Capítulo 7

Números Complexos

No esforço para resolver equações que nos tempos modernos se pode dizer que começa com Cardano, século 16, os matemáticos criaram aos poucos uma entidade estranha, chamada número imaginário, que apareceu como solução da equação do segundo grau.
Com os nú meros imaginários se criaram os "números complexos" outro tipo estranho que funcionava muito muito bem como se fosse um número...

7.1 Incompletitude algébrica de R

A fórmula para resolver equações do segundo grau produz a solução

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac, \tag{7.1}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \tag{7.2}$$

$$\tag{7.3}$$

Se Δ for negativo a equação não tem soluções reais. Aos poucos os matemáticos foram experimentando a idéia de aceitar um significado para $\sqrt{\Delta}$; $\Delta < 0$ começando com uma pequena experiênicia, $i = \sqrt{-1}$ estendendo a regra estrita sobre raizes:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \ ; \ x, y \geq 0$$

que valia apenas quando $x, y \geq 0$. Com esta estensão se poderia calcular

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i \cdot 2$$

e enfim, qualquer raiz de número real, positivo ou negativo, poderia agora ser calculada.

Em particular, *as equações do segundo grau* passam a ter <u>*sempre*</u> solução apesar de que, cuidadosamente, se acrescente a observação, "*raizes imaginárias*" quando $\Delta < 0$.

Por exemplo,

$$4x^2 - 12x + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -256$$
$$x' = \tfrac{12+16i}{8} \ ; \ x'' = \tfrac{12-16i}{8}$$
$$x' = \tfrac{3}{2} + 2i; x'' = \tfrac{3}{2} - 2i$$

em que vemos aparecer um "número" do tipo

$$z = a + bi,$$

formado por um par de números reais separados pela *unidade imaginária* $\boxed{i}$.

Definição 53 *Parte real e parte imaginária*
Dado um número complexo $u = a + bi = (a, b)$ designamos

- *parte imaginária* $Im(u) = b \in \mathbf{R}$
- *parte real* $Re(u) = a \in \mathbf{R}$

Observe que Re, Im são duas funções definidas em $\mathbf{C}$ e tomando valores em $\mathbf{R}$.

Um "nú mero" desta forma se chama "número complexo" e foram precisos vários séculos para que eles fossem admitidos como um número comum, *sem complexos*.

7.1.1 Algebra dos números complexos

Repetindo o que fizeram os nossos antepassados, os números complexos foram inicialmente tratados como uma expressão algébrica em que $\boxed{i}$ era considerado como uma "variável" mas obedecendo a regra

$$\boxed{\sqrt{-1} = i \iff i^2 = -1. \qquad (7.4)}$$

Assim, $u = 2 + 3i, v = 5 - 2i$ são somados segundo as regras da álgebra:

- "quem tem "i" é somado com quem tem "i"
- e os que não tiverem "i" são somados entre si":

$$u + v = (2 + 3i) + (5 - 2i) = (2 + 5) + (3 - 2)i = 7 + i$$

e de maneira semelhante, usando as regras da álgebra, se procede com a multiplicação:

$$(2 + 3i)(5 - 2i) \tag{7.5}$$

$$\begin{array}{lll} 2 & +3i & \\ 5 & -2i & \\ 10 & 15i & \\ & -4i & -6i^2 \\ 10 & +11i & -6(-1) \\ 16 & +11i & \end{array} \tag{7.6}$$

Usando estas regras da álgebra podemos escrever uma definição formal para a adição e para a multiplicação de números complexos:

Definição 54 *Adição de números complexos*
Dados dois números complexos

$$u = a + bi \equiv (a, b) \tag{7.7}$$
$$v = c + di \equiv (c, d) \tag{7.8}$$
$$u + v = (a + c, b + d) \tag{7.9}$$
$$\equiv u + v = (a + c) + (b + d)i \tag{7.10}$$

somam-se os termos semelhantes*, a soma se faz "coordenada por coordenada": somam-se* as partes reais *e* as partes imnaginárias *entre si. Portanto*

$$Re(u+v) = Re(u) + Re(v) \ ; \ Im(u+v) = Im(u) + Im(v)$$

De agora em diante vamos usar de forma mais intensa a equivalência entre as duas formas de escrever um número complexo:

$$\text{expressão algébrica} \quad \mathbf{C} \ni v = c + di \equiv (c,d) \in \mathbf{R}^2 \quad \text{entidade geométrica.} \tag{7.11}$$

Observe que a última parte na expressão acima, $(c,d) \in \mathbf{R}^2$, é uma *representação geométrica* para os números complexos, uma vez que estamos dizendo que existe um ponto do plano,

$$(c,d) \in \mathbf{R}^2 \tag{7.12}$$

que é "equivalente" ao número complexo

$$c + di \in \mathbf{C}. \tag{7.13}$$

Aliás, quando foi descoberta a *representação geométrica* para os números complexos, um *salto qualitativo* foi dado. Como eles tinham uma *representação geométrica*, não podiam ser tão estranhos como no começo pareciam. Observe a figura (fig. 7.1), nela há alguns números complexos representados no plano.

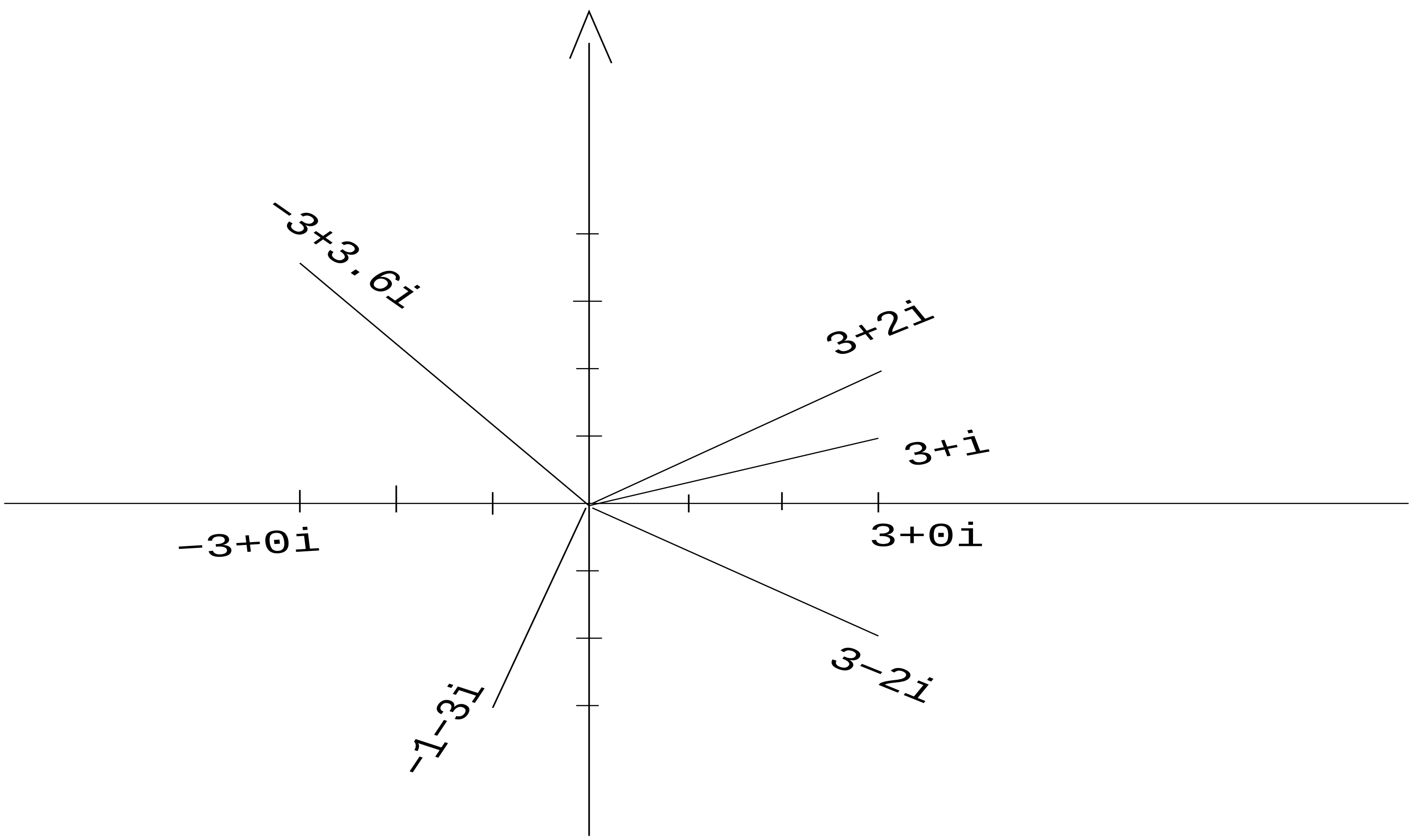

Figura 7.1: Representação geométrica dos complexos

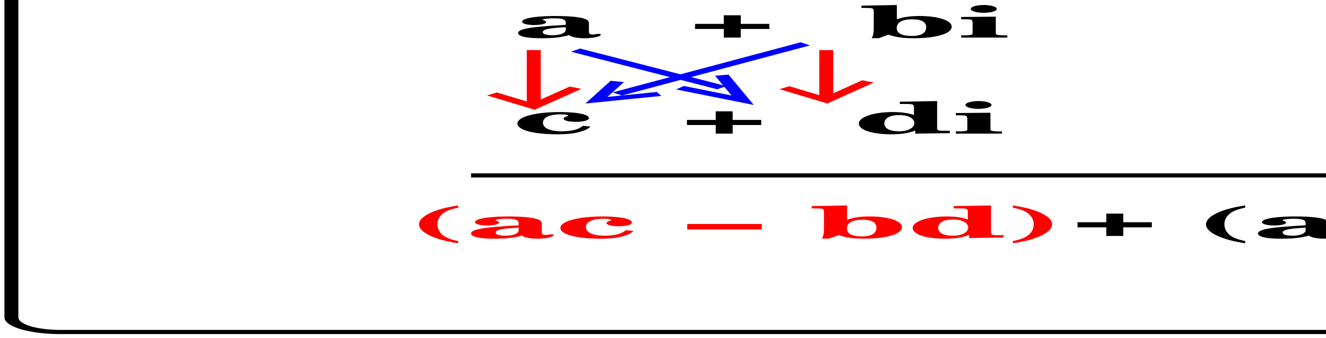

Figura 7.2: Produto de números complexos

Definição 55 *Produto de números complexos*

Dados dois números complexos $u = a + bi, v = c + di$ o produto deles é:

$$uv = (ab - bd) + (ad + bc)i$$

7.1.2 A representação geométrica dos complexos

Falamos acima na equivalência

$$\mathbf{C} \ni v = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2, \tag{7.14}$$

o par (c, d) era um ponto do plano e assim estavamos *representando* um número complexo com uma entidade geométrica, um ponto.

Os nú meros complexos trouxeram, para o reino dos números, os conceitos da geometria: ângulo, módulo, direção e sentido, e a Física, desde cedo, lançou mão deles, com muito sucesso, por exemplo, na eletricidade.

A figura (fig. 7.3) descreve vários dos aspectos geométricos dos números complexos.

A próxima lista é um *laboratório* que deve preparar a sua intuição para as construções que faremos depois.

Exercícios 32 *O plano complexo.*

1. *Encontre as soluções da equação:* $x^2 - 3x + 1 = 0$.
2. *Encontre as soluções da equação:* $x^2 + 1 = 0$.
3. *Verifique, experimentando na equação, que os números* $i, -i$ *são soluções da equação* $x^2 + 1 = 0$.
4. *Teste as soluções que você tiver encontrado para*

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

   substituindo na equação.

5. *Some algebricamente e represente geometricamente:* $u+v$*;*

a) $u = 3 + 2i; v = 2 + 3i$	*b)* $u = 3 - 2i; v = 3 + 2i$
c) $u = 3 + 2i; v = -3 - 2i$	*d)* $u = 3 - 2i; v = 2i - 3$
e) $u = 2i - 3; v = 3 - 2i$	*f)* $u = 2 - 3i; v = 3i - 2$

6. *Efeitos da multiplicação*

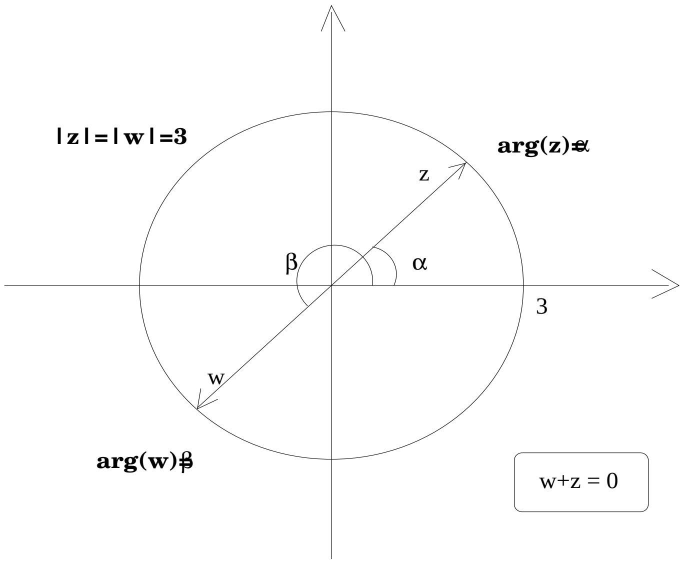

Figura 7.3:

(a) *Multiplique* $3 + 2i$ *pelos inteiros 2,3,5,10. Represente geometricamente os resultados.*

(b) *Multiplique* $3 + 2i$ *por 2i, 3i, 5i,10i. Represente geometricamente os resultados. Elabore uma teoria a partir da semelhança dos resultados obtidos.*

7. *Verifique que o número complexo* $1 + 0i$ *é o elemento neutro da multiplicação.*

8. *Calcule o inverso multiplicativo,* $x + iy$*, de* $3 + 2i$ *e represente ambos geometricamente.*

9. *Calcule o inverso multiplicativo,* $x + iy$*, de* $a + bi$

   Resposta

$$\begin{cases} x = & \frac{a}{a^2+b^2} \\ y = & \frac{-b}{a^2+b^2} \end{cases} \tag{7.15}$$

10. *Multiplique* $3 + 2i$ *por* $3 + 2i$ *e represente geometricamente o resultado.*

11. *Multiplique* $3 + 2i$ *por* $3 - 2i$ *e represente geometricamente o resultado.*

12. *Módulo de um número complexo*

    Uma das razões que tornam os números complexos *um tipo de número a "estranho", é o seu* envolvimento *com a geometria. Como um nú mero real, os números complexos tem módulo, mas neste caso o método de cálculo se deduz direto do Teorema de Pitágoras.*

Definição 56 *Módulo do número complexo* $a + bi$*.*

$$||(a + bi)|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(a) *Calcule o módulo de u*

$u = \quad 3+2i\ , \quad 2+3i, \quad 3-2i, \quad 2-3i, \quad 0.3+0.2i, \quad \frac{1+2i}{4}$

(b) *Calcule o módulo de* $\frac{1}{u}$ *quando*

$u = \quad 3+2i, \quad 2+3i, \quad 3-2i, \quad 2-3i, \quad 0.3+0.2i, \quad \frac{1+2i}{4}$

(c) *Verfique, em cada caso, nos itens anteriores, que vale a relação*

$$|\frac{1}{u}| = \frac{1}{|u|}$$

(d) *Verifique também, em cada caso acima, que se* $|u| < 1$ *então* $|\frac{1}{u}| > 1$.

(e) *Verifique que podemos substituir "então"por "se e somente se"no item anterior.*

13. *distância* *Observe que nos reais,* $|a-b|$ *é a distância,* $d(a,b)$*, entre os dois números* a, b*. Da mesma forma, entre dois números complexos* u, v *a distância entre eles vem do Teorema de Pitágoras e é o módulo da diferença* $|u-v|$*. Faça alguns exercícios para adquirir intuição:*

    (a) *Encontre o lugar geométrico dos números complexos u tal que*

    $$|u| = 1.$$

    (b) *Encontre o lugar geométrico dos números complexos u tal que*

    $$|u| = 2.$$

    (c) *Encontre o lugar geométrico dos números complexos u tal que*

    $$|u-3| = 1.$$

    (d) *Encontre o lugar geométrico dos números complexos u tal que*

    $$|u-3| = 2.$$

    (e) *Encontre o lugar geométrico dos números complexos u tal que*

    $$|u-(2+3i)| = 1.$$

    (f) *Encontre o lugar geométrico dos números complexos u tal que*

    $$|u-(2+3i)| = 2.$$

14. *a solução do exercício anterior* *Pontos equidistantes de um* ponto dado *se encontram sobre um círculo. Em todos os casos, o lugar geométrico eram círculos. Traduza as questões anteriores com a linguagem da equação de círculos, no plano* $\mathbf{R}^2$.

15. *Potências de i*

    (a) *Calcule as 10 primeiras potências de i e encontre uma lei formação que estas potências obedecem.*

(b) *Escolha abaixo qual é o resultado impossível para a soma*

$$i^n - i^m \; ; \; n, m \in \mathbf{N}$$

☐ *2* ☐ *-2* ☐ *0* ☐ *i* ☐ *2i* ☐ *-2i*

16. *Relações de Girard, caso complexo* *Mostre que as relações de Girard, também são válidas para raízes complexas isto é, quando* $\Delta < 0$.

    Para a equação $x^2 + bx + c = 0, a = 1,$ *temos*

    (a) $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b$

    (b) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = c$

    Assim, a equação $x^2 + bx + c = 0,$ *pode ser escrita da seguinte forma:*

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

17. *Encontre uma equação do segundo grau cujas raízes somem 6 e o produto seja 13.*

7.2 Números complexos: extensão dos reais

> Um número complexo é um par de números reais, portanto coïncide, com o conjunto, com o $\mathbf{R}^2$:
> $$\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2.$$
> A diferença é que existe em $\mathbf{C}$ uma multiplicação que estende a multiplicação dos números reais
> Usaremos as duas notações para um número complexo
> $$(a, b) \equiv a + bi$$
> sem mais nos preocuparmos com observações a respeito.

A figura (fig. 7.4) página 252, combina vários fatos geométricos e algébricos dos números complexos. Vamos fazer aqui um resumo deles:

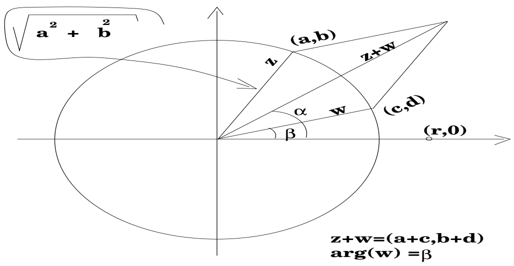

Figura 7.4: Propriedades dos números complexos

Dado um número complexo $z = (a, b)$ diremos

- *parte real* *a é a parte real de z;* $\boxed{a = Re(z)}$
- *parte imaginária* *b é a parte imaginária de z ;* $\boxed{b = Im(z)}$
- *módulo* *O número complexo* $z = (a, b)$ *determina com a origem* $(0, 0)$ *um segmento do plano que usamos para visualizar o número complexo z. O comprimento deste segmento é*
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
o módulo de z.
- *argumento de um número complexo é ângulo que ele determina com o conjunto dos números reais. Se um número complexo for real, o seu argumento pode ser zero ou* π.
Na figura (fig. 7.4) o argumento de w *é* β *e o argumento de* $z + w$ *é* α.
$$arg(w) = \beta \; ; arg(z + w) = \alpha$$
- *Os números reais*
  1. *O conjunto dos números reais positivos é o subconjunto de* **C** *formado pelos números complexos cuja* parte imaginária *é zero, e* argumento *zero,*
  $$\mathbf{R} = \{(x, y) \; ; y = 0\} = \{(x, 0) \; ; x \in \mathbf{R} \; ; arg(x) = 0\}$$
  é o semi-eixo positivo OX^+
  2. *O conjunto dos números reais negativos é o subconjunto de* **C** *formado pelos números complexos cuja* parte imaginária *é zero e o* argumento *é* π*:*
  $$\mathbf{R} = \{(x, y) \; ; y = 0\} = \{(x, 0) \; ; x \in \mathbf{R} \; ; arg(x) = \pi\}$$
  é o semi-eixo positivo OX^-

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **74** *Extensão da multiplicação dos reais*

A multiplicação de números complexos é uma extensão da multiplicação de números reais.

$\boxed{\textbf{Dem}}$*:*

Dados dois números complexos

$$z = (a_1, b_1) = a_1 + b_1 i, \;\; w = (a_2, b_2) = a_2 + b_2 i$$

temos

$$zw = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = \tag{7.16}$$
$$(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) = \tag{7.17}$$
$$a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i \tag{7.18}$$

Considere agora dois número reais: r_1, r_2. *Eles determinam os dois números complexos*

$$z = (r_1, 0), \;\; w = (r_2, 0).$$

Se os multiplicarmos vamos ter

$$z, w \in \mathbf{R} \tag{7.19}$$
$$zw = (r_1, 0)(r_2, 0) = \tag{7.20}$$
$$(r_1r_2 - 0, 0) = \tag{7.21}$$
$$r_1r_2 + 0i = r_1r_2 = zw \in \mathbf{R} \tag{7.22}$$
$$\tag{7.23}$$

Como $\Im(r_1r_2, 0) = 0$ *podemos dizer, com certo abuso de linguagem, que* $(r_1r_2, 0) \in \mathbf{R}$

Consequentemente o produto de dois números complexos que sejam reais resulta no produto dos números reais que eles representam. Assim dizemos que a multiplicação de números complexos é uma extenção da multiplicação dos números reais.

$\boxed{\textbf{q.e.d .}}$

Como $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$ então o conjunto dos números complexos é um grupo abeliano com a adição de pares ordenados que já conhecemos.

Vamos agora resolver o exercício (ex. , 8), página 249. Adotaremos uma expressão mais geral: calcular o inverso de (a, b).

Por definição, o número complexo (x, y) será o inverso multiplicativo de (a, b), se, e somente se, o produto dos dois for o elemento neutro da multiplicação $(1, 0) = 1 + 0i$. Vamos forçar esta igualdade para determinar (x, y) :

$$(x, y)(a, b) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \equiv \tag{7.24}$$
$$\equiv \left\{ \begin{array}{ll} ax - by = & 1 \\ bx + ay = & 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{ll} abx - b^2y = & b \\ abx + a^2y = & 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{ll} a^2x - aby = & a \\ b^2x + aby = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \tag{7.25}$$
$$(a^2 + b^2)y = -b \;;\; (a^2 + b^2)x = a \Rightarrow \tag{7.26}$$
$$y = \tfrac{-b}{a^2+b^2} \;;\; x = \tfrac{a}{a^2+b^2} \tag{7.27}$$

Se o número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ a solução encontrada é possível o que demontra o teorema:

Teorema **75** *Inverso multiplicativo em* $\mathbf{C}$

Todo número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ *tem um inverso multiplicativo em* $\mathbf{C}$ *que é da forma*

$$\frac{1}{(a, b)} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2})$$

Podemos simplificar a expressão do inverso se adotarmos uma notação que depois será muito útil:

Definição 57 *Conjugado de um número complexo*
Chamamos de conjugado de $z = (a, b)$ *ao número complexo* $\overline{z} = (a, -b)$

Observe na figura (fig. 7.5) o número complexo z, o seu conjugado, o seu inverso aditivo e sua projeção em $\mathbf{S}^1$.

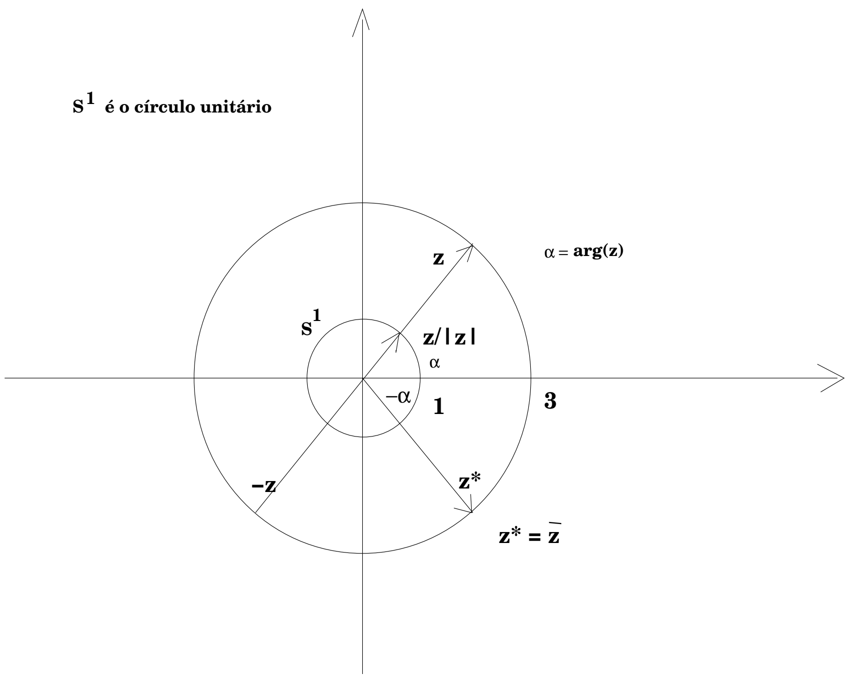

Figura 7.5: Conjugado de um número complexo

Em alguns textos o conjugado $\overline{z}$ de z é designado por z^*.
Vejamos agora que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(a,b)} = \frac{1}{a^2+b^2}(a, -b) = \tag{7.28}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2+b^2}\overline{z} \tag{7.29}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \tag{7.30}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{7.31}$$

e agora, atendendo a promessa de resolver o (ex. , 8) temos o inverso multiplicativo de $3 + 2i = (3, 2)$ é

$$z = (3, 2) \mapsto \overline{z} = (3, -2) \tag{7.32}$$

$$z = (3, 2) \mapsto |z|^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \tag{7.33}$$

$$z = (3, 2) \mapsto \frac{1}{z} = \frac{1}{13}(3, -2) = (\frac{3}{13}, \frac{-2}{13}) \tag{7.34}$$

Podemos usar a última expressão da sequência de equações acima para mostrar um uso frequente do "conjugado", veja a sequência

$$z = (a,b) \ ; \ \overline{z} = (a,-b) \ ; \ z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \tag{7.35}$$
$$\tfrac{1}{z} = \tfrac{\overline{z}}{\overline{z}z} \tag{7.36}$$
$$\tfrac{1}{z} = \tfrac{\overline{z}}{\overline{z}z} = \tfrac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{7.37}$$

que mostra que podemos usar o conjugado para fazer surgir um número real no denominador, o que, muitas vezes, é útil.

O próximo teorema reune as propriedades do conjungado:

Teorema **76** *Propriedades da conjugação*

Considere os números complexos u, v e o número real λ.

1. *Linearidade*
   (a) $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$
   (b) $\overline{\lambda u} = \lambda \overline{u}$
2. *reflexividade* $\overline{\overline{u}} = u$
3. *produto* $\overline{uv} = \overline{uv}$
4. *divisão* $\overline{\frac{u}{v}} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$
5. *reais* *Se* $u = \overline{u}$ *se e somente se* $u \in \mathbf{R}$.

Exercícios 33 1. *Resolva as equações*

a)$4z = -5$	*b)* $(4+3i)z = -5$	*c)* $4z^2 + 2z = -1$	*d)* $z^2 = -1$
e)$(4+3i)z = -2i$	*f)* $\frac{z}{4+3i} = -50$	*g)* $z^2 = 1$	*h)* $z^2 + 2z = 1$
i)$\frac{z+5-3i}{3-2i} = 0$	*j)* $3z + i = 5z - 7$	*k)* $z^2 + 3z = -10$	*l)* $4z^2 = 1$

2. *forma polar de um número complexo*
   (a) *módulo*
   Calcule o módulo dos números complexos dados abaixo:
   $$a)2+3i \quad b)\ 2-3i \quad c)0.4+0.2i \quad d)\ \tfrac{1+i}{2}$$
   (b) *argumento*
   Calcule a projeção dos números complexos abaixo, no círculo trigonométrico, $\mathbf{S}^1$.
   $$a)\ 2+3i \quad b)\ 2-3i \quad c)\ 0.4+0.2i \quad d)\ \tfrac{1+i}{2}$$
   (c) *módulo e argumento*
   Calcule a projeção de $a+bi$ sobre $\mathbf{S}^1$ determinando quando isto não for possível.
3. *forma matricial I*
   Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ por $x+iy$, nesta ordem, equivale ao produto de matrizes

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{7.38}$$

4. *forma matricial II*

Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ por $x+iy$, nesta ordem, equivale ao produto de matrizes

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \tag{7.39}$$

5. *produto e rotação*

   (a) *Considere dois pontos A, P sobre o círculo trigonométrico $\mathbf{S}^1$,*

   $$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni A = cos(\theta) + isen(\theta) \equiv (cos(\theta), sen(\theta)) \in \mathbf{R}^2 \tag{7.40}$$
   $$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni P = cos(\alpha) + isen(\alpha) \equiv (cos(\alpha), sen(\alpha)) \in \mathbf{R}^2 \tag{7.41}$$

   Identifique no produto AP a expressão do arco soma.

   (b) *Mostre que AP, nesta ordem, produz uma rotação de θ sobre o vetor $\vec{P}$ no sentido horário (positivo).*

   (c) *Como a multiplicação de números complexos é comutativa, procure a contradição, ou corrija o item anterior.*

   (d) *Conclua do item anterior que*

   $$z, w \in \mathbf{S}^1 \Rightarrow zw \in S$$

   ou seja, o círculo unitário é estável sob a multiplicação.

   (e) *O grupo dos complexos de módulo 1 Verifique que S, o conjunto dos números complexos de módulo 1, é um grupo comutativo com a multiplicação.*

7.3 Módulo, argumento e conjugado

Vamos *formalizar* algumas experiências que foram feitas nas seções precedentes: *parece que o produto de números complexos pode ser descrito de uma forma geométrica.* Vamos ver que de fato é assim e deduzir as propriedades do produto, de forma bem simples, usando a representação geométrica.

7.4 Intepretação geométrica do produto

Há duas largas estradas correndo em paralelo: Os números complexos, um par de números reais da forma $a+bi$ e um *puro par de números reais* (a,b).

São, em essencia, duas coisas diferentes, com propriedades distintas mas também com muita coisa em comum. Por exemplo

- em $\mathbf{C}$ tem um multiplicação
- em $\mathbf{R}^2$ não tem nenhuma multiplicação
- a adição em $\mathbf{C}$ é exatamente a mesma adição de $\mathbf{R}^2$

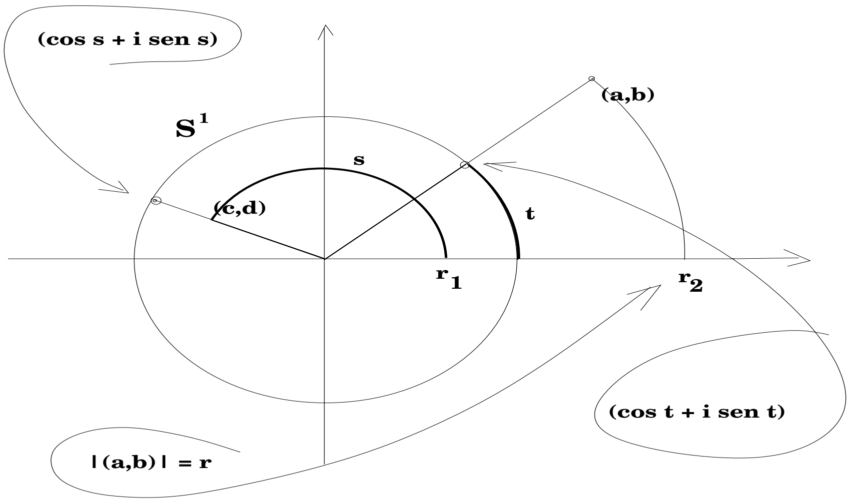

Figura 7.6: A projeção de $a + bi$ sobre $\mathbf{S}^1$.

A forma polar de um número complexo

Um dos exercícios de laboratório que lhe foram propostos pedia que você *projetasse* um número complexo $a + bi$ sobre o círculo unitário $\mathbf{S}^1$.

Geometricamente, veja a figura (fig. 7.6), podemos obter esta projeção traçando o segmento de reta do ponto $P = (a, b)$ ao centro de $\mathbf{S}^1$.

Algebricamente isto se faz dividindo (a, b) pelo seu módulo, resultando assim num vetor de módulo 1, portanto, sobre $\mathbf{S}^1$. Usando a notação da (fig. 7.6), temos

$$(cost, sent) = cost + isent = \frac{a + bi}{|(a + bi)|} = \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Estamos vendo assim a intimidade que existe entre os *números complexos* e a trigonometria. O importante neste momento é escrever o caminho de volta de $(cost, sent)$ para o número complexo (a, b) :

$$(a, b) = r_1(cost, sent) \ ; \ r_1 = |(a, b)|.$$

com o que obtivemos a *forma polar* de (a, b). Nela vemos representados os dois conceitos geométricos que formam um número complexo: *módulo* e *argumento*. Vamos re-escrever esta fórmula colocando em evidência estes dois conceitos:

$$z = (a, b) = |z|(cos(arg(z)), sen(arg(z))) \ ; \ |z| = r_1 = |(a, b)|.$$

Exercícios 34 *Forma polar, trigonometria conjugação*

1. *Verifique as igualdades abaixo e faça uma representação geométrica das mesmas:*

(a) *Verifique que* $2\mathcal{R}e(z) = z + \overline{z} \in \mathbf{R}$

(b) *Verifique que* $2i\mathcal{I}m(z) = z - \overline{z} \in i\mathbf{R}$

(c) *Verifique que* $z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbf{R}$

2. *Calcule* $(a+b)^2$

3. *Fórmula de Moivre*

   (a) *forma polar Quando escrevemos um número complexo usando a fórmula de Moivre, dizemos que* usamos a forma polar *do número. Escreva os números*

   $$z_1 = 4 + 3i \ ; \ z_2 = 3 - 4i \ ; \ z_3 = -3 - 4i \ ; \ z_4 = 3 + 4i$$

   na fórmula polar.

   (b) *potência Calcule* z^2 *com* $z = r(cos(\theta), sen(\theta))$.

   (c) *potência Suponha que a expressão encontrada para* z^2 *também valha para* z^n. *Escreva esta expressão. Deduza a expressão de* z^{n+1}.

   Resposta Este exercício mostra, por indução finita a fórmula de Moivre

   $$z = r(cos(\theta), sen(\theta)) \Rightarrow z^n = r^n(cos(n\theta, sen(n\theta))$$

   (d) *Use a fórmula de Moivre para expressar* $cos(3\theta)$ *em função de* $cos(\theta), sen(\theta)$.

   Solução 4

   $$cos(3\theta) = \mathcal{R}e((cos(\theta) + isen(\theta))^3 \tag{7.42}$$
   $$(cos(\theta) + isen(\theta))^3 = \tag{7.43}$$
   $$= cos(\theta)^3 + 3icos(\theta)^2sen(\theta) - 3cos(\theta)sen(\theta)^2 - isen(\theta)^3 = \tag{7.44}$$
   $$= cos(\theta)^3 - 3cos(\theta)sen(\theta)^2 + (3cos(\theta)^2sen(\theta) - sen(\theta)^3)i \tag{7.45}$$
   $$cos(3\theta) = cos(\theta)^3 - 3cos(\theta)sen(\theta)^2 \tag{7.46}$$

4. *As raizes de um número complexo*

   (a) *forma polar Use a fórmula de Moivre calcular* $\sqrt[3]{z_i}$ *com*

   $$z_1 = 4 + 3i \ ; \ z_2 = 3 - 4i \ ; \ z_3 = -3 - 4i \ ; \ z_4 = 3 + 4i$$

5. *Ache todos os valores de* $z \in \mathbf{C}$ *tal que* $z^2 + |z| = 0$.

6. *Encontre todos os complexos z que satisfaçam à condição*

   $$|z - 25i| < 15$$

7. *Qual o valor máximo do módulo do número complexo z se*

   $$|z + \frac{1}{z}| = 1$$

8. *Resolva a equação* $(1-i)^x = 2^x$. **Solução:**

   $$(1-i)^x = 2^x \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow |1-i|^x = 2^x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^x$$

   Mas a ĺtima igualdade somente é possível para $x = 0$.

9. *inteiros de Gauss*

Definição 58 *Inteiros de Gauss*

Chamamos de inteiros de Gauss *ao conjunto* $Z + iZ$ *de todos os números complexos com* parte real *e* parte imaginária *inteiras.*

(a) *Anel dos inteiros de Gauss Verifique que o conjunto dos inteiros de Gauss com a adição e multiplicação dos complexos é um anel.*

(b) *Verifique em particular que se z for um inteiro de Gauss, então $|z|^w \in \mathbf{Z}$ mas nem sempre $|z| \in \mathbf{Z}$ dê um contra-exemplo.*

(c) *Prove que se z for um* inteiro de Gauss *então qualquer potência inteira de z também será um* inteiro de Gauss.

Solucaçã

Isto é consequência direta do Teorema do Binômio, capítulo 2. Logo z^n é um inteiro de Gauss.

(d) *Prove que para todo número complexo e todo inteiro n vale*

$$(|z|^2)^n = (|z|^n)^2$$

Solução:

$$(|z|^2)^n = (a^2 + b^2)^n$$
$$(|z|^n)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2}^n)^2$$
$$(|z|^n)^2 = (\sqrt{(a^2 + b^2)^n}^2$$
$$(|z|^n)^2 = (a^2 + b^2)^n$$
$$(|z|^2)^n = (|z|^n)^2$$

(e) *Se $a, b, n \in \mathbf{Z}_+$, prove que existem inteiros x, y tais que*

$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

Solução:

O módulo de um inteiro de Gauss *não será, em geral, um inteiro, mas o o quadrado do seu módulo será:*

$$z^n = x + yi \text{ é um inteiro de Gauss}$$
$$|z^n|^2 = |z^2|^n = |x + iy|^2 = x^2 + x^2 \in \mathbf{Z}$$
$$(a^2 + b^2)^n = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$$

10. *Prove que se $z + \frac{1}{z} = 2cos(\alpha)$ então*

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2cos(n\alpha)$$

Solução:

$$z + \frac{\overline{z}}{|z|}$$
$$z + \frac{1}{z} = z + cos(\alpha) + isen(\alpha)$$
$$z + \frac{1}{z} = 2cos(\alpha) \Rightarrow z = x - isen(\alpha)$$

11. *Moste que vale a fórmula do binômio de Newton*

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{(n-k)} \ ; z, w \in \mathbf{C}$$

12. *Escreva na forma polar* $z = cos(\theta) + cos(\phi) + i(sin(\theta) + sin(\phi))$

13. *Sendo* $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^4-1}$ *calcular* $f(2+3i)$.

14. *Mostre que se*

$$(z-p)(\overline{z}-\overline{p}) = p\overline{p}$$

então o ponto z *descreve um círculo de centro no ponto* p *passando pela origem dos eixos.*

15. *Considere* $w = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})$. *Mostre que se* z_1, z_2, z_3 *satisfizerem a relação*

$$z_1 + wz_2\overline{w}z_3 = 0$$

então eles são, respectivamente, paralelos aos lados de um triângulo equilátero.

16. *Um número complexo varia mas seus módulo fica compreendido entre* 1 *e* 6. *Calcule o máximo e o mínimo da função*

$$f(z) = z^2 + 3z.$$

17. *Se* $z = 2 + i(w - \frac{1}{w})$ *calcule as partes reais e imaginárias de* z *em função das partes reais e imaginárias de* w. *Descreva o lugar geométrico do ponto* w *quando* $z \in \mathbf{R}$.

18. *Prove que se* $|z| = 1$ *então* $\mathcal{R}e(\frac{1-z}{1+z}) = 0$

7.5 Raizes de um número complexo

Quando calculamos a raiz quadrada de um número real positivo, somos conduzidos a dois resultados, com sinais opostos. Um número real positvo *tem duas raizes quadradas que são simétricas em relação à origem dos eixos.* Na verdade uma tem argumento (ângulo) zero e a outra tem argumento

$$\frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Os números complexos nos conduzem a uma generalização deste fato porque *todo número complexo tem n raízes e-nésimas.*
Esta questão é geometrica, por natureza, e os números complexos nos conduzem assim a desvendar os segredos da Geometria, *onde a Geometria e Álgebra se encontram.*

Considere a figura (fig. **??**), nela podemos ver $\mathbf{S}^1$ particionada por um triângulo equilátero em três partes. Os três números complexos que aparecem alí são:

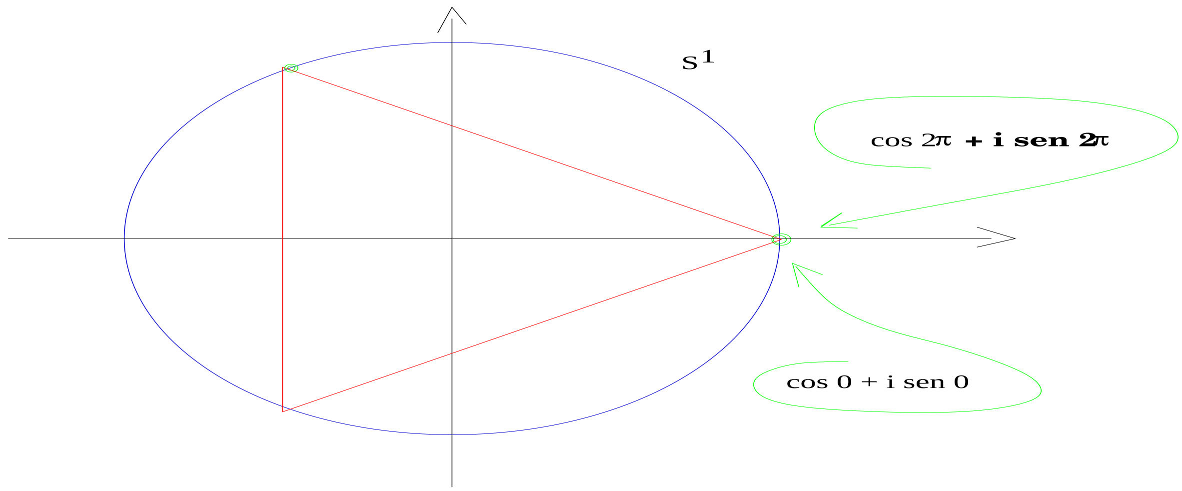

Figura 7.7: As raízes da unidade

$$1 = cos(2\pi) + isen(2\pi) \tag{7.47}$$
$$cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}) \tag{7.48}$$
$$cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3}) \tag{7.49}$$
$$1 \equiv cos(\frac{6\pi}{3}) + isen(\frac{6\pi}{3}) \equiv cos(2\pi) + isen(2\pi) \tag{7.50}$$

Oberve que na última equação usamos o sinal de equivalência, e não de igualdade. Porque, na verdade, os dois números complexos são diferentes, uma vez que tem argumentos diferentes.

Ocorre que números diferentesn *ocupem* o mesmo lugar geométrico, mas eles são diferentes.

Se aplicarmos a qualquer destes números a fórmula de Moivre elevando a terceira potência, o resultado irá ocupar o mesmo lugar geométrico.

Por definição, $\sqrt[n]{a}$ é um número $\underline{b}$ tal que $b^n = a$. Consequentemente, qualquer um dos números

$$1 \equiv cos(2\pi) + isen(2\pi) \tag{7.51}$$
$$cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}) \tag{7.52}$$
$$cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3}) \tag{7.53}$$

úma raíz de $1 \equiv cos(2\pi) + isen(2\pi)$.

Observação 36 *Equivalênncia, classes de equivalência*

Aqui há uma evidente confusão, *confusão esta com que você esta inteiramente acostumado, veja*

$$\frac{2}{3} \equiv \frac{4}{6} \equiv \frac{8}{12} \equiv ....$$

que você olha sem torcer o nariz. Sâo equivalências. E destas frações todas você elege $\frac{2}{3}$ *como* representante de classe *de todas as outras.*

$$\frac{2}{3}$$

é a forma mais simples de escrever qualquer uma das frações da lista anterior.

Da mesma forma os números complexos se podem escrever de muitas formas, cada vez que dermos uma volta completa em um círculo encontramos outra expressão do mesmo número complexo.

Com outro argumento, *claro, como*

$$\frac{4}{6} \equiv \frac{8}{12}$$

que têm numeradores e denominadores diferentes, mas representam o mesmo número racional, embora funcionalmente signifiquem coisas distintas, num caso dividimos alguma coisa em 12 partes e consideramos 8 delas, enquanto que no outro caso dividimos *outra* coisa em 6 partes, considerando 4 delas.

São funções diferentes, mas equivalentes no sentido de que representam a mesma quantidade.

A pergunta que se impõe, é, como vamos descobrir as raízes de um número complexo. O método pode ser geométrico, depois o iremos algebrizar.

Na figura (fig. **??**), página **??**, desenhamos um triângulo equilátero inscrito na circunferência $\mathbf{S}^1$ porque queriamos as raízes terceiras da unidade. Um dos vértices se encontra sobre o número cujas raízes procuramos. A figura (fig. 7.8) você pode ver que, com um quadrado, um polígono regular convexo de quatro lados, inscrito no círculo trigonométrico, nós calculamos as quatro raízes da unidade.

Esta construção que fizemos tem um vício de partida, que você terá que superar: as raízes da unidade se encontram no mesmo círculo que a própria unidade.

Porque, se $u = 1$ então $|u^x| = 1$ para qualquer potência $\underline{x}$ inteira ou não.

O mesmo não pode acontecer com outros números... as raízes de 2 se encontram em círculos diferentes daquele em que o próprio 2 se encontra. Os exercícios que seguem irão conduzí-lo a descobrir o resto.

Exercícios 35 *Raízes de um número complexo*

1. *As raízes cúbicas de 2,* $\sqrt[3]{2}$*, e 2 se encontram em círculos diferentes. Use a fórmula de Moivre para descobrir onde elas se encontram e as determine geométricamente.*

   Solução: *As raizes terceiras de 2 são determinadas por um triângulo equilatéro. Observe a figura (fig. 7.9) onde tres retas paralelas marcam os pontos em P.G.*

   $$x, x^2, x^3 = 2$$

   e que, portanto, $x = \sqrt{3}2$.

   Com multiplicação geométrica, vista na construção geométrica de $\mathbf{R}$, *calculamos aproximadamente* $\sqrt[3]{2}$. *Fizemos várias tentativas com retas paralelas até encontrar três retas paralelas que representassem o produto de um número por ele mesmo, três, vezes*

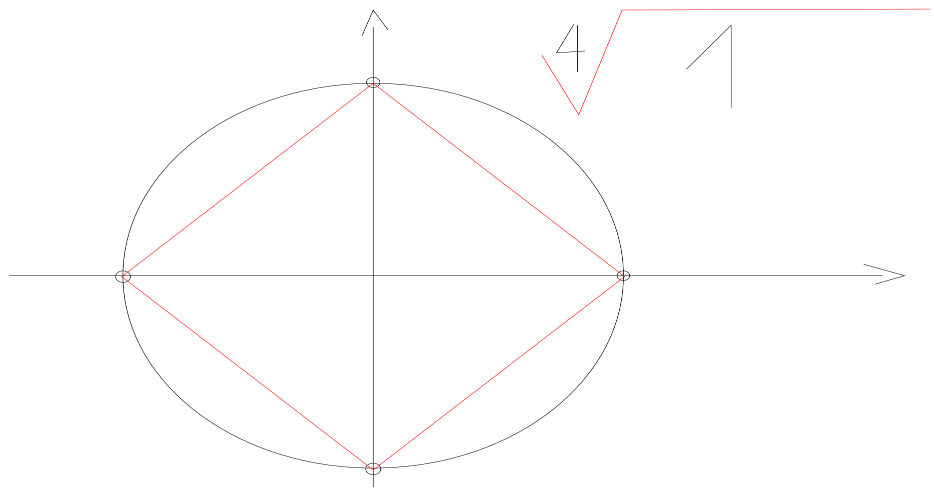

Figura 7.8: Raízes quartas da unidade

de modo que a terceira reta passe por 2*. Isto é equivalente a tentar multiplicar um decimal por si próprio, tres vezes, até encontrar um produto próximo de* 2*.*

Encontramos assim o círculo onde se encontram as raízes de cúbicas de 2 *e inscrevemos nele um triângulo equilatero com um dos vértices na raiz cúbica real de* 2*. Os demais vértices determinam as outras duas raízes.*

2. *Raízes quinta de um número real* *Encontre as raízes quintas de 7.*

   Solução:

   Com uma calculadora podemos encontrar o raio do círculo em que se encontram as raizes quintas de 7 (multiplicação geométrica seria muito trabalhosa, como também seria trabalhoso multiplicar sete vezes um decimal por si próprio até encontra um número suficiente próximo de 7.) O raio do deste círculo é

$$\sqrt[5]{7} \approx 1.4757731$$

   A figura (fig. 7.10) nos mostra o pentágono inscrito no círculo de raio 1.4757731 *que determina as cinco raizes de 7.*

3. *Calcule as raizes terceiras de* $3 + 4i$

   Solução:

   De acordo com a fórmula de Moivre,

$$3 + 4i = 5(cos(atan(4/3) + isen(atan(4/3)) = 5(cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}))$$

   Agora deveremos inscrever um triângulo num círculo de raio $\sqrt[3]{5}$ *tendo o "vértice inicial" correspondendo ao argumento*

$$\frac{\frac{2\pi}{3}}{3} = \frac{2\pi}{9}.$$

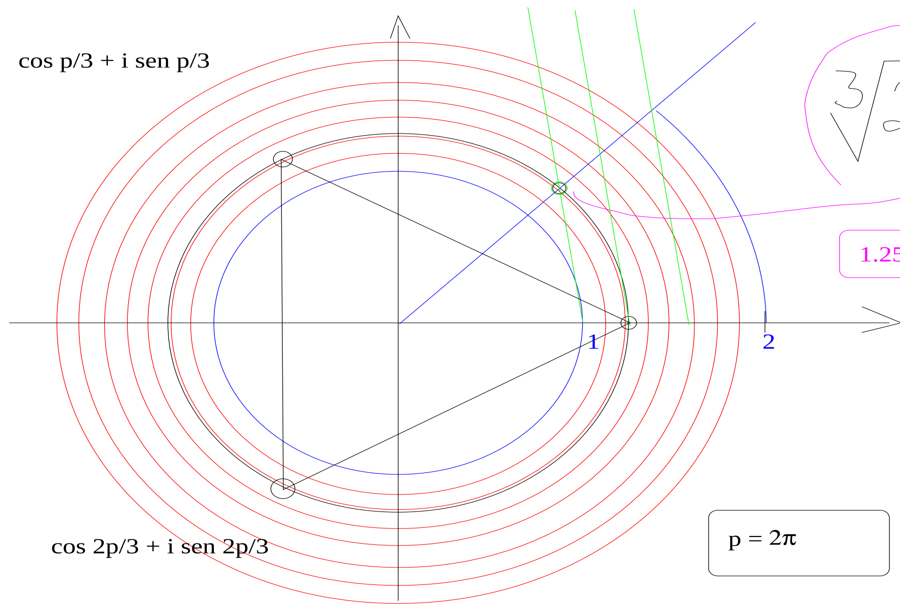

Figura 7.9: As raízes terceiras de 2

Os demais argumentos serão os elementos da progressão geométrica de razão

$$\frac{2\pi}{3}$$

(ângulo central do triângulo equilátero) tendo como primeiro termo (da P.A.) $\frac{2\pi}{9}$, *porque quando você somar tres a razão, irá estar de volta no ponto inicial, (percorreu os vértices do triângulo), está em cima da reta determinada por* $\frac{arg(3+4i)}{3}$ *com a origem.*

$$\frac{2\pi}{9}, \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}$$

O resultado gráfico é o que podemos ver na figura (fig. 7.11)

Não estamos propondo este método como algum método revolucionário para calcular raízes enésimas. As máquinas de calcular fazem isto mais rápido, apenas precisamos saber que elas usam um algoritmo, que executado *manualmente* será lento... se pudermos traduzir este algoritmo com um programa de computador e resultado também será rapidamente obtido. A pergunta final é "*qual é o melhor algoritmo*" e não estamos tratando deste assunto aqui.

Em resumo, os passos para o cálculo geométrico de raizes enésimas são

- Determinação do raio do círculo S que passa em

$$\sqrt[n]{|a+bi|} \in \mathbf{R}$$

- Determinação de

$$\theta = \frac{arg(a+bi)}{n}$$

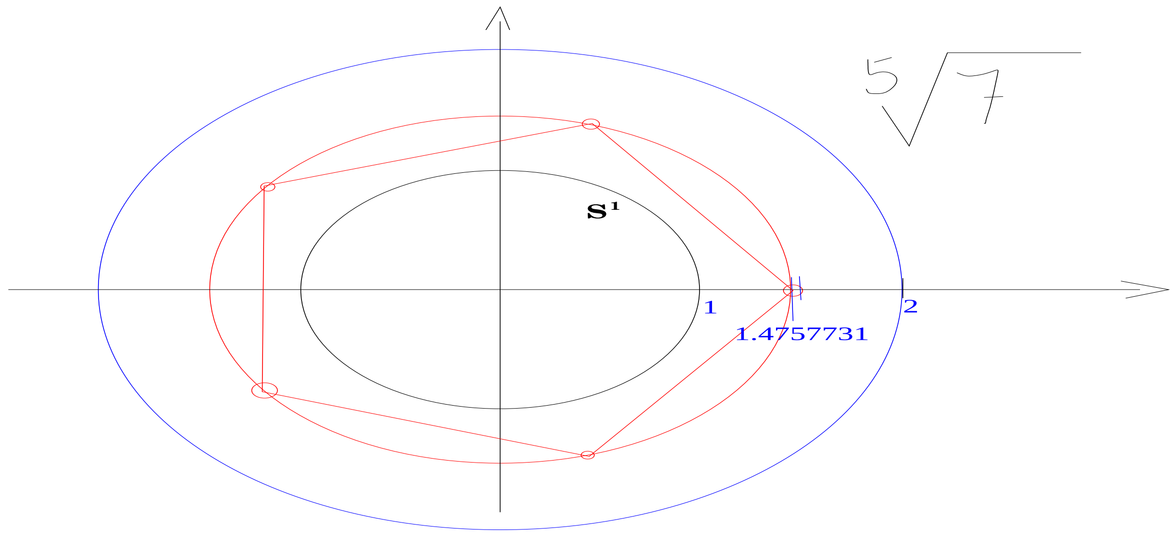

Figura 7.10: Raízes quintas de 7

- Construção de um polígono de n lados inscrito no círculo S tendo seu primeiro vértice sobre o ponto que determina o ângulo

$$\theta = \frac{arg(a+bi)}{n}$$

em S.

- os vértices deste polígono são as raizes enésimas de $a + bi$.

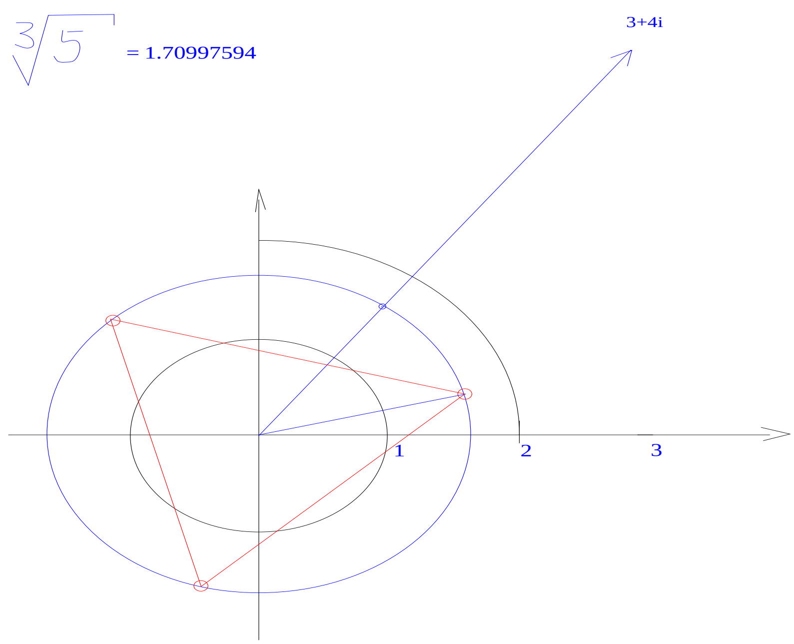

Figura 7.11: Raízes cúbicas de $3 + 4i$