 1985

- [10] Hirsch, e Smale S. *Linear Algebra, differential equations and dynamical systems* - Academic Press
- [11] Carl Sagan *Cosmos*
- [12] Carl Sagan Foundation <http://www.carlsagan.com/>
- [13] Simmons, G.F.  
*Introduction to topology and modern analysis* McGraw-Hill - Book Company - 1963
- [14] Simmons, G.F.  
*Differential Equations with App. and Hist. Notes.*  
McGraw-Hill - Book Company - 1978
- [15] *Um página que traduz entre diversas linguas.*  
<http://www.ordlista.se/>
- [16] Stacy, David *Infinite Hotel*  
<http://scidiv.bcc.etc.edu/Math/InfiniteHotel.html>
- [17] xaos *Fractal zoom program*  
<http://xaos.sf.net>
- [18] *Wikipedia, a free enciclopedia*  
<http://en.wikipedia.org/wiki/>

# Índice Remissivo

- 4D, 114
- Álgebra Linear, 137
- água, 95
  - curvas no fluxo, 96
  - fluxo de, 95
- álgebra linear, 64
- área, 76, 80
  - integral, 85
  - Riemann, 85
- 5D, 115
- ação
  - reação, 10, 15
- aceleradores, 16
- aproximação, 5, 73, 83, 121
- aquecimento
  - atmosfera, 117
- aquecimento da atmosfera, 25
- assintótico
  - valor, 13
- astronauta, 10
- atmosfera
  - aquecimento, 117
- básicos
- caracteres
  - escrita, 72
  - elementos
    - químicos, 72
- círculo máximo, 10
- cardinalidade, 42
- cativeiro, 127
- clock, 118, 119, 130
- coeficiente angular, 67
- coeficiente linear, 67
- comprimento, 76, 79
- condição
  - de fronteira, 106
  - inicial, 106
- conhecimento, 133
- constante
  - de integração, 106
- convenção
  - constante, 100
  - em Matemática, 100
  - variável, 100
- cordas
  - teoria, xii
- cores, 3

- cores básicas, 3
- curva de nível, 100
- curva espacial, 100
- degenerado
  - segmento, 68
  - segmento de reta, 54
  - triângulo, 69
- densidade
  - relativa, 12
- derivada
  - implícita, 101, 103
  - modelo, 101
- diferencial
  - equação, 106
- dimensão, viii, x, xii, 64
  - calculo, 100
  - curva, 101
  - fractal, xi
  - infinita, xi
  - psicologia, 133
  - regra prática, 100
  - superfície, 101
  - variedade, 100
- dimensão n
  - nD, 115
- dinâmico
  - sistema, 25, 96, 117
- dx
  - dy,dz, 102
- EEl, 10
- elétrons
  - núvem, 16
- energia, ix, x
  - conservação, 11
- equação
  - diferencial, 106
  - solução aproximada, 107
- espacial
  - estação internacional, 10
- espectro, 3
- estação espacial, 10
- estabilidade, 119
- estados
  - da matéria, 22
- existência
  - teorema de, 99
- fatorial, 55
- ferramentas
  - caixa branca, 11
- figura
  - área, 80
  - átomo, 16
  - órbita, 33
  - aproximação, 87
  - dimensão infinita, xi
  - esfera unidimensional, 78
  - fluxo d'água, 95
  - formiga, 121, 123
  - fractais, 39, 40
  - geradores do plano, 70

- interseção, 54
- pegadas
  - ultra dimensão, 59
- ponto de inflexão, 97
- ponto de sela, 97
- racionais, 41
- reta
  - coef. angular, 66
  - reta numérica, 134
  - reta tangente, 102, 105
  - segmento gerador, 69
  - semiplanos, 45
  - semiretas, 43
- filtro, 3
- fino hiperplano, 128
- flúido
  - Sol, 34
- formatação, 73, 74, 79
  - referência, 131
- formiga
  - presa, 63
- fractais, 37
- fronteira
  - condição de, 106
- garrafa
  - aberta para  $4D$ , 123
  - fechada para  $3D$ , 123
- geometria, 132
- global
  - aquecimento, 117
- gnuplot, 97
  - comandos, 97
- gravidade, 10
- heurístico, 108
- hipótese, 22
- hiperplano, 111, 114, 115, 139
- hipersuperfície, 111, 114, 115
- inércia, 8–10
- infinitesimal, 102
- infinito, 42
- inflexão
  - curvatura, 97
  - ponto de, 96, 98
- informação, 67
- inicial
  - condição, 106
- internacional
  - estação espacial, 10
- Lavoisier, 12
- limite
  - situação, 54, 68
- linear
  - álgebra, 64
- luz
  - velocidade, 13
- magro, 62, 63, 90
- massa, 9
  - zero, 63

- matéria
  - estados, 22
- medida, xii, 35, 77
  - padrões, 77
  - propriedade aditiva, 84
- medida zero, 124
- molécula, 17
- nível orbital, 15
- núvem de elétrons, 16
- nebulas
  - teoria, 15
- Newton
  - Principia, 12
- padrão
  - área, 80
  - comprimento, 79
  - da verdade, 54
  - medida, 77
  - volume, 81
- paradoxos, xii
- película
  - definição, 17
- percepção, 133
- plano tangente, 102
- ponto
  - de inflexão, 96
  - de sela, 97
- ponto de inflexão, 96, 98
- prisma, 3
- psicologia
  - dimensão, 133
- quantidade de movimento, 9
- reação
  - ação, 15
- referência, 132
- referencial, 131
- refrigerante
  - beber, 120
- relativo
  - tamanho, 129
- representação
  - dos racionais, 38
- reta
  - equação, 103
- reta tangente, 102
- Riemann
  - integral, 85
- Rio de Janeiro, viii
- segmento de reta
  - degenerado, 54
- sela
  - ponto de, 98
- sistema dinâmico, 25, 130
- sistemas
  - dinâmicos, 119
- Sistemas Dinâmicos, 137
- situação limite, 54, 68
- Sol, 34

string

theory, xii

superfície, 100

tamanho relativo, 129

teorema

de existência, 98, 99

função implícita, 98, 99, 104

teoria

da relatividade, 12

nebular da matéria, 15

terreno

preço, 84

variedade, 99, 136, 137

de dimensão dois, 100

de dimensão um, 100

dimensão, 100

linear, 138

dimensão 1, 138

dimensão 2, 138

dimensão 3, 138

verdade

o padrão, 54

volume, 76, 81

xaos, 38

zero

massa, 63